GR F 2557 F 2557

1
TOMUL 21
1 9 6 6

1-2.40.
83
2133

1966 APR 20

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. **E. CARAFOLI** — *redactor responsabil,*
Acad. **D. DUMITRESCU** — *redactor responsabil adjunct,*
Prof. **I. ANTON,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CONSTANTIN AVRAM,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Acad. **ȘTEFAN BĂLAN,**
Prof. **GH. MANEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CR. MATEESCU,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. **N. PATRAULEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **N. TIPEI,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU VOINEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Conf. **RADU C. BOGDAN** — *secretar de redacție.*

În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134–135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei.

EA

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Redacția : **București,**

str. Const. Mille 15, tel. 14.89.07

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 21, nr. 1 1966

SUMAR

Conferinţa de mecanică, Bucureşti septembrie 1965 3
Cuvîntul de deschidere, rostit de Acad. Ştefan Bălan 11
Activitatea ştiinţifică din domeniul mecanicii în România, de Acad. Elie Carafoli 15
Cuvîntul de închidere, rostit de Acad. Elie Carafoli 27

STUDII Pag.

D. MANGERON şi L. E. KRIVOŞEIN, Noi metode de calcul numeric al soluţiilor diferitelor sisteme integrodiferenţiale interesînd mecanica aplicată. III. Probleme de contur pentru ecuaţii integrodiferenţiale cu operatori calorici şi cu argument întîrziat 31
ŞT. SĂVULESCU şi I. PETRU, Cercetări teoretice şi experimentale asupra stratului -limită tranziţional pe extradosul unui profil de aripă la numere Reynolds subcritice şi critice 51
GH. VASILCA, Aspecte experimentale ale unor parametri de lubrifiere 71
CHR. PELECUDI, Studiul sistemelor plane de corpuri cu legături prin metoda acceleraţiilor compuse 103
FL. DUDIŢĂ, Transmisii cardanice sincrone 139
VIRGILIU FLORIAN, Contribuţii privind calculul diafragmelor cu goluri, al diafragmelor cuplate şi al cadrelor-diafragme. II 169
C. TEODOSIU, Determinarea tensiunilor şi a cuplurilor de tensiuni generate de dislocaţii în medii izotrope 189
NICOLAE S. PÂRVULESCU, Buclarea multiplă a garniturii de foraj 209
GEORGETA STĂNCULESCU şi MARIANA IONESCU, Studiu statistic al distanţei dintre fisuri şi al deschiderii lor la elemente încovoiate de beton armat . . . 219
D. ANASTASESCU şi I. MUNTEANU, Consideraţii asupra unor procedee de calcul al cadrelor spaţiale 255
AL. MARINESCU, Asupra stabilităţii dinamice a rachetelor 271

RECENZII 291
LUCRĂRI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 293

St. cerc. mec. apl. Tom. 21 Nr. 1 p. 1—294 Bucureşti 1966

1989

F

2557

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratolvasó
39/1967

CONFERINȚA DE MECANICĂ

București, septembrie 1965

În mai puțin de două decenii de activitate științifică organizată în domeniul mecanicii, știința românească cunoaște realizări importante, fiind prezentă și apreciată la diferite manifestări științifice internaționale.

Rezultatele obținute în mecanică, asemenea acelora din toate ramurile științei, au atins un nivel superior, reprezentînd contribuții valoroase pentru rezolvarea unor probleme puse de economia națională, precum și pentru patrimoniul științific.

Multe cărți românești din domeniul mecanicii au fost traduse și publicate în alte țări. Periodicele noastre sînt prezente și mereu solicitate de marile laboratoare și biblioteci din diferite țări. La congresele și conferințele internaționale, comunicările cercetătorilor români suscită viul interes al oamenilor de știință de renume mondial. Rezultatele cercetării românești sînt folosite pe scară largă în țările în care activitatea științifică a cunoscut o susținută dezvoltare.

Toate aceste înfăptuiri nu ar fi fost însă posibile fără sprijinul și îndrumarea pe care Partidul Comunist Român și guvernul țării le acordă științei și slujitorilor ei.

Conferința de mecanică ținută în București între 27 septembrie și 1 octombrie 1965 a constituit un prilej în plus pentru trecerea în revistă a realizărilor activității rodnice din acest domeniu în ultimii ani.

Conferința a reunit oameni de știință și specialiști români din institute de cercetare, din învățămîntul superior și din producție, precum și specialiști de peste hotare.

Cercetările teoretice și experimentale cu caracter fundamental sau aplicativ, menite să contribuie la introducerea în practică a celor mai noi rezultate ale științei și tehnicii, și-au găsit pe deplin reflectarea în comunicările expuse.

Numărul mare de lucrări prezentate constituie mărturia activității susținute în acest domeniu din țara noastră.

Cercetătorii și specialiștii români din București, Brașov, Cîmpina, Cluj, Constanța, Galați, Iași, Pitești, Petroșani, Timișoara au fost prezenți cu peste 250 de comunicări.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 21 NR. 1 P. 3–30 BUCUREȘTI 1966

De asemenea, cu privire la contribuția diferitelor unități, este de remarcat că participarea cea mai activă au avut-o unitățile de cercetare ale Academiei Republicii Socialiste România, și anume : Institutul de mecanica fluidelor, Centrul de mecanica solidelor, Institutul de matematică. Au fost prezente cu un număr apreciabil de comunicări universitățile, institutele de învățământ tehnic superior, urmînd apoi institutele de cercetări departamentale și unități industriale.

Prezența unui mare număr de oaspeți din Austria, Belgia, Franța, Italia, Japonia, R. P. Bulgară, R. S. Cehoslovacă, R. P. Chineză, R. D. Germană, R. F. Germană, R. P. Polonă, R. P. Ungară, R. S. F. Iugoslavia, S.U.A., U.R.S.S. a dovedit interesul pe care l-a trezit această manifestare în rîndul specialiștilor de peste hotare.

Printre participanții străini s-au numărat o serie de figuri proeminente în lumea științifică internațională, care au prezentat lucrări deosebit de interesante. Totodată, și tinerii cercetători din delegațiile străine au expus lucrări meritorii.

Prin numărul mare al lucrărilor, prin conținutul și nivelul acestora, prin diversitatea problemelor atacate, Conferința de mecanică se înscrie printre manifestările științifice importante ale anului 1965 din țara noastră.

Conferința a fost organizată de către Academia Republicii Socialiste România în colaborare cu Ministerul Învățămîntului, avînd și concursul altor ministere industriale.

Lucrările conferinței s-au desfășurat în următoarele secții și subsecții :

Secția I. Mecanica generală
- I. 1. Probleme generale de mecanică
- I. 2. Probleme de aeroastronautică

Secția a II-a. Mecanica solidelor
- II. 1. Elasticitate, plasticitate, reologie
- II. 2. Statica și dinamica structurilor, vibrații
- II. 3. Teoria plăcilor
- II. 4. Teoria mecanismelor
- II. 5. Mecanica solului
- II. 6. Organe de mașini și încercări de materiale

Secția a III-a. Mecanica fluidelor
- III. 1. Fluide incompresibile
- III. 2. Dinamica gazelor și magnetofluidodinamica
- III. 3. Fluide vîscoase, strat-limită, turbulență, transfer de căldură
- III. 4. Hidraulica generală și medii poroase
- III. (II). 5. Lubrificație, frecare, uzură.

Programul conferinței a cuprins și unele probleme legate de organizarea cercetării și a învățămîntului mecanicii, precum și aspecte privind istoricul dezvoltării sale în România.

Aceste probleme au făcut obiectul lucrărilor Secției a IV-a, Istoria și învățămîntul mecanicii.

Conferința a fost deschisă de către acad. Ștefan Bălan ministrul învățămîntului.

Acad. E. Carafoli, președintele Comitetului de organizare al Conferinței, a prezentat apoi referatul: *Activitatea științifică din domeniul mecanicii în România* [1]), după care a urmat salutul delegaților din țară și străinătate.

Lucrările au fost grupate în cadrul aceleiași secții pe subsecții, corespunzătoare diviziunilor principale ale domeniului respectiv.

În subsecția I.1 s-au comunicat lucrări legate de aspectele calitative ale studiului ecuațiilor mecanicii. Se pot astfel menționa probleme ale comportării asimptotice a soluțiilor unui anumit tip de ecuații neliniare sau mărginirea soluțiilor unor ecuații pseudoliniare etc. Alte lucrări s-au ocupat de probleme privind obținerea unor soluții efective — numerice sau aproximative pentru anumite ecuații neliniare ale mecanicii. De asemenea nu au lipsit lucrări din domeniul mecanicii clasice.

Unele subiecte atacate în cadrul subsecției I.2 au fost legate de zborul sateliților artificiali. În acest sens se pot cita comunicări privind determinarea prin observații a elementelor orbitelor, variația acestora în mediu rezistent, determinarea cu ajutorul sateliților a densității atmosferei înalte etc.

Alte lucrări au prezentat probleme privind mișcarea în zbor a avionului, stabilitatea sa, factorii perturbatori etc.

Problemele de corp solid pe modele fizice complexe, neomogene, anizotrope, în cîmpuri termice au constituit subiectele majorității comunicărilor prezentate în subsecția II.1. Au fost date soluții (utilizîndu-se teoria distribuției lor) pentru corpurile elastice în prezența unor forțe concentrate. De asemenea au fost rezolvate probleme de contact elastic (static și dinamic). Pe lîngă lucrările teoretice s-au prezentat și unele cu aplicații directe în practică, ca, de exemplu, problema solicitărilor termice la barajele arcuite, studiul repartiției eforturilor tangențiale în secțiunea transversală a unor unelte speciale etc.

Alte lucrări au atacat probleme privind propagările de unde în medii cu proprietăți plastice și viscoelastoplastice.

Vibrațiile mecanice neliniare, cu aplicații la calculul structurilor, stabilitatea statică și dinamică a structurilor, cu aplicații la autovehicule, nave, construcții, au făcut obiectul comunicărilor din subsecția II.2.

Diversitatea aplicabilității acestei teorii explică prezentarea unui număr important de lucrări în acest domeniu.

În subsecția II.3 preocupările s-au îndreptat în special spre analiza ipotezelor teoretice, construcția unor teorii independente de acestea, problemele statice și dinamice ale învelitorilor anizotrope, eterogene sau omogene.

Este de notat faptul că în domeniile de mai sus cercetările românești au de mai mulți ani un caracter de continuitate.

Mecanizarea și automatizarea complexă a proceselor de producție impun dezvoltarea cu precădere a unor ramuri, ca analiza și sinteza mecanismelor, metode noi pentru cercetarea cinematică și cinetostatică a meca-

[1]) Textul cuvîntului de deschidere rostit de acad. Ștefan Bălan, ministrul învățămîntului, și al referatului prezentat de acad. Elie Carafoli sînt publicate în paginile acestei fascicule.

nismelor fundamentale și complexe. În sensul acestor preocupări s-au expus în subsecția II.4 lucrări privind metoda operațională, metoda seriilor armonice complexe, metoda solidarizării, metoda grafurilor. Și în acest domeniu contribuțiile românești sînt de mai mulți ani bine cunoscute în țară și peste hotare, bucurîndu-se de aprecieri pozitive.

Problemele de fundații au fost comunicate în subsecția II.5. Pot fi astfel menționate lucrări privind fundații pe piloți, fundații în condiții speciale (Delta Dunării), determinarea sarcinilor-limită a rocilor stîncoase, rezistența pămînturilor în condiții dinamice etc.

Comunicările expuse în subsecția II.6 s-au referit în special la experimentări asupra comportării unor mase plastice utilizabile în construcții de mașini, la efectele termice în lagărele cu alunecare etc. Alte lucrări s-au ocupat de angrenaje.

În subsecția III.1 au fost prezentate rezultate obținute în teoria rețelelor de profile, problemă cu importante aplicații la turbomașini și care este în studiul cercetătorilor din țara noastră de mai mult timp. Mai trebuie amintit aici și comunicările privind teoria și aplicațiile voleților fluizi, problemă de actualitate, intrată de asemenea în preocupările cercetătorilor noștri încă cu ani în urmă.

Rezultatele cercetărilor în domeniul teoriei aripii în regim supersonic și hipersonic au fost prezentate în cadrul subsecției III.2. În acest domeniu, cercetarea românească a adus rezultate originale și deosebit de interesante, făcînd obiectul unor elogioase aprecieri atît în țară, cît și în străinătate.

Alte comunicări din cadrul acestei subsecții s-au ocupat cu studiul mișcărilor subsonice ale fluidelor compresibile. Și aceste lucrări au caracter de continuitate în țara noastră.

Totodată s-au prezentat și unele comunicări referitoare la mișcările transonice, ca și unele aspecte ale mișcărilor supersonice.

Comunicările privind pînzele de jet subțiri în regim subsonic și supersonic au reflectat rezultatul unei activități de cercetare de la noi de dată mai recentă.

Problemele de magneto-fluido-dinamică, domeniu modern, care se găsește de asemenea în atenția cercetătorilor noștri, au făcut obiectul altor comunicări. S-au prezentat astfel unele rezultate privind mișcările fluidelor ionizate, precum și scurgerea acestor fluide în jurul profilelor de aripă.

Mișcările lente ale fluidelor vîscoase, strat-limită laminar sau turbulent, cu sau fără transfer de căldură, în diverse configurații geometrice, au constituit obiectul unora dintre comunicările prezentate în subsecția III.3.

Asemenea studii sînt atît din punct de vedere teoretic, cît și aplicativ foarte actuale.

Problema deosebit de importantă în ceea ce privește explicarea fenomenului de producere a turbulenței, fenomen răspîndit în procesele tehnice, și-a găsit reflectarea în expunerea cercetătorilor asupra tranziției de la regimul laminar la cel turbulent.

În aceste domenii s-au obținut în țara noastră în decursul ultimilor ani o serie de rezultate interesante.

Activitatea privind scurgerile prin medii poroase, desfășurată încă de mult timp de specialiștii români, s-a reflectat în lucrările expuse în cadrul subsecției III.4.

Au fost aduse contribuții valoroase în diferite probleme, ca mișcarea apelor subterane, exploatarea zăcămintelor de țiței, scurgerea mai multor faze fluide, influența macroneomogenităților sau fenomenul de dislocuire a petrolului cu fluide miscibile cu acesta, mișcările turbulente în medii poroase etc.

Studiul scurgerii fluidelor grele, cu aplicații la diverse cazuri concrete, problemă cercetată de asemenea încă mai de mult de cercetătorii noștri cu rezultate remarcabile, a făcut obiectul altor comunicări din cadrul acestei subsecții. S-au mai expus și lucrări îmbrățișînd diferite aspecte ale hidraulicii, unele avînd aplicații în amenajările hidroenergetice.

Problemele de lubrificație, uzură și frecare au fost expuse în subsecțiile III(II).5. Și în acest domeniu valoroasele contribuții românești sînt bine cunoscute. S-au prezentat astfel rezultate referitoare la condițiile-limită în diferite cazuri de lubrificație asupra influenței microgeometriei suprafețelor lubrificate, asupra lubrificației turbulente și a celei magnetogazodinamice.

În domeniul frecare-uzură s-au expus : o metodă nouă pentru studiul evoluției coeficientului de frecare, aspectele frecării cu rezistență la mișcare, aspectele statistice ale evoluției uzurii și influența metodei radioactive etc.

Din conținutul lucrărilor prezentate, din discuțiile purtate și din contactele directe cu participanții străini se desprind o serie de concluzii, dintre care apar mai pregnante următoarele :

Problematica și preocupările diferitelor foruri de cercetare de la noi sînt asemănătoare cu cele ale specialiștilor pe plan mondial.

Activitatea în domeniul mecanicii din țara noastră cunoaște rezultate importante, care se înscriu cu succes alături de cele obținute în țările cu veche tradiție

S-au prezentat lucrări aparținînd diferitelor domenii ale mecanicii, dintre care unele au cunoscut la noi încă de mai multă vreme o dezvoltare deosebită. Dintre acestea pot fi menționate: aerodinamica, mașinile hidraulice, statica și dinamica construcțiilor.

În aceste domenii s-a creat o tradiție bine stabilită azi. Activitatea este larg cunoscută și apreciată în întreaga lume.

De asemenea s-au prezentat lucrări în domenii ca teoria elasticității, plasticității și vibrațiilor, teoria mecanismelor, scurgeri prin medii poroase, hidrodinamica lichidelor perfecte și reale, lubrificație-frecare și uzură.

Activitatea în aceste domenii a cunoscut în țara noastră o dezvoltare rapidă în ultimii ani, constituindu-se astfel noi școli de cercetare, care încep a avea o tradiție.

Trebuie totodată subliniate și cercetările de dată mai recentă privind teoria stratului-limită laminar și turbulent, magneto-fluido-mecanica, aeroelasticitatea etc., unde de asemenea s-au obținut o serie de rezultate pozitive.

Lucrările conferinței s-au încheiat cu o ședință în cadrul căreia acad. E. Carafoli a subliniat aspectele mai importante ale acestei manifestări, schițînd preocupările de viitor, așa cum s-au putut desprinde din desfășurarea conferinței [2]).

Acad. E. Vâlcovici a dat citire telegramei pe care conferința a adresat-o Comitetului Central al Partidului Comunist Român.

Pe lîngă programul de lucru propriu-zis au fost organizate atît vizite cu caracter tehnic-științific, cît și manifestări social-culturale, care au înlesnit contactele și discuțiile între participanți, dînd totodată posibilitatea unei mai bune cunoașteri a activității și a vieții culturale. Excursiile în țară au constituit încă un prilej pentru oaspeții străini să admire frumusețile naturale ale țării și deosebitele înfăptuiri pe tărîm economic și cultural.

Făcînd bilanțul activității desfășurate pînă în prezent, conferința de mecanică a contribuit și la crearea premiselor unei orientări cît mai juste a cercetării în viitor.

Pe marginea lucrărilor prezentate s-au purtat discuții, s-au pus întrebări, s-au făcut sugestii și observații foarte interesante. S-au putut stabili contacte directe între specialiștii din acest domeniu din întreaga țară și cei de peste hotare. Totodată, conferința a constituit și un mijloc de intensificare a colaborării dintre specialiști prin lărgirea schimburilor permanente de materiale documentare și de informare științifică.

Activitatea științifică, azi mai mult ca oricînd, nu se poate desfășura izolat. Omul de știință trebuie să fie mereu informat, cît mai la curent cu evoluția și cu realizările din domeniul în care lucrează. Tocmai schimburile de opinii, de experiență, posibilitățile de comparare ale metodelor de lucru, ale rezultatelor obținute, consultările directe favorizează cooperarea dintre diferiții specialiști și pot contribui la dezvoltarea științei și prin aceasta a civilizației.

Manifestările științifice — congrese, conferințe, simpozioane — oferă în acest sens un climat dintre cele mai propice, reprezentînd mijlocul cel mai viu și mai important de informare științifică.

Organizarea în mod periodic a unor asemenea manifestări, așa cum s-a propus și în cadrul prezentei conferințe, apare ca deosebit de utilă. Pe lîngă posibilitățile de colaborare și dezvoltare a activității respective, reuniuni de acest fel contribuie și la creșterea prestigiului țării noastre în lumea științifică mondială.

Conferința de mecanică din septembrie 1965 constituie mărturia cea mai concretă a rezultatelor cercetării științifice din acest domeniu în România. Trecînd în revistă activitatea rodnică de-a lungul celor aproape șase ani care s-au scurs de la Sesiunea științifică jubiliară a Institutului de mecanică aplicată, conferința a scos în evidență și rezervele științifice existente.

---

[2]) Textul cuvîntului de închidere rostit de acad. E. Carafoli, apare în paginile următoare ale acestei fascicule.

Așa cum s-a mai subliniat în cele precedente, cercetarea românească în mecanică se situează la același nivel cu aceea a țărilor cu veche tradiție în acest domeniu.

Realizările de pînă azi, condițiile deosebite create de statul nostru socialist pentru dezvoltarea științei și culturii reprezintă pentru mecanicienii români imbolduri noi de a desfășura mai departe o activitate neîntreruptă și stăruitoare, în sensul Directivelor Congresului al IX-lea al Partidului Comunist Român, pentru înălțarea pe culmi cît mai strălucitoare a României socialiste.

CUVÎNTUL DE DESCHIDERE, ROSTIT DE ACAD. ŞTEFAN BĂLAN

Stimaţi oaspeţi,

Tovarăşi şi prieteni,

Revenindu-mi sarcina de onoare de a deschide lucrările Conferinţei de mecanică, organizată de către Academia Republicii Socialiste România şi Ministerul Învăţămîntului în colaborare cu alte departamente, permiteţi-mi să salut în numele acestor instituţii în primul rînd pe oaspeţii noştri de peste hotare, oameni de ştiinţă binecunoscuţi de dv. Salut, de asemenea, participarea unui mare număr de oameni de ştiinţă din toate centrele culturale ale ţării noastre, participare care demonstrează existenţa unui puternic interes pentru toate domeniile mecanicii. Tuturor celor prezenţi le adresez mulţumiri călduroase pentru contribuţia adusă la buna desfăşurare a lucrărilor conferinţei.

★

Conferinţa noastră are ca scop principal stimularea activităţii ştiinţifice în domeniul mecanicii în vederea elaborării unor noi lucrări de înalt nivel ştiinţific, care să îmbine în mod armonios cercetarea fundamentală cu cea aplicativă, conform nevoilor de dezvoltare ale societăţii. În acelaşi timp, participarea cercetătorilor străini la lucrările conferinţei va oferi, o dată cu ocazia unui schimb de opinii asupra unor probleme ştiinţifice, şi prilejul de a strînge legăturile de colaborare şi de prietenie dintre oameni de ştiinţă din diferite ţări.

Congresul al IX-lea al P.C.R., analizînd cu profunzime şi înaltă competenţă problemele majore ale dezvoltării ştiinţei în Republica Socialistă România, a dat indicaţii de mare valoare asupra direcţiilor principale spre care trebuie să-şi îndrepte atenţia oamenii noştri de ştiinţă în viitorul cincinal.

O sarcină de bază este ca, în noile condiţii, cînd dispunem de mijloace materiale şi umane mereu mai multe şi de o calitate mai înaltă, ştiinţa românească să influenţeze tot mai puternic ridicarea nivelului tehnic şi economic al ţării.

Dezvoltarea României după cel de-al doilea război mondial de la stadiul de țară cu o economie rămasă în urmă, pînă la stadiul actual, de țară socialistă cu o economie multilaterală, în plin avînt și cu o cultură înaintată, reprezintă parcurgerea unui drum care, în raport cu unitățile de măsură tradiționale ale istoriei, s-a făcut cu o viteză excepțională. Pe acest drum se aliniază puternice hidro- și termocentrale, combinate metalurgice moderne, uzine constructoare de mașini, mari uzine chimice și multe alte obiective industriale, în care știința cea mai înaintată determină o înaltă productivitate a muncii.

În același timp și într-un ritm asemănător s-au dezvoltat învățămîntul, cultura, știința. Marile realizări din ultimii 20 de ani reflectă atît aportul valoros al oamenilor de știință la progresul social-economic, cît și prețuirea deosebită care se acordă științei și tehnicii moderne din partea întregului nostru popor.

Știut fiind că nivelul științific și cultural al unei țări este strîns legat de dezvoltarea învățămîntului, statul nostru a acordat o mare grijă învățămîntului de toate gradele.

Cu deosebită atenție a fost întărit învățămîntul superior, unde putem afirma că s-a produs o adevărată revoluție : în mai puțin de 20 de ani, numărul instituțiilor de învățămînt superior a crescut de la 16 la 47, al facultăților de la 33 la 183, al studenților de la 26 000 la 130 000. Iar importantele măsuri luate la congres cu privire la îmbunătățirea învățămîntului de toate gradele vor duce la un nivel și mai înalt învățătura de carte din țara noastră.

Știința a cunoscut de asemenea un avînt impresionant. Cei aproape 23 000 de specialiști cu studii superioare care lucrează azi în rețeaua de institute de specialitate din cadrul Academiei Republicii Socialiste România și al ministerelor, împreună cu personalul didactic din învățămîntul superior, constituie un front larg de forțe științifice, capabile să rezolve cele mai dificile probleme care le stau în față.

★

Un rol de mare importanță științifică revine și domeniului nostru de activitate : mecanica.

În țara noastră, un mare număr de studenți din învățămîntul superior studiază mecanica sub diferitele ei forme. În cercetarea științifică, în domeniul mecanicii sau în domenii strîns legate de acesta, lucrează circa 25% din totalul forțelor de cercetare. La acestea se adaugă personalul didactic de la catedrele din învățămîntul superior, care desfășoară, pe lîngă munca didactică, și o valoroasă muncă științifică.

Cercetarea din domeniul mecanicii, organizată în institutele Academiei, în laboratoarele catedrelor din învățămîntul superior, în institutele departamentale și în laboratoarele marilor uzine, se află astăzi la un nivel comparabil cu activitatea în această specialitate din alte țări cu tradiții științifice puternice.

Izvorîtă, sub impulsul nevoilor tehnice, din munca unor oameni de știință cu vederi înaintate încă de la începutul acestui secol, cercetarea științifică din acest domeniu s-a dezvoltat amplu după cel de-al doilea răz-

boi mondial, creînd în unele domenii noi școli de cercetare și reflectînd în linii mari dezvoltarea industriei noastre în plin avînt.

Merită să fie menționată munca de pionierat desfășurată de profesorii Andrei Ioachimescu, Dimitrie Pompeiu, Spiru Haret, Gheorghe Filipescu, Ion Ionescu, ca și marile realizări ale inventatorilor Vuia, Coandă și Vlaicu. Nu putem să nu relevăm activitatea pasionată pe tărîm didactic desfășurată în ultimele decenii de iubitul nostru profesor V. Vâlcovici.

Azi, în noile condiții materiale create de România socialistă, s-a ajuns la o mare înflorire a acestei științe. Cercetările științifice din acest domeniu sînt cît se poate de variate, grupîndu-se în jurul problemelor de hidrodinamică teoretică și aplicată, ca și în jurul problemelor de teoria elasticității, plasticității și vibrațiilor; se fac cercetări de mecanică generală, de seismicitate, cercetări asupra analizei și sintezei mecanismelor, studii de încercarea materialelor mașinilor și construcțiilor, studii asupra lubrificației, cercetări asupra fundațiilor și terenurilor etc.

Numeroasa participare la această conferință este prin ea însăși o mărturie grăitoare a dezvoltării cercetării științifice multilaterale în domeniul mecanicii. Rezultatele valoroase obținute în ultimul timp în domeniul mecanicii solidelor și al mecanicii fluidelor vor face obiectul dezbaterilor în ședințele de lucru ale conferinței noastre.

În cadrul secției I, Mecanica generală, vor fi prezentate lucrări cu privire la problemele mecanicii statistice, studiul unor ecuații diferențiale care intervin în mecanică; vor fi examinate probleme de astronautică, stabilitatea sistemelor mecanice etc.

Secția a II-a, Mecanica solidelor, cuprinde numeroase studii de teoria elasticității, plasticității și reologiei; de statica și dinamica structurilor; probleme relativ la vibrații, teoria plăcilor plane și curbe, teoria mecanismelor, încercarea materialelor, mecanica solului etc.

Secția a III-a, Mecanica fluidelor, cuprinde studii numeroase în domeniul dinamicii gazelor și magnetofluidodinamicii, în domeniul fluidelor incompresibile și al fluidelor vîscoase, al lubrificației, frecării și uzurii.

Secția a IV-a, Istoria și învățămîntul mecanicii, cuprinde comunicări referitoare la activitatea deschizătorilor de drumuri în domeniul mecanicii, la direcțiile de dezvoltare și perspectivele învățămîntului mecanicii etc.

Alături de lucrările cercetătorilor români, un mare număr de lucrări valoroase de același profil vor fi prezentate de oaspeții de peste hotare, care aduc astfel o contribuție de seamă la desfășurarea conferinței noastre de mecanică.

Sîntem convinși că lucrările conferinței noastre vor avea consecințe bogate asupra dezvoltării științifice viitoare din acest domeniu, asupra orientării muncii noastre de cercetare; ele vor influența ridicarea nivelului științific și tehnic în institutele de proiectări și în uzinele noastre constructoare de mașini și utilaje.

În același timp vor duce la un schimb rodnic de opinii cu savanți din diferite țări ale lumii. Considerăm, de asemenea, să pe această cale vom ajunge să ne cunoaștem mai bine și astfel că contribuim la strîngerea legăturilor științifice și de prietenie dintre cercetătorii noștri și iluștrii

oaspeți. Vă rugăm cu această ocazie, dragi oaspeți, să transmiteți colegilor dv. urările noastre de sănătate și de succese în munca lor creatoare și totodată dorința de pace și de prietenie a oamenilor noștri de știință, a întregului nostru popor.

★

Dezvoltarea științei și tehnicii la un nivel foarte înalt constituie unul dintre elementele de bază ale prosperității omenirii. De aceea se așteaptă foarte mult, se cere foarte mult de la oamenii de știință. Permiteți-mi ca în finalul acestui scurt cuvînt să reamintesc că pentru buna reușită a cercetărilor noastre științifice trebuie să muncim fără răgaz, trebuie să folosim cu grijă mijloacele de care dispunem, să realizăm o documentare cît mai amplă în specialitatea noastră, să efectuăm o muncă de cercetare legată de nevoile actuale și de perspectivă ale societății. Efectul economic direct calculabil, crearea unei perspective pentru noi lucrări științifice, ridicarea nivelului general de muncă științifică, știința folosită în interesul omului, nu al distrugerii lui, contribuția la dezvoltarea științei și tehnicii naționale și mondiale, iată cîteva din criteriile pe baza cărora se poate face aprecierea unei munci eficiente, valoroase, de cercetare științifică. Sîntem convinși că oamenii de știință din România socialistă se vor strădui să realizeze cît mai mult în domeniile lor de activitate.

Încheind, vă doresc sănătate și spor în munca dv. științifică. Urez mult succes lucrărilor conferinței.

Declar deschise lucrările conferinței noastre.

ACTIVITATEA ŞTIINŢIFICĂ DIN DOMENIUL MECANICII ÎN ROMÂNIA

Acad. ELIE CARAFOLI

Preşedintele Comitetului de organizare a Conferinţei de mecanică

I

În trecut, cercetările de mecanică din România s-au manifestat cu tărie, dar sporadic şi limitate la activităţi individuale, fără o organizare sistematică şi fără obiective precise. Cu rare excepţii, aceste cercetări au avut un caracter izolat, în concordanţă de altfel cu redusele activităţi tehnice şi industriale din ţară. După August 1944, cînd aceste activităţi încep să ia proporţiile impresionante ale industrializării socialiste, s-au impus cu necesitate organizarea şi dezvoltarea cercetării ştiinţifice pe o scară largă. Această acţiune a fost determinantă; aplicarea ei s-a efectuat într-un ritm viu, începîndu-se cu schimbări structurale ale forurilor de ştiinţă şi de cultură cele mai înalte. În acest sens trebuie menţionat în primul rînd transformarea Academiei Române, în 1948, într-o Academie activă, înzestrată cu institute de cercetări bine organizate, în care să se dezvolte cercetarea ştiinţifică la nivelul cel mai înalt, comparabil cu cel al ţărilor avansate.

Cercetarea în mecanică a fost cuprinsă foarte activ şi adînc în cadrul acestor noi iniţiative de organizare. Astfel s-au creat institutele Academiei, ca şi condiţii corespunzătoare la catedrele de mecanică sau de discipline învecinate, în urma reorganizării învăţămîntului superior. S-au înfiinţat de asemenea institute de cercetări departamentale şi institute de proiectări (în diversele ramuri de activitate tehnică sau industrială), precum şi laboratoare uzinale, toate acestea determinate şi de dezvoltarea impetuoasă a industriei noastre naţionale. S-a schiţat astfel şi s-a organizat treptat reţeaua de unităţi care să asigure întreaga gamă de cercetări, de la cele fundamentale şi pînă la cele direct aplicabile în producţie.

Activitatea ştiinţifică în domeniul mecanicii a făcut salturi considerabile, creîndu-se adevărate tradiţii de cercetare şi şcoli naţionale în multe

domenii ale mecanicii, școli recunoscute ca atare atît în țară, cît și peste hotare.

Cercetările de mecanică, atît cele fundamentale, cît și cele aplicative, precum și cele referitoare direct la îmbunătățirea producției, au fost difuzate prin periodicele noastre, începînd cu revistele Academiei, ale institutelor de învățămînt superior, revistele tehnice ale Consiliului central al inginerilor și tehnicienilor, ale Societății de matematică și fizică etc. Ele au fost comunicate în congrese, conferințe, colocvii, sesiuni științifice din țară și de peste hotare sau în conferințele ținute de cercetătorii noștri în diferitele centre culturale și științifice din străinătate.

Unele dintre manifestările din țară au avut ca obiect tocmai confirmarea activității noastre științifice pe diverse perioade de timp. Astfel de confruntări au avut loc în trecut sub diferite auspicii : colocviul de mecanică din 1959 (București), colocviile de mecanica fluidelor din 1961 și 1963, precum și Sesiunea jubiliară de mecanică aplicată organizată în 1960.

În cadrul acestor manifestări s-au trecut în revistă realizările mai de seamă efectuate pe perioadele respective și s-au marcat momente de dezvoltare în legătură cu preocupările similare pe plan mondial.

Conferința de mecanică reunește toată rețeaua de cercetare și afirmă, prin comunicările înscrise în program, legătura strînsă între cercetarea fundamentală și cea aplicativă, precum și introducerea directă a rezultatelor în producție. Iată tocmai împlinită condiția conținută în raportul prezentat de tovarășul N. Ceaușescu la Congresul al IX-lea al Partidului Comunist Român privind întreaga activitate științifică din țara noastră : „O condiție importantă a sporirii eficienței muncii științifice este *îmbinarea armonioasă a cercetării fundamentale cu cea aplicativă*. Preocuparea insuficientă față de un aspect sau altul duce inevitabil la îngustarea orizontului de cercetare, la stagnarea progresului științific" [1]).

Totodată conferința beneficiază și de o însemnată contribuție de peste hotare. Sîntem fericiți să salutăm printre noi distinșii oaspeți veniți din atîtea țări, unele chiar foarte îndepărtate. Le mulțumim călduros pentru bunăvoința cu care au răspuns la invitația noastră, pregătind comunicări de mare actualitate științifică, care ne vor sugera, desigur, idei valoroase. În același timp, aceste prezențe vor da posibilitatea unui schimb de păreri utile și care se va reflecta în îmbunătățirea muncii noastre viitoare.

Adresăm mulțumirile noastre cele mai călduroase și reprezentanților departamentelor, atît pentru sprijinul material pe care ni l-au dat, cît și pentru cel moral, stimulînd pe specialiștii din unitățile lor să participe la conferința noastră, care are printre obiectivele principale pe acela de a sprijini introducerea practică a tehnicii celei mai avansate.

Aceleași mulțumiri le adresăm și tuturor participanților din țară, care au răspuns cu atîta însuflețire la invitația noastră, contribuind direct la lucrările Conferinței de mecanică.

---

[1]) *Congresul al IX-lea al Partidului Comunist Român*, București, Edit. politică, 1965, p. 61.

II

Vom căuta să prezentăm într-un mod succint în cele ce urmează activitatea științifică din țara noastră în domeniul mecanicii, pornind de la stadiul înregistrat la ultimele manifestări amintite mai sus.

M e c a n i c a f l u i d e l o r. În acest domeniu vom menționa mai întîi unele lucrări interesante de hidrodinamică teoretică consacrate teoriei suprafețelor lui Bernoulli în mișcarea fluidelor barotrope, elaborîndu-se o metodă originală prin care studiul mișcărilor staționare este redus la acela al unei mișcări bidimensionale pe anumite suprafețe Bernoulli rigide (suprafețe Bernoulli-Vâlcovici). Această metodă a fost utilizată la elaborarea unor lucrări noi referitoare la mișcări tridimensionale cu entropie variabilă și la mișcări plane.

Studiile asupra mișcării lichidelor grele cu suprafață liberă au condus la elaborarea unei metode susceptibile de a fi aplicată la diverse cazuri concrete.

Paralel cu acestea s-au efectuat cercetări teoretice și experimentale referitoare la construcțiile hidrotehnice (cercetări asupra canalelor cu evacuare laterală, studiul deversorilor cu muchie ascuțită, studiul deversorului pentru lucrările de amenajare a torenților), precum și cercetări privind mișcarea fluidelor vîscoase, cu aplicații diverse, printre care și cele de hemodinamică.

Alte cercetări se referă la fenomenul loviturii de berbec în conducte, la mișcările elicoidale, la probleme de regularizare a rîurilor, baraje, prize de apă, disipatoare de energie, precum și la probleme de hidraulică portuară și de transport al aluviunilor ; menționăm apoi rezultatele cu privire la macroturbulență, aplicarea sonicității la transmisii și la pomparea lichidelor, precum și cercetările asupra mișcării nepermanente a apei prin conducte.

Continuîndu-se cercetările asupra mașinilor hidraulice, inițiate și conduse de regretatul prof. A. Bărglăzan la Timișoara, a fost studiat sistematic fenomenul de c a v i t a ț i e la turbomașini și pompe centrifuge, cu rezultate interesante, t e o r e t i c e și aplicative.

În ceea ce privește r e ț e l e l e de profile, cercetările ample întreprinse au fost concretizate într-o serie de studii teoretice și experimentale, în cadrul cărora a fost e l a b o r a t ă și metoda pentru determinarea caracteristicilor hidrodinamice ale u n e i rețele de profile cu bordul de fugă rotunjit.

În cadrul cercetărilor de aerodinamică subsonică, s-au abordat, printre altele, problema r e z i s t e n ț e i minime a sistemelor portante complexe, problema îmbunătățirii p o r t a n ț e i aripii și a stabilității laterale a avionului cu ajutorul jeturilor l a t e r a l e, elaborîndu-se și teoria acestora pe baza unor scheme fizice adecvate, verificate prin experimentări sistematice.

Cercetări teoretice și experimentale au fost efectuate în problema hipersustentației cu jeturi longitudinale și cu alte mijloace adecvate, precum și asupra v e h i c u l e l o r cu pernă de aer.

Unele dintre rezultatele obținute și-au găsit aplicație la construirea unui vehicul plutitor destinat recoltării stufului în Delta Dunării.

MUSTAKI KÖNYVTÁRA 1848

S-au studiat de asemenea, teoretic și experimental, jeturile subsonice mărginite de pînze fluide subțiri.

În domeniul aerodinamicii vitezelor mari s-a dezvoltat teoria sistemelor portante complexe pe baza mișcărilor conice de ordin superior. Cu ajutorul metodelor elaborate au fost atacate și rezolvate cu succes numeroase probleme, privind aripile de formă generală, aripile prevăzute cu aripioare, aripile cruciforme, ampenajele, interferența dintre aripă și fuzelaj. De asemenea s-a reușit să se stabilească o formulă unitară pentru compresiune-expansiune în regim supersonic-hipersonic; s-au studiat apoi mișcările supersonice cu unde de șoc detașate, și în special mișcarea subsonică în spatele acestora. Cercetările întreprinse asupra fenomenelor din tubul de șoc au dus la elaborarea unei teorii interesante asupra propagării undelor de șoc de slabă intensitate în jurul obstacolelor dreptunghiulare, problemă care prezintă o mare importanță pentru asigurarea securității clădirilor aflate în apropierea aerodroamelor și în alte aplicații.

Studii sistematice au fost efectuate și în problema stratului-limită laminar și turbulent, obținîndu-se rezultate interesante privind rezistența la frecare și transferul de căldură în stratul-limită al unui profil, tranziția de la laminar la turbulent, efecte tridimensionale, stratul-limită cu scurgere exterioară uniformă, stratul-limită cu succiune sau suflaj etc.

Pe de altă parte, urmărindu-se perfecționarea metodelor matematice ale mecanicii fluidelor, a fost dezvoltat studiul problemei lui Dirichlet în cazul domeniilor multiplu conexe, punîndu-se în evidență noi proprietăți ale funcției lui Green și ale funcției lui Green modificate, cu aplicații interesante în hidroaerodinamică. Pe aceeași linie s-a studiat problema determinării cîmpului de viteze al unui cîmp turbionar dat, în cazul problemei Poincaré-Steklov, și s-a dat o soluție exactă a ecuației integrodiferențială a lui Prandtl pentru o clasă largă de profile de aripă.

În studiul mișcărilor cu mari viteze subsonice, s-au elaborat metode de aproximație hodografice sau directe și au fost studiate numeroase probleme, pentru care s-au dat soluțiile exacte sau aproximative. Dintre aceste citățm problema jeturilor între pereți poligonali sau curbați, problema mișcării cu circulație în jurul profilelor, problema jeturilor care întîlnesc un obstacol, în special schema Vâlcovici-Birkhoff.

În cadrul magnetoaerodinamicii s-a dezvoltat teoria profilelor subțiri în cazurile cînd, la mari distanțe, viteza curentului și cîmpul magnetic au aceeași orientare sau sînt ortogonale.

În problemele de mecanica zborului menționăm rezultatele obținute cu privire la stabilitatea avioanelor cu pilot automat și la comanda optimă a urcării avioanelor cu decolare și aterizare verticală cu axul de tracțiune mobil.

În același domeniu s-au făcut studii asupra mecanicii avionului rezolvîndu-se o serie de probleme dintre cele mai utile pentru zborul avionului și asupra mișcărilor ascendente și descendente ale rachetelor în mediu rezistent, precum și în probleme de dinamica elicopterului.

Au fost efectuate cercetări teoretice și experimentale asupra lubrificației cu lichide de gaze, cu aplicații în construcția de mașini. Astfel s-au dezvoltat metode pentru studiul lagărelor cu alunecare, completate și cu

aspectele practice. S-au studiat apoi probleme de lubrificația lagărelor cu sectoare, de microgeometria suprafețelor în lubrificație, de distribuția presiunilor în lagărele alimentate sub presiune, de lubrificație în regim turbulent, de influența variației viscozității, precum și probleme de lubrificație tridimensională la viteze mari. Mai multe lucrări au fost consacrate lubrificației cu gaze, dîndu-se soluții pentru diverse tipuri de lagăre și situații de funcționare. Studiile s-au extins pentru lagărele cu aer alimentate sub presiune, considerarea efectului variației grosimii stratului de lubrifiant, instabilitatea dinamică a lagărelor circulare și altele.

S-a studiat de asemenea și lubrificația în regim turbulent, cu rezultate interesante.

În domeniul scurgerii fluidelor prin medii poroase, s-au obținut rezultate importante privind scurgerea lichidelor cu suprafață liberă, scurgerea gazelor prin medii poroase neomogene cu permeabilitate variabilă a mișcării fluidelor vîscoplastice, problema scurgerii pe sub baraje hidrotehnice, precum și generalizarea legii lui Stokes la mișcarea unei sfere poroase.

Totodată s-au studiat dispersia undelor de presiune într-un lichid care se scurge printr-un mediu poros, calculul general al drenurilor și undele cu pierderi pe traseu în fenomenele de filtrație.

Mecanica solidelor. Trecînd acum la mecanica solidelor, vom menționa mecanica analitică, unde s-au făcut cercetări care au condus la stabilirea de noi ecuații de mecanică analitică, olonomă și neolonomă, precum și mecanica vibrațiilor.

În teoria mecanismelor s-au elaborat și s-au extins diverse metode de studiu, ca cea a accelerațiilor reduse sau metoda matriceal-tensorială, cea a seriilor armonice complexe, cea a sistemelor conjugate, cea a solidarizării, precum și cea experimentală de modelare mecano-electronică.

S-au abordat probleme ale structurii și ale clasificării mecanismelor, iar sinteza mecanismelor ciclicelor superioare și a curbelor sferice, realizată prin metode exacte și aproximative, s-a aplicat cu succes în rezolvarea unor probleme ale producției. Mecanismele matematice au făcut obiectul unor cercetări interesante. Trebuie menționate apoi și studiile privind angrenajele melc-roată melcată și cele privind varietoarele de viteze cu roți dințate și mecanismele de comandă logică.

Au mai fost efectuate lucrări referitoare la studiul rulmenților și la problema zgomotului la rulmenți.

În domeniul teoriei elasticității au fost efectuate cu succes cercetări privind elasticitatea neliniară. În problema tridimensională a elasticității, metoda matricelor asociate sistemelor de ecuații cu derivate parțiale a fost aplicată la reprezentări prin potențiali ; semnalăm reprezentările date pentru cazul static și dinamic în problema bi- și tridimensională a termoelasticității, precum și în cazul ecuațiilor plăcilor cilindrice subțiri.

Rezultate interesante s-au obținut în problema reprezentărilor prin potențiali pentru ecuațiile lui Lamé, precum și în utilizarea funcțiilor de variabilă hipercomplexă la problemele dinamice ale elasticității.

În problema axial-simetrică a teoriei elasticității s-au studiat corpurile tubulare cu pereți groși supuse la sarcini dinamice și s-au dedus ecuațiile micilor mișcări axial-simetrice ale unui corp elastic.

În domeniul problemelor de contact s-a elaborat o metodă privind soluția aproximativă algebrică a ecuației lui Herz și s-au efectuat studii în problema ștanțelor plane neeliptice. Cu ajutorul unor potențiali generalizați, s-au obținut rezultate interesante în studiul problemei dinamice de contact.

În problema plană a teoriei elasticității s-au întreprins cercetări referitoare la utilizarea transformărilor conforme în studiul corpurilor dublu conexe, studii asupra domeniilor simplu și multiplu conexe în prezența forțelor masice și studii privind corpurile elastice și vîscoelastice cu neomogenitate continuă.

În problema antiplană, amintim rezultatele obținute prin utilizarea metodei funcțiilor de variabilă complexă, rezultatele privind constantele lui Prandtl, rigiditatea geometrică la torsiune și determinarea gradului de torsiune.

Contribuții interesante au fost aduse în studiul torsiunii și încovoierii barelor, precum și în domeniul teoriei elasticității asimetrice.

În problemele de structuri simple, menționăm rezultatele dovedind imposibilitatea descompunerii stării de tensiune în anumite probleme.

Referitor la studiul plăcilor curbe subțiri s-a extins metoda eforturilor complexe și s-au obținut ecuațiile de bază ale teoriei cvasiinvariante a plăcilor curbe anizotrope. Metoda a fost extinsă și pentru structurile de tip sandviș.

S-a găsit o soluție riguroasă pentru plăcile curbe subțiri cu curbură negativă și s-a elaborat o metodă de calcul pentru învelitori de mică curbură. Diferite soluții au fost obținute pentru plăcile curbe axial-simetrice, plăci pe mediu elastic, cu neomogenitate continuă și cu condiții mixte pentru contur.

Cercetări privind plăcile curbe groase în cadrul teoriei generale a elasticității au fost făcute în cazul static și dinamic pentru tuburile groase și pentru plăcile plane groase.

În domeniul teoriei plasticității au fost obținute rezultate privind studiul propagării undelor elastoplastice în bare subțiri, în bare groase și în fire.

S-a studiat de asemenea comportarea plastică a corpurilor axial-simetrice și a plăcilor plane supuse la șoc, precum și aspecte privind problema plană a teoriei elasticității.

Au fost stabilite teoremele de existență și unicitate pentru o clasă de corpuri cu proprietăți reologice liniare și au fost date rezolvări în problema mixtă a teoriei vîscoelasticității pentru corpuri cu frontiera variabilă în timp. Au fost studiate mișcările transversale și longitudinale ale firelor cu proprietăți reologice, stabilindu-se ordinea de propagare a celor două tipuri fundamentale de unde. A fost elaborată o serie de lucrări consacrate comportării dinamice a barelor și stabilității sistemelor de bare cu proprietăți vîscoelastice. De asemenea a fost elaborată o teorie generală a elastovîscoplasticității asimetrice, formulîndu-se criteriile stărilor-li-

mită, ecuația suprafeței de curgere și condițiile de curgere, iar în domeniul fluajului au fost efectuate studii teoretice și experimentale interesante.

Menționăm de asemenea cercetările efectuate asupra propagării undelor în terenuri de fundații, precum și asupra oscilațiilor agregatelor de mașini, cu diferite aplicații.

Au fost aduse contribuții în problema stabilității elastodinamice a barelor drepte în mișcare plană și în studiul impactului rezultat din presiunea interioară în tuburi. Anumite rezultate privind oscilațiile cu caracteristice neliniare au fost aplicate la dinamica vehiculelor.

S-au studiat ecuațiile cuplate ale termoelasticității și s-au obținut teoreme de unicitate pentru cazurile bi- și tridimensionale. În problema dinamică a termoelasticității cuplate s-a dat de asemenea o formulare generală, rezultatele obținute fiind aplicate la studiul acțiunii unei forțe concentrate în spațiul elastic.

O altă preocupare în cadrul teoriei cîmpurilor mixte se referă la domeniul aeroelasticității. Astfel s-au studiat fenomenele aeroelastice statice ale structurilor, luîndu-se în considerare efectele restrîngerilor de fixare. În cazul dinamic s-au studiat vibrațiile unor structuri subțiri în prezența unui mediu fluid. Contribuții însemnate au fost aduse în studiul flutterului neliniar. S-a elaborat de asemenea o lucrare privind magnetoelasticitatea neliniară.

În mecanica solurilor au fost efectuate cercetări în cadrul unor studii de geotehnică, cu aplicații practice interesante.

În domeniul ruperii și oboselii a fost elaborată o metodă nouă de determinare a rezistenței la oboseală, s-a cercetat influența acoperirilor galvanice asupra rezistenței la oboseală și s-au adus contribuții în problema determinării rezistenței la oboseală pe baza analizei statistice.

Trebuie să semnalăm și preocupările privind utilizarea mașinilor de calcul în problemele de mecanica solidului deformabil.

Contribuții de reală importanță pentru economia națională s-au obținut în cercetarea și aplicarea diferitelor metode experimentale, ca fotoelasticitatea, cercetări statice și dinamice pe modele.

Pe linia obținerii unor noi procedee moderne de determinare experimentală a stării de solicitare a corpurilor solide, a fost elaborată o nouă metodă, denumită cromoplasticitate. De asemenea au fost aduse contribuții la îmbunătățirea metodelor electrotensometrice de determinare a deformațiilor.

O bogată și valoroasă activitate științifică s-a desfășurat în ultimii ani în domeniul mecanicii cerești, cu rezultate deosebit de interesante referitoare la proprietățile traiectoriilor în problema restrînsă a celor trei corpuri sau problema ciocnirilor binare, determinîndu-se proprietățile mișcării în vecinătatea ciocnirii corpului de masă neglijabilă cu una dintre masele finite — Pămîntul sau Luna — , sau, încă, determinarea numerică a poziției punctelor de librație ale problemei restrînse în cazul plan și circular.

Este locul să subliniem lucrarea acad. V. Vâlcovici în domeniul teoriei formării sistemului planetar, în care s-a formulat o nouă ipoteză asupra

formării sistemului nostru planetar, bazată pe studiul vibrațiilor unui disc circular de grosime mică.

În studiul mișcării de rotație a Pămîntului, considerat elastic, s-a determinat pe cale teoretică forma componentei Chandler, exprimîndu-se perioada acestei componente cu ajutorul momentelor de inerție axiale și derivata în raport cu timpul a unuia dintre momentele de inerție centrifugale ale pămîntului.

Au fost studiate pe larg problemele fundamentale ale dinamicii rachetelor dirijate și nedirijate, deplasarea relativă a centrului de greutate al rachetei cu combustibil lichid, studiul mișcării rachetei cu și fără suprafețe portante, stabilitatea rachetelor fără suprafață portantă ș.a.

Menționăm în mod deosebit lucrările referitoare la studiul mișcării sateliților artificiali în straturile superioare ale atmosferei, studiul mișcării rachetei într-un cîmp de forțe centrale, cercetările privitoare la realizarea unei nave orbitale staționare deasupra oricărui loc de pe globul terestru și la manevrele de schimbare a planului orbitei unei nave cosmice.

Lucrări similare legate de folosirea sateliților artificiali în geodezie și geofizică au fost efectuate în cadrul aceluiași program, privind determinarea formei dimensiunilor și orientării elipsoidului terestru pe baza observațiilor sateliților artificiali.

În probleme de mecanică generală menționăm lucrările acad. O. Onicescu, care a urmărit să stabilească, cu ajutorul unui principiu mecanic mai larg decît cel newtonian, un cadru al mișcării corpurilor materiale care să implice masa ca o manifestare a inerției corpurilor.

A dat o teorie completă a mișcării astfel concepute a particulei materiale, fără și cu un cîmp în spațiul cu patru dimensiuni. Aceasta implică relativitatea restrînsă și cîmpuri electromagnetice.

A formulat de asemenea o teorie pentru un sistem de n-particule, care cuprinde ca formă particulară relativitatea generalizată a lui Einstein. În ultimul timp a dezvoltat o mecanică statistică conformă cu aceste principii.

III

Această enumerare, desigur incompletă, dă totuși o imagine grăitoare a stadiului actual al cercetării românești, care a adus o contribuție remarcabilă în domeniul mecanicii.

În etapa actuală, considerăm că marile probleme ale științei contemporane, acelea care, prin mijloacele avute la dispoziție, sînt accesibile și cercetătorilor noștri, au fost atinse și nu ne îndoim că din contactele, dezbaterile și concluziile prilejuite de conferință vom porni în noua etapă care urmează cu un program de cercetare mai judicios, mai bine orientat spre un obiectiv mai concret, cu forțe spirituale și materiale sporite.

Sîntem ajutați în acest sens de forurile noastre superioare. Într-adevăr, capitolul cercetări științifice primește o deosebită importanță în procesul dezvoltării economiei noastre naționale. Se va spori numărul persoanelor de cercetare pînă la 30 000, dîndu-se toată atenția formării

cadrelor și punîndu-se un accent mai mare pe științele tehnice. Or, coloana vertebrală a acestora este tocmai mecanica, pe care o găsim sub toate aspectele ei în toate fenomenele naturii.

Cercetarea științifică, referindu-mă în mod special la mecanică, devine o sarcină care trebuie să asigure formarea de noi forțe și să acopere treptat necesitățile întregii economii naționale. În acest scop, după cum s-a arătat la Congresul al IX-lea P.C.R. se va crea, pe lîngă Consiliul de Miniștri *Consiliul Național al Cercetării științifice*, care va avea sarcina să elaboreze direcțiile de orientare și programul unitar de cercetare științifică și de pregătire a cadrelor, să asigure coordonarea activității în acest domeniu[2]).

Pentru noi, această hotărîre, pe lîngă entuziasmul pe care ni-l stîrnește, înseamnă în același timp și garanția că munca noastră, onorată în cele mai înalte foruri ale conducerii de partid și de stat, nu se va irosi în încercări disparate, ci va fi canalizată spre obiectivele care duc, în cele din urmă, la creșterea bunăstării poporului nostru.

... „*Stimularea schimbului larg de opinii, confruntarea deschisă a punctelor de vedere animată de spirit constructiv și deplina obiectivitate științifică*"[3]), iată un obiectiv principal și al conferinței noastre în spiritul acestui pasaj din raportul tovarășului Nicolae Ceaușescu la Congresul al IX-lea al P.C.R.

Iar... „însemnătatea relațiilor care s-au statornicit între oamenii de știință din țara noastră și cei de peste hotare..."[4]) este pe deplin dovedită prin prezența activă în mijlocul nostru a atîtor savanți din alte țări.

Așa cum am mai arătat, Conferința de mecanică, prin conținutul lucrărilor cuprinse în program, îndeplinește acea necesitate de îmbinare armonioasă a cercetării fundamentale cu cea aplicativă. Vom proceda și în viitor întotdeauna în același sens, satisfăcînd această condiție cu prisosință, pentru ca rezultatele obținute în activitatea noastră științifică să aibă un ecou binefăcător în dezvoltarea economiei științei și culturii noastre naționale.

Valorificarea deplină a rezultatelor cercetării este mai eficientă dacă rețeaua de unități este completă adică : institutele Academiei, care să se preocupe mai ales cu problemele de perspectivă, fără a neglija problemele de imediată utilitate pentru economia națională ; catedrele și laboratoarele din învățămîntul superior, în care cercetarea propriu-zisă trebuie stimulată mai mult și mai bine orientată ; institutele departamentale tratînd probleme de imediată aplicabilitate în producție, fără a da însă sistematic la o parte problemele fundamentale care rezultă din generalizarea rezultatelor obținute ; în fine, laboratoarele întreprinderilor, care se vor ocupa cu aplicațiile directe ale tehnologiei celei mai înaintate în procesul de producție.

Într-o formă oarecare, această rețea există ; totuși, coordonarea activității de cercetare în interiorul acestei rețele trebuie să fie mai eficientă. Se constată apoi că lipsește o legătură între unități, o colaborare efectivă, un flux continuu de idei, care să constituie tocmai ceea ce vrem să denumim noi *rețea*, și mai presus de toate, trebuie o concepție și o orientare unitară.

[2]) *Congresul al IX-lea al Partidului Comunist Român*, p. 60.
[3]) *Ibidem*, p. 61.
[4]) *Ibidem*.

Pe baza experienței pe care am căpătat-o în cursul activității mele în laboratoarele și institutele de cercetare, la catedră, în locurile de muncă din industrie, unde am activat mai mulți ani, îmi voi permite să fac cîteva sugestii și propuneri care să împlinească într-o oarecare măsură unele lipsuri.

Odată fixat numărul unităților de cercetare (institutele, laboratoarele catedrelor sau cele uzinale) și profilul lor după criterii economice și științifice obiective, acestea trebuie echipate cu hotărîre în condițiile cele mai moderne.

Colaborarea în rețeaua unităților de cercetare trebuie să fie automată, fără să fie nevoie a stabili anumite reguli în acest sens. Dar pentru aceasta este necesară găsirea unor criterii unice privind în special personalul de cercetare. Astfel, trebuie asigurate aceleași criterii de recrutare și promovare atît pentru cercetători, cît și pentru personalul de conducere (directori, șefi de secții, șefi de sectoare), spre exemplu pe bază de concurs, cum se face la Academie. Pentru personalul de conducere al marilor unități s-ar putea impune și un aviz din partea unui for științific superior (de exemplu Academia). În ceea ce privește personalul începător, consider că acesta trebuie „descoperit" de profesori printre cei mai capabili și mai înzestrați absolvenți și repartizat apoi unităților de cercetare *fără condiția de stagiu* în producție, pentru a le asigura continuitatea pregătirii lor științifice și a nu-i îndepărta tocmai de la această pregătire. Adică să se adopte aceeași metodă ca în învățămîntul tehnic superior, unde, pentru a deveni preparator sau asistent, nu se impune un stagiu prealabil.

Criteriile de coordonare și de orientare generală a cercetărilor nu trebuie să fie complet rigide, ci trebuie lăsată o oarecare latitudine conducerii și cercetătorilor, căci numai astfel se poate căpăta acea îndrăzneală în creație care poate duce la realizări însemnate.

Întrucît în programul Conferinței de mecanică un spațiu important îl ocupă problemele învățămîntului și deoarece, conform recomandărilor rezoluției Congresului al IX-lea al Partidului Comunist Român, trebuie acordată o atenție deosebită învățămîntului tehnic superior, voi căuta în acest sens să fac unele sugestii.

În prezent, școlile noastre se află la un nivel dintre cele mai ridicate, alături de țări cu tradiții culturale mai vechi.

La stadiul actual al dezvoltării tehnicii mondiale însă, marile realizări tehnice-științifice se pot obține printr-o adîncă cunoaștere a disciplinelor de bază sub toate aspectele lor, teoretice, experimentale și aplicative. În actuala desfășurare a învățămîntului tehnic superior, din lipsă de timp pentru materiile complementare necesare, adîncirea metodelor de investigație devine foarte anevoioasă. Pe de altă parte, recrutarea de ingineri în institutele de cercetări, cercetări care se impun acum pe un front foarte larg și reprezintă un imperativ la ora actuală, chiar și pentru inginerii din institutele de proiectări, această recrutare devine foarte dificilă tocmai pentru că tinerilor absolvenți le lipsește instrumentul de cercetare în toate subtilitățile sale. Pentru formarea temeinică a acestei categorii de ingineri cercetători și realizatori, indispensabile dezvoltării economiei noastre, cred că este necesară în marile institute politehnice o facultate specială de *ingi-*

neri de cercetare, avînd secții de mecanică, electronică, automatică etc. și drept obiectiv tratarea problemelor fundamentale din aceste discipline și domenii apropiate. Acest lucru există în foarte multe țări, mari și mici, care au sesizat din timp importanța acestei pregătiri în institutele de învățămînt superior. Sînt încredințat că înființarea acestor facultăți va prezenta un salt calitativ în formarea cadrelor noastre de elită, care vor activa la introducerea tehnicii avansate în industrie.

Vorbind de pregătirea cadrelor, voi aminti și de pregătirea prin aspirantură. În această chestiune considerăm că, mărind exigența alegerii și tratării subiectelor de disertație, trebuie în același timp să schimbăm titulatura de „candidat în științe" cu aceea de „doctor în științe". Cuvîntul *candidat* în limba română reclamă imediat întrebarea „la ce?". Nu poate să rămînă cineva candidat în științe toată viața.

Titlul de doctor acordat oamenilor noștri de știință va mări prestigiul lor și le va consolida poziția față de colegii străini, care primesc acest titlu exact pentru aceeași pregătire ca a acelora de la noi.

Tot în aceeași ordine de idei voi face o ultimă propunere, aceea de a schimba denumirea de *Institut politehnic* în aceea de *Universitate tehnică*. Astfel, spre exemplu, Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" să se numească *Universitatea tehnică „Gheorghe Gheorghiu-Dej"*. Într-adevăr, prin institut se înțelege mai degrabă institut de cercetare sau institut de învățămînt monotehnic. Or, institutele noastre politehnice sînt adevărate universități, cu multe facultăți, acoperind o gamă mare de specialități, care intră în toate sectoarele vieții noastre științifice, tehnice, economice și culturale.

Acest lucru a fost de mult însușit de multe țări din răsărit și din apus. Este de ajuns să citez, ca exemplu, R.P. Ungară și Grecia, în care organizarea învățămîntului tehnic superior este foarte diferită și totuși instituțiile unde se practică acest învățămînt cu aceeași denumire de *Universitate tehnică*.

★

Aceste cîteva sugestii pe care le-am făcut mai înainte reprezintă și preocupările colegilor și colaboratorilor noștri, cărora le incumbă marea onoare să dea viață sarcinilor trasate de rezoluția Congresului al IX-lea al Partidului Comunist Român.

Oamenii de știință români sînt mîndri de victoriile mărețe obținute de poporul nostru într-un timp așa de scurt și au bucuria și satisfacția deplină de a fi contribuit, în limita posibilităților lor, la dezvoltarea impetuoasă a economiei noastre naționale prin munca lor fără preget și activitatea lor științifică, orientată spre folosul obștesc.

După confruntarea de acum vom fi mai pregătiți și mai orientați să activăm cu însuflețire pentru aceste mărețe obiective, care duc în cele din urmă la ridicarea nivelului de viață al poporului român.

CUVÎNTUL DE ÎNCHIDERE, ROSTIT DE ACAD. E. CARAFOLI

Iată-ne acum la sfîrşitul Conferinţei de mecanică.

Cei aproape 400 de participanţi, specialişti în toate domeniile mecanicii, activînd în cercetare, învăţămînt sau industrie, se vor împrăştia pe tot cuprinsul ţării, rămînînd însă uniţi prin preocupări comune şi prin aceeaşi dorinţă fierbinte de a contribui prin munca lor creatoare la propăşirea patriei şi poporului român.

La bunul mers al conferinţei au contribuit toţi participanţii, prin comunicările prezentate şi prin observaţiile, propunerile şi sugestiile făcute în cursul dezbaterilor. Se poate afirma că nivelul lucrărilor conferinţei a fost ridicat, indicînd stadiul avansat de dezvoltare a cercetărilor de mecanică de la noi şi pregătirea înaltă a specialiştilor noştri. Acest fapt a constituit unul dintre cei mai importanţi factori care au făcut ca lucrările conferinţei noastre să se desfăşoare în condiţiile obişnuite ale unei manifestări ştiinţifice internaţionale.

Vă adresăm tuturor mulţumirile noastre călduroase şi vă urăm din inimă noi succese în activitatea dv. viitoare.

Mulţumim totodată înaltelor foruri care au sprijinit conferinţa noastră atît din punct de vedere material, cît şi din cel moral, anume : Academia Republicii Socialiste România, Ministerul Învăţămîntului, precum şi celorlalte ministere şi comitete naţionale : Ministerul Construcţiilor de Maşini, Ministerul Minelor, Ministerul Transporturilor şi Telecomunicaţiilor, Ministerul Energiei Electrice, Ministerul Industriei Materialelor de Construcţii, Comitetului de Stat pentru Construcţii, Arhitectură şi Sistematizare, Comitetul de Stat al Apelor, Consiliul naţional al inginerilor şi tehnicienilor.

Succesul conferinţei noastre se datoreşte şi preţiosului aport adus de eminenţii oaspeţi de peste hotare, cărora la adresăm cele mai calde mulţumiri. Am fost deosebit de fericiţi să avem în mijlocul nostru pe reprezentanţii cei mai autorizaţi ai ştiinţei din alte ţări şi îi asigurăm că prezenţa lor activă ne-a fost de un real folos. Am avut multe de învăţat de la domniile-lor, din experienţa lor ştiinţifică, pe care ne-au împărtăşit-o din plin prin comunicările ţinute şi prin discuţiile purtate. Le mulţumim încă o dată şi sperăm că s-au simţit bine printre noi şi că întîlnirea cu noi a constituit un factor pozitiv în întărirea şi în dezvoltarea relaţiilor de colaborare dintre toţi oamenii de ştiinţă.

Desigur că pe lîngă părțile pozitive am avut și deficiențe. Noi am fost însă însuflețiți de intenția cea mai bună și am depus toate eforturile posibile pentru ca lucrările conferinței să se desfășoare normal, iar participanților români și distinșilor oaspeți de peste hotare să li se asigure toate condițiile unui sejur plăcut în București.

Sperăm ca la viitoarele întîlniri dintre noi, pe care le dorim cît mai fructuoase, să înlăturăm toate lipsurile care au existat.

★

Să-mi fie permis acum să expun cîteva foarte succinte concluzii privind desfășurarea lucrărilor și unele orientări de viitor care par să se fi desprins din comunicări și discuții.

Voi reface mai întîi imaginea cadrului în care s-a desfășurat conferința. Așa cum este cunoscut, comunicările au fost grupate în patru secții : I. Mecanica generală (cu două subsecții), II. Mecanica solidelor (cu 6 subsecții), III. Mecanica fluidelor (cu 5 subsecții) și IV. Istoria și învățămîntul mecanicii (cu 2 subsecții).

În acest cadru organizatoric au fost prezentate 329 de comunicări dintre care, circa 265 de către specialiști români și circa 65 de către oaspeți străini, ceea ce dovedește interesul și bunăvoința acestora pentru conferința noastră.

1. Cel mai mare număr de comunicări a fost consacrat, cum era și natural, acelor probleme care au intrat de multă vreme în atenția cercetătorilor noștri fie ca o dezvoltare a unor tradiții mai vechi, fie ca preocupări de continuitate, introduse și lărgite treptat în anii din urmă, preocupări despre care se poate spune că au ajuns să formeze în țara noastră tradițiile noi de cercetare.

În elasticitate, plasticitate și reologie s-au abordat problemele corpului solid pe modele fizice complexe, neomogene și anizotrope ; probleme de contact elastic ; probleme de propagare a undelor elastovîscoplastice și altele.

O serie de lucrări a fost consacrată vibrațiilor neliniare și stabilității statice și dinamice a structurilor, cu aplicații la diverse construcții care interesează economia națională.

În teoria plăcilor, domeniu în care cercetarea românească a fost permanent prezentă în ultimii ani, s-au prezentat lucrări asupra învelitorilor anizotrope, eterogene sau omogene.

În teoria mecanismelor, domeniu de asemenea intrat de mult în atenția specialiștilor noștri, s-au adus contribuții importante, ca metoda operațională, metoda seriilor armonice complexe, metoda solidarizării, metoda grafurilor.

Au mai fost discutate probleme de mecanica solului, de organe de mașini și încercări de materiale.

Un loc important l-au ocupat comunicările de dinamica gazelor. În acest domeniu, numeroase lucrări au fost consacrate teoriei aripii în regim supersonic și hipersonic, cu aplicații diverse în aviația modernă, mișcărilor subsonice incompresibile și compresibile, de asemenea cu diverse aplicații, toate acestea reflectînd o preocupare cu caracter de continuitate la noi.

În aceeași ordine de idei, s-au discutat lucrări de hidrodinamica fluidelor grele cu suprafață liberă și a fluidelor vîscoase, cu aplicații în problemele tehnice și industriale.

Scurgerile prin medii poroase au făcut de asemenea obiectul unor numeroase comunicări teoretice și aplicative, interesînd, printre altele, exploatarea zăcămintelor de țiței și gaze.

Multe lucrări s-au referit la teoria stratului-limită laminar sau turbulent, cu sau fără transfer de căldură, în diverse configurații geometrice ale obstacolelor scufundate.

O altă problemă importantă a fost aceea a teoriei rețelelor de profile, cu referire în special la turbomașinile hidraulice.

Numeroase lucrări au fost consacrate cercetărilor de lubrificație, frecare și uzură, adăugîndu-se noi contribuții la cele anterioare.

Dezbaterile care au avut loc la secția de istoria și învățămîntul mecanicii s-au dovedit foarte utile și fecunde pentru îmbunătățirea învățămîntului din țara noastră.

2. S-au desprins și unele probleme actuale de mecanică cerească și astrodinamică, legate de zborul sateliților artificiali. În elasticitate, plasticitate și reologie s-au conturat preocupări privind cîmpurile mixte și, în măsură mai redusă, magnetoelasticitatea, solide cu dislocații, solide cu distorsiuni etc.

Au fost de asemenea expuse rezultatele unor experimentări privind comportarea unor mase plastice în construcția de mașini.

În dinamica gazelor s-au dezvoltat lucrări privind mișcări transsonice și pînze de jet subțiri, în regim subsonic și supersonic ; un grup numeros de comunicări s-a referit la probleme de magnetofluidodinamică, ceea ce reflectă intensificarea și în țara noastră a acestor preocupări, care se găsesc de cîtva timp în atenția specialiștilor.

3. Sînt unele probleme sau unele aspecte ale cercetărilor teoretice și aplicative care au început abia acum în urmă să formeze obiectul cercetărilor din țara noastră. Astfel, menționăm scurgerea gazelor rarefiate, studiul turbulenței libere, problemele mișcării cu transfer de masă și căldură, scurgerea fluidelor multifazice, scurgerile însoțite de fenomene de combustie sau de reacții chimice și disociații.

Acestora și altora asemănătoare li se va da desigur o atenție mai mare în viitor.

★

În toate domeniile care au format obiectul conferinței au fost prezentate aspectele de aplicabilitate directă sau indirectă în practică. Menționăm în acest sens cele referitoare la comportarea anumitor materiale plastice, analiza și sinteza mecanismelor, calculul structurilor de nave, de autovehicule, de construcții civile și industriale, scurgerea țițeiului prin medii poroase, utilizarea energiei eoliene, funcționarea turbomașinilor, lubrificație.

Conferința și-a desfășurat astfel lucrările în spiritul îmbinării armonioase a cercetărilor fundamentale cu cele aplicative.

Țin să fac o mențiune deosebită asupra comunicărilor foarte valoroase a oamenilor de știință de peste hotare, a căror contribuție va fi foarte utilă pentru munca noastră și pentru orientarea cercetărilor în viitor.

★

Cîteva cuvinte despre participarea la conferință a diverselor instituții și organizații din țară. Ele se încadrează acum într-o rețea de cercetare în care continuitatea este întreruptă în unele puncte. Trebuie deci dezvoltată și completată cu noi unități spre a forma un lanț complet de cercetare, care să asigure o eficiență sporită a acestei activități, de mare importanță pentru dezvoltarea economiei și culturii noastre naționale. Dar despre această problemă s-a vorbit la început, la deschiderea conferinței.

★

După rezultatele obținute pînă acum, putem spune că Conferința de mecanică și-a atins obiectivele sale principale. O manifestare de acest fel se dovedește a fi utilă, de aceea propunem să aibă loc cu regularitate o dată la trei ani. În acest scop ar fi indicat să cerem de pe acum forurilor noastre superioare crearea unui *Comitet național de mecanică*, care să unească toate forțele creatoare, de la teoreticieni pînă la cei ce introduc în economie tehnica înaintată. Acest organism va avea rolul de a asigura organizarea unor asemenea manifestări și totodată i s-ar putea atribui și alte roluri în dezvoltarea mecanicii la noi în țară.

În timpul desfășurării lucrărilor au fost făcute o serie de sugestii și propuneri. Le vom examina cu cea mai mare atenție, le vom sistematiza și le vom supune aprecierii forurilor superioare pentru a se decide asupra lor.

Mulțumindu-vă încă o dată, tuturor, pentru prețioasa dv. contribuție la bunul mers al lucrărilor, declar închise lucrările Conferinței de mecanică, urîndu-vă în același timp succes deplin în activitatea dv. viitoare. Voi încheia spunînd : la revedere pe curînd.

NOI METODE DE CALCUL NUMERIC AL SOLUȚIILOR DIFERITELOR SISTEME INTEGRODIFERENȚIALE INTERESÎND MECANICA APLICATĂ

III. PROBLEME DE CONTUR PENTRU ECUAȚII INTEGRODIFERENȚIALE CU OPERATORI CALORICI ȘI CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT [1]

de D. MANGERON și L. E. KRIVOȘEIN
Institutul politehnic Iași — Academia de Științe din R.S.S. Kirghizia, U.R.S.S.

621.01

Autorii, continuîndu-și seria de studii consacrată calculului numeric al soluțiilor diferitelor sisteme integrodiferențiale interesînd mecanica aplicată [1], [2], expun un șir de probleme consacrate studiului ecuațiilor integrodiferențiale liniare și neliniare cu operatori parabolici (calorici), conținînd integrale duble și termeni cu argument întîrziat. Se studiază condițiile care asigură existența, unicitatea și stabilitatea (în raport cu mici perturbări ale coeficienților cunoscuți) soluțiilor sistemelor considerate și se dau unele evaluări ale modulelor soluțiilor unor atare sisteme.
Într-un studiu ulterior se vor expune șiruri de rezultate relative la noi probleme privitoare la sisteme funcționale cu operatori policalorici, introduși în literatură matematică de acad. Miron Nicolescu [13].
Rezultatele expuse se bazează pe unele lucrări ale autorilor inserate în dările de seamă ale unor academii de științe [3], [4].

§ 1. INTRODUCERE

Într-un șir de studii anterioare, primul dintre autori, luînd ca bază operatorii de derivare totală în sensul lui Picone [5], [6], a formulat și a rezolvat pentru prima oară în literatură matematică o serie de probleme relative la sisteme funcționale numite de el „polivibrante". Atare sisteme

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, *1* (1966) (în limba engleză).

funcţionale, care şi-au găsit aplicaţii de seamă în fizica matematică, au drept prototip problema spectrală de forma

$$[A(x)\,u' + \lambda B(x)\,u]' + \lambda[B(x)\,u' + C_1(x)\,u] = 0,$$
$$u\,|_{FrR} = 0,\ (x = x_1, x_2, \ldots, x_m),\ R = \{x_i^* \leqslant x_i \leqslant x_i^{**}\}, \qquad (1)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Noutatea problemelor de contur (1) constă — dacă ne mărginim pentru a fixa ideile, aşa cum s-a menţionat mai sus, la domenii mărginite de caracteristice — în faptul că „dreptunghiul" R este cu m dimensiuni, iar prin simbolul $(')$ s-a notat derivata primă totală

$$u' \equiv \frac{\partial^m u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}. \qquad (2)$$

Direcţia de studii astfel inaugurată, cristalizată de primul dintre autori într-o comunicare prezentată la ultimul Congres internaţional al matematicienilor [14] şi consacrată problemelor de contur de tip neeliptic, deschide largi căi de cercetare a problemelor spectrale şi a problemelor de perturbaţie a spectrelor, care constituie o generalizare naturală a problemelor lui Sturm-Liouville de forma

$$y'' + [\lambda + q(x)]\,y = 0, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$
$$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \qquad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0, \qquad (3)$$

în care q, a, b, α_1, α_2, β_1, β_2 sînt funcţii de un mic parametru $\varepsilon > 0$.

Noua tehnică variaţională, elaborată de către primul dintre autori pentru studiul problemelor spectrale polivibrante, a condus pe o altă cale decît cea indicată de autori în [19], la programarea dinamică a ansamblului acestor probleme, deosebit de apreciată de specialişti ca R. Bellman, M. Picone şi J. Favard, I. N. Vekua [15]—[18], avînd ca prototip problema de optimizare a funcţionalei

$$f(a_1, a_2, k_1(y), k_2(x)) = \operatorname{Min} \int_{a_1}^{1} \int_{a_2}^{1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad (4)$$

pentru funcţiile $u(x, y)$ ce satisfac condiţiile

$$u(a_1, y) = k_1(y),\ u(x, a_2) = k_2(x),\ u(x, 1) = u(1, y) = 0,$$
$$\int_{a_1}^{1} \int_{a_2}^{1} A(x, y)\,u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1,\ 0 \leqslant a_1 < 1,\ 0 \leqslant a_2 < 1, \qquad (5)$$
$$0 < b_1 \leqslant A(x, y) \leqslant b_2,\ 0 \leqslant x,\ y \leqslant 1.$$

Continuîndu-şi studiile consacrate unificării metodelor de cercetare a variatelor clase de probleme de contur interesînd fizica matematică [2]),

[2]) O altă cale bogată în perspective de unificare a variatelor probleme de contur interesînd mecanica liniară a fost realizată de primul dintre autori prin folosirea sistematică a calculului operaţional (simbolic) care are la bază transformata lui Laplace-Picone cu intervalul de integraţie finit [20], fapt subliniat cu deosebită pregnanţă în volumul cunoscuţilor specialişti L. Poli şi P. Delerue [21].

autorii au studiat într-un șir de lucrări [22], [23] probleme de contur mixte omogene și neomogene relative la ecuații integrodiferențiale cu derivate parțiale cu operatori exteriori parabolici. Au fost elucidate condițiile de existență, de unicitate și de dependență continuă a soluțiilor de mici perturbații ale coeficienților cunoscuți care intră în condițiile problemelor considerate. În unele cazuri au fost obținute evaluări calitative ale soluțiilor și s-au construit soluții aproximative, făcîndu-se evaluări ale erorilor comise.

Prezentul studiu este consacrat problemelor de contur mixte pentru ecuații liniare și neliniare integrodiferențiale de tip parabolic cu integrale duble și argument întîrziat [24], [25]. Sînt studiate condițiile care asigură existența, unicitatea și stabilitatea în raport cu mici perturbări ale coeficienților cunoscuți a soluțiilor, dîndu-se totodată și unele evaluări ale modulelor acestor soluții.

Într-un studiu ulterior se vor expune șiruri de rezultate relative la noi probleme privitoare la sisteme funcționale cu operatori policalorici, introduși în literatura matematică de acad. Miron Nicolescu, întregindu-se astfel ansamblul de studii consacrat sistemelor funcționale cu operatori poliarmonici (M. Picone, M. Nicolescu) [26], [27], polivibranți (D. Mangeron) [28] și policalorici (M. Nicolescu) [13], care stau la baza schematizărilor matematice ale majorității problemelor fundamentale de dinamica mașinilor, de fizică și de tehnică înaltă [3]).

În § 2 se studiază problema de existență și de unicitate pentru sistemul integrodiferențial cu operatori parabolici și argument întîrziat [1], [2]; în § 3 se expune problema stabilității relativă la atare sisteme; în § 4 se tratează problema majorării soluțiilor; în §§ 5—7 se prezintă problema de contur mixtă relativă la sisteme integrodiferențiale neliniare cu operatori parabolici și argument întîrziat.

§ 2. EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE A PROBLEMELOR DE CONTUR PENTRU ECUAȚII INTEGRODIFERENȚIALE PARABOLICE CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT

Se consideră problema de contur

$$u(x, 0) = \varphi_1(x),\ u(0, t) \equiv u(a, t) \equiv 0,\ u(x, t) \equiv 0,\ x \leqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \quad (6)$$

relativă la ecuația integrodiferențială

$$\begin{aligned} L[u] = {} & f(x, y) + a(x, t)\, u(x, t) + b(x, t)\, u(x - h_1(x), t) + \\ & + \sum_{i=0}^{1} \int_0^T \int_0^a \left[K_i(x, t; y, \tau) \frac{\partial^i u(y, \tau)}{\partial \tau^i} + \right. \\ & \left. + D_i(x, t; y, \tau) \frac{\partial^i u(y - h_2(y), \tau)}{\partial \tau^i} \right] dy d\tau, \end{aligned} \quad (7)$$

[3]) Bineînțeles, pînă cînd se va reuși să se găsească aproximații de ordin superior menite să facă față imperioasei necesități — subliniată la recentul Congres internațional de mecanică aplicată (München, 31 august — 4 septembrie 1964), precum și la sesiunea cu totul

în care

$$P[u] \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

$\varphi_1(x)[\varphi_1(0) = 0]$, $a(x, t)$, $b(x, t)$, $K_i(x, t; y, \tau)$, $D_i(x, t; y, \tau)$ $(i = 0, 1)$,

$$0 \leqslant h_j(x) \leqslant x \in [0, a] \quad (j = 1, 2), f(x, t)$$

sînt funcţii continue date pentru toţi (x, t), $(y, \tau) \in D = [0 \leqslant x, y \leqslant a] \times [0 \leqslant t, \tau \leqslant T]$, iar $u(x, t)$ este funcţia căutată.

Introducem o nouă funcţie,

$$\varphi(x, t) \equiv a(x, t)\ u(x, t) + b(x, t)\ u(x - h_1(x), t) + \\ + \sum_{i=0}^{1} \int_0^T \int_0^a \left[K_i(x, t; y, \tau) \frac{\partial^i u(y, \tau)}{\partial \tau^i} + \right. \\ \left. + D_i(x, t; y, \tau) \frac{\partial^i u(y - h_2(y), \tau)}{\partial \tau^i} \right] dy d\tau. \tag{8}$$

Folosindu-ne de funcţia $G(x, \xi, t - \alpha)$ [31, p. 212], precum şi de metoda trecerii de la ecuaţii omogene la ecuaţii neomogene [32], din (7) se obţine

$$u(x, t) = m(x, t) + \int_0^t \int_0^a G(x, \xi, t - \alpha) \varphi(\xi, \alpha)\, d\xi d\alpha, \tag{9}$$

în care s-a notat

$$m(x, t) \equiv \int_0^a \left\{ \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\exp - \left(\frac{\pi i}{a} \right)^2 t \right] \sin \frac{\pi i x}{a} \sin \frac{\pi i \xi}{a} \varphi_1(\xi) + \right. \\ \left. + \int_0^t G(x, \xi, t - \alpha) f(\xi, \alpha)\, d\alpha \right\} d\xi,$$

$$G(x, \xi, t - \alpha) \equiv \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\exp - \left(\frac{\pi i}{a} \right)^2 (t - \alpha) \right] \sin \frac{\pi i x}{a} \sin \frac{\pi i \xi}{a}.$$

---

recentă consacrată teoriilor neliniare a mediilor continue din cadrul lucrărilor Centrului internaţional matematic estiv (C.I.M.E.) (Bressanone, 31 mai — 9 iunie 1965) — de a se găsi *noi modele matematice ale mediilor continue* menite a reflecta mai fidel comportarea unor noi materiale sintetice, comportarea materialelor cunoscute însă supuse la condiţii de lucru nemaiîntîlnite pînă acum (temperaturi deosebit de ridicate, presiuni ridicate, creşteri apreciabile de viteze de deformaţie, funcţionări în condiţii de iradiere ş.a.) sau comportarea materialelor ce se încadrează în mecanica obiectelor biologice (muşchi, sînge, limfă, diferite mucoase ş.a.), îndeosebi în prezenţa cîmpurilor electrice şi magnetice [29], [30].

Înlocuind în (8) funcția u și derivatele sale[4]), luîndu-se la bază (9), se ajunge la următoarea ecuație integrală de formă mixtă:

$$\varphi(x, t) - \int_0^t \int_0^a M_1(x, t; y, \tau)\, \varphi(y, \tau)\, dy d\tau = \\ = \psi(x, t) + \int_0^T \int_0^a M_2(x, t; y, \tau)\, \varphi(y, \tau)\, dy d\tau, \tag{10}$$

în care prin $\psi(\cdot)$, $M_1(\cdot)$, $M_2(\cdot)$ s-au notat funcții continue cunoscute de toate argumentele lor $(x, t), (y, \tau) \in D$. Ținînd seama de rezultatele obținute în lucrările [32]—[34], se conchide că operatorul

$$A[\varphi] \equiv \varphi(x, t) - \int_0^t \int_0^a M_1(x, t; y, \tau)\, \varphi(y, \tau)\, dy d\tau \tag{11}$$

posedă operatorul invers. În consecință, din (10) se obține

$$\varphi(x, t) = A^{-1}[\psi(x, t) + \int_0^T \int_0^a M_2(x, t; y, \tau)\, \varphi(y, \tau)\, dy d\tau] \equiv \\ \equiv \Psi(x, t) + \int_0^T \int_0^a M_3(x, t; y, \tau)\, \varphi(y, \tau)\, dy d\tau. \tag{12}$$

Așadar, dacă $\Phi(x, t)$ este soluția ecuației (12), atunci

$$u(x, t) = m(x, t) + \int_0^t \int_0^a G(x, \xi, t - \alpha)\, \Phi(\xi, \alpha)\, d\xi d\alpha \tag{13}$$

este soluția sistemului integrodiferențial inițial (6), (7). Analiza ecuației (12) conduce la următoarea teoremă.

TEOREMA 1. *Dacă* 1 *nu este o valoare proprie a nucleului* $M_3(x, t; y, \tau)$, *atunci problema* (6), (7) *posedă o soluție unică în clasa funcțiilor* C_{21}[5]). *Dacă* 1 *este o valoare caracteristică de rang* r *a nucleului* $M_3(x, t; y, \tau)$, *atunci problema* (6), (7) *fie că nu are soluție în clasa funcțiilor* C_{21}, *fie că soluția problemei nu mai este univoc determinată.*

Într-adevăr, în primul caz soluția problemei considerate se determină în mod univoc prin formula (13). În cazul al doilea, este necesar și suficient pentru ca ecuația (12) și, prin urmare, problema (6), (7) să aibă soluție ca să fie îndeplinite egalitățile

$$\iint_D \Psi(x, t)\, \eta_i(x, t)\, dx dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{14}$$

---

[4]) Faptul că funcția $G(.)$ este diferențiabilă în raport cu t se verifică nemijlocit.

[5]) Adică în clasa de funcții de două ori continuu derivabile în raport cu x și o dată derivabile continuu în raport cu t pentru toți $(x, t) \in D$. În ceea ce urmează, renunțîndu-se la a se lua aici în discuție funcții discontinue sau, mai general, distribuții [35], vom avea în vedere numai atare soluții.

în care prin $\eta_i(x, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ s-au notat funcţiile proprii corespunzătoare valorii caracteristice luate în consideraţie şi relative la nucleul $M_3(y, \tau\,; x, t)$. Dacă egalităţile (14) sînt satisfăcute, soluţia problemei de contur (6), (7) există şi are forma

$$u(x, t) = m(x, t) + \int_0^t \int_0^a G(x, \xi, t - \alpha)\left[\varphi_0(\xi, \alpha) + \sum_{i=1}^{r} c_i \varphi_i(\xi, \alpha)\right] d\xi\, d\alpha, \tag{15}$$

în care prin $\varphi_0(x, t)$ s-a notat o soluţie particulară cunoscută a ecuaţiei (12), $\varphi_i(x, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sînt funcţiile proprii ale nucleului $M_3(x, t\,; y, \tau)$, iar $c_1, c_2, \ldots, c_r$ constante arbitrare.

Să menţionăm aici cîteva condiţii simple care, odată satisfăcute, asigură existenţa unei soluţii unice a problemei (6), (7).

1°. În ipoteza că are loc inegalitatea

$$l = 1 - \max_D \iint_D |M_3(x, t\,; y, \tau)|\, dy d\tau > 0, \tag{16}$$

problema (6), (7) posedă o soluţie unică în clasa funcţiilor C_{21}.

2°. Dacă nucleele $K_i\,[x, t\,; y, \tau)$, $D_i\,(x, t\,; y, \tau)$ $(i = 0,1)$ posedă proprietăţile

$$K_i(x, t\,; y, \tau) \equiv \begin{cases} K_{i0}(x, t\,; y, \tau), & 0 \leqslant x, y \leqslant a, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & 0 \leqslant x, y \leqslant a, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T, \end{cases} \tag{17}$$

$$D_i(x, t\,; y, \tau) \equiv \begin{cases} D_{i0}(x, t\,; y, \tau), & 0 \leqslant x, y \leqslant a, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & 0 \leqslant x, y \leqslant a, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T, \end{cases} \tag{18}$$

sau

3°. Dacă funcţiile $K_i(x, t\,; y, \tau)$ $(i = 0,1)$ satisfac condiţiile (17), iar $D_i(x, t\,; y, \tau) \equiv 0$ $(i = 0, 1)$ sau funcţiile $D_i(x, t\,; y, \tau)$ $(i = 0, 1)$ satisfac condiţiile (18), însă pentru toţi $(x, t), (y, \tau) \in D$ avem $K_i(x, t\,; y, \tau) \equiv 0$ $(i = 0, 1)$[6]), atunci unicitatea soluţiei problemei (6), (7) este asigurată (se presupune că funcţiile $K_{i0}(\cdot)$ şi $D_{i0}(\cdot)$ sînt funcţii continue pentru toţi $(x, t), (y, \tau) \in D$).

Presupunem, de exemplu, că sînt satisfăcute condiţiile (17), (18). Ecuaţia (7) ia în acest caz forma

$$\begin{aligned} P[u] = f(x, t) + a(x, t)\, u(x, t) + b\,(x, t)\, u\,(x - h_1(x), t) + \\ + \sum_0^1 \int_0^t \int_0^a \left[K_{i0}(x, t\,; y, \tau)\, \frac{\partial^i u(y, \tau)}{\partial \tau^i} + \right. \\ \left. + D_{i0}(x, t\,; y, \tau)\, \frac{\partial^i u(y - h_2(y), \tau)}{\partial \tau^i}\right] dy d\tau. \end{aligned} \tag{19}$$

[6]) Să notăm prin (17ª), respectiv (18ª), atare condiţii.

Substituind (9) în (8), se obține ecuația

$$\varphi(x, t) - \int_0^t \int_0^a M_4(x, t; y, \tau)\, \varphi(y, \tau)\, dy d\tau = \psi(x, t), \tag{20}$$

în care prin $M_4(x, t; y, \tau)$ s-a notat

$$M_4(x, t; y, \tau) \equiv M_1(x, t; y, \tau) + M_{20}(x, t; y, \tau),$$

$$M_{20}(x, t; y, \tau) \equiv \begin{cases} M_2(x, t; y, \tau) & 0 \leqslant x, y \leqslant a, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T, \\ 0, & 0 \leqslant x, y \leqslant a, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T. \end{cases}$$

Ecuația (20) posedă o soluție unică continuă în domeniul D. În consecință, problema de contur (6), (7), posedă o soluție unică în clasa de funcții C_{21}.

Executarea calculelor algoritmice analoge cu cele de mai sus, însă relative la îndeplinirea condițiilor (17 a), (13a) referitoare la punctul 3°, conduce la ecuația integrodiferențială de forma (20), de unde decurge iarăși unicitatea problemei considerate.

§ 3. PROBLEMA STABILITĂȚII SOLUȚIILOR SISTEMULUI INTEGRODIFERENȚIAL (6), (7)

Definiție. Vom spune că soluția problemei (6), (7) este stabilă în raport cu mici perturbații ale funcțiilor cunoscute care figurează în (6) și (7), dacă pentru orice număr pozitiv $\varepsilon > 0$ se poate indica un număr $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît din inegalitățile

$$|\varphi_1(x) - \varphi_{11}(x)| < \delta, \; |a(x, t) - a_1(x, t)| < \delta, \; |b(x, t) - b_1(x, t)| < \delta,$$

$$|K_i(x, t; y, \tau) - K_{i1}(x, t; y, \tau)| < \delta, \; |D_i(x, t; y, \tau) - D_{i1}(x, t; y, \tau)| < \delta, \; (i = 0, 1),$$

$$|h_i(x) - h_{ij}(x)| < \delta \; (i = 1, 2; \; j = 0, 1) \; 0 \leqslant x, y \leqslant a, \; 0 \leqslant t, \tau \leqslant T,$$

rezultă inegalitatea

$$|u(x, t) - u_1(x, t)| < \varepsilon, \; (x, t) \in D,$$

în care prin $u_1(x, t)$ s-a notat soluția următoarei probleme de contur:

$$\begin{gathered} u_1(x, 0) = \varphi_{11}(x), \; u_1(0, t) \equiv u_1(a, t) \equiv 0; \\ u_1(x, t) \equiv 0, \; x \leqslant 0, \; 0 \leqslant t \leqslant T, \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} P[u_1] = f_1(x, t) + a_1(x, t)\, u_1(x, t) + b_1(x, t)\, u_1(x - h_{12}(x), t) + \\ + \sum_0^1 \int_0^T \int_0^a \left[K_{i1}(x, t; y, \tau) \frac{\partial^i u_1(y, \tau)}{\partial \tau^i} + \right. \\ \left. + D_{i1}(x, t; y, \tau) \frac{\partial^i u_1(y - h_{21}(y), \tau)}{\partial \tau^i} \right] dy d\tau. \end{aligned} \tag{22}$$

Are loc următoarea teoremă.

TEOREMA 2. *Dacă* 1 *nu este o valoare proprie a nucleului* $M_3(x, t; y, \tau)$, *atunci soluţia problemei* (6), (7) *este stabilă faţă de mici perturbaţii ale funcţiilor cunoscute ce figurează în* (6) *şi* (7).

Pentru demonstraţia teoremei enunţate, să fixăm un număr pozitiv arbitrar $\varepsilon > 0$. Urmînd ca $\delta(\varepsilon)$ să fie determinat ulterior, vom folosi procedeul similar cu cel folosit la construcţia funcţiei (9). Vom avea acum

$$u_1(x, t) = m_1(x, t) + \int_0^t \int_0^a G(x, \xi, t - \alpha)\, \varphi_1(\xi, \alpha)\, d\xi d\alpha, \tag{23}$$

în care prin $m_1(x, t)$ s-a notat o funcţie cunoscută, şi

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, t) = {} & a_1(x, t)\, u_1(x, t) + b_1(x, t)\, u_1(x - h_{12}(x), t) + \\ & + \sum_0^1 \int_0^T \int_0^a \left[K_{i1}(x, t; y, \tau) \frac{\partial^i u_1(y, \tau)}{\partial \tau^i} + \right. \\ & \left. + D_{i1}(x, t; y, \tau) \frac{\partial^i u_1(y - h_{21}(y), \tau)}{\partial \tau^i} \right] dy d\tau. \end{aligned} \tag{24}$$

Substituind (23) în (24), se ajunge la următoarea ecuaţie integrală :

$$\begin{aligned} A_1 \varphi_1 \equiv \varphi_1(x, t) - \int_0^t \int_0^a M_{11}(x, t; y, \tau)\, \varphi_1(y, \tau)\, dy d\tau = \\ = \psi_1(x, t) + \int_0^T \int_0^a M_{21}(x, t; y, \tau)\, \varphi_1(y, \tau)\, dy d\tau. \end{aligned} \tag{25}$$

Din (25) se obţine

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, t) = A_1^{-1} \left[\psi_1(x, t) + \int_0^T \int_0^a M_{21}(x, t; y, \tau)\, \varphi_1(y, \tau)\, dy d\tau \right] \equiv \\ \equiv \Psi_1(x, t) + \int_0^T \int_0^a M_{31}(x, t; y, \tau)\, \varphi_1(y, \tau)\, dy d\tau. \end{aligned} \tag{26}$$

În consecinţă,

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) - \varphi_1(x, t) = {} & \Psi(x, t) - \Psi_1(x, t) + \\ & + \int_0^T \int_0^a [M_3(x, t; y, \tau) - M_{31}(x, t; y, \tau)]\, \varphi_1(y, \tau)\, dy d\tau + \\ & + \int_0^T \int_0^a M_3(x, t; y, \tau)[\varphi(y, \tau) - \varphi_1(y, \tau)]\, dy d\tau \equiv \sigma(x, t) + \\ & + \int_0^T \int_0^a M_3(x, t; y, \tau)\, [\varphi - \varphi_1]\, dy d\tau; \end{aligned} \tag{27}$$

$$\varphi(x, t) - \varphi_1(x, t) = \sigma(x, t) + \int_0^T \int_0^a R(x, t; y, \tau)\, \sigma(y, \tau)\, dy d\tau \equiv \rho(x, t),$$

în care prin $R(x, t; y, \tau)$ s-a notat nucleul rezolvent al nucleului $M_3(x, t; y, \tau)$. Prin urmare,

$$|u(x,t) - u_1(x, t)| \leqslant |m(x, t) - m_1(x, t)| +$$

$$+ \int_0^t \int_0^a |G(x, \xi, t - \alpha)\, \rho\ (\xi, \alpha)|\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \delta \left\{ 1 + \int_0^t \int_0^a |G(x, \xi, t - \alpha)| \left[1 + \int_0^T \int_0^a |R(\xi, \alpha, y, \tau)|\, \mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \right] \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\alpha \right\},$$

în care prin δ s-a notat

$$\delta = \sup \{ \max_D |m(x, t) - m_1(x, t)|, \max |\sigma(x, t)| \}.$$

Ajunge să se aleagă $\delta < \varepsilon : \beta_{Ta}$, în care prin β s-a notat

$$\beta = 1 + \max_D \int_0^t \int_0^a |G(x, \xi, t-\alpha)| \left[1 + \int_0^T \int_0^a |R(\xi, \alpha, y, \tau)|\, \mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \right] \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\alpha,$$

pentru ca afirmația din teorema 2 să fie verificată.

Observații. 1) Dacă funcțiile $K_i(.)$, $D_i(.)$ $(i = 0, 1)$ satisfac la una dintre condițiile : a) (16), b) (17), (18), c) (17a), (18a), atunci problema (6), (7), posedă întotdeauna soluție, stabilă în raport cu mici perturbații ale funcțiilor cunoscute ce figurează în (6) și (7).

2) Ecuația integrală de forma (12) poate fi construită introducînd funcția

$$M_{10}(x, t; y, \tau) \equiv \begin{cases} M_1(x, t; y, \tau), & 0 \leqslant x, y \leqslant a, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & 0 \leqslant x, y \leqslant a, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T. \end{cases} \tag{28}$$

Avem în acest caz

$$\varphi(x, t) - \int_0^T \int_0^a M_5(x, t; y, \tau)\, \varphi(y, \tau)\, \mathrm{d}y\mathrm{d}\tau = \psi(x, t), \tag{29}$$

în care prin $M_5(x, t; y, \tau)$ s-a notat

$$M_5(x, t; y, \tau) \equiv M_{10}(x, t; y, \tau) + M_2(x, t; y, \tau).$$

Prin urmare, dacă 1 nu este o valoare proprie a nucleului $M_5(x, t; y, \tau)$ sau, în particular, dacă este îndeplinită inegalitatea

$$l_1 = 1 - \max_D \int_0^T \int_0^a |M_5(x, t; y, \tau)|\, \mathrm{d}y\mathrm{d}\tau > 0, \tag{30}$$

atunci problema (6), (7) posedă o soluție unică, stabilă în raport cu mici perturbații ale funcțiilor cunoscute ce figurează în (6) și (7).

§ 4. UNELE FORMULE DE MAJORARE A SOLUŢIILOR SISTEMULUI INTEGRODIFERENŢIAL (6), (7)

Să introducem notaţiile

$$g_1(x, y) \equiv |a(x, t)| + |b(x, t)| + \\ + \int_0^T \int_0^a [|K_0(x, t; y, \tau)| + |D_0(x, t; y, \tau)|] \, dy d\tau;$$

$$g_2(x, t) \equiv \int_0^T \int_0^a [|K_1(x, t; y, \tau)| + \\ + |D_1(x, t; y, \tau)|] \, dy d\tau; \quad \alpha_3 = \max_D \left| \frac{\partial^2 m(x, t)}{\partial x^2} \right|;$$

$$\alpha_i = \max_D \left| \frac{\partial^i m(x, t)}{\partial t^i} \right|, \quad m_i = \max_D \left| \frac{\partial^i u(x, t)}{\partial t^i} \right| \quad (i = 0, 1); \quad g_i = \max_D g_i(x, t);$$

$$\gamma_i = \max_D \iint_D |G(x, \xi, t - \alpha)| \, g_i(\xi, \alpha) \, d\xi d\alpha;$$

$$\delta_i = \max_D \int_0^t \int_0^a \left| \frac{\partial^2 G(x, \xi, t - \alpha)}{\partial x^2} \right| g_i(\xi, \alpha) \, d\xi d\alpha.$$

Rezultă, în consecinţă,

$$m_0(1 - \gamma_1) \leqslant \alpha_0 + m_1\gamma_2; \; m_1(1 - \delta_2 - g_2) \leqslant \alpha_1 + \alpha_3 + m_0(\delta_1 + g_1). \tag{31}$$

Dacă

$$z_1 = 1 - \delta_2 - g_2 > 0, \tag{32}$$

se deduce

$$m_1 < (\alpha_1 + \alpha_3) : z_1 + (\delta_1 + g_1) m_0 : z_1, \\ m_0 [1 - \gamma_1 - \gamma_2 (\delta_1 + g_1) : z_1] \leqslant \alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_3) : z_1. \tag{33}$$

Prin urmare, presupunînd că este îndeplinită relaţia

$$z_2 = (1 - \gamma_1) z_1 - \gamma_2(\delta_1 + g_1) > 0, \tag{34}$$

se găseşte

$$m_0 \leqslant (\alpha_0 z_1 + \alpha_1 + \alpha_3) : z_1; \; m_1 \leqslant \{\alpha_1 + \alpha_3 + \\ + (\delta_1 + g_1)(\alpha_0 z_1 + \alpha_1 + \alpha_3) : z_2] : z_1. \tag{35}$$

Se mai deduce şi următoarea evaluare a maximului modulului derivatei[7])

$$\max_D \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \leqslant \alpha_3 + m_0\delta_1 + m_1\delta_2 \leqslant \alpha_3 + [\delta_1 z_1(\alpha_0 z_1 + \alpha_1 + \alpha_3) + \\ + \delta_2(\delta_1 + g_1)(\alpha_0 z_1 + \alpha_1 + \alpha_3)] : (z_1 z_2). \tag{36}$$

[7]) Interesante serii de formule de majorare interesînd ecuaţii polivibrante au fost date de primul dintre autori în [37]. S-au obţinut astfel numeroase rezultate care generalizează pentru spaţii cu mai multe dimensiuni şi soluţii ale ecuaţiilor cu derivate totale seria de rezultate devenite repede clasice datorită ilustrului matematician M. Picone [38], preşedinte al Academiei „dei Lincei". şi membru de onoare al Academiei Republicii Socialiste România.

O evaluare pe cale ceva mai simplă a soluției problemei (6), (7) se reușește să se facă dacă ne folosim, de exemplu, de ecuația integrală (29).

Presupunem că este satisfăcută inegalitatea (v. (30))

$$\max_D |\varphi(x, t)| \leqslant \max_D |\psi(x, t)| : l_1.$$

Vom avea, în consecință,

$$|u(x,t)| \leqslant |m(x,t)| + \int_0^t \int_0^a |G(x, \xi, t-\alpha)| \Big\{ |\psi(\xi, \alpha)| + \\ + \int_0^T \int_0^a |M_5(\xi, \alpha; y, \tau)| \times [\max_D |\psi(x,t)| : l_1] \, dy d\tau \Big\} d\xi d\alpha. \tag{37}$$

Să stabilim acum unele evaluări pentru modulul funcției $u(x, t)$, $|u(x, t)|$, în ipoteza că funcțiile $K_i(.)$, $D_i(.)$ $(i = 0,1)$ posedă proprietățile definite prin (17), (18).

a) Executînd în (20) k substituții succesive în așa fel ca să avem

$$p_k = 1 - \max_D \int_0^t \int_0^a |N_k(x, t; y, \tau)| \, dy d\tau > 0, \tag{38}$$

în care prin $N_k(x, t; y, \tau)$ s-a notat nucleul iterat de k ori a nucleului $M_4(x, t; y, \tau)$, să transcriem ecuația integrală sub forma

$$\varphi(x, t) - \int_0^t \int_0^a N_k(x, t; y, \tau) \varphi(y, \tau) \, dy d\tau = \psi_k(x, t). \tag{39}$$

Avem atunci succesiv inegalitățile

$$\max_D |\varphi(x, t)| \leqslant \max_D |\psi_k(x, t)| : p_k, \tag{40}$$

$$|u(x,t)| \leqslant |m(x,t)| + \int_0^t \int_0^a |G(x, \rho, t-\alpha)| \Big\{ |\psi_k(\xi, \alpha)| + \\ + [\max_D |\psi_k(x,t)| : p_4] \int_0^\alpha \int_0^a |N_k(\xi, \alpha; y, \tau)| \, dy d\tau \Big\} d\xi d\alpha, \; (x,t) \in D. \tag{41}$$

b) Dacă ne folosim de evaluarea nucleului rezolvant $R(x, t; y, \tau)$ relativ la nucleul $M_4(x, t; y, \tau)$ avem în acest caz

$$|R(x, t; y, \tau)| \leqslant N \exp(Nat), \; (x, t), (y, \tau) \in D,$$

în care

$$N \geqslant |M_4(x, t; y, \tau)|, \; (x, t), \; (y, \tau) \in D.$$

În consecinţă,

$$|\varphi(x,t)| \leqslant |\psi(x,t)| + N\int_0^t\int_0^a \exp(Na\tau)\,|\psi(y,\tau)|\,dy\,d\tau \equiv \Phi(x,t), \tag{42}$$

$$u(x,t)| \leqslant |m(x,t)| + \int_0^t\int_0^a |G(x,\xi,t-\alpha)|\,\Phi(\xi,\alpha)\,d\xi\,d\alpha,\ (x,t)\in D. \tag{43}$$

c) Fie

$$\sigma(t) = \int_0^a |\varphi(x,t)|\,dx; \tag{44}$$

$$\lambda(t) > \left|\int_0^a \psi(x,t)\,dx\right|,\ \lambda(0) > 0,\ \frac{d\lambda(t)}{dt} \geqslant 0; \tag{45}$$

$$p(x,\tau) \geqslant |M_4(x,t;y,\tau)|,\ n(x,t,\tau) \geqslant |M_4(x,t;y,\tau)|,$$
$$0 \leqslant x, y \leqslant a,\ 0 \leqslant t, \tau \leqslant T, \tag{46}$$

în care prin $\lambda(t)$, $p(x,\tau)$, $n(x,t,\tau)$ s-au notat funcţii continue cunoscute. Din (20), în corespondenţă cu cele de mai sus, se deduce

$$\sigma(t) \leqslant \lambda(t) + \int_0^t p(x,\tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau \leqslant \lambda(t)\exp\int_0^t p(x,\tau)\,d\tau \equiv \rho(x,t), \tag{47}$$

$$|\varphi(x,t)| \leqslant |\psi(x,t)| + \int_0^t n(x,t,\tau)\ \rho(x,\tau)\,d\tau \equiv \delta(x,t);$$
$$|u(x,t)| \leqslant |m(x,t)| + \int_0^t\int_0^a |G(x,\xi,t-\alpha)|\,\delta(\xi,\alpha)\,d\xi\,d\alpha,\ (x,t)\in D. \tag{48}$$

§ 5. PROBLEME DE CONTUR PENTRU ECUAŢII INTEGRODIFERENŢIALE PARABOLICE CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT, NELINIARE

Să considerăm acum problema de contur

$$u(x,0) = \varphi_0(x),\ u(0,t) \equiv u(a,t) \equiv 0,\ \varphi_0(0);\ u(x,t) \equiv 0,\ t \leqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant a, \tag{49}$$

relativă la ecuaţia integrodiferenţială neliniară cu argument întîrziat

$$P[u] = f[x,t,u(x,t),u(x,t-r_1(t))] +$$
$$+\int_0^t\int_0^a K(x,t;y,\tau)\,F[y,\tau,u(y,\tau),u(y,\tau-r_2(\tau))]\,dy\,d\tau, \tag{50}$$

în care

$$\varphi_0(x), r_i(t) \geqslant 0\ (i=1,2), f(x,t,\alpha,\beta), K(x,t;y,\tau), F(y,\tau;\alpha,\beta)$$

sînt funcţii continue date, depinzînd de argumentele lor într-un domeniu Π.

Folosind raționamentele din § 2 și introducînd funcția $G(x, \xi, t-\alpha)$, se reușește să se transforme problema (49), (50) în ecuația integrală echivalentă

$$u(x,t) = n(x,t) + \int_0^t \int_a^a G(x,\xi,t-\alpha)\Big\{f[\xi, \alpha, u(\xi,\alpha), u(\xi,\alpha-r_1(\alpha))] + \\ + \int_0^\alpha \int_0^a K(\xi,\alpha;y,\tau)\,F[y,\tau,u(y,\tau),u(y,\tau-r_2(\tau))]\,dy d\tau\Big\} d\xi d\alpha \equiv \quad (51)$$

$$\equiv n(x,t) + \int_0^t \int_0^a W[x,t;y,\tau,u(y,\tau),u(y,\tau-r_1(\tau)),u(y,\tau-r_2(\tau))]\,dy d\tau,$$

în care prin $n(x, t)$ s-a notat

$$n(x,t) \equiv \int_0^a \left\{ \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\exp - \left(\frac{\pi i}{a}\right)^2 t \right] \sin\frac{\pi i x}{a} \sin\frac{\pi i \xi}{a} \varphi_0(\xi) \right\} d\xi.$$

Se poate enunța, în consecință, următoarea teoremă.

TEOREMA 3. *Soluția problemei* (49), (50) *este echivalentă cu soluția ecuației integrale* (51). *Dacă în domeniul* II *au loc condițiile* :1) *funcția* $W(.)$ *satisface condiția lui Lipschitz în raport cu argumentele sale al cincilea, al șaselea și al șaptelea, coeficienții din inegalitatea menționată fiind respectiv* $\rho_i(x, t; y, \tau)$, $(i = 1, 2, 3)$, *adică*

$$|W(x, t; y, \tau, w_1, w_2, w_3) - W(x, t; y, \tau, v_1, v_2, v_3)| \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=1}^{3} \rho_i(x, t; y, \tau)\,|w_i - v_i|; \quad (52)$$

și 2) *inegalitatea*

$$l_2 = 1 - 3 \max_D \int_0^t \int_0^a \sum_{i=1}^{3} \rho_i(x, t; y, \tau)\,dy d\tau > 0 \quad (53)$$

$$D = [0 \leqslant t \leqslant T] \times [0 \leqslant x \leqslant a],$$

este îndeplinită[8]), *atunci problema* (49), (50) *posedă o soluție unică aparținînd clasei funcțiilor* C_{21}.

Afirmația din prima parte a teoremei 3 rezultă nemijlocit din însuși mersul de construcție al ecuației (51). Considerînd (49) drept ecuație cu operatori, observăm că operatorul ce se află în membrul al doilea din

[8]) Dacă relația (53) nu este îndeplinită, atunci în inegalitatea (55) construită mai jos, trebuie executate k substituții, în așa fel ca să avem

$$l_3 = 1 - \max_D \int_0^t \int_0^a S_k(x, t; y, \tau)\,dy d\tau > 0, \quad (*)$$

în care prin $S_k(x, t; y, \tau)$ s-a notat nucleul iterat de ordinul k corespunzător nucleului $S(x, t; y, \tau) \equiv \sum_1^3 3\rho_i(x, t; y, \tau)$.

(51) transformă orice funcţie din spaţiul funcţional C_{21} într-o funcţie din acelaşi spaţiu. Mai mult decît atît, odată îndeplinite condiţiile (52) şi (53), este satisfăcut şi principiul reprezentărilor concentrate (S. Banach [39]). De aici se conchide nemijlocit că şi partea a doua a teoremei de mai sus este justificată.

§ 6. PROBLEMA STABILITĂŢII SOLUŢIILOR SISTEMELOR NELINIARE (49), (50)

TEOREMA 4. *Dacă* $u_1(x, t)$ *este soluţia ecuaţiei integrodiferenţiale*

$$P[u_1] = f_1[x, t, u_1(x, t), u_1(x, t - r_1(t))] + \\ + \int_0^t \int_0^a K_1(x, t; y, \tau) F_1[y, \tau, u_1(y, \tau), u_1(y, \tau - r_2(\tau))] \, dy d\tau, \tag{54}$$

relativă la condiţiile de contur (49) *şi dacă au loc condiţiile* 1) *şi* 2) *expuse în teorema 3, atunci soluţia problemei* (49), (50), *este stabilă în raport cu mici perturbaţii ale funcţiilor* $f(\cdot)$, $K(.)$, $F(.)$, $r_i(.)$ $(i = 1, 2)$.

Într-adevăr, se obţine

$$u_1(x, t) = n(x, t) + \int_0^t \int_0^a G(x, \xi, t - \alpha) \Big\{ f_1[\xi, \alpha, u_1(\xi, \alpha), u_1(\xi, \alpha - r_1(\alpha))] + \\ + \int_0^\alpha \int_0^a K_1(\xi, \alpha; y, \tau) F_1[y, \tau, u_1(y, \tau), u_1(y, \tau - r_2(\tau))] \, dy d\tau \Big\} d\xi d\alpha \equiv$$

$$\equiv \int_0^t \int_0^a W_1[x, t; y, \tau, u_1(y, \tau), u_1(y, \tau - r_1(\tau)), u_1(y, \tau - r_2(\tau))] \, dy d\tau + n(x, t)$$

şi, în consecinţă

$$|u(x, t) - u_1(x, t)| \leqslant 3 \sum_1^3 \int_0^t \int_0^a \rho_i(x, t; y, \tau) |u(y, \tau) - u_1(y, \tau)| \, dy d\tau + \\ + \left| \int_0^t \int_0^a \Big\{ W[x, t; y, \tau, u_1(y, \tau), u_1(y, \tau - r_1(\tau)), u_1(y, \tau - r_2(\tau))] - \right. \tag{55}$$

$$\left. - W_1[x, t; y, \tau, u_1(y, \tau), u_1(y, \tau - r_1(\tau)), u_1(y, r - r_2(\tau))] \Big\} \right| dy d\tau.$$

Rezultă apoi

$$\max_D |u(x, t) - u_1(x, t)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_D \left| \int_0^t \int_0^a H[x, t; y, \tau, u_1(y, \tau), u_1(y, \tau - r_1(\tau)), u_1(y, \tau - r_2(\tau))] \, dy d\tau \right| : l_2,$$

în care s-a notat $H(.) \equiv W$.

Prin urmare, dacă

$$\max_\Pi |H(.)| < \varepsilon \, l_2 : \Delta,$$

atunci

$$|u(x, t) - u_1(x, t)| < \varepsilon, \quad (x, t) \in D, \ \Delta = aT. \tag{56}$$

În afară de aceasta, avem

$$|u(x, t)| \leqslant |u_1(x, t)| + \varepsilon \int_0^t \int_0^a S(x, t; y, \tau)\, dy d\tau + \left| \int_0^t \int_0^a H[x, t; y, \tau, u_1(y, \tau), u_1(y, \tau - r_1(\tau)), u_1(y, \tau - r_2(\tau))]\, dy d\tau \right| \quad (x, t), u_1 \in \Pi. \tag{57}$$

§ 7. FORMULE DE MAJORARE RELATIVE LA SOLUȚIILE SISTEMULUI INTEGRODIFERENȚIAL NELINIAR (49), (50)

Presupunem că pentru toți (x, t), $u \in \Pi$ au loc inegalitățile

$$|f[x, t, u(x, t), u(x, t - r_1(t))]| \leqslant a_1(x, t)\,|u(x, t)| + a_2(x, t)\,|u(x, t - r_1(t))|, \tag{58}$$

$$|F[x, t, u(x, t), u(x, t - r_2(t))]| \leqslant a_3(x, t)\,|u(x, t)| + a_4(x, t)\,|u(x, t - r_2(t))|, \tag{59}$$

în care prin $a_i(x, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, 4)$ s-au notat funcții continue non-negative în raport cu argumentele lor.

Din (51) se găsește

$$\int_0^a |u(x, t)|\, dx \leqslant \left| \int_0^a n(x, t)\, dx \right| + \left| \int_0^a dx \int_0^t \int_0^a G(x, \xi, t - \alpha) \left\{ f[\xi, \alpha, u(\xi, \alpha), u(\xi, \alpha - r_1(\alpha))] + \int_0^\alpha \int_0^a K(\xi, \alpha; y, \tau) F[y, \tau, u(y, \tau), u(y, \tau - r_2(\tau))]\, dy d\tau \right\} d\xi d\alpha \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_1(t) + \int_0^t \int_0^a G_0(t, \xi, \alpha) \left\{ a_1(\xi, \alpha)\,|u(\xi, \alpha)| + a_2(\xi, \alpha)\,|u(\xi, \alpha - r_1(\alpha))| + \int_0^\alpha \int_0^a K(\xi, \alpha; y, \tau) [a_3(y, \tau)\,|u(y, \tau)| + a_4(y, \tau)\,|u(y, \tau - r_4(\tau))|]\, dy d\tau \right\} d\xi d\alpha \equiv$$

$$\equiv \lambda_1(t) + \int_0^t \int_0^a [E_1(t, \xi, \alpha) | u(\xi, \alpha)| + E_2(t, \xi, \alpha) | u(\xi, \alpha - r_1(\alpha))| +$$

$$+ E_3(t, \xi, \alpha) | u(\xi, \alpha - r_2(\alpha))|] \, d\xi d\alpha \leqslant \lambda_1(t) + \int_0^t \int_0^a [H_1(t, \alpha) | u(\xi, \alpha) +$$

$$+ H_2(t, \alpha) | u(\xi, \alpha - r_1(\alpha))| + H_3(t, \alpha) | u(\xi, \alpha - r_2(\alpha))|] \, d\xi d\alpha ;$$

$$\lambda_1(t) = \left| \int_0^a n(x, t) \, dx \right|, \; H_i(t, \alpha) \geqslant E_i(t, \xi, \alpha) (i = 1, 2, 3) ; 0 \leqslant \xi \leqslant a, 0 \leqslant t, \alpha \leqslant a,$$

în care prin $G_0(t, \xi, \alpha)$ s-a notat funcţia ce s-a obţinut din funcţia $G(x, \xi, t-\alpha)$ ca urmare a integrării acestei din urmă funcţii în raport cu x între limitele 0 şi a.

Notînd prin

$$H(t, \alpha) \equiv H_1(t, \alpha) + H_2(t, \alpha) + H_3(t, \alpha)$$

şi ţinînd seama de relaţia

$$\int_0^t | u(x, t - h)| \, dt \leqslant \int_0^t | u(x, t)| \, dt, \; t \geqslant 0, \; h > 0,$$

se obţin următoarele inegalităţi integrale :

$$\int_0^a | u(x, t)| \, dx \leqslant \lambda_1(t) \exp \int_0^t H(t, \alpha) \, d\alpha \equiv \gamma(t), \tag{60}$$

$$\int_0^t \int_0^a | u(x, t)| \, dx dt \leqslant \int_0^t \gamma(t) \, dt. \tag{61}$$

Prin urmare,

$$| u(x, t)| \leqslant | n(x, t)| + \int_0^t \Big\{ Q(x, t, \alpha) \, [b_1(\alpha) + b_2(\alpha)] \, \gamma(\alpha) +$$

$$+ \int_0^a | G(x, \xi, t - \alpha)| \int_0^\alpha K_0(\xi, \alpha, \tau) \, [b_3(\tau) + b_4(\tau)] \, \gamma \cdot \tau \cdot d\tau d\xi \Big\} d\alpha, \tag{62}$$

în care s-au introdus următoarele notaţii :

$$Q(x, t, \alpha) \geqslant | G(x, \xi, t - \alpha)| ; \; K_0(\xi, \alpha, \tau) | \geqslant | K(\xi, t, \alpha, \tau)| ;$$

$$b_i(t) \geqslant a_i(x, t) \; (i = 1, 2, \ldots, 4), \; 0 \leqslant x, \xi \leqslant a, \; 0 \leqslant t, \alpha \leqslant T.$$

Să evaluăm acum modulul funcţiei $u(x, t)$, $| u(x, t)|$ fără a se folosi de majorarea funcţiilor $K(.)$, $G(.)$, $a_i(.)$.

Din (51) se obţine

$$| u(x, t)| \leqslant | n(x, t)| + \int_0^t \int_0^a | G(x, \xi, t - \alpha)| \Big\{ [a_1(\xi, \alpha) + a_2(\xi, \alpha)] | u(\xi, \alpha)| +$$

$$+\int_0^{\alpha}\int_0^{a} |K(\xi, \alpha; y, \tau)| \, [a_3(y, \tau) + a_4(y, \tau)] \, |u(y, \tau)| \, dy d\tau \Big\} d\xi d\alpha \equiv$$

$$\equiv |n(x, t)| + \int_0^{t}\int_0^{a} B(x, \xi; t, \alpha) \, |u(\xi, \alpha)| \, d\xi d\alpha, \quad (x, t), u \in \Pi. \quad (63)$$

Prin urmare, fără a micșora din generalitate, dacă este îndeplinită inegalitatea (*) (vezi observația relativă la (53))

$$l_3 = 1 - \max_D \int_0^{t}\int_0^{a} B(x, \xi; t, \alpha) \, d\xi d\alpha > 0, \quad (64)$$

avem

$$\max_D |u(x, t)| \leqslant \max_D |n(x, t)| : l_3 = \nu,$$

$$|u(x, t)| \leqslant |n(x, t)| + \nu \int_0^{t}\int_0^{a} B(x, \xi; t, \alpha) \, d\xi d\alpha, \, (x, t) \in D.$$

Observație. În mod analog se poate trata problema (6) relativă la ecuația integrodiferențială neliniară cu argument întîrziat (50).

§ 8. DIN TEMATICA CERCETĂRILOR AFLATE ÎN CURS DE ELABORARE

Într-un șir de note aflate în curs de elaborare se vor studia, în afară de seria de probleme de contur relativă la ecuații integrodiferențiale cu operatori policalorici [40], unele probleme legate de cîteva rezultate recente obținute de M. I. Vișik și G. I. Eskin [41] privitoare la ecuații integrodiferențiale parabolice generale, evaluări apriorice în alte spații funcționale decît spațiul C_{21} [42] (de exemplu, spațiul L_p) a soluțiilor relative la sisteme integrodiferențiale considerate; extinderi la sisteme integrodiferențiale parabolice ale unor rezultate obținute de J.R. Cannon [43] pentru probleme parabolice; extinderi la spații cu mai multe dimensiuni a ecuațiilor integrale de teorie a laserilor, interesante și prin faptul că pentru atare ecuații nu mai are loc valabilitatea teoremelor lui Fredholm [44], precum și studiul ecuațiilor policalorice, numite „ecuațiile lui M. Nicolescu" [45].

Primită la redacție la 7 mai 1965

BIBLIOGRAFIE

1. D. Mangeron, L. E. Krivoshein, *New Methods of Numerical Calculation for the Solutions of Various Integro-differential Systems.* I. *Polyvibrating Integro-differential Systems,* Rev. roum. sci. techn. — Méc. appl., **9**, *6*, 1 195—1 221 (1964).
2. — *New Methods of Numerical Calculation of the Solutions of various Integro-Differential Systems presenting Interest in Applied Mechanics.* II. *Polylocal Ordinary Integro-Differential Systems,* Rev. roum. sci. techn. — Méc. appl., **10**, *1*, 3—34 (1965).

3. — *Nuovi problemi concernenti sistemi funzionali con operatori iterati. I. Problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali con operatori calorici ed argomenti ritardati*, Accademia Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. VIII, **XXXVII** (1965).
4. — *Quelques théorèmes concernant systèmes intégro-différentiels caloriques à rémanence*, Bull. Acad. Roy. Sci. Belgïque, s. 5, **LI** (1965).
5. — J. E. WILKINS, jr., *Review concerning D. Mangeron's paper published in the Bull. Polytechn. Inst. Jassy*, 3, 153—155, 1948, Math. Rev., **10**, 719 (1949).
6. D. MANGERON, *Sur certains problèmes de calcul des variations concernant une nouvelle classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, Bull. Inst. polytechn. Jassy, **4 (8)**, 153—155 (1958).
7. F. MANARESI, *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **XXIII**, 163—213 (1954).
8. M. SALVADORI, *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. II, **V**, 51—72 (1936).
9. F. S. ROSSI, *Sul metodo di Mangeron nello studio di alcuni problemi integro-differenziali*, Accad. Naz. dei Lincei, s. 8, **XXXV**, *6* (1963).
10. G. STAMPACCHIA, *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali del tipo iperbolico*, Giorn. Mat., **78**, s. IV, 81—96 (1948—1949).
11. T. KAMYTOV, *Applicazione del metodo di Mangeron — Krivosalhein lo studio di alcuni sistemi integro-differenziali*, Accad. Naz. dei Lincei, Rend., Cl. sci. fis., mat. e nat., s. VIII, **XXXVII**, *5*, 242—245 (1964).
12. Ю. М. БЕРЕЗАНИСКИЙ, *О краевых задачах для общих дифференциальных операторов в частных производных*, Доклады АН СССР, **122**, *6*, 959—962 (1958).
13. MIRON NICOLESCU, *Asupra unor proprietăţi caracteristice de medie ale funcţiilor policalorice*, Com. Acad. R.P.R., **IV**, *4*, 11—12, 552—554 (1954).
14. D. MANGERON, *Sur une nouvelle classe de problèmes à la frontière*, International Congress of Mathematicians, Abstracts of Short Communications, Stockholm, 1962, p. 95.
15. R. BELLMAN a. collab., *Bibliography concerning Dynamic Programming Problems*. ARAND Corporation Research Study, Princeton University Press (in print).
16. M. PICONE, *Ref. über D. Mangeron's Arbeit von Rend. Accad. d'Italia, s.* VII, 1939, 1—9. Zentralblatt für Math., **24**, 201—202 (1941).
17. J. FAVARD, *Quelques théorèmes concernant les équations polyvibrantes, dites „équations de Mangeron"*, Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **XI (XV)**, *1—2* (1965).
18. И. Н. ВЕКУА, *Четвертый Конгресс Румынских математиков, Бухарест, 27 мая-4 июня 1956 г.*, Вестник АН СССР, 1956.
19. D. MANGERON, L. E. KRIVOSHEIN, *Sulla risoluzione di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate parziali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **XXXIV**, 344—368 (1964).
20. D. MANGERON, *Applicazione del metodo di Picone della transformata di Laplace ad intervallo d'integrazione finito allo studio delle equazioni alle derivate parziali*, Rend. Accad. d'Italia, s. VII, *1*, 1—9 (1939).
21. L. POLI, P. DELERUE, *Calcul symbolique à deux variables*, Mémorial des Sciences Mathématiques, **CXXVII**, Gauthier-Villars, Paris, p. 49—50 (1954).
22. D. MANGERON, L. E. KRIVOSHEIN, *Sistemi policalorici a rimanenza ed a argomento ritardato. I. Problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali con operatore calorico ed argomento ritardato. A Mauro Picone nel suo 80° compleanno*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **XXXV** (1965).
23. D. MANGERON, *Sur quelques problèmes à la frontière qui ne sont pas „bien posés" au sens d'Hadamard*, I. Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belgique, s. 5, **L.** *5*, 515—522 (1964).
24. — *Neue graphisch-analytische Methoden zum Studium der nichtlinearen Schwingungen*, Tagungsbericht III. Konferenz über Nichtlineare Schwingungen, DAW, Inst. angew. Math. u. Mech., 1965, p. 76—90.
25. * * * *Доклады третьей Сибирской Конференции по Математике и Механике*, Изд. Томского Ун-та. Томск, 1964, 407 стр.
26. MIRON NICOLESCO, *Fonctions polyharmoniques*, Hermann, Paris, 1936.
27. MAURO PICONE, *Vita ed Opera*, Annuario dell'Accad. Naz. dei XL, Roma, 1961, p. 287—311.

28. D. Mangeron, *Sur une classe de problèmes à la frontière non elliptiques d'ordre supérieur.* C. r. Acad. Sci., Paris, **255**, p. 2 894—2 896, 1962. *Sur une nouvelle classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur,* ibidem, **204**, 1937, 94—96, 544—546, 1 022—1 024.
29. * * * *Proceedings International Congress of Applied Mechanics,* München, aug.-sept. 1964, Springer-Verlag, 1965.
30. * * * Centro Internazionale Matematico Estivo, Bressanone, Maggio-Giugno 1965. *Meccanica dei mezzi continui* (Preside C. Truesdell).
31. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, ГИТТЛ, Москва, 1953.
32. Л. Е. Кривошеин, *Решение смешанной задачи для одного класса интегро-дифференциальных уравнений в частных производных*, сб. *Материалы 12-й Научной конференции проф. -препод. состава Физ- -матем. фак. Кирг. Гос. Ун.* 1964, p. 21—24.
33. D. Mangeron, L. E. Krivoşhein, *Teoremi di esistenza, di unicità e di valutazione delle soluzioni di alcuni problemi al contorno concernenti equazioni integro-differenziali con operatori esterni di tipo parabolico,* Accad. Naz. dei Lincei, Rend., Cl. sci. fiz., mat. e nat., s. VII, **XXXIV**, *4*, 451—456 (1964).
34. — *Probleme mixte pentru o clasă de ecuații integro-diferentiale de tip parabolic,* Bul. Inst. politehn. București, **26**, *1*, 17—31 (1964).
35. А. Б. Самаров, *Теорема существования решения системы интегральных уравнений с разрывным оператором*, в сб. *Докл. 3-й Сибирск. конференции по матем. и механ., 1964*, Томск, Томский ун-т, 1964, p. 148.
36. F. Rossi, *Quelques théorèmes concernant les équations de Mangeron,* Acta Mathematica Sinica, **15** (1965).
37. D. Mangeron, *Sur quelques procédés de ˹calcul concernant la détermination des formules de majoration pour certains systèmes différentiels,* Bull. Inst. polytechn. Jassy, **3**, *2*, 814—818 (1948).
38. M. Picone, *Sulle autosoluzioni e sulle formole di maggiorazione per gli integrali delle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte,* Math. Z., **28**, 510—526 (1928).
39. S. Banach, *Théorie des opérations linéaires,* PTN, Varşovia, 1932.
40. D. Mangeron, L. E. Krivoshein, *Quelques problèmes concernant les équations intégro-différentielles aux opérateurs caloriques,* Rev. Roum. Math. pures et appl., **X** (1965).
41. М. И. Вишик, Г. И. Эскин, *Общие параболические интегро-дифференциальные уравнения*, УМН, **19**, *6*,215—228 (1964).
42. А. С. Симонов, *Априорные оценки в* L_p *и теоремы существования для некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений*, в сб. *Докл. 3-й Сибирск. конференции по матем. и механ., 1964*, Томск, Томский ун-т,, 1964, 152—153.
43. J. R. Cannon, *Determination of certain parameters in heat conduction problems,* J. Math. Analysis and appl., **8**, *2*, 188—201 (1964).
44. Samuel P. Morgan, *On the integral equation of laser theory,* IEEE Trans. Microwave Theory and Techn., **11**, *3*, 191—193 (1963).
45. D. Mangeron, L. E. Krivoşein, *Alcuni problemi concernenti equazioni con operatori policalorici, detti „equazioni di M. Nicolescu"*. Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat., s. **VIII**, **XLI** (sub tipar).

CERCETĂRI TEORETICE ŞI EXPERIMENTALE ASUPRA STRATULUI-LIMITĂ TRANZIŢIONAL PE EXTRADOSUL UNUI PROFIL DE ARIPĂ LA NUMERE REYNOLDS SUBCRITICE ŞI CRITICE[1]

de ŞT. SĂVULESCU şi I. PETRU

Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

Scopul lucrării îl constituie cercetarea teoretică şi experimentală a influenţei gradientului de presiune longitudinal asupra evoluţiei unei perturbaţii finite şi tridimensionale într-un strat-limită la numere Reynolds subcritice şi critice.
Se expune metoda teoretică de calcul a caracteristicilor medii ale stratului-limită cu gradient de presiune : grosimea stratului, punct de desprindere, $\mathcal{R}e_{\delta^*}$, punct de indiferenţă şi distribuţia intensităţii fluctuaţiilor.
Rezultatele teoretice sînt confruntate cu datele obţinute experimental, indicîndu-se metodica de perturbare şi de măsurare elaborată în acest scop.
Modul de evoluţie al perturbaţiilor finite şi tridimensionale este comparat cu indicaţiile teoriei stabilităţii prin mici perturbaţii bidimensionale.
Structura stratului-limită tranziţional este prezentată sub aspect calitativ şi cantitativ cu ajutorul oscilogramelor şi spectrogramelor.
În final sînt indicate concluziile referitoare la stratul-limită tranziţional, în condiţiile existenţei sau absenţei gradientului de presiune.

1. INTRODUCERE

În lucrările precedente [1], [2] a fost studiat caracterul stratului-limită tranziţional, perturbat printr-un jet de intensitate mică, pe o placă cu gradient de presiune longitudinal nul.

Obiectivul principal al lucrării de faţă îl constituie cercetarea influenţei gradientului de presiune longitudinal asupra caracteristicilor

[1]) Publicată şi în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, *1* (1966) (în limba franceză)

stratului-limită tranziţional. Deşi în literatura de specialitate [3] există numeroase rezultate cu privire la această problemă, ele se referă mai mult la aspectele practice şi la cele calitative, relevîndu-se în special influenţa deosebit de importantă a gradientului de presiune longitudinal pozitiv asupra tuturor caracteristicilor stratului-limită tranziţional.

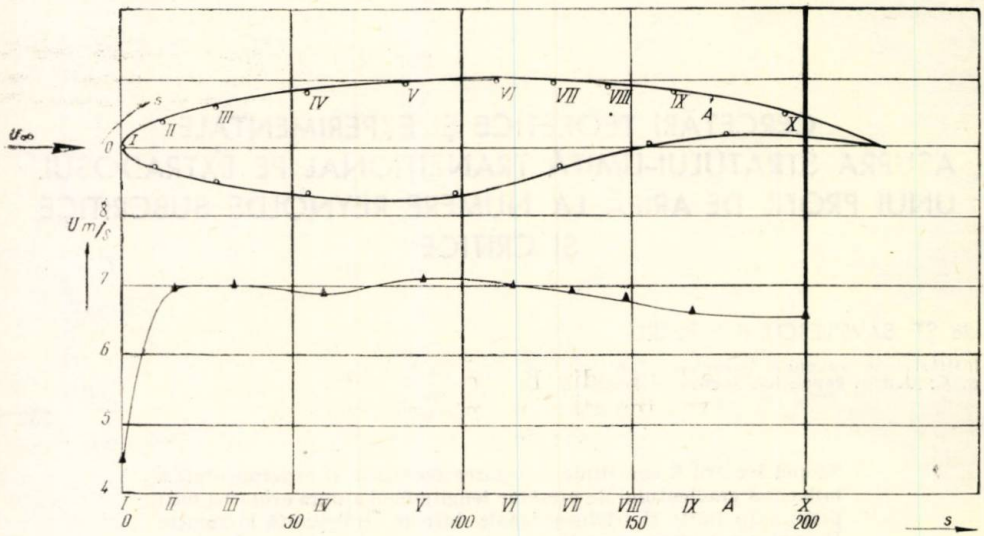


Fig. 1. — Profilul de aripă încercat şi variaţia vitezei pe extrados.

În ultimul timp, un număr important de cercetări experimentale au fost axate pe studiul mecanismului tranziţiei pe o placă plană, utilizîndu-se diferite metode de perturbare. În cadrul colectivului de cercetare a stratului-limită din Institutul de mecanică aplicată s-a elaborat o metodă de perturbare tridimensională cu un jet de intensitate mică [1], metodă extinsă şi în cazul de faţă. În plus, de data aceasta au fost controlate intensitatea şi frecvenţa perturbaţiei, metodica de experimentare fiind indicată pe parcursul articolului.

Instalaţia experimentală şi aparatura de măsură bazată pe termoanemometria cu fir cald sînt descrise în lucrările precedente [1], [2].

Sub aspect teoretic, prezenta lucrare se bazează pe aplicarea metodei de integrare a ecuaţiilor stratului-limită, elaborată anterior [4], pentru determinarea distribuţiei intensităţii fluctuaţiilor în fiecare secţiune a profilului de aripă, completată în cadrul lucrării cu rezultate noi pentru determinarea caracteristicilor medii ale stratului limită (grosime, desprindere, $\mathcal{R}e_{\delta^*}$, punct de indiferenţă etc.).

2. MACHETA ŞI CONDIŢIILE EXPERIMENTALE

Profilul de aripă laminar $A/6$, prevăzut pe contur cu 17 prize de presiune, este reprezentat la scara 1 :1 în figura 1. Lungimea corzii machetei, 223 mm, a fost determinată în funcţie de influenţa stratului-limită de

pe pereţii sufleriei plate. Regimul de lucru al sufleriei a fost ales pe baza a două considerente :

a) situarea sub $\mathcal{R}e_{\delta^*}$ critic pentru placa plană, conform specificului stratului-limită tranziţional cercetat de noi la $\mathcal{R}e_{\delta^*}$ subcritice ;

b) formarea unui strat-limită suficient de gros pentru a putea permite o explorare cît mai precisă.

Aceste două considerente au dus la alegerea unei viteze de lucru de $U_\infty \simeq 6$ m/s, adică a unui număr Reynolds raportat la coardă de $\mathcal{R}e = \frac{U_\infty c}{\nu} \simeq 8{,}9.10^4$ şi la o grosime de $\delta_{\max \text{ placă}} \simeq 5\sqrt{\frac{\nu c}{U_\infty}} = 3{,}73$ mm.

Gradul de turbulenţă al curentului exterior a fost de

$$Tu = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U_\infty} \simeq 0{,}002.$$

După cum se observă din figura 1, profilul de aripă este „laminar".

S-au explorat incidenţele mici, pe de o de parte pentru că interesau gradienţi de presiune longitudinali mici şi, pe de altă parte, la incidenţe mari condiţiile de experimentare nu mai rămîneau în limitele satisfăcătoare de lucru. În felul acesta am obţinut un strat-limită laminar cu fluctuaţii în apropierea lui $\mathcal{R}e_{\delta^*}$ critic.

3. DETERMINAREA CARACTERISTICILOR MEDII ALE STRATULUI-LIMITĂ

3.1. În figura 1 este arătată distribuţia vitezei exterioare pe extradosul profilului de aripă la incidenţa de lucru aleasă funcţie de abscisa s, măsurată pe conturul profilului. Se remarcă faptul că gradientul de presiune este foarte mic :

$$\frac{dp}{ds} \sim \frac{\Delta p}{\Delta x} < 6 \text{ kg/m}^3.$$

Conform acestei distribuţii de presiune, care are un minim aproximativ în dreptul prizei V, am ales ca domeniu de studiu prizele IV, V, VI, VII, VIII, IX, şi A. În aceste puncte s-au determinat profilele de viteze cu ajutorul unui tub Pitot cu $\varnothing_{\text{ext}} = 0{,}6$ mm şi au fost verificate cu anemometrul cu fir cald. În tabela 1 sînt date unele caracteristici ale domeniului cercetat.

Profilele de viteză obţinute experimental în punctele IV-A precum şi alte distribuţii deduse din acestea sînt arătate în figura 2. Se observă că profilele de viteză în secţiunea IV—VII sînt puţin deosebite de profilul Blasius, datorită gradientului de presiune mic şi a distanţei s, de dezvoltare a stratului-limită, de asemenea mică. În schimb, profilele de viteză din secţiunile VIII, IX şi A prezintă un caracter inflexional specific influenţei gradientului de presiune pozitiv şi dezvoltării stratului-limită. De altfel, punctul A se găseşte foarte aproape de punctul de desprindere.

3.2. Utilizînd transformarea de scară

$$\eta_1 = \frac{\int_0^y u\,dy}{\int_0^\delta u\,dy} \tag{1}$$

Tabela 1

Caracteristicile medii ale stratului-limită cercetat

Priza		IV	V	VI	VII	VIII	IX	A
s	mm	59	88	115	132	148	167	178
$\frac{s}{c}$	—	0,264	0,394	0,515	0,59	0,664	0,75	0,797
U_e	m/s	6,84	7,06	7	6,94	6,8	6,64	6,64
$\frac{dp}{ds} = -\rho U_e \frac{dU_e}{ds}$	kg/m³	+1,71	−4,41	+4,81	+4,775	+5,95	+5,62	+4,15
δ	mm	2,25	2,5	2,5	2,75	3,25	4	5,3
$\mathcal{R}e_\delta = \frac{U_e \delta}{\nu}$	—	1 025	1 175	1 169	1 270	1 472	1 770	2 342
$\delta^* = \delta \int_0^1 (1-u_a)\,d\eta_0$	mm	0,84	0,878	0,825	0,725	1,215	1,784	2,89
$\mathcal{R}e_{\delta^*} = \frac{U_e \delta^*}{\nu}$	—	383	414	385	336	552	792	1 280
$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_e}{ds}$	—	−0,674	+2,08	−2,91	−2,772	−4,92	−7,2	−9,36

şi introducînd notaţiile

$$u_a = \frac{u}{U_e}, \quad \eta_0 = \frac{y}{\delta}, \tag{2}$$

vom găsi din ecuaţiile de mişcare ale stratului-limită o soluţie de primă aproximaţie de forma

$$u_a^0 \simeq \eta_1(2 - \eta_1). \tag{3}$$

Pentru determinarea teoretică a caracteristicilor stratului-limită am utilizat metoda profilelor-tip, luînd ca profil de bază expresia (3).

În acest fel se obţin pentru grosimea stratului-limită şi, respectiv, pentru condiţia de desprindere expresiile

$$\delta = 4{,}8\frac{\sqrt{\nu\int_0^s U_e^3\,\mathrm{d}s}}{U_e^2}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{U_e}\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\int_0^s U_e^3\,\mathrm{d}s}{U_e^3} + 0{,}2 = 0. \tag{5}$$

Efectuînd calculul după formula (5), obţinem abscisa punctului de desprindere

$$s_{\text{despr}} = 0{,}184 \text{ m},$$

care concordă cu datele experimentale.

Pentru comparare am folosit şi formula lui Thwaites :

$$\frac{1}{U_e}\cdot\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}s}\frac{\int_0^s U_e^5\,\mathrm{d}s}{U_e^5} + 0{,}182 = 0$$

şi am obţinut

$$s_{\text{despr}} = 0{,}180 \text{ m (media dintre 0,155 şi 0,205 m)}.$$

Determinarea teoretică a punctului de indiferenţă, definit în [3] ca fiind punctul în care — pentru profilul de viteze respectiv — este îndeplinită condiţia

$$\mathcal{R}e_{\delta^*} = \mathcal{R}e_{\delta^*}\text{ critic}, \tag{6}$$

rezultă din rezolvarea ecuaţiei

$$P(\wedge) = 1{,}74\sqrt{\frac{\int_0^s U_e^3\,\mathrm{d}s}{\nu\,U_e^2}}, \tag{6'}$$

în care $P(\wedge)$ este un polinom care aproximează funcţia $\mathcal{R}e_{\delta^*}$ critic $= f(\wedge)$, $\wedge = 23{,}04\dfrac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}s}\dfrac{\int_0^s U_e^3\,\mathrm{d}s}{U_e^4}$ fiind parametrul de formă.

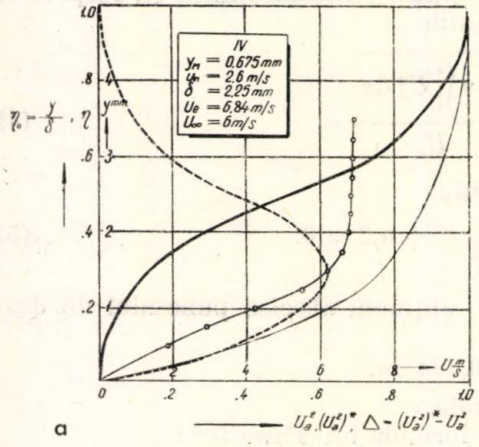
În cazul plăcii plane, abscisa punctului de indiferenţă e dată de relaţia

$$x_{\text{indif}} \simeq 2{,}06\frac{1}{U_e}(m) \tag{6''}$$

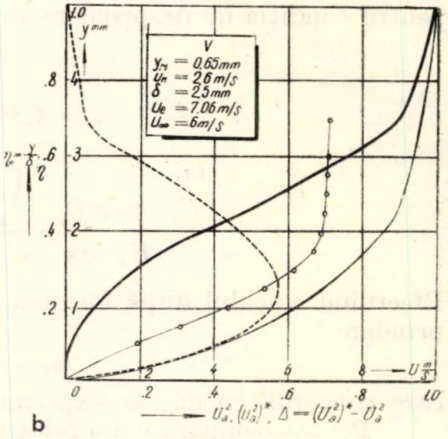
sau

$$\frac{x_{\text{indif}}}{L} \simeq 0{,}137.10^6\frac{1}{\mathcal{R}e_L},$$

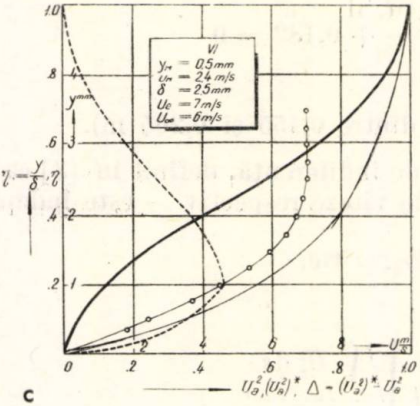
unde L este lungimea plăcii,


IV
y_m = 0.675mm
u_m = 2.6 m/s
δ = 2.25mm
U_e = 6.84 m/s
U_∞ = 6m/s
$\eta_c = \frac{y}{\delta} \cdot \eta$
y^{mm}
$U\frac{m}{s}$
$U_a^2, (U_a^2)^*, \Delta = (U_a^2)^* - U_a^2$

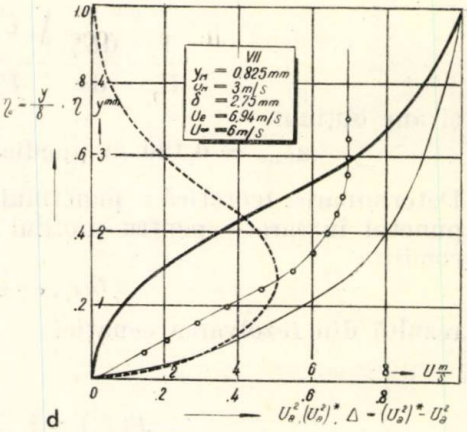
a


V
y_m = 0.65mm
u_m = 2.6 m/s
δ = 2.3mm
U_e = 7.06 m/s
U_∞ = 6m/s
$\eta_c = \frac{y}{\delta} \cdot \eta$
y^{mm}
$U\frac{m}{s}$
$U_a^2, (U_a^2)^*, \Delta = (U_a^2)^* - U_a^2$

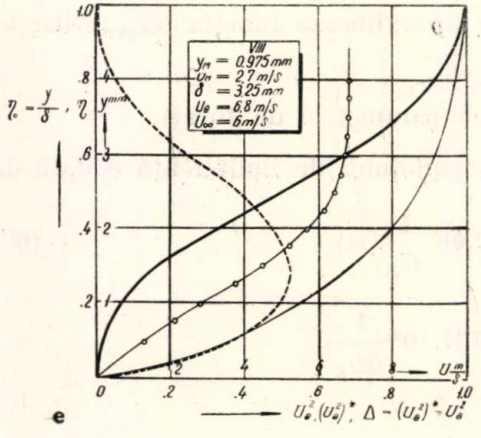
b


VI
y_m = 0.5mm
u_m = 2.4 m/s
δ = 2.5mm
U_e = 7 m/s
U_∞ = 6m/s
$\eta_c = \frac{y}{\delta} \cdot \eta$
y^{mm}
$U\frac{m}{s}$
$U_a^2, (U_a^2)^*, \Delta = (U_a^2)^* - U_a^2$

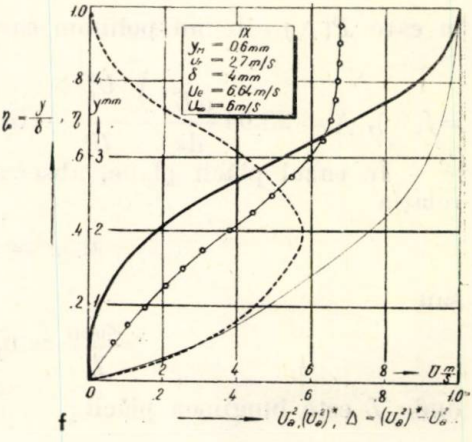
c


VII
y_m = 0.825mm
u_m = 3 m/s
δ = 2.75mm
U_e = 6.94 m/s
U_∞ = 6m/s
$\eta_c = \frac{y}{\delta} \cdot \eta$
y^{mm}
$U\frac{m}{s}$
$U_a^2, (U_a^2)^*, \Delta = (U_a^2)^* - U_a^2$

d


VIII
y_m = 0.975mm
u_m = 2.7 m/s
δ = 3.25mm
U_e = 6.8 m/s
U_∞ = 6m/s
$\eta_c = \frac{y}{\delta} \cdot \eta$
y^{mm}
$U\frac{m}{s}$
$U_a^2, (U_a^2)^*, \Delta = (U_a^2)^* - U_a^2$

e


IX
y_m = 0.6mm
u_m = 2.7 m/s
δ = 4mm
U_e = 6.64 m/s
U_∞ = 6m/s
$\eta_c = \frac{y}{\delta} \cdot \eta$
y^{mm}
$U\frac{m}{s}$
$U_a^2, (U_a^2)^*, \Delta = (U_a^2)^* - U_a^2$

f

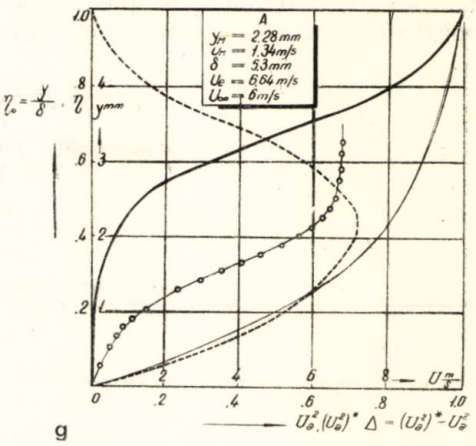
Fig. 2. — Profile de viteze în stratul-limită de pe extradosul machetei încercate, distribuţiile de energie adimensională U_a^2, transformatele acestor distribuţii $(U_a^2)^*$ şi repartiţia teoretică a intensităţii fluctuaţiilor de energie (Δ) în secţiunile studiate ($a-g$);

—o— profilul de viteză determinat experimental;

——— distribuţia de energie adimensională U_a^2;

——— distribuţia transformată $(U_a^2)^*$;

- - - - repartiţia intensităţii fluctuaţiilor $\Delta = (U_a^2)^* - (U_a^2)$.



$\mathcal{R}e_L$ — numărul Reynolds raportat la lungimea plăcii.

În mod practic am procedat în felul următor. Cunoscînd

$$\mathcal{R}e_{\delta^*} = f_1\left(\frac{s}{c}\right) \text{ şi } \wedge = f_2\left(\frac{s}{c}\right)$$

şi fiind dată în lucrarea [3] curba

$$\mathcal{R}e_{\delta^*} \text{ critic} = f_3(\wedge),$$

valabilă pentru toate profilele de viteză caracterizate numai prin parametrul $\wedge$ după metoda Kármán-Pohlhausen, rezultă că punctul de indiferenţă satisface ecuaţia

$$f_1\left(\frac{s}{c}\right) = f_3\left[f_2\left(\frac{s}{c}\right)\right]. \tag{7}$$

În cazul nostru, folosind datele experimentale din tabela 1, am obţinut

$$s_{\text{indif}} = 0{,}110 \text{ m}.$$

Acest punct se găseşte la 5 mm înainte de priza VI.

În privinţa calculelor teoretice pentru determinarea caracteristicilor medii ale stratului-limită inserate mai sus, menţionăm că ele au un caracter rezumativ în scopul ilustrării algoritmului de calcul. Calculul parametrilor stratului-limită, pe baza metodei schiţate, urmează să fie detaliat şi dezvoltat într-o altă lucrare.

3.3. Fiind cunoscută scurgerea de bază, adică profilele de viteză medie, am utilizat metoda teoretică elaborată anterior [5] pentru a construi o legătură între distribuţia de energie medie şi distribuţia de energie a fluctuaţiilor şi a obţine în felul acesta informaţii teoretice preliminare

asupra fluctuaţiilor suprapuse mişcării medii. Cu ajutorul unei transformări de scară referitoare la energie

$$\eta_2 = \frac{\int_0^y u^2 \, dy}{\int_0^\delta u^2 \, dy} \tag{8}$$

Tabela 2

Caracteristicile medii ale fluctuaţiilor

Priza		IV	V	VI	VII	VIII	IX	A
$\frac{s}{c}$	—	0,264	0,394	0,515	0,59	0,664	0,75	0,797
η_{0M}	—	0,3	0,26	0,2	0,3	0,3	0,4	0,43
y_M	mm	0,675	0,65	0,5	0,825	0,975	1,6	2,28
u_{yM}	m/s	2,6	2,6	2,4	3	2,7	2,75	1,94
Δ_{max}	—	0,63	0,575	0,457	0,513	0,53	0,583	0,725
$\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U_e}$ în y_M	%	2,28	0,106	0,177	0,259	0,552	0,92	1,85

şi folosind notaţiile (2), au fost determinate distribuţiile de energie adimensională transformată

$$(u_a^2)^x = F(\eta_2)$$

din distribuţiile de energie adimensională obţinute experimental :

$$u_a^2 = \varphi(\eta_0).$$

Legătura dintre energiile adimensionale — transformate şi netransformate — şi fluctuaţia medie pătratică a fost pusă în evidenţă în lucrările precedente prin relaţia

$$\overline{u'^2} \simeq k\,|\,(u_a^2)^x - u_a^2\,| = k.\,\Delta. \tag{9}$$

În figura 2 sînt trasate distribuţiile u^2, $(u_a^2)^x$ şi $\Delta = |\,(u_a^2)^x - u_a^2\,|$ în fiecare secţiune studiată. Au fost stabilite astfel două caracteristici :

— valorile η_{0M} în care $\Delta = \Delta_{max}$;

— valorile $\Delta_{max} = f\left(\frac{s}{c}\right)$.

Aceste valori sînt indicate în tabela 2.

În figura 3 este dată distribuţia intensităţii fluctuaţiei de viteză, obţinută atît experimental din măsurarea în punctele y_M a raportului

$\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U_e}$ (%), cît și teoretic după formula $\overline{u'^2} \sim \Delta$, în lungul extradosului machetei studiate. De menționat faptul că estimarea teoretică dă o bună concordanță cu experiența în determinarea punctelor de intensitate

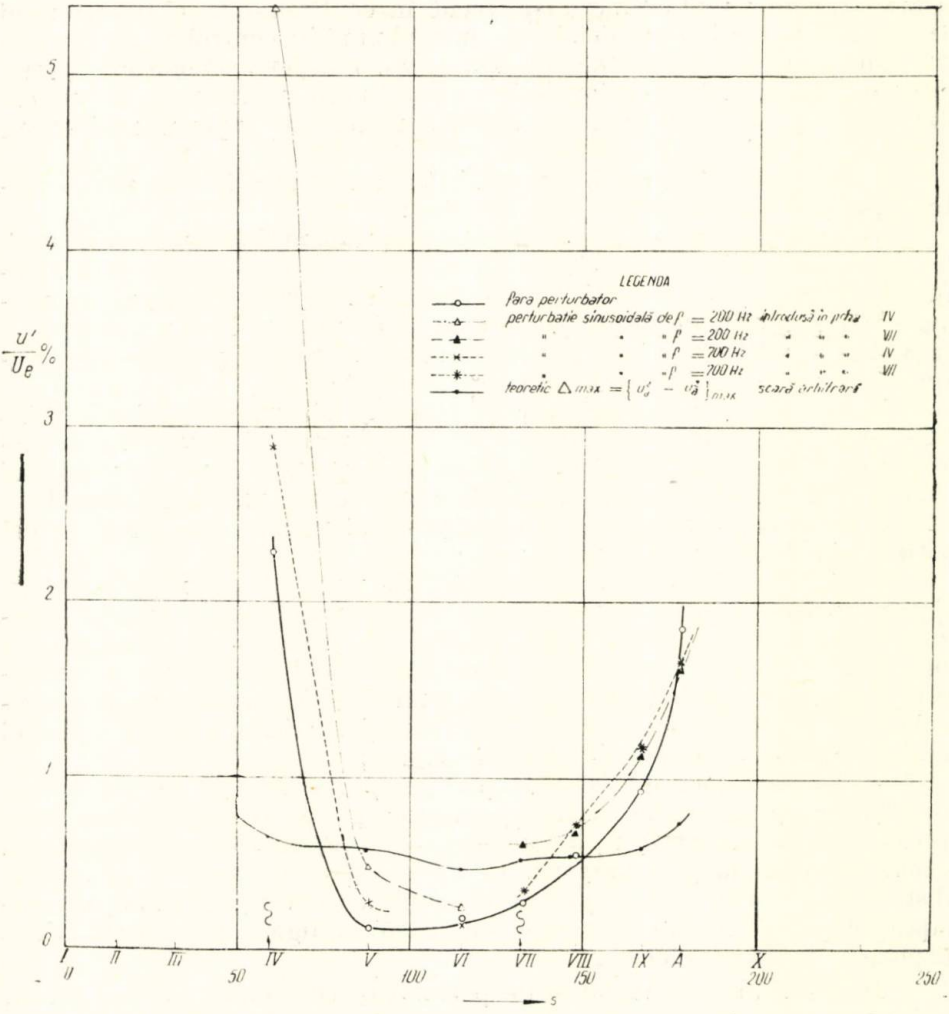


Fig. 3. — Distribuția intensității fluctuațiilor de viteză în punctele de intensitate maximă a acestor fluctuații pe extradosul machetei cercetate.

maximă a fluctuațiilor de viteză într-o secțiune oarecare a profilului de viteză. De asemenea, atît din tabela 2, cît și din figura 3, se observă că și pentru determinarea minimului acestor distribuții în lungul extradosului profilului de aripă rezultatele teoretice și experimentale concordă satisfăcător. Acest punct de minim este situat între prizele V și VI.

4. STRUCTURA STRATULUI-LIMITĂ PERTURBAT

4.1. Din rezultatele de mai sus reiese că stratul-limită este laminar, cu fluctuaţii proprii datorită scurgerii, situîndu-se în jurul lui $\mathcal{R}e_{\delta^*}$ critic. Odată fixat domeniul de lucru s-a trecut în continuare la obţinerea unui strat-limită perturbat artificial cu ajutorul unui jet controlat, de intensitate mică, introdus punctual dintr-o priză. Studierea evoluţiei acestei perturbaţii finite tridimensionale în stratul-limită cu fluctuaţii la numere Reynolds subcritice şi critice constituie materialul experimental expus în acest capitol.

Punctul de introducere a perturbaţiei a fost ales în mai multe moduri, pe baza următoarelor considerente :

a) separarea domeniilor în funcţie de gradientul de presiune şi deci, de caracterul profilelor de viteză. În acest caz, perturbaţia a fost introdusă în priza IV şi analizată pînă în priza VI inclusiv (gradient de presiune mic şi profile de viteză puţin diferite de profilul Blasius) şi apoi în priza VII şi urmărită pînă în punctul A (gradient de presiune longitudinal pozitiv şi profile de viteză inflexionale);

b) introducerea perturbaţiei în priza IV şi urmărirea ei din priza VI, permiţîndu-se în felul acesta o zonă mai mare de dezvoltare a perturbaţiei şi studierea evoluţiei acesteia de la profilul apropiat profilului Blasius, VI, pînă la profilul de tip inflexional cel mai pronunţat din A.

Perturbaţia continuă, de frecvenţă şi intensitate controlată, a fost obţinută în două variante principale :

— s-a experimentat o perturbaţie de presiune obţinută sonor cu ajutorul unor difuzoare acţionînd membrana unei incinte puse în legătură cu o priză de pe extrados. Bobina de excitaţie a difuzoarelor a fost pusă în legătură cu un generator de oscilaţii sinusoidale de audiofrecvenţă. Frecvenţele şi intensităţile perturbaţiei introduse au fost controlate cu firul cald la ieşirea din orificiu şi analizate apoi cu ajutorul unui analizator de frecvenţe Brüel & Kjaer;

— interacţiunea dintre două perturbaţii : a unui jet de intensitate mică (reglat printr-un debitmetru) introdus punctual într-una din prize în calea căruia s-a interpus, la oarecare distanţă, un obstacol cilindric cu generatoarea în lungul scurgerii. În felul acesta se formează în spatele obstacolului o dîră de vîrtejuri de o anumită frecvenţă (44 Hz), care se suprapun peste fluctuaţiile scurgerii de bază. În figura 4 este dată schiţa dispozitivului experimental.

În afara acestor variante de perturbare controlată s-a mai folosit încă o metodă de perturbare a stratului-limită, care, chiar dacă nu prezintă posibilitatea controlului, conferă în schimb avantajul obţinerii unor „spoturi" caracteristice. Este vorba de un obstacol dreptunghiular de 27 mm, aşezat pe întreaga lăţime a camerei de experienţe (80 mm) şi situat între colectorul sufleriei şi camera de experienţă, adică la circa 700 mm de bordul de atac al machetei de aripă studiate. Acest obstacol obturează parţial secţiunea de intrare a camerei de experienţă. „Spotul" se formează în stratul-limită chiar de la bordul de atac şi evoluează de-a lungul extra-

dosului conform legilor de dezvoltare a „spoturilor" turbulente. Se formează deci o masă bine definită de fluid cu o mişcare interioară deosebită de cea a mediului înconjurător, spaţiul ocupat de această masă crescînd o dată cu dezvoltarea stratului-limită.

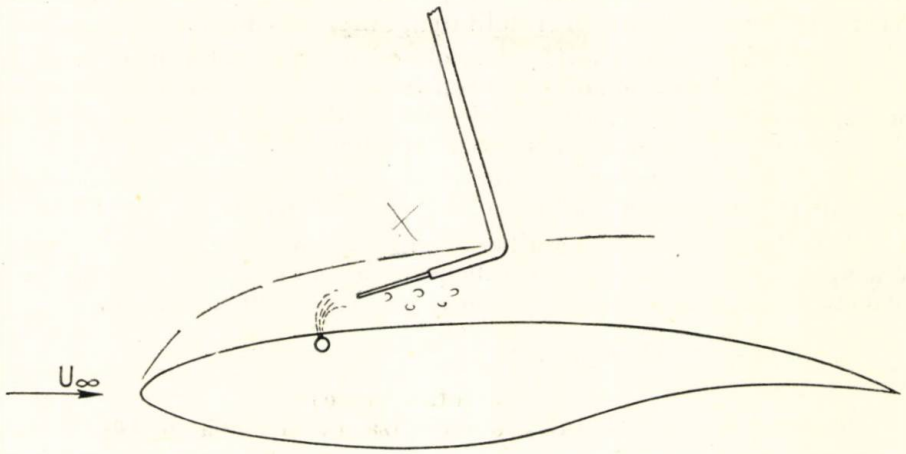


Fig. 4. — Schiţa dispozitivului de perturbare prin interacţiunea dintre jet şi obstacol.

4.2. Toate perturbaţiile introduse sînt tridimensionale şi interacţiunea lor cu stratul-limită este complexă.

Într-o altă lucrare [1] s-a arătat că interacţiunea unui jet de intensitate mică cu un strat-limită laminar se caracterizează prin apariţia

Tabela 3

Domeniile de instabilitate determinate teoretic

Priza		IV	V	VI	VII	VIII	IX	A
U_e	m/s	6,84	7,06	7	6,94	6,8	6,64	6,64
δ^x	mm	0,84	0,878	0,825	0,725	1,215	1,784	2,89
$\mathcal{R}e_{\delta^*}$	—	383	414	385	336	552	792	1 280
Λ	—	−0,674	+2,08	−2,91	−2,772	−4,92	−7,2	−9,36
Domeniul de frecvenţe instabile	Hz	—	—	124−226	158−250	51−164	24−118	7−102

unor zone cu fluctuaţii de diferite frecvenţe şi intensităţi. Aceste domenii influenţează structura scurgerii în stratul-limită în funcţie de intensitatea jetului perturbator.

Deşi ne situăm într-un caz mai complicat pentru a avea o indicaţie teoretică asupra evoluţiei perturbaţiei în stratul-limită de pe extradosul unui profil de aripă, am luat drept bază, ca şi anterior, teoria stabilităţii prin mici perturbaţii Tollmien-Schlichting. Pe extrados existînd o varietate de profile de viteză, am considerat pentru fiecare dintre ele rezultatele acestei teorii. În esenţă interesează banda de frecvenţe din domeniul de instabilitate al fiecărui profil. Determinarea valorilor obţinute din utilizarea rezultatelor expuse în [3] este rezumată în tabela 3.

După cum se vede din această tabelă, profilele de viteză pînă la priza V inclusiv se găsesc în domeniul stabilităţii liniare faţă de mici perturbaţii avînd $\mathcal{R}e_{\delta^*} < \mathcal{R}e_{\delta^*}$ critic. Ultimele cinci profile (VI, VII, VIII, IX şi A), datorită lui $\mathcal{R}e_{\delta^*} \geqslant \mathcal{R}e_{\delta^*}$ critic, prezintă o gamă de frecvenţe mici de perturbare care generează instabilitatea, amplificîndu-se.

Menţionăm încă o dată că evoluţia perturbaţiilor introduse, care sînt finite şi tridimensionale, va fi sensibil diferită de cea a perturbaţiilor mici bidimensionale, şi în paragrafele care urmează (4.3 şi 4.4) sînt analizate deosebirile calitative şi cantitative de comportare.

În lipsa unor informaţii teoretice asupra acestui caz am preferat determinarea experimentală a evoluţiei perturbaţiilor.

4.3. Pentru a urmări influenţa gradientului de presiune longitudinal asupra perturbaţiei finite tridimensionale, am utilizat cele două regiuni distincte ale stratului-limită dezvoltat pe extradosul machetei :

a) de la priza IV pînă la priza VI, în care $\frac{dp}{ds} \leqslant 0$;

b) de la priza VII pînă la punctul A inclusiv, în care $\frac{dp}{ds} > 0$.

Cu ajutorul instalaţiei cu difuzor descrise în 4.1 s-au introdus perturbaţii, de anumite frecvenţe (150-200-700 Hz) şi cu aceiaşi intensitate în prizele IV şi respectiv VII, determinînd evoluţia lor, în punctele y_M respective, în fiecare dintre aceste regiuni prin

— intensitatea fluctuaţiei $\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U_e}$;

— spectrul de frecvenţe.

În figura 3 este arătată variaţia intensităţii fluctuaţiei longitudinale raportată la viteza curentului exterior $\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U_e}$ în cele două regiuni de gradient de presiune pentru două dintre perturbaţiile introduse (f=200 Hz şi f = 700 Hz).

Se remarcă atenuarea rapidă a mărimii $\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U_e}$ în regiunea pentru care $\frac{dp}{ds} \leqslant 0$ şi amplificarea în regiunea în care $\frac{dp}{ds} > 0$. Această comportare calitativă corespunde parţial rezultatelor teoretice sintetizate în tabela 3, dar trebuie menţionat că mărimea $\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U_e}$ cuprinde contribuţia tuturor frecvenţelor din spectrul fluctuaţiei.

Urmărirea contribuţiei unei anumite frecvenţe, şi anume frecvenţa de perturbare introdusă, a fost făcută determinîndu-se din spectrogramele fluctuaţiilor amplitudinile corespunzătoare frecvenţelor de 150, 200 şi 700 Hz. Curbele de evoluţie ale acestora sînt indicate în figura 5.

Se observă de asemenea o rapidă atenuare în regiunea $\frac{dp}{ds} \leqslant 0$, dar o variaţie aproape constantă în regiunea $\frac{dp}{ds} > 0$ pentru frecvenţele de 150 şi 200 Hz şi o totală atenuare pentru $f = 700$ Hz. Dacă pentru aceasta din urmă rezultatele sînt în acord cu datele teoretice din tabela 3,

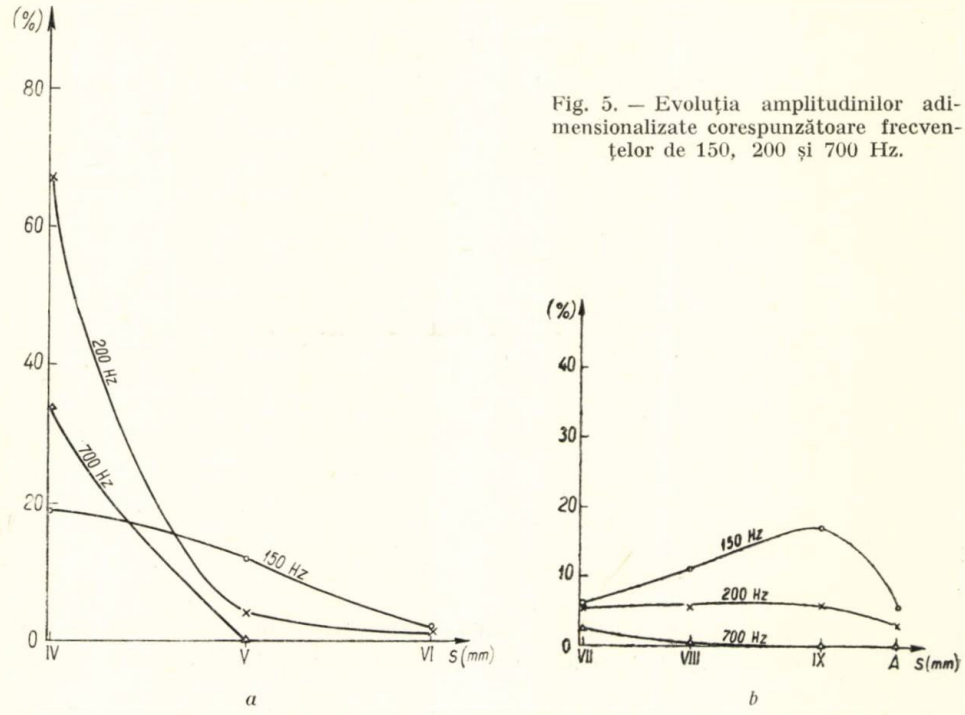


Fig. 5. — Evoluţia amplitudinilor adimensionalizate corespunzătoare frecvenţelor de 150, 200 şi 700 Hz.

pentru frecvenţele de 150 şi 200 Hz în regiunea $\frac{dp}{ds} > 0$ comportarea perturbaţiei finite şi tridimensionale se deosebeşte net de cazul perturbaţiilor mici bidimensionale. Între prizele VIII şi IX se observă chiar o amplificare a perturbaţiilor şi numai între priza IX şi punctul A o uşoară atenuare.

4.4. Pentru a completa analiza evoluţiei unei perturbaţii finite tridimensionale comparativ cu datele teoretice referitoare la evoluţia perturbaţiilor mici bidimensionale, am realizat o perturbaţie cu frecvenţa dîrei de vîrtejuri (44 Hz) rezultată din interacţiunea unui jet de intensitate mică, introdus în priza IV, cu un obstacol (4.1). Modul de evoluţie a perturbaţiei a fost studiat, mai complet, prin determinarea următoarelor caracteristici :

— profile de viteză medie în secţiunile VI, IX şi A ;

— spectrograme de frecvenţă în fiecare dintre secţiunile VI, IX şi A pentru $\eta_0 = \frac{y}{\delta} = 0{,}05 - 0{,}1 - 0{,}2 - \ldots - 1$;

— oscilograme în aceleaşi puncte η_0.

Materialul experimental obţinut fiind foarte bogat, redăm în cele ce urmează doar aspectele cele mai caracteristice :

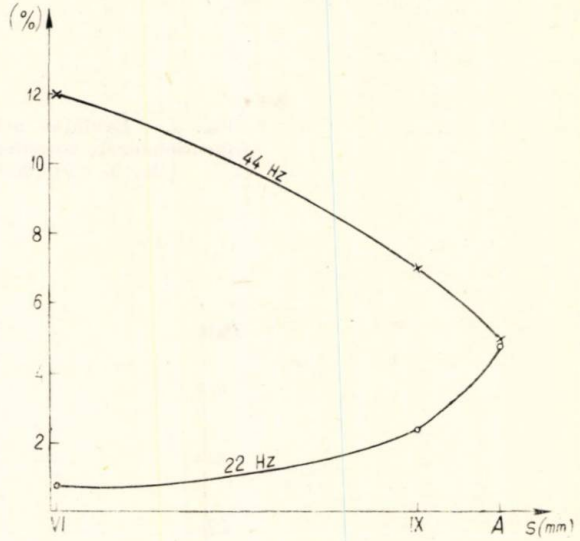


Fig. 6. — Evoluţia amplitudinii maxime adimensionalizate pentru frecvenţele de 22 şi 44 Hz.

a) profilele de viteză medie arată foarte mici deosebiri faţă de cele obţinute în absenţa perturbaţiei, deşi grosimea stratului-limită a crescut cu circa 10%;

b) evoluţia amplitudinii maxime a perturbaţiei pentru două valori ale frecvenţei (22 şi 44 Hz) din spectrul fluctuaţiei este arătată în figura 6. Teoretic, conform tabelei 3 ar fi trebuit ca frecvenţa de 44 Hz în regiunea VI—VIII să se atenueze, iar de la IX la A să se amplifice, în timp ce frecvenţa de 22 Hz să se atenueze pînă în punctul A. Rezultatele experimentale arată că frecvenţa de 44 Hz se atenuează continuu pe cînd frecvenţa de 22 Hz se amplifică continuu. Deosebirile esenţiale de comportare arătate în paragrafele 4.3 şi 4.4 indică caracterul complet diferit al perturbaţiilor finite tridimensionale, al căror mod de evoluţie nu poate fi cercetat deocamdată decît pe cale experimentală.

4.5. Perturbaţiile descrise în paragrafele precedente determină un strat-limită tranziţional în primele stadii de tranziţie, fluctuaţiile dezvoltîndu-se liniar şi neliniar din punct de vedere teoretic. Cu aceste metode de perturbare nu s-a putut realiza un stadiu mai avansat al tranziţiei fără a se altera caracteristicile medii ale scurgerii (profile de viteză, grosimea stratului etc.).

Realizarea unui strat-limită tranziţional cu „spoturi" dezvoltate fără schimbarea esenţială a caracteristicilor medii a fost obţinută utilizînd ca perturbator un obturator al secţiunii de intrare în camera de experienţă descris în 4.1. Evoluţia „spoturilor" a fost studiată cu ajutorul oscilogramelor, măsurările efectuîndu-se cu firul cald în secţiunile VI şi IX la $\eta_0=0{,}2$ şi $\eta_0 = 0{,}8$ pentru diferite viteze ($U_\infty = 1{,}75-3-4-6-8$ m/s).

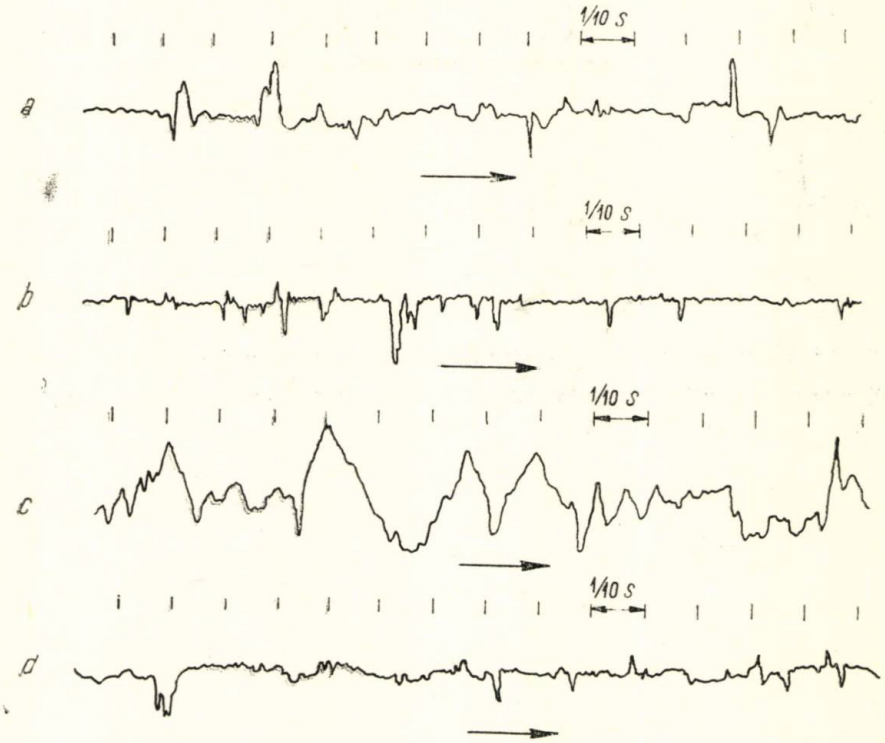


Fig. 7. — Oscilograme ale tranziţiei la $U_\infty = 6$ m/s:
a — priza VI, la $y/\delta = 0{,}2$; b — priza VI, la $y/\delta = 0{,}8$;
c — priza IX, $y/\delta = 0{,}2$; d — priza IX la $y/\delta = 0{,}8$.

Deşi în figura 7 sînt date doar oscilogramele corespunzătoare vitezei de 6 m/s (viteza de regim pentru experienţele descrise în acest articol), observaţiile care urmează sînt valabile pentru întreaga gamă de viteze cercetate.

Se constată că fluctuaţiile de tip „spotic" reprezintă creşteri de viteză pentru $\eta_0 = 0{,}2$ şi scăderi de viteză pentru $\eta_0 = 0{,}8$, ceea ce corespunde ipotezei enunţate anterior [1] cu privire la alternarea locală a celor două profile de viteză (laminar şi turbulent) cu conservarea debitului.

Conform datelor cunoscute de evoluţie a „spoturilor" turbulente, acestea devin extrem de pronunţate o dată cu trecerea de la profile puţin

diferite de profilul Blasius la profile de tip inflexional. Amplitudinea „spoturilor" creşte şi o dată cu viteza, cînd mărimea $\frac{\partial u}{\partial t}$ capătă valori mari.

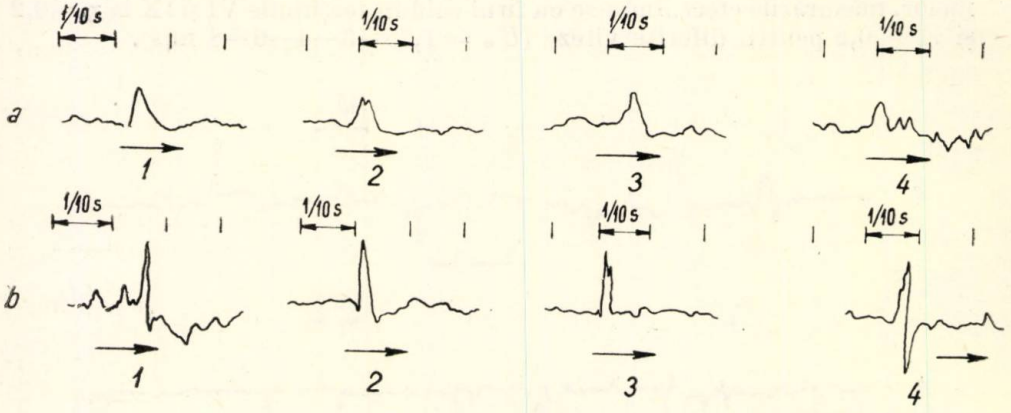


Fig. 8. — Oscilograme caracteristice pentru variaţia $\frac{\partial u}{\partial t}$ „lentă" (*a*) şi variaţia $\frac{\partial u}{\partial t}$ „spotică" (*b*) în priza VI la $y/\delta = 0{,}2$ pentru vitezele de 3 m/s (1), 4 m/s (2), 6 m/s (3), 8 m/s (4).

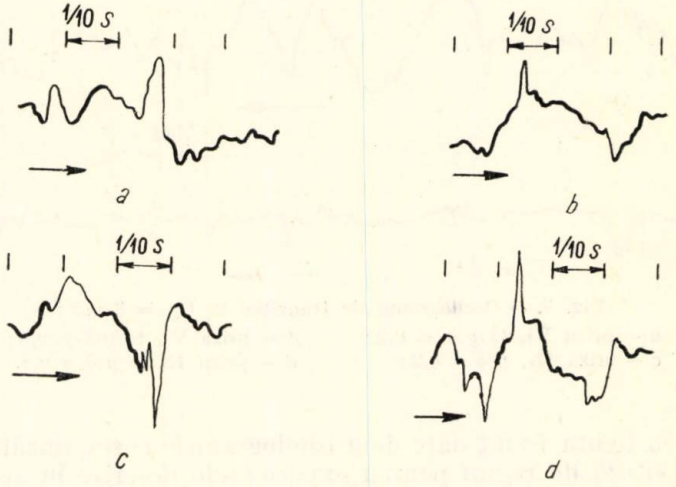


Fig. 9. — Oscilograme caracteristice pentru apariţia unor variaţii „spotice" de viteză în decursul variaţiilor de viteză „lente"; priza IX la $y/\delta = 0{,}2$: $a - U_\infty = 3$ m/s; $b - U_\infty = 4$ m/s; $c - U_\infty = 6$ m/s; $d - U_\infty = 8$ m/s.

În afară de aspectul cantitativ semnalat mai sus, evoluţia „spoturilor" pentru profilele de viteză apropiate profilului Blasius şi cele inflexionale prezintă diferenţieri calitative interesante, mai ales pentru punctele din secţiune în care „spotul" reprezintă o creştere de viteză ($\eta_0 = 0{,}2$).

Astfel, pentru profilele de viteză asemănătoare profilului Blasius, alături de variații „spotice" de viteză se remarcă specificul existenței unor variații „lente" cu amplitudine destul de mare (fig. 8). Pentru profilele de viteze inflexionale, caracteristică este apariția unor fenomene de instabilitate secundară, ca și o tendință de revenire la regimul de scurgere dominant prin salturi de viteză, care adesea sînt contrare sensului de modificare a regimului (fig. 9).

5. CONCLUZII

5.1. Alegerea pentru studiu a unui profil de aripă „laminar" la numere Reynolds mici a prilejuit obținerea unor informații interesante cu privire la :

a) comportarea aerodinamică a profilului de aripă la viteze mici, care prezintă interes în anumite cazuri (planoare etc.);

b) verificarea metodei teoretice de calcul a caracteristicilor medii ale stratului-limită laminar cu gradient de presiune, metodă elaborată în cadrul colectivului nostru ;

c) provocarea tranziției pe extradosul unui profil de aripă „laminar" și studierea ei la numere $\mathcal{R}_{es}$ critice și subcritice.

5.2. Metodica de obținere a tranziției la viteze mici, în regim critic și subcritic, a arătat următoarele :

— există dificultăți experimentale de provocare a tranziției fără alterarea caracteristicilor medii ale stratului-limită laminar. De pildă, cu unele metode de perturbare încercate (jet perturbator, perturbație sonoră, obstacol introdus în stratul-limită sau combinațiile lor) nu s-au putut realiza decît primele stadii de tranziție ;

— un stadiu avansat al tranziției cu „spoturi" dezvoltate s-a obținut, în cazul nostru, numai prin introducerea unor perturbații din curentul exterior în stratul-limită prin obturarea reglabilă a secțiunii de intrare în camera de experiențe ;

— contrar așteptărilor, nici chiar în cazul realizării tranziției cu „spoturi" dezvoltate nu s-a putut obține turbulență dezvoltată în porțiunea cu gradient de presiune longitudinal pozitiv. Probabil că există condiții fizice limită ale scurgerii sub care nu se poate obține turbulență dezvoltată.

5.3. Utilizînd perturbații finite și tridimensionale, am constatat valabilitatea sub aspect calitativ a informațiilor date de teoria micilor perturbații bidimensionale numai pentru regiunea din stratul limită în care $\frac{dp}{ds} < 0$, relativ la atenuarea oricărei perturbații introduse. În schimb, pentru regiunea în care gradientul de presiune longitudinal este pozitiv, există deosebiri esențiale între comportarea perturbațiilor indicată de teorie și cea observată experimental. Doar la frecvențe mai mari de 300 Hz, indicațiile teoriei bidimensionale pot fi luate în considerație

Aceste constatări pot avea o importanță practică în cazul ivirii unor perturbații locale (obstacole, orificii cu jet etc.) pe extradosul unui profil de aripă în regim de scurgere.

Este de semnalat faptul că lipsa actuală a unei teorii pentru perturbaţiile finite şi tridimensionale solicită o cercetare experimentală, care, trebuind efectuată la un ridicat nivel de acurateţă, prezintă un deosebit grad de dificultate.

5.4. Relativ la structura stratului-limită tranziţional cu gradient de presiune longitudinal studiat, se pot trage următoarele concluzii.

5.4.1. Punctul de indiferenţă (instabilitate) calculat pentru viteza $U_\infty = 6$ m/s corespunde abscisei $s = 0{,}110$ m, în timp ce pentru placa plană, în aceleaşi condiţii, acest punct ar fi situat la 0,347 m, adică o abscisă mai mare decît coarda profilului de aripă.

În zona dinaintea punctului de indiferenţă (instabilitate), structura stratului-limită prezintă asemănări pentru cele două cazuri. În avalul punctului de indiferenţă (instabilitate) structura stratului-limită tranziţional cu gradient de presiune longitudinal prezintă sensibile deosebiri cantitative faţă de cazul similar de pe placa plană.

5.4.2. Calitativ, stratul-limită tranziţional cu gradient de presiune longitudinal prezintă unele caracteristici de structură asemănătoare celor observate în experienţele anterioare pe placa plană [1], [2].

Se constată aceeaşi formare a unei zone de origine a „spoturilor" în vecinătatea punctului de introducere a jetului perturbator, zonă caracterizată prin profil inflexional local şi prin fluctuaţii regulate de amplitudine foarte mică şi frecvenţe foarte mari.

— După această zonă — şi în cazul plăcii plane, şi în cazul profilului de aripă — se remarcă două tipuri distincte de fluctuaţii neregulate, de amplitudine mare şi de frecvenţă mică, perturbatoare ale scurgerii : cu variaţie $\frac{\partial u}{\partial t}$ „lentă" şi cu variaţie $\frac{\partial u}{\partial t}$ bruscă sau „spotică". Deşi termenii par subiectivi, depinzînd de viteza de înregistrare a aparaturii experimentale, totuşi deosebirea calitativă dintre aceste două tipuri de fluctuaţii este evidentă atunci cînd se examinează un număr mare de oscilograme la diferite numere Reynolds. În figura 8 sînt date exemple caracteristice de fluctuaţii pentru diferite viteze ale scurgerii în secţiunea unde fenomenul este observat cu precădere, şi anume în care profilul de viteză este asemănător profilului Blasius.

Atît în cazul plăcii plane, cît şi în cazul profilului de aripă, „spotul" dezvoltat reprezintă alternarea locală a profilului de viteză laminar şi a profilului turbulent corespunzător, cu conservarea debitului [1].

Prin „spot" dezvoltat înţelegem o masă de fluid cu ordinul de mărime mai mare decît grosimea stratului-limită şi în interiorul căruia mişcarea este fluctuantă şi deosebită de a spaţiului înconjurător.

În ambele cazuri, fluctuaţiile obţinute prin diferite moduri de perturbare la $\mathcal{R}e_{\delta^*}$ critic şi subcritic nu duc la o organizare statistică specifică turbulenţei dezvoltate. Spectrul de frecvenţe al fluctuaţiilor rămîne în domeniul frecvenţelor joase, fără deplasarea caracteristică spre frecvenţele mari, deşi profilul de viteză, grosimea stratului şi intensitatea medie pătratică a fluctuaţiilor se modifică sensibil comparativ cu scurgerea neperturbată.

Este interesant de semnalat faptul că profilul inflexional (gradient de presiune longitudinal) nu aduce un aport simțitor la formarea turbulenței dezvoltate, lucru verificat și prin modificarea incidenței profilului de aripă. Esențială pentru crearea turbulenței în stratul-limită la viteze mici pare influența turbulenței curentului exterior.

5.4.3. Deosebiri interesante observate față de tranziția în cazul plăcii plane se referă la valorile cantitative ale amplitudinilor fluctuațiilor, dar mai ales la suprapunerea celor două tipuri de fluctuații amintite. Într-adevăr, amplitudinile fluctuațiilor în regiunea $\frac{dp}{ds} > 0$ sînt mai mari decît în cazul plăcii plane, ca și factorul lor de amplificare.

Pe de altă parte, se poate observa deosebit de clar apariția unor variații „spotice" de viteză în cursul variațiilor „lente", remarcă caracteristică profilului de viteză inflexional. În figura 9 este arătat un astfel de exemplu caracteristic și explicația acestui comportament formează obiectul problematicii actuale a tranziției într-un stadiu avansat.

Primită la redacție la 11 septembrie 1965.

BIBLIOGRAFIE

1. Șt. Săvulescu, Gh. Darie, V. Toma, *Aspecte tridimensionale ale tranziției provocate de un jet de intensitate mică pe o placă plană în scurgerea incompresibilă*, St. cerc. mec. apl., *6* (1962).
2. St. Săvulescu, V. Toma, *Experimental investigation of the transition caused by the interaction of a low intensity jet with the incompressible boundary layer of flat plate*, Rev. méc. appl., *3* (1964).
3. H. Schlichting, *Entstehung der Turbulenz. Handbuch der Physik*, vol. VIII, *1*, 1959.
4. Șt. Săvulescu, *Determinarea caracteristicilor stratului-limită prin utilizarea unor profile tip de viteze și temperaturi*, St. cerc. mec. apl., *2* (1957).
5. — *On a hypothesis of limitative statistical organisation of energy fluctuations in the fully developed turbulent boundary layer*, Rev. méc. appl., *6* (1960).

ASPECTE EXPERIMENTALE ALE UNOR PARAMETRI DE LUBRIFIERE[1])

de GH. VASILCA
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

621.89

Dintre lucrările experimentale din domeniul lubrificației pot prezenta interes, printre altele, acelea care se referă la parametrii ce pot fi exprimați și prin calcul în cazul regimului hidrodinamic, ca, de exemplu, caracteristica coeficientului de încărcare, a debitului de lubrifiant, a coeficientului de frecare, a cîmpului de temperaturi etc. În cazul de față, acești parametri se studiază din punctul de vedere al reproductibilității și al aspectului valorilor lor experimentale în raport cu cele obținute prin calcul. Se analizează unele aspecte ale echilibrului termic în funcționarea lagărelor și modul de determinare a caracteristicii termice a unei instalații experimentale date. Se determină și se interpretează rezultatele obținute privind temperatura într-un anumit punct al suprafeței exterioare a carcasei unui lagăr dat și influența acestui parametru asupra calculului efectuat în diferite ipoteze, privind variația jocului la cald din lagăr.

Lucrările experimentale în domeniul lubrificației ar putea fi împărțite în două categorii. Într-una dintre acestea pot fi plasate lucrările avînd drept scop verificări ale parametrilor de funcționare determinați cu ajutorul teoriei hidrodinamice a lubrificației. Astfel au fost efectuate experiențe pentru verificarea repartiției presiunilor în direcția mișcării suprafețelor de alunecare și perpendicular pe această direcție, apoi pentru verificarea repartiției temperaturilor în pelicula de lubrifiant după aceleași două direcții și, în consecință, verificarea variației corespunzătoare a viscozității [1], pentru verificarea condițiilor la limită [2] etc. În lucrările de acest fel, aspectul calitativ — imaginea variației parametrului respectiv — satisface de cele mai multe ori scopul urmărit. În a doua categorie se situează lucrările experimentale care au drept scop determinarea pe această cale a caracteristicilor de funcționare ale unui cuplu de frecare dat, deci complet definit din punct de vedere geometric, al materialelor din care este

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, *1* (1966) (în limba germană).

construit, al lubrifiantului şi condiţiilor de alimentare, al regimului de răcire, al mediului ambiant etc. În aceste cazuri, aspectele calitative şi cantitative ale parametrilor determinaţi interesează deopotrivă, deoarece scopul principal care se urmăreşte în aceste încercări este de a compara valorile experimentale între ele, precum şi uneori cu cele corespunzătoare obţinute prin calcul. Cu ajutorul aceluiaşi model experimental de ansamblu de frecare poate fi realizată o gamă largă de încercări şi obţine astfel valori suficiente ale parametrilor determinaţi care să permită confruntări multilaterale. Unele aspecte ale modului în care se pot prezenta parametrii experimentali mai importanţi ai cuplurilor de frecare pot prezenta deci interes.

Dacă se ia ca model experimental lagărul cilindric circular într-o construcţie asemănătoare cu lagărele practice, încercarea acestuia poate consta în determinarea, pentru regimul de funcţionare hidrodinamic, a limitelor de sarcină şi de viteze pe care le poate suporta, a debitului de lubrifiant, a coeficientului de frecare şi a temperaturii cuzinetului. La aceşti parametri se mai poate adăuga unul care derivă din echilibrul termic al lagărului, putînd fi denumit caracteristica termică a instalaţiei experimentale. El redă, pe de o parte, cantitatea de căldură disipată prin carcasa lagărului experimental, iar pe de altă parte cantitatea de căldură evacuată de către fus prin intermediul lagărelor de sprijin ale acestuia. Un parametru foarte important în lubrificaţia teoretică, care în acelaşi timp are şi o semnificaţie geometrică ce poate fi bine determinată, este excentricitatea relativă, care defineşte poziţia excentrică pe care o ia fusul în timpul funcţionării lagărului. Valoarea acestui parametru poate fi şi măsurată, însă datorită, pe de o parte, valorii mici de ordinul miimilor de milimetru a acestuia, iar pe de altă parte vibraţiilor care pot perturba redarea unor mărimi atît de mici, determinarea acestui parametru implică folosirea unei aparaturi mai speciale. Din aceste motive, în cele ce urmează nu se va face uz de excentricitatea relativă ca parametru experimental.

Pentru determinarea caracteristicilor experimentale menţionate mai sus apare necesar să fie ales un criteriu cu ajutorul căruia regimul de încercare să poată fi definit cît mai exact. Pentru aceasta, parametrul ales ca să redea acest criteriu trebuie să îndeplinească în primul rînd condiţia de a varia în funcţie de condiţiile de funcţionare ale lagărului. Alte condiţii pot fi măsurarea uşoară a acestuia şi cu o precizie convenabilă, iar în al treilea rînd valorile obţinute prin măsurători să fie reproductibile. Examinînd din acest unghi parametrii de funcţionare arătaţi mai sus, se poate vedea că sarcina şi viteza îndeplinesc într-o foarte bună măsură condiţiile de a constitui fiecare în parte un parametru-criteriu. Aceste elemente se realizează în încercare cu ajutorul unor dispozitive mecanice şi motrice, atît sarcina aplicată pe lagăr, cît şi turaţia fusului mobil al acestuia putînd fi măsurate suficient de exact cu ajutorul unor aparaturi curente. Într-o încercare poate fi astfel menţinută constantă sarcina şi variată viteza sau, invers, caracteristicile de sarcină, a debitului de lubrifiant, a coeficientului de frecare etc. putînd fi ridicate, prin urmare, la sarcină sau la viteză constantă. La lagăre, sarcina, şi mai ales viteza sînt de obicei parametri daţi ai problemei, ei rezultînd din condiţiile de sprijin

și de transmitere a mișcării în locul unde se aplică lagărul. Deoarece, în diferitele cazuri practice de lagăre, sarcina și viteza pot lua valori foarte variate, nu apare indicat ca în lucrările experimentale acești parametri să fie folosiți drept parametri-criteriu în sensul arătat mai sus. Debitul de lubrifiant, coeficientul de frecare și temperatura lagărului pot fi considerați parametri rezultați din procesul de alunecare care are loc într-un lagăr dat și sub o sarcină și viteză de asemenea date. La un lagăr experimental, elementele geometrice ale acestuia, ca diametrul nominal al fusului, jocul și alungirea relativă pe lîngă natura materialelor din care este construit, fiind date și constante, prin aplicarea unei sarcini, a unei viteze și folosirea unui anumit fel de lubrifiant rezultă valori corespunzătoare pentru debit, coeficientul de frecare și temperatura lagărului. Acești parametri îndeplinesc deci condiția de a varia în funcție de datele de funcționare ale lagărului, și din acest punct de vedere ar putea fi aleși oricare dintre ei drept parametru-criteriu pentru încercare. Încercări numeroase arată însă că ei nu stau în același raport de egalitate în ceea ce privește măsurarea lor fără dificultăți cu o precizie convenabilă, precum și din punctul de vedere al reproductibilității. Astfel, cum se va arăta în mod detaliat mai jos, măsurarea coeficientului de frecare, mai ales în cazul sarcinilor mai mari pe lagăr, este legată în general de împrăștieri relativ însemnate. Debitul de lubrifiant poate fi măsurat relativ ușor și destul de exact, mai ales în cazul instalațiilor experimentale. Operația devine însă mult mai dificilă în cazul lagărelor reale, deoarece la acestea debitul de scăpări nu este în general captabil și măsurabil. Pe de altă parte, alegerea debitului de scăpări drept parametru-criteriu introduce și greutăți în experimentare, deoarece este destul de dificil să se varieze sarcina și viteza în așa fel ca să rezulte un anumit debit de scăpări. Ultimul parametru de luat în considerare este temperatura cuzinetului. La lagărele metalice, preponderente în construcția de mașini, intensitatea procesului de frecare se reflectă foarte fidel în temperatura lagărului, deoarece, pe de o parte, frecarea prin alunecare se transformă integral în căldură, iar pe de altă parte, datorită bunei lor conductivități termice, se produce într-o anumită măsură o uniformizare a temperaturii în masa pieselor care compun lagărul. La un lagăr în funcțiune în echilibru din punct de vedere termic, temperatura acestuia, măsurată într-un loc oarecare, variază dacă condițiile de frecare din lagăr variază. Pe de altă parte, măsurarea temperaturilor se poate realiza în mod satisfăcător cu termometre sau cu ajutorul termocuplelor. Mai trebuie apoi adăugat că temperatura poate fi măsurată, s-ar putea spune, cu aceeași ușurință și la lagărele reale. Dacă punctul de măsurare a temperaturii se alege într-un loc convenabil, această mărime poate constitui, pentru încercarea lagărelor, un parametru-criteriu satisfăcător. Caracteristica termică a instalației experimentale nu poate forma un parametru-criteriu concludent, deoarece depinde în prea mare măsură de particularitățile constructive ale acesteia, ceea ce creează dificultăți în cazul comparării rezultatelor cu cele obținute la alte instalații.

Din analiza făcută mai sus reiese că în lubrificația experimentală obișnuită pot fi astfel deosebiți doi parametri primari externi : sarcina și viteza, care amorsează și întreține procesul de alunecare, și trei parametri

derivaţi : debitul, coeficientul de frecare şi temperatura lagărului, care rezultă din acest proces. În cazul unui lagăr dat în funcţiune, deci încărcat cu o anumită sarcină şi la o anumită viteză de alunecare a suprafeţelor de frecare, se va ajunge după un timp oarecare la un echilibru termic şi deci la o temperatură staţionară a lagărului. Variind unul sau ambii parametri primari, echilibrul termic se restabileşte la un alt nivel şi temperatura lagărului de asemenea. Pe lîngă temperatura lagărului, la fiecare dintre aceste nivele de echilibru termic rezultă, firește, alte valori pentru debitul de lubrifiant şi pentru coeficientul de frecare. De asemenea vor rezulta valori diferite pentru schimbul de căldură dintre instalaţia experimentală şi mediul ambiant, schimb care se reflectă în caracteristica termică a acestei instalaţii.

Aici mai trebuie menţionat că regimul termic al lagărului influenţează şi un parametru geometric al acestuia din urmă, şi anume jocul dintre suprafeţele de frecare în cazul lagărelor cilindrice pline. Temperaturile diferite care apar la nivelul suprafeţelor exterioare ale carcasei lagărului şi al fusului, precum şi împerecherea din materiale diferite care se practică în construcţia lagărului, conduc la dilatări termice neegale şi deci la o modificare a spaţiului dintre fus şi cuzinet, deci a jocului, faţă de situaţia cu lagărul în repaus, adică rece. După cum rezultă din expresiile teoretice, schimbarea jocului atrage după sine modificări în valorile parametrilor funcţionali ai lagărului, modificări care nu pot fi sesizate nemijlocit atunci cînd aceşti parametri sînt determinaţi pe cale experimentală. Parametrii funcţionali experimentali includ astfel în mod inseparabil influenţa modificării jocului asupra valorilor lor, aspect de care trebuie ţinut seama atunci cînd aceste caracteristici se interpretează. Jocul real, sau la cald, este deci un alt parametru al lubrificaţiei, care pune probleme dificile de calcul şi de determinare experimentală, unele aspecte ale acestuia fiind analizate mai jos.

În cele ce urmează vor fi prezentate caracteristicile experimentale de sarcină, ale debitului de scăpări, ale coeficientului de frecare, caracteristica termică a instalaţiei experimentale şi aspectele jocului real din lagăr, precum şi interpretarea lor prin prisma preciziei în determinare, respectiv a reproductibilităţii. De la început poate fi făcută însă remarca că aceste caracteristici pot fi determinate în două condiţii termice distincte, şi anume la temperatura variabilă şi la temperatura constantă a lagărului. În primul caz se variază în cursul experimentării sarcina şi viteza în mod arbitrar şi se măsoară ceilalţi parametri rezultanţi în condiţii de echilibru termic stabilizat. Această stare de echilibru se reflectă şi poate fi reperată prin temperatura stabilizată a lagărului. În cazul al doilea, parametrii vor fi variaţi aşa fel încît echilibrul termic să se realizeze de fiecare dată la aceeaşi valoare dinainte fixată a temperaturii cuzinetului. Această valoare poate fi oricare. Caracteristicile de sarcină — a debitului, a coeficientului de frecare şi cea termică a instalaţiei — vor putea avea astfel caracter izotermic [3] cu particularităţile pentru ele care derivă din aceasta şi care

vor fi analizate mai jos. În toate aceste lucrări experimentale au fost utilizate modele experimentale de lagăr (fig. 1) și o instalație de încercări cu următoarele caracteristici :

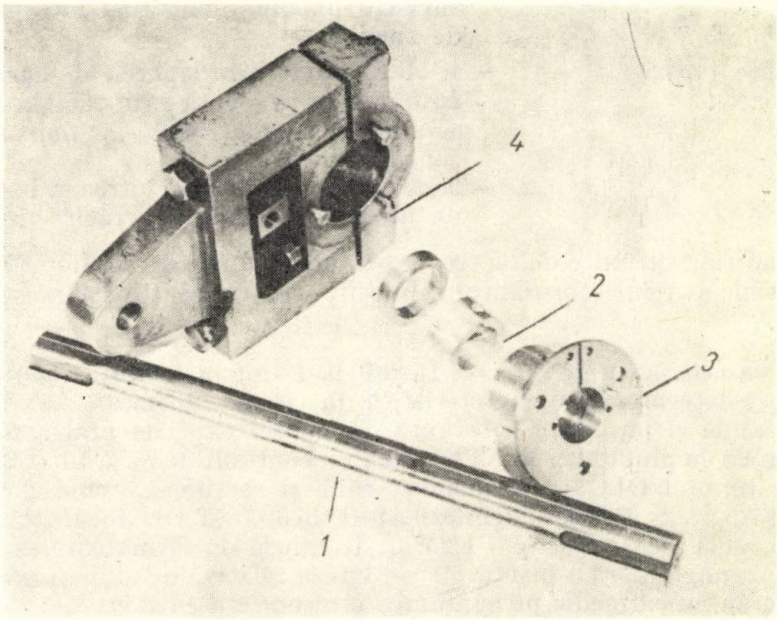


Fig. 1. — Model experimental de lagăr
1 — fus, *2* — cuzinet, *3* — montură, *4* — carcasa lagărului.

a) Fusul : — diametrul nominal $d = 36$ mm ;

b) Cuzinetul : — în formă de bucșă cilindrică cu pereți groși (6 mm) ;
— alungirea relativă a cuzinetului $\lambda = b/d = 0{,}7$;

c) Sistemul de alimentare cu lubrifiant : — ulei sub presiune ($p_u = 1{,}5$ at = const.), în circuit închis, cu intrarea printr-un orificiu ∅ 4,5 mm, situat pe direcția sarcinii în zona descărcată a lagărului ;

d) Ieșirea lubrifiantului : — în direcție axială, pe la capetele lagărului ;

e) Măsurarea debitului de scăpări : — prin captarea lubrifiantului scurs pe la capete și măsurarea volumului cu ajutorul unui cilindru gradat ;

f) Măsurarea sarcinii : — cu dinamometru ;

g) Măsurarea temperaturii cuzinetului t_c : — pe direcția sarcinii, la mijlocul cuzinetului, în zona încărcată, la 1,5 mm distanță de suprafața de lucru, cu ajutorul unui termometru cu mercur (fig. 2) ;

h) Măsurarea coeficientului de frecare : — cu ajutorul unui dispozitiv tip paralelogram cu lagăre cuţit [4];

i) Lagărele de sprijin ale fusului : — două lagăre de sprijin cu rulmenţi, lagărul experimental fiind situat între lagărele de sprijin ;

j) Influenţe termice exterioare : — căldura produsă în lagărele de sprijin ale fusului este evacuată prin răcirea cu apă a acestora, menţinîndu-le temperatura constantă ;
— lagărul experimental şi întreaga instalaţie de încercare are numai răcire naturală.

Condiţiile specifice de încercare, ca, de exemplu, jocul, împerecherea de materiale şi felul lubrifiantului folosit, vor fi arătate la fiecare caz în parte.

1. *Caracteristica de sarcină.* În tabela 1 sînt prezentate condiţiile în care a fost determinată o caracteristică de sarcină obişnuită, la temperatură variabilă şi încărcare constantă. Cuzinetul experimental a fost din aliajul bronz cu plumb tip BzXPb 27, cu un conţinut de 27% Pb şi 8% Sn, iar fusul din oţel OLC 15, cementat, călit şi rectificat, avînd duritatea H_B 2,5/187,5/15 $\cong$ 550. Uleiul folosit a fost tip 305 STAS. Jocul în lagăr la montaj, deci la rece, a fost $\psi = 1{,}25‰$. În tabelă sînt următoarele notaţii : ω — viteza unghiulară a fusului ; V — viteza relativă de alunecare ; p_m — presiunea specifică medie pe suprafaţa proiectată a cuzinetului ; t_b — temperatura lubrifiantului în baia de ulei ; p_u — presiunea uleiului la intrare în lagăr ; t_c — temperatura cuzinetului măsurată în condiţiile arătate la pct. *g*) de mai sus, iar t_s, t_d — temperatura lagărului de sprijin din stînga, respectiv din dreapta. În figura 3 se poate vedea alura generală de variaţie a temperaturii cuzinetului în cazul unei caracteristici de sarcină la presiune constantă. De remarcat este faptul că la temperaturi mai mici variaţia temperaturii cuzinetului cu viteza este mai rapidă, această variaţie devenind mai redusă pe măsură ce temperatura la care funcţionează lagărul creşte. Aceasta se explică prin variaţia mai bruscă cu temperatura a viscozităţii lubrifiantului la temperaturi scăzute şi reducerii căldurii generate prin frecarea lichidă datorită viscozităţii mai mici la temperaturi ridicate.

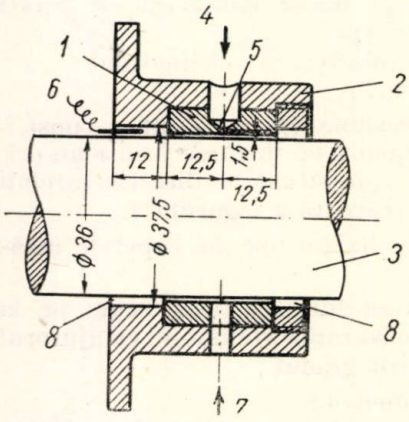


Fig. 2. — Secţiune prin lagărul experimental

1 — cuzinet, *2* — montură, *3* — fus, *4* — sarcină, *5* — măsurarea temperaturii t_c, *6* — termocuplu, *7* — intrare ulei, *8* — ieşire ulei.

Menţinînd în încercare aceeaşi viteză şi variind numai sarcina, se obţin caracteristici de sarcină la viteză constantă. Ceilalţi parametri, ca de-

Tabela 1

ω rad/s	V m/s	p_m kgf/cm²	t_b °C	p_u kgf/cm²	t_c °C	t_s °C	t_d °C
68	1,22		26		38,9	30	29
165	2,96		26		50,5	30	28
272	4,89	8,6	26	1,5	61,6	32	27
376	6,76		26		69,5	28	29
504	9,06		26		77,8	29	28
625	11,25		25,5		84,8	30	29

bitul, temperatura și coeficientul de frecare, diferă și în acest caz de la punct la punct. Se vede imediat că la încercările de acest fel reproductibilitatea nu se poate referi la caracteristica de sarcină propriu-zisă, deoarece se variază numai unul dintre parametrii acesteia, și acesta fără condiții.

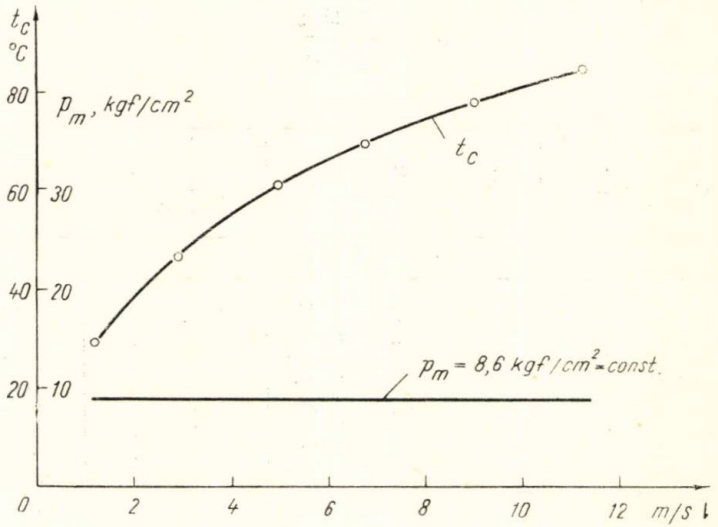


Fig. 3. — Caracteristica experimentală de sarcină la p_m=const. și variația temperaturii cuzinetului.

Astfel de încercări pot fi însă deosebit de utile pentru aspecte de reproductibilitate în cazul parametrilor de lubrificație derivați, ca debit, temperatură etc. În ceea ce privește examinarea reproductibilității caracteristicilor de sarcină, apar mult mai indicate caracteristicile de acest fel ridicate la temperatură constantă.

În tabela 2 sînt prezentate datele experimentale privind caracteristicile de sarcină izoterme pentru trei temperaturi ale cuzinetului, iar în figura 4 aspectul grafic al acestora. Împerecherea de materiale folosită a fost aliajul Y-Sn 83 pentru cuzinet, fusul fiind din oțel OLC 15 cementat și tratat la $H_B \cong 550$. Lubrifiantul a fost ulei tip 305 STAS, iar jocul în lagăr la montaj $\psi = 1{,}25^0/_{00}$. Caracteristicile izoterme de sarcină au fost

determinate pentru temperaturile cuzinetului $t_c = 45$, 60 și 80°C. Un punct oarecare de pe curbe a fost obținut dînd vitezei o anumită valoare și variind apoi încărcarea pînă ce temperatura t_c a cuzinetului a atins valoarea stabilizată dorită. Pentru ca datele obținute să fie comparabile, în cazul aceleiași caracteristici sau al unei familii de astfel de curbe temperaturile lubrifiantului în baie și ale lagărelor de sprijin, precum și presiunea uleiului la intrare în lagăr, au fost menținute la aceleași valori constante.

Particularitatea unei caracteristici izoterme de sarcină rezidă în faptul că, temperatura t_c a cuzinetului fiind constantă, parametrii variabili ai acesteia — presiunea și viteza — stau într-un raport de interdependență. Acest raport este determinat de procesul termic, adică de frecarea din lagăr, care, la rîndul ei, depinde, în afară de viteză, de asemenea de mai mulți parametri. Unul dintre aceștia este și viscozitatea lubrifiantului, și, admițînd că nivelul procesului de frecare lichidă este o funcție de viscozitatea medie μ_m, dependența dintre presiune, viteză și μ_m poate fi exprimată cu ajutorul numărului lui Sommerfeld, sub forma

$$\mu_m \mathrm{So} = \frac{\psi^2 p_m}{\omega}. \qquad (1)$$

Tabela 2

ω rad/s	V m/s	p_m kgf/cm²	t_b °C	p_u kgf/cm²	t_s °C	t_d °C	μ_m kgs/m² × 10^{-3}	So	μ_m So × 10^{-3}
				$t_c = 45$°C = const.					
52,5	0,943	267	25	1,5	29	28	5,26	15,1	79,5
73,4	1,320	168	25	„	30	28	„	6,8	35,8
94,3	1,697	77,5	25	„	31	28	„	2,44	12,8
115	2,075	54,8	25,5	„	29	29	„	1,42	7,48
136	2,45	24,4	25,5	„	30	29	„	0,53	2,79
147	2,638	12,47	26	„	30	29	„	0,25	1,31
157	2,828	10,62	25	„	29	28	„	0,20	1,05
173	3,11	2,38	25,5	„	30	29	„	0,04	0,21
				$t_c = 60$°C = const.					
115	2,075	328	24,5	1,5	31	28	2,85	15,9	45,4
136	2,45	278	24,5	„	30	29	„	11,2	31,9
157	2,828	234	24,5	„	30	28	„	8,16	23,3
209	3,768	85	25	„	31	28	„	4,65	13,2
262	4,71	44	25	„	30	29	„	0,92	2,62
314	5,65	21,7	25	„	29	29	„	0,38	1,08
343	6,165	12,5	25,5	„	29	30	„	0,2	0,57
				$t_c = 80$°C = const.					
236	4,24	331	25	1,5	29	28	1,38	18,2	25,1
262	4,71	206	25,5	„	30	29	„	10,2	14,1
314	5,65	151	25,5	„	31	28	„	6,25	8,6
346	6,22	118	26	„	30	29	„	4,44	6,1
445	8,00	77	26	„	30	28	„	2,25	3,1
556	10,00	37	25,5	„	30	29	„	0,86	1,19
666	12,00	9,2	25,5	„	29	29	„	0,18	0,25

Încercări experimentale au arătat [3], [5] și se admite [6] că temperatura medie a debitului de scăpări este foarte apropiată de cea a lagărului și că viscozitatea μ_m corespunde acestei temperaturi. În cazul de față, μ_m corespunde la t_c, adică la temperatura de regim constantă a caracteristicii izoterme de sarcină respective. În tabela 2 sînt arătate valorile

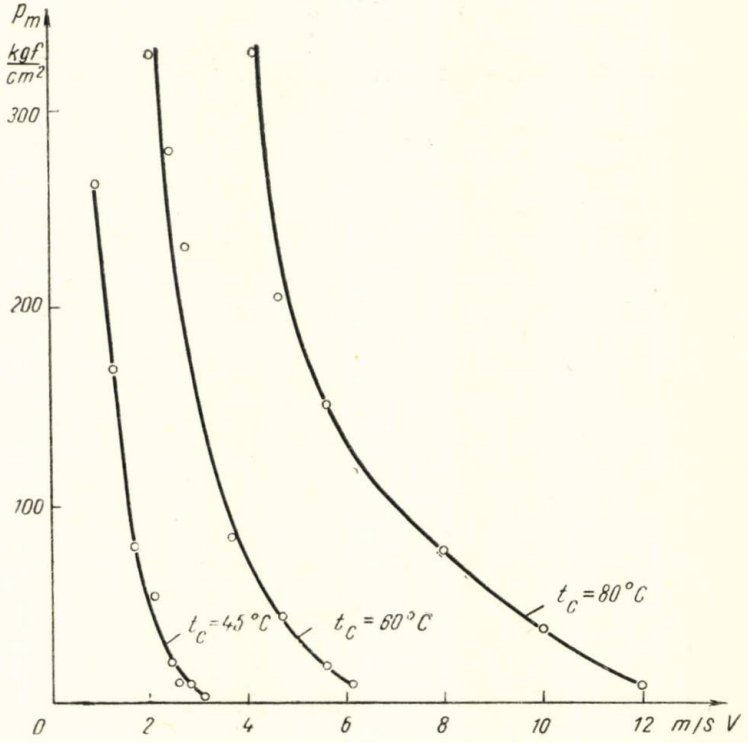


Fig. 4. — Caracteristici izoterme experimentale de sarcină $p_m = p_m(V)$ (d = 36 mm, λ = 0,7, $\psi = 1{,}25‰$).

μ_m So în cazul celor trei caracteristici de sarcină, iar în figura 5 reprezentarea lor grafică în funcție de So cu μ_m ca parametru. Sub această formă, caracteristicile izoterme de sarcină apar ca linii drepte și pot servi pentru calcule la proiectarea lagărelor. În figura 6 sînt trasate familiile de caracteristici izoterme de sarcină corespunzătoare uleiurilor tip 305 și tip 408 STAS. Se vede ușor că o valoare oarecare a expresiei $\psi^2 p_m/\omega$, care se calculează cu datele problemei, poate fi realizată la diferite temperaturi de funcționare a lagărului, și pentru o temperatură aleasă rezultă imediat coeficientul de încărcare So din diagrame. O astfel de familie de drepte poate fi denumită și diagrama polară de sarcină pentru lubrifiantul respectiv.

Nivelul procesului de frecare, care determină raportul de interdependenţă dintre presiune şi viteză, depinde, în afară de viscozitate, de asemenea de viteza de forfecare a fluidului $\frac{\partial v}{\partial h}$, adică de poziţia excentrică a fusului. În acest caz [5], coeficientul de frecare din lagăr are expresia

$$f = \frac{\pi}{2} \psi \frac{C_m}{\zeta}, \tag{2}$$

în care ζ este coeficientul de încărcare dat de relaţia

$$\zeta = \frac{\psi^2 p_m}{\mu_1 \omega}, \tag{3}$$

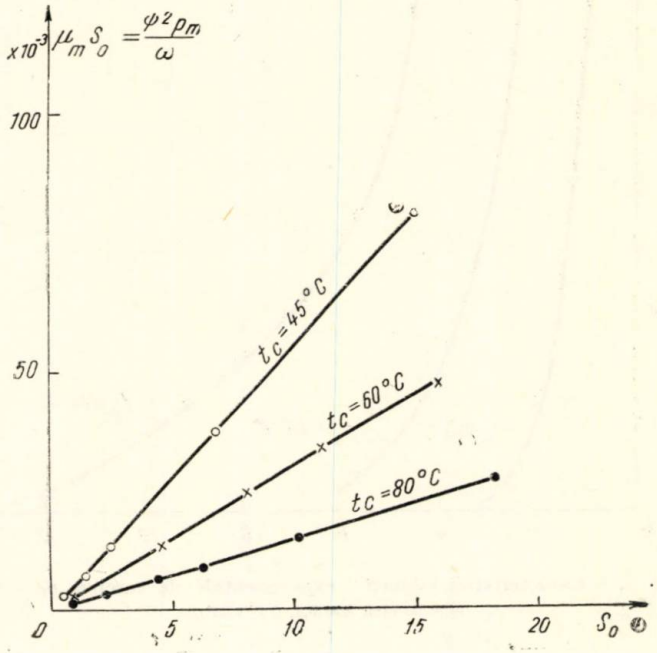


Fig. 5. — Reprezentarea în diagramă polară $\mu_m So = \mu_m So(So)$ a caracteristicilor izoterme de sarcină arătate în figura 4.

viscozitatea avînd valoarea de la intrare în lagăr şi fiind legată de mărimea ei μ într-un punct curent prin

$$\mu = \mu_1 \left(\frac{h}{h_1} \right)^q. \tag{4}$$

Prin intermediul coeficientului C_m, care este o funcţie de excentricitate relativă şi de q, coeficientul de frecare se exprimă în mod mai complet, deci şi nivelul cantitativ al frecării, care determină interdependenţa dintre

p_m și ω în cazul caracteristicilor izoterme de sarcină. Aceasta înseamnă că metoda diagramelor polare de sarcină arătată mai sus poate fi aplicată pentru calcule preliminare, în care coeficientul de frecare este exprimat [6] în mod mai simplificat, cu ajutorul relațiilor

$$f = \psi \frac{3}{\mathrm{So}} \qquad (\mathrm{So} < 1), \tag{5}$$

$$f = \psi \frac{3}{\sqrt{\mathrm{So}}} \qquad (\mathrm{So} > 1). \tag{6}$$

Mckee, citat în [7], a dat de asemenea o expresie pentru calcularea caracteristicilor izoterme de sarcină, și anume sub forma

$$p_m\, bd\left(k_3\, \psi\, \frac{\mu_m N}{p_m} + \Delta f\right)\frac{\pi d}{12} N = k_2\, t^a, \tag{7}$$

în care prin $k_2 t^a$ a notat cantitatea de căldură disipată de către lagăr pentru diferența de temperatură t dintre temperatura lagărului și cea a mediului ambiant, prin N turația fusului lagărului, iar prin expresia din paranteză valoarea coeficientului de frecare din lagăr. Coeficienții k_3 și Δf fiind determinați pe cale experimentală pentru cazul unui lagăr dat, o

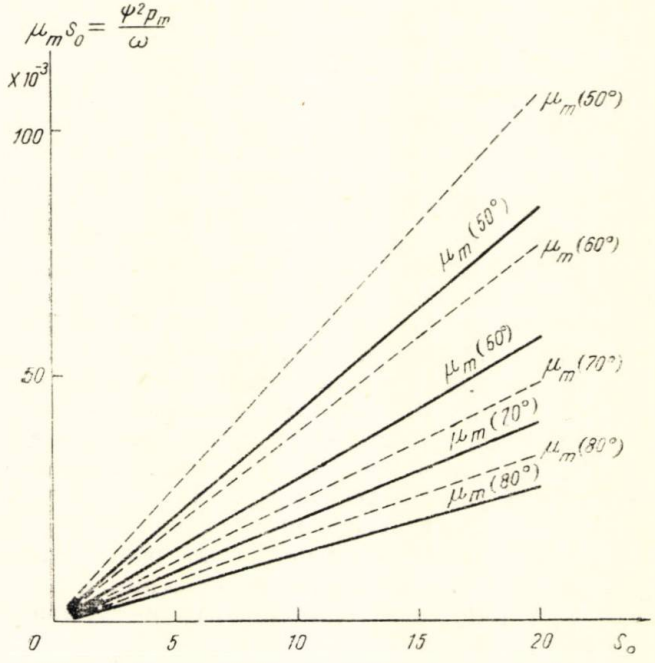


Fig. 6. — Caracteristici izoterme de sarcină în diagramă polară $\mu_m \mathrm{So} = \mu_m \mathrm{So}(\mathrm{So})$ pentru uleiurile tip 305 și tip 408 STAS: ——— tip 305, — — — tip 408.

caracteristică de sarcină izotermă oarecare a acestui lagăr se obţine menţinînd pe t constant şi dînd lui p_m şi N diferite valori, viscozitatea μ_m rezultînd din t. Particularitatea acestei soluţii constă în faptul că, datorită coeficienţilor experimentali k_3, Δf, k_2 şi a pe care îi conţine, ea este valabilă numai pentru lagărul respectiv. În al doilea rînd, din relaţia (7) rezultă că membrul întîi al egalităţii reprezintă căldura generată prin frecare, membrul al doilea considerîndu-se că redă căldura disipată din lagăr prin transfer şi prin radiaţie. Căldura evacuată prin lubrifiant nefiind luată în seamă, înseamnă că relaţia (7) este considerată pentru cazul lagărelor cu baie de ulei proprie şi constantă ca volum, cum sînt, de exemplu, lagărele cu ungere prin inele.

Notînd cu

$$K = \frac{12}{\pi}\frac{1}{dl} k_2 t^a,$$

relaţia (7) poate fi scrisă sub forma

$$p_m = \frac{1}{\Delta f} N\left(\frac{K}{N^2} - k_3 \psi \mu_m\right), \tag{8}$$

din care pot fi desprinse alte două particularităţi ale caracteristicilor izoterme de sarcină. Astfel, pentru aceeaşi temperatură a lagărului, K şi μ_m fiind constante şi toţi parametrii ecuaţiei pozitivi, la o creştere a vitezei rezultă o scădere a sarcinii pentru valori suficient de mari ale lui t ca să fie satisfăcută condiţia $(K/N^2) > k_3 \psi \mu_m$. În al doilea rînd, relaţia (8) arată că la aceeaşi turaţie N lagărul suportă o sarcină mai mare la o temperatură de funcţionare mai ridicată, deoarece K creşte, iar μ_m este mai redus. Valori mari pentru K nu înseamnă altceva decît capacitate sporită pentru lagăr de a disipa căldură şi deci căldură generată prin frecare admisibilă mai ridicată. Aceste două particularităţi pot fi observate la caracteristicile izoterme experimentale prezentate în figura 4.

În ceea ce priveşte reproductibilitatea caracteristicilor izoterme experimentale de sarcină, trebuie observat că acestea sînt o expresie a echilibrului termic din lagăr şi, ca atare, depind de parametrii care întreţin acest echilibru. Printre aceştia sînt în primul rînd coeficientul de frecare, datorită căruia se generează căldură în lagăr, şi debitul de scăpări, prin intermediul căruia o parte din această căldură este evacuată. Ridicarea caracteristicii de sarcină nu implică însă măsurarea acestor parametri şi, în consecinţă, eventualele erori de măsură legate de aceasta nu o afectează direct. Dacă însă la acelaşi p_m şi V cei doi parametri nu se realizează de fiecare dată la acelaşi nivel cantitativ, nu rezultă aceeaşi temperatură t_c şi deci caracteristica de sarcină poate apărea modificată. Parametrii primari p_m şi V şi temperatura lagărului t_c pot fi însă măsuraţi suficient de uşor şi de exact, caracteristica de sarcină prezentîndu-se sub acest raport reproductibilă.

2. Caracteristica de debit. Încercările în care parametrii primari experimentali — sarcina şi viteza — sînt variaţi în condiţii de interdepen-

denţă sau în mod independent, se pot prezenta deopotrivă de susceptibile pentru analizarea caracteristicii experimentale de debit. Una dintre problemele importante care se pune în legătură cu caracteristica experimentală de debit este măsura în care aceasta este reproductibilă. Deoarece debitul, fiind un parametru de lubrifiere derivat, dacă în mod experimental rezultă perfect reproductibil, ar putea fi folosit în calcule şi analize în aceleaşi condiţii ca şi parametrii primari : sarcina şi viteza. Condiţia exterioară de reproductibilitate, adică măsurarea, poate fi asigurată în mod suficient de corespunzător cel puţin la lagărele experimentale, trăsătură prin care acest parametru se apropie de cei primari. În ceea ce priveşte condiţia interioară de reproductibilitate din interiorul lagărului, debitul de scăpări depinde de excentricitatea relativă, care la un lagăr dat este bine precizată pentru anumite valori ale sarcinii şi vitezei.

În multe cazuri experimentale, caracteristica de debit se prezintă într-adevăr reproductibilă ; la un lagăr dat măsurători repetate ale debitului dînd practic valori foarte apropiate. Astfel, în cazul cuplului de materiale aliaj Bz × Pb 27 — oţel OLC 15, încercat în condiţiile $\psi = 1{,}25\,^0/_{00}$, $\lambda = 0{,}7$, la sarcina p_m, presiunea uleiului p_u şi temperatura t_b în baia de lubrifiant menţinute constante, au fost obţinute debitele de

Tabela 3

$p_m = 8{,}6$ kgf/cm²; $p_u = 1{,}5$ kgf/cm²; $t_b = 25 - 26$°C = const.

1			2			3			4		
V m/s	t_c °C	Q_s cm³/min	V m/s	t_c °C	Q_s cm³/min	V m/s	t_c °C	Q_s cm³/min	V m/s	t_c °C	Q_s cm³/min
1,92	4,1	7,6	1,7	41,6	9	2,97	50	10,4	1,22	38,9	7
3,16	50,7	12,25	3,42	53,5	16	4,89	61,1	16,3	2,96	50,5	11,5
5,19	60,3	17	5,25	64	21,5	6,76	69,2	20	4,89	61,6	17,2
8,03	72,5	24,3	6,98	70,2	25	8,81	77,9	25	6,76	69,5	21
			8,9	77	30	10,38	83,7	28,2	9,06	77,8	26
			10,9	83	34,2				11,25	84,8	31,2

lubrifiant arătate ln tabela 3. Măsurătorile 1, 3 şi 4, cum se poate vedea în figura 7, au dat pentru debitul Q_s valori foarte apropiate, cele de la 2 prezentînd unele abateri. În timp, experienţele pentru măsurarea debitului s-au succedat în ordinea numărătorii arătate în tabelă, iar între lucrările 2 şi 3 lagărul a fost demontat complet şi remontat. Această operaţie nu a afectat însă caracteristica de debit, măsurătorile 3 şi 4 efectuate după remontare dînd rezultate comparabile cu cele din 1. Caracteristica de debit 2 prezintă abateri a căror cauză ar putea fi considerată sistematică, deoarece valorile sînt toate mai mari, deşi nu în aceeaşi proporţie. Eroarea nu este însă de măsură, deoarece diferenţele faţă de măsurătorile 1 au fost remarcate de la primele valori obţinute ale debitului şi s-a acordat atenţia cuvenită operaţiei de măsurare.

Unele diferenţe de acest fel la caracteristica de debit au putut fi constatate şi în alte lucrări experimentale. Astfel, la un lagăr cilindric

circular, cu fusul din OLC 15 tratat şi cuzinetul din bronzul de plumb cu 3% Sn şi 20 % Pb, în condiţiile $\psi = 1{,}25\,^0/_{00}$, $\lambda = 0{,}7$, măsurătorile de debit au dat valorile arătate în tabela 4.

În figura 8 sînt prezentate în mod grafic caracterisiticile de debit respective, cu linie întreruptă marcîndu-se valorile debitului corectate la temperatura de 15°C. Din aceste diagrame reiese că, la $V = 3{,}89$ m/s,

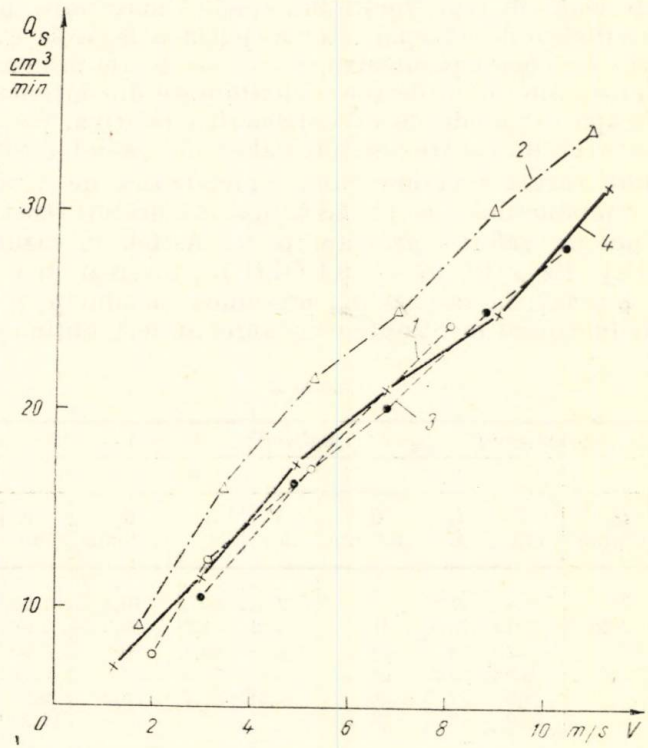


Fig. 7. — Caracteristici de debit Q_S la acelaşi lagăr şi $p_m = 8{,}6$ kgf/cm² = const ($d = 36$ mm, $\lambda = 0{,}7$, $\psi = 1{,}25\,^0/_{00}$).

Tabela 4

$V = 3{,}89$ m/s = const.			$p_m = 1{,}65$ kgf/cm² = const.			$p_m = 149$ kgf/cm²		
p_m kgf/cm²	t_c °C	Q_s cm³/min	V m/s	t_c °C	Q_s cm³/min	V m/s	t_c °C	Q_s cm³/min
1,65	59	36,5	1,24	44	13,5	1,22	45	25
57	60	50	3,20	59	22,7	2,93	58	45,0
112	63	60	4,96	63	28,15	4,96	71,5	73,5
167	68,5	67,5	6,77	70	33,6	6,77	86	103,5
			8,57	75	37,5			

pe curba $p_m = 149$ kgf/cm^2 = const. corespunde un debit de scăpări $Q_S = 55$ cm^3/min, iar la sarcina de $p_m = 149$ kgf/cm^2 corespunde pe caracteristica $V = 3{,}89$ m/s = const. o valoare pentru debit de $Q_S = 65$ cm^3/min. Diferența este de ordinul de mărime a 20%, ca și în cazul caracteristicilor de debit 2 și 1, 3 și 4 din figura 7. Ținînd seama că debitul este un parametru de lubrifiere derivat, se poate considera că

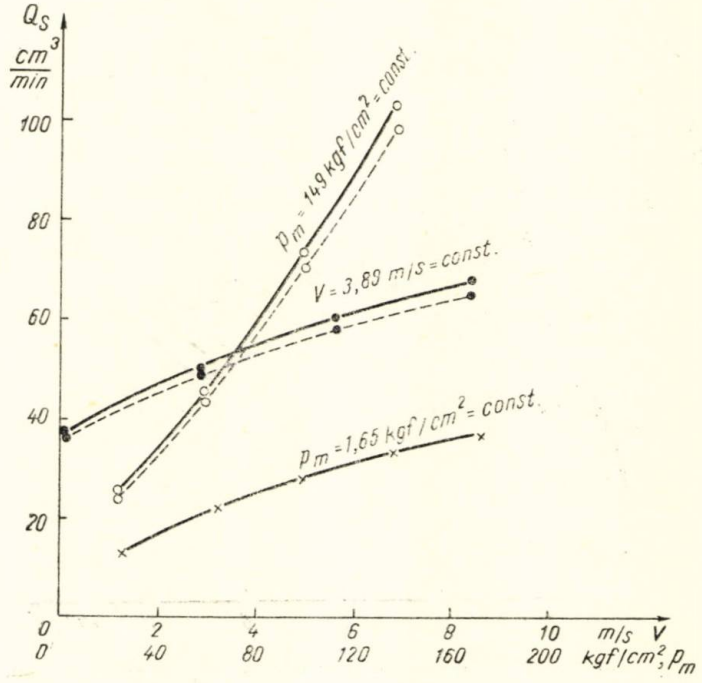


Fig. 8. — Caracteristici de debit la sarcina p_m și la viteza V constante ($d = 36$ mm, $\lambda = 0{,}7$, $\psi = 1{,}25‰$).

diferența de valoare menționată nu este prea mare. Totuși se poate menționa că această diferență nu poate proveni de la măsurare, care s-a făcut cu cilindrul gradat, metodă care nu dă la citire, în cazul cantităților de același ordin de mărime, erori mai mari de ± 1 cm^3. Diferențele menționate trebuie deci să aibă cauze interne, în lagăr. Factorii care dau naștere debitului de scăpări se pot prezenta deci schimbați într-un caz sau altul, dintre aceștia cei mai importanți fiind excentricitatea relativă, caracterul scurgerii — laminar sau perturbat — din pelicula de lubrifiant, precum și modul în care se realizează condițiile la limită în lagăr.

Acest din urmă parametru poate apărea numai la excentricități relative mici, de obicei sub 0,2 [8], cînd repartiția de presiuni poate deveni și antisimetrică. Cel mai important factor pare să fie însă miș-

carea perturbată în pelicula de lubrifiant. Astfel, la experimentare se constată adesea că lagărul capătă oscilaţii axiale, de amplitudine mai mare sau mai mică. Şi aceasta nu la toate vitezele sau presiunile. În cadrul lucrărilor de faţă nu au fost studiate cauzele acestor oscilaţii. La măsurarea debitului, în cazul figurii 7, caracteristica 4, s-a putut însă constata că la

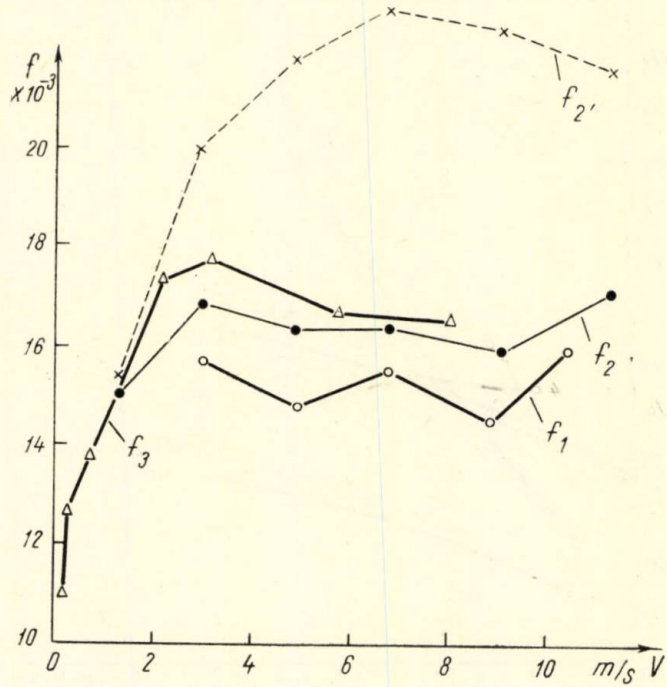


Fig. 9. — Caracteristici ale coeficientului de frecare ($d = 36$ mm, $\lambda = 0{,}7$, ulei 305 STAS). f_1, f_2 — valori experimentale la $\psi = 1{,}25^0/_{00}$, $p_m = 8{,}6$ kgf/cm² = const., f_2' — caracteristica f_2 obţinută cu ajutorul soluţiei numerice a ecuaţiei lui Reynolds, f_3 — valori experimentale la $\psi = 1{,}5^0/_{00}$, $p_m = 12{,}47$ kgf/cm² = const.

viteza de $V = 11{,}25$ m/s lagărul a prezentat oscilaţii de $\sim 0{,}3$ mm faţă de o poziţie mijlocie, debitul fiind de 29 cm³/min. Măsurînd debitul cu lagărul în poziţia mijlocie şi cu oscilaţiile împiedicate, s-a obţinut $Q_s = 30$ cm³/min. În cazul de faţă, oscilaţiile axiale s-au tradus prin viteze axiale perturbatoare în scurgerea lubrifiantului, avînd ca efect o reducere a debitului, efect analog cu acela al mişcării turbulente [5]. Diferenţele de debit menţionate ar putea fi datorate în parte şi fenomenelor superficiale de frontieră la ieşirea uleiului din lagăr, ca formarea meniscurilor menţionate în [9] ca o cauză care provoacă diferenţe între valoarea debitului măsurată şi cea obţinută prin calcul. În ceea ce priveşte acest efect, precum şi celelalte menţionate mai sus, din figura 7 reiese că abaterile între curba 2 şi celelalte (1, 2 şi 4) luate la un loc prezintă o

alură generală de creștere cu viteza, ceea ce pare normal dacă în acest proces ponderea cea mai mare o au oscilațiile axiale, care par a depinde de viteză.

Mai trebuie menționat că diferențe la debitele măsurate au mai putut fi constatate și la unele lagăre avînd aceeași geometrie, dar cu

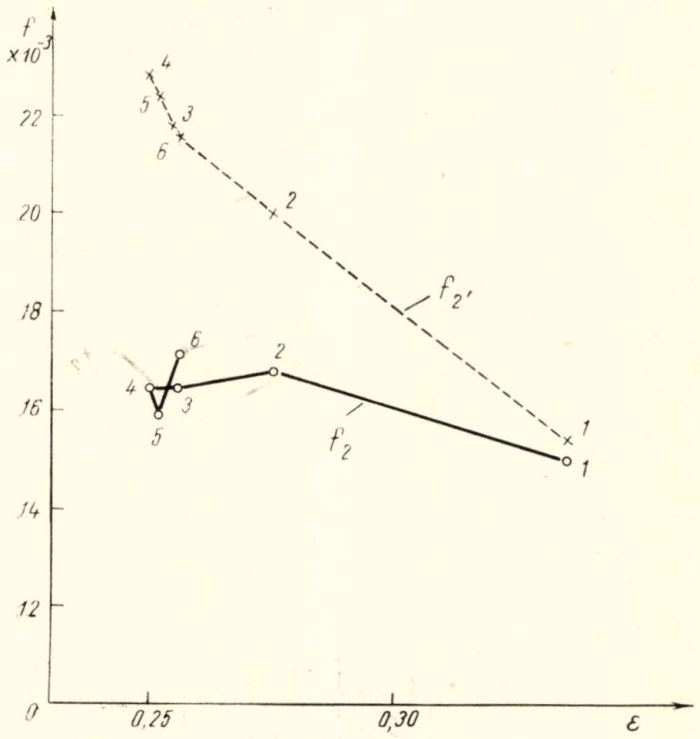


Fig. 10. — Variația coeficientului de frecare f_2 și f_2' din figura 9, în funcție de excentricitatea relativă.

împerecheri de materiale diferite [10], lucrări care se pare că nu au fost reluate pentru clarificarea acestui aspect.

3. Caracteristica coeficientului de frecare. Măsurarea forței sau a momentului de frecare la un lagăr experimental de construcție mai apropiată de execuțiile tehnice, în condiții variate de sarcină și viteză, dar mai ales la sarcini mari, este legată în general de împrăștieri relativ mari. Amenajările constructive pentru măsurarea acestui parametru, bazate pe principiul hidrostatic, se prezintă în general mai favorabile din acest punct de vedere, aceste instalații fiind însă mai scumpe. În cele ce urmează sînt analizate aspectele măsurării momentului de frecare, deci și a coeficientului de frecare, cu ajutorul sistemului paralelogram, care este mai răspîndit în laboratoare. La aceste sisteme bazate pe articulații,

sensibilitatea dispozitivului scade la sarcini mai mari chiar şi în cazul articulaţiilor realizate sub formă de lagăre tip cuţit. Apare deci recomandabil ca măsurarea momentului de frecare să se facă de preferinţă la sarcini mai reduse. În al doilea rînd apare indicat ca sarcina pe lagăr să fie aplicată prin simplă atîrnare, deoarece orice mecanism de demultiplicare a acesteia intercalat în sistem introduce momente false. Această cerinţă limitează, de asemenea, la multe instalaţii experimentale sarcina la care poate fi măsurat momentul de frecare. Determinarea pe cale experimentală a coeficientului de frecare la sarcini mai mari, adică de-a lungul unei caracteristici de sarcină, se poate face în astfel de cazuri măsurînd acest parametru la o sarcină redusă, valorile corespunzătoare sarcinilor ridicate putînd fi calculate [11]. Precizia întregii caracteristici a coeficientului de frecare determinată pe această cale depinde de eroarea cu care este afectată valoarea acestui parametru obţinută prin măsurare. La dispozitivul cu ajutorul căruia au fost obţinute valorile coeficientului de frecare ce vor fi prezentate în cele ce urmează, precizia este de $\pm 0{,}320$ kgfcm, în cazul instalaţiei ale cărei caracteristici au fost arătate mai sus, cu sarcina atîrnîndă şi cu încărcarea $p_m < 13$ kgf/cm^2.

Chiar în aceste condiţii favorabile de măsurare, coeficientul de frecare prezintă uneori împrăştieri relativ mari, cum se poate vedea din tabela 5 şi din figura 9, în care f_1 şi f_2 reprezintă valorile măsurate la

Tabela 5

$p_m = 8{,}6$ kgf/cm^2 = const.,			$\lambda = 0{,}7$,			$\psi = 1{,}25‰$				
1			2			2′				
V m/s	t_c °C	$f_1 \times 10^{-3}$	V m/s	t_c °C	$f_2 \times 10^{-3}$	$\frac{\mu_m}{\text{kgs/m}^2} \times 10^{-3}$	So	ε	f/ψ	$f_{2'} \times 10^{-3}$
2,97	50	15,7	1,22	38,9	15	7,48	0,264	0,335	12,3	15,4
4,89	61,1	14,8	2,96	50,5	16,8	4,21	0,193	0,275	16,0	20,0
6,76	69,2	15,5	4,89	61,6	16,4	2,68	0,184	0,255	17,4	21,8
8,81	77,9	14,5	6,76	69,5	16,4	2,08	0,171	0,25	18,2	22,8
10,38	83,7	15,96	9,06	77,8	15,95	1,53	0,174	0,252	17,9	22,4
			11,25	84,8	17,1	1,16	0,185	0,256	17,3	21,6

acelaşi lagăr (aliaj BzXPb27 — OLC 15) în condiţiile : $d = 36$ mm, $\lambda = 0{,}7$, $\psi = 1{,}25‰$, ulei tip 305 STAS, sarcina $p_m = 8{,}6$ kgf/cm^2 = const., alimentarea sub presiunea de $p_u = 1{,}5$ kgf/cm^2 = const. Uneori din cauza acestor împrăştieri nu apare suficient de clar nici sensul de variaţie al coeficientului de frecare. În cazul de faţă, pentru a obţine această orientare, corespunzător valorilor lui f_2 au fost determinate prin calcul valorile $f_{2'}$, făcînd uz, după [9], de valorile numerice ale parametrilor So, ε şi f/ψ. Numărul So a fost calculat cu ajutorul relaţiei (1), în care pentru viscozitatea μ_m s-a luat valoarea corespunzătoare temperaturii t_c a lagărului. În aceste calcule nu s-a ţinut seama de variaţia jocului din lagăr cu temperatura. Din figura 9 se poate vedea că în cazul de

față $f_{2'}$ redă în mod mai corect sensul variației coeficientului în ecartul de viteză $V = 1{,}22-2{,}96$ m/s. Acest aspect apare și mai clar în figura 10, în care f_2 și $f_{2'}$ sînt reprezentați în funcție de excentricitatea relativă.

Analizînd cauzele cărora ar putea fi atribuite aceste împrăștieri, trebuie observat mai întîi că tendința de salt către valori maxime ale lui f_1 și f_2 la vitezele mari nu se poate datora apariției regimului turbulent, deoarece, în cazul lui f_2, la viteza maximă de $V = 11{,}25$ m/s corespunde o turație de 5 980 rot/min, în timp ce turația critică de turbulență este de $n_{cr} = 356 \cdot 10^3$ rot/min, iar numărul Reynolds $\mathcal{R}e = 19{,}5 < 1\,000$ (aceste valori au fost calculate în ipoteza lagărului slab încărcat [5]). Luînd apoi în considerare concordanța destul de bună la viteze mici a sensului de variație a coeficientului de frecare redat de valorile experimentale f_2 și de cele teoretice $f_{2'}$, ar putea fi conchis că împrăștierile care apar la vitezele mai mari pot fi atribuite mișcării nestaționare în pelicula de lubrifiant. Acest regim se poate datora oscilațiilor diferite ale lagărului în timpul funcționării, regim care influențează în mod negativ și debitul de scăpări, cum s-a arătat la pct. 2. Această ipoteză este întărită și de caracteristica experimentală f_3 din figura 9, care la viteze mici redă și mai bine concordanța cu $f_{2'}$ în ceea ce privește sensul variației coeficientului de frecare. Caracteristica f_3 se referă la cuplul de materiale $ZnAl_{30}Cu_{1,7}$ — OLC 15, lagărul avînd $d = 36$ mm, $\lambda = 0{,}7$, $\psi = 1{,}5\,‰$, sarcina $p_m = 12{,}46$ kgf/cm^2 = const., alimentarea făcîndu-se sub presiune ($p_u = 1{,}5$ kgf/cm^2) cu ulei tip 305 STAS. Dintre factorii care produc împrăștieri în datele experimentale ale coeficientului de frecare în cazul lagărelor slab încărcate, ar putea avea o oarecare importanță și apariția regimului de repartiție antisimetrică a presiunilor în pelicula de lubrifiant, deoarece lagărul lucrează cu excentricități relative mici. Apare deci indicat ca datele experimentale privind coeficientul de frecare, obținute în condițiile de mai sus, să fie utilizate cu un discernămînt corespunzător. În legătură cu datele din tabela 5 mai este de remarcat că So trebuie să scadă continuu cu creșterea vitezei și scăderea lui μ_m cînd t_c crește. Valorile 0,174 și 0,185, care marchează o tendință de creștere a lui So, trebuie atribuite faptului că μ_m s-a luat corespunzător lui t_c, ceea ce, la anumite temperaturi t_c, s-ar putea să nu mai fie riguros exact. O altă cauză poate consta în faptul că, la funcționarea lagărului, în aceste puncte au apărut în mișcarea din pelicula de lubrifiant fenomene perturbatoare, care, producînd o reducere a debitului de scăpări sau o creștere a coeficientului de frecare, au avut ca efect rezultant creșterea temperaturii t_c și deci o reducere a lui μ_m peste scăderea normală. Mai trebuie de asemenea menționat că la valorile experimentale ale coeficientului de frecare nu s-a ținut seama de momentul sarcinii rezultat din poziția excentrică a fusului. Aceasta deoarece, conform datelor din tabela 5, la $\varepsilon = 0{,}33$ corespunde un unghi al poziției liniei centrelor de aproximativ $\theta^* = 70°$, ceea ce la sarcina de $P = 78$ kgf conduce la o corecție a coeficientului de frecare măsurat de aproximativ $\Delta f = +\,0{,}3 \cdot 10^{-3}$, adică mai puțin decît reprezintă împrăștierile.

4. Caracteristica termică a instalației experimentale. La lagărele alimentate cu lubrifiant sub presiune, rolul pe care îl are uleiul în evacuarea căldurii fiind mai important, ecuația de echilibru termic poate fi pusă sub forma

$$fp_m V \frac{db}{A} = K_1 Q_S + K_0 H_0, \tag{9}$$

în care membrul întîi reprezintă căldura generată prin frecarea lichidă, termenul $K_1 Q_S$ cantitatea din această căldură evacuată prin intermediul lubrifiantului, iar $K_0 H_0$ restul din căldură produsă, evacuată prin elementele de construcție ale lagărului, fusului și instalației experimentale. Se consideră că lagărul este răcit pe cale naturală. K_1 este o funcție de temperatura t_m pe care o are lubrifiantul la ieșirea din lagăr și care se admite că este egală cu temperatura de regim a lagărului. K_0 este o funcție de temperatura t_s a suprafețelor elementelor constructive ale lagărului în contact cu mediul ambiant către care se face transferul de căldură; t_s depinde de asemenea de temperatura de regim t_c a lagărului. Nivelul de temperatură la care se stabilește un echilibru termic oarecare, dat de relația (9), este deci precizat prin parametrii K_1 și K_0.

Dacă se cunosc parametrii de funcționare f, p_m, V, Q_s și t_c ai lagărului, termenul $K_0 H_0$ se poate calcula, aceste valori constituind ceea ce poate fi denumită caracteristica termică a instalației. Încercări experimentale efectuate în cazul unui cilindru orizontal plasat în aer în repaus arată [6] că transferul total de căldură de la cilindru către aerul înconjurător este o funcție aproape liniară de diferența $t_s - t_c$ a temperaturii suprafeței cilindrului și a aerului în repaus. Caracteristica termică $K_0 H_0$ este deci practic o funcție liniară de t_c prin intermediul lui t_s. Invers, dacă se cunoaște $K_0 H_0$, cu ajutorul relației (9) poate fi determinat f sau Q_s, procedeul fiind mai important pentru calculul coeficientului de frecare, deoarece acesta prezintă împrăștieri mai mari atunci cînd se determină pe cale experimentală.

Determinarea caracteristicii termice $K_0 H_0$ a unei instalații experimentale revine deci la cunoașterea membrului întîi al relației (9), adică a căldurii generate prin frecare. Determinarea acestui parametru se poate face pe cale experimentală sau se poate calcula pe cale teoretică. În primul caz, exactitatea valorii ce se obține depinde de precizia cu care pot fi măsurați f, p_m și V. Parametrii primari p_m și V s-a arătat că nu prezintă dificultăți din acest punct de vedere. Împrăștierile date de determinarea pe cale experimentală a coeficientului de frecare implică, în consecință, o triere judicioasă a valorilor măsurate. Exactitatea caracteristicii $K_0 H_0$ experimentale depinde deci de f. În tabela 6 sînt arătate valorile experimentale ale caracteristicii termice $K_0 H_0$ a instalației de încercări iar în figura 11 aspectul grafic al acestora.

Alura de linie dreaptă a caracteristicii $K_0 H_0$ este redată în mod mai exact de către grupul de valori 2, grupurile 1 și 3 situîndu-se de o parte și de cealaltă față de acesta. Împrăștierile intrate în aceste valori prin intermediul coeficientului de frecare apar în mod mai pregnant în punc-

tele A, B și C. Față de dispunerea aproape liniară a punctelor din grupul de valori 2, punctul A ar fi trebuit să cadă aproximativ în A'. Acestor împrăștieri pot fi atribuite și diferențele care apar în valorile lui K_0H_0 în aceste puncte. Astfel, la $t_c = 50°C$, caracteristicile 1 și 2 dau valori

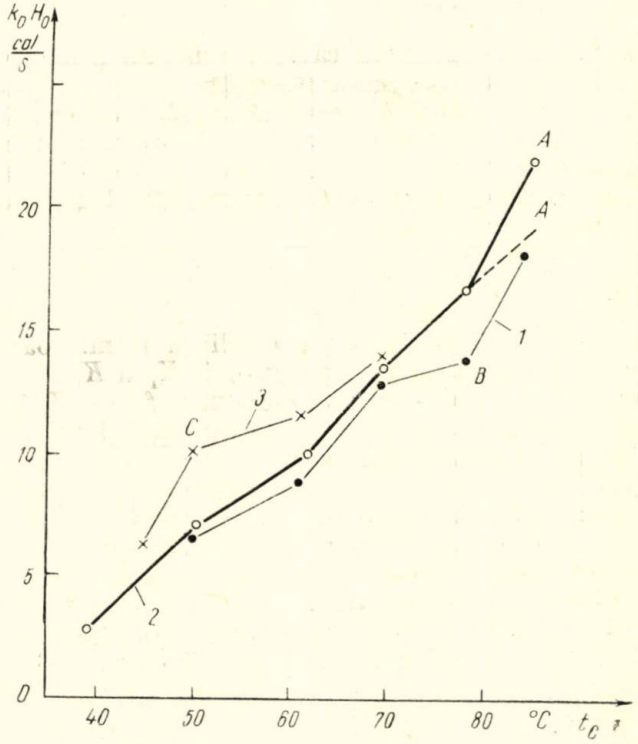


Fig. 11. — Caracteristica termică experimentală a instalației de încercări. A, B și C — puncte cu împrăștieri mai mari.

apropiate pentru K_0H_0, în timp ce caracteristica 3 dă valori mult mai mari. La $t_c = 61°C$ prezintă pentru K_0H_0 valori mai mici caracteristica 1 și mai mari caracteristica 3. Or, este evident că prin elementele constructive ale lagărului căldura ce poate fi disipată la același t_c și la aceeași temperatură a mediului ambiant nu poate avea decît valori apropiate. Valorile parametrilor V, p_m, f și Q_s cu ajutorul cărora au fost calculați termenii K_1Q_s și K_0H_0 ai grupurilor de valori 1 și 2 sînt arătați în tabela 3 (grupurile 3, respectiv 4) și tabela 5 (grupurile 1, respectiv 2).

În tabela 6 au fost trecute, de asemenea, valorile raportului dintre cantitatea de căldură evacuată prin lubrifiant și cantitatea totală de căldură generată prin frecare, ambele valori experimentale. În cazul lagărului experimental folosit, a alimentării cu lubrifiant sub presiune și a regimului de încercări menționat, datele arată că prin lubrifiant se

Tabela 6

Cuplul Bz × Pb 27 — OLC 15 ($d = 36$ mm, $\lambda = 0{,}7$, $\psi = 1{,}25^0/_{00}$)

1				2			
t_c °C	$K_1 Q_s$ cal/s	$K_0 H_0$ cal/s	$\frac{K_1 Q_s}{K_1 Q_s + K_0 H_0}$ %	t_c °C	$K_1 Q_s$ cal/s	$K_0 H_0$ cal/s	$\frac{K_1 Q_s}{K_1 Q_s + K_0 H_0}$ %
50	1,96	6,58	22,9	38,9	0,68	2,66	20,4
61	4,36	8,86	33	50,5	2,12	7,00	23,2
69,2	6,5	12,7	33,9	61,6	4,69	10,01	31,9
77,9	9,75	13,65	41,6	69,5	6,9	13,4	34,0
83,7	12,1	18,1	40	77,8	9,94	16,56	37,5
				84,8	13,3	21,9	37,8

Cuplul $ZnAl_{30}Cu_{1,7}$ — OLC 15 ($d = 36$ mm, $\lambda = 0{,}7$, $\psi = 1{,}5^0/_{00}$)

3						
t_c °C	V m/s	Q_s l/h	f $\times 10^{-3}$	$K_1 Q_s$ cal/s	$K_0 H_0$ cal/s	$\frac{K_1 Q_s}{K_1 Q_s + K_0 H_0}$ %
45	2,18	1,32	17,35	3,78	6,22	37,8
50	3,42	1,68	17,7	5,84	10,16	36,5
61	5,45	2,79	16,7	12,52	11,48	51,2
70	7,84	3,42	16,5	20,2	13,9	59,4

evacuează din lagăr căldură în proporţie de 20—40 % din căldura totală generată prin frecare în cazul jocului de $\psi = 1{,}25^0/_{00}$ şi $p_m = 8{,}6$ kgf/cm² şi pînă la 60 % pentru jocul relativ mai mare $\psi = 1{,}5^0/_{00}$ şi $p_m = 12{,}46$ kgf/cm². Aceste rezultate arată că aspectul cantitativ al disipării căldurii trebuie analizat în mod mai amănunţit la fiecare tip de construcţie de lagăr în parte. Totodată este necesar ca în lucrările de acest fel să se ţină seama de eventuale influenţe termice exterioare care ar putea modifica condiţiile de disipare a căldurii din lagăr, ca, de exemplu, căldura produsă în lagărele de sprijin ale fusului în cazul instalaţiilor experimentale. În aceste cazuri este necesar ca lagărele de sprijin să fie răcite la o temperatură apropiată de cea a mediului ambiant, pentru ca şi disiparea căldurii prin fus să rămînă în proporţie faţă de această temperatură ca şi disiparea prin celelalte elemente ale lagărului.

În ceea ce priveşte determinarea pe cale teoretică a căldurii generate prin frecare, redată de membrul întîi al relaţiei (9), poate fi menţionat că, dacă regimul de funcţionare a lagărului este hidrodinamic, frecarea este numai de natură lichidă şi calculul teoretic trebuie să conducă la rezultate corecte. Diferenţa faţă de valoarea căldurii obţinută pe cale experimentală s-ar putea datora numai nerealizării întocmai, în lagărul experimental, a condiţiilor la limită care stau la baza expresiilor teoretice ale parametrilor hidrodinamici. Rezultatele ce pot fi obţinute cu

relația (9) sînt deci comparabile numai dacă toți parametrii sînt teoretici sau toți experimentali sau dacă se verifică și se constată în prealabil o concordanță suficient de bună între valorile teoretice și experimentale ale parametrilor care se folosesc în mod combinat.

Determinarea prin calcul a căldurii generate prin frecarea lichidă revine la calcularea coeficientului f, respectiv f/ψ pentru relația (9). În

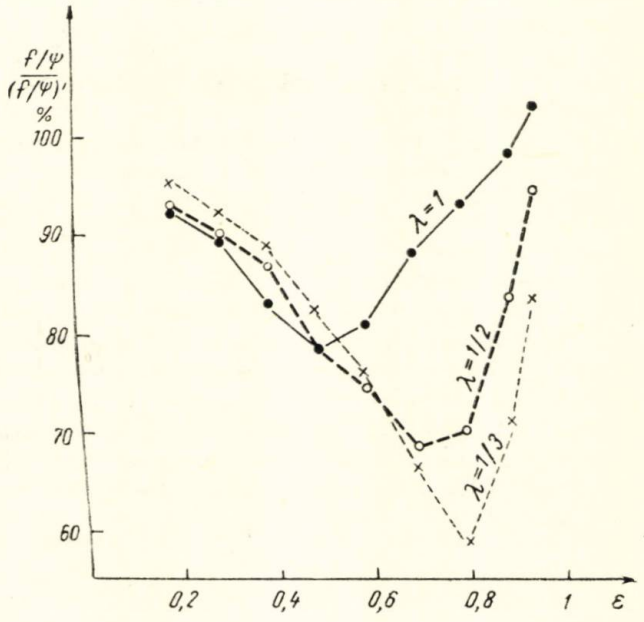


Fig. 12. — Variația raportului $(f/\psi)/(f\psi)'$. f/ψ — calculat cu relațiile (5) și (6), $(f/\psi)'$ — rezultat din soluția numerică a ecuației lui Reynolds.

mod mai expeditiv, acest parametru poate fi calculat cu ajutorul soluției numerice a ecuației lui Reynolds și cu ajutorul relațiilor (5) și (6), ultimele dînd rezultate mai aproximative. Diferențele dintre valorile f/ψ care rezultă prin calcul după aceste două metode nu variază prea mult cu λ, și anume pînă la excentricități relative $\varepsilon \cong 0{,}6$. Aceste diferențe se accentuează însă pentru $\varepsilon > 0{,}6$ și la valori mai reduse ale alungirii relative. În figura 12 se arată variația în funcție de ε a raportului lui f/ψ, calculat cu relațiile (5) și (6) față de $(f/\psi)'$ rezultat din soluția numerică a ecuației lui Reynolds [9]. Determinarea parametrului f/ψ cu ajutorul relației (2) este mai completă, deoarece metoda [5] implică și calculul temperaturii medii t_m ($\cong t_e$) și a temperaturii maxime din pelicula de lubrifiant. Calculul este însă puțin mai laborios și se face, într-o primă aproximație, admițînd ipoteza că toată căldura generată prin frecarea lichidă în lagăr este evacuată prin lubrifiant. În cazul de față s-a lucrat cu un lagăr la care acest aspect este redat în tabela 6.

5. Jocul la cald în lagăr. În lucrările experimentale, acest aspect interesează mai ales în legătură cu diagrama polară a caracteristici izoterme de sarcină şi a parametrului f/ψ, deoarece încercările se fac de obicei cu un lagăr dat, la temperaturi de funcţionare t_c diferite, unele dintre acestea avînd valori mai ridicate.

Se admite că, datorită temperaturilor pe care le iau pereţii solizi ai suprafeţelor de frecare ca urmare a contactului cu pelicula caldă de lubrifiant, jocul dintre aceşti pereţi la lagărele cilindrice circulare pline se modifică din cauza dilataţiilor termice. Configuraţia geometrică şi materialele fusului şi cuzinetului fiind de obicei diferite, între dilatarea fusului şi a cuzinetului pot apărea diferenţe care modifică jocul cînd se trece, în timpul experienţelor cu acelaşi lagăr, de la o temperatură de funcţionare la alta. Cunoaşterea acestor diferenţe este de asemenea necesară în cazul lagărelor reale pentru a determina jocul de montaj al pieselor.

Determinarea diferenţei de joc $\Delta\psi$ datorită dilatărilor implică cunoaşterea repartiţiei temperaturilor, a formei şi mărimii suprafeţelor, a naturii materialelor pieselor şi a condiţiilor de răcire exterioară a lagărului şi fusului. Datorită formei geometrice, în majoritatea cazurilor foarte complicate, a lagărelor tehnice, condiţiile de propagare şi ale transferului de căldură în masa pieselor şi către mediul de răcire se pot prezenta într-un mod nu întotdeauna abordabil prin calcul. Din această cauză, pentru corecţia $\Delta\psi$ se cunosc date rezultate din exploatare, sub forma unor relaţii empirice de calcul. Pentru forme geometrice schematice de lagăr şi în condiţii simplificate de propagare şi de transfer de căldură, au fost date şi soluţii de calcul pentru $\Delta\psi$ în conformitate mai strînsă cu legile căldurii.

Soluţia empirică de calcul prezentată în [5] are forma

$$\psi_0 = \psi + S\,(t_m - t_0)\,10^{-6}, \tag{10}$$

în care ψ_0, ψ reprezintă jocul la montaj, respectiv la temperatura medie t_m a lagărului, S un coeficient care ţine seama de natura şi de forma lagărului, iar t_0 temperatura mediului ambiant la montaj.

Soluţia de calcul a lui $\Delta\psi$, dată pentru cazul simplificat al unui lagăr compus dintr-o carcasă cilindrică în care este presat cuzinetul de asemenea cilindric, este dată de Gersdorfer, citat în [6], sub forma

$$\Delta d = d\,\frac{s_b E_b \beta_b \Delta t_1 + s_c E_c \beta_c \Delta t_2}{s_b E_b + s_c E_c}, \tag{11}$$

în care Δd este variaţia diametrului interior al cuzinetului, s_b, s_c grosimea peretelui cuzinetului respectiv a carcasei lagărului, E_b, E_c modulul de elasticitate al materialului cuzinetului, respectiv al materialului carcasei, β_b, β_c coeficienţii de dilatare termică a materialului cuzinetului, respectiv a carcasei lagărului, Δt_1 diferenţa de temperatură dintre cea medie t_m a circumferinţei interioare a cuzinetului şi cea de la circumferinţa exterioară a acestuia, iar Δt_2 diferenţa dintre temperatura de la interiorul şi de la exteriorul carcasei lagărului. O soluţie pentru calculul lui $\Delta\psi$

în aceleași condiții simplificate, însă ținînd seama și de alți parametri, este [12]

$$\frac{\Delta d}{2} = \frac{r_1 (1 - m_b)}{B_{12} R_{23} - A B_{23} R_{12}} \left\{ (B_{23} - R_{23}) R_{m_c} \beta_c \left[(t_3 - t_l) R_{23} + \right.\right.$$

$$+ (t_2 - t_3) \left(\frac{R_{23}}{2 \ln \frac{r_3}{r_2}} - r_2^2 \right) \left.\right] - (A B_{23} + R_{23}) \left\{ R_{m_b} \beta_b \left[(t_2 - t_l) R_{12} + \right.\right. \quad (12)$$

$$\left.\left. + (t_1 - t_2) \left(\frac{R_{12}}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} - r_1^2 \right) \right] + \frac{2 r_1^2 p_m (1 + m_b)}{E_b} \right\} \Bigg\} + \frac{r_1 p_m (1 + m_b)}{E_b},$$

în care

$$\left.\begin{aligned} B_{12} &= r_2^2 (1 - 2m_b) + r_1^2, & B_{23} &= r_2^2 (1 - 2 m_c) + r_3^2 \\ R_{12} &= r_2^2 - r_1^2, & R_{23} &= r_3^2 - r_2^2 \\ R_{m_b} &= \frac{1 + m_b}{1 - m_b}, & R_{m_c} &= \frac{1 + m_c}{1 - m_c} \\ A &= \frac{E_b (1 + m_c)}{E_c (1 + m_b)}. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

În aceste relații au fost notați cu indicele b parametrii care se referă la cuzinetul b al lagărului (fig. 13), iar cu c cei ai carcasei c a acestuia. Apoi s-a notat cu m coeficientul lui Poisson, cu E modulul de elasticitate,

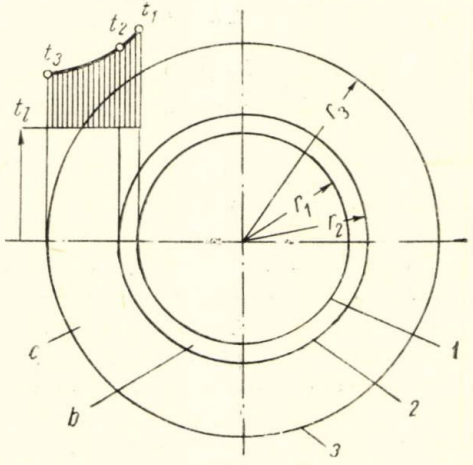


Fig. 13. — Lagăr cilindric schematic
b — cuzinetul; c — carcasa lagărului; r_1, r_2, r_3 — razele suprafețelor 1, 2 și 3; t_1, t_2, t_3 — temperaturile suprafețelor 1, 2, 3; t_l — temperatura mediului ambiant.

cu β coeficientul de dilatare termică, cu r_1, r_2 și r_3 razele suprafețelor 1, 2 și 3, cu t_1, t_2 și t_3 temperaturile acestor suprafețe, cu t_l temperatura mediului ambiant, cu $\frac{\Delta d}{2}$ variația în direcție radială a razei r_1 a suprafeței interioare 1 a cuzinetului, iar cu p_m presiunea specifică medie pe suprafața proiectată a cuzinetului. Atît din relația (11) prin Δt_2, cît și din relația (12) prin t_3, rezultă că variația diametrului suprafeței interioare a cuzinetului $2r_1 = d$, datorită dilatării termice, depinde de condițiile de răcire a carcasei exterioare, adică de temperatura t_3 a suprafeței cu raza r_3. Această temperatură diferă de temperatura mediului exterior de răcire, în cazul răcirii lagărului pe cale naturală în aer diferența $t_l - t_3$ fiind chiar foarte importantă. Deoarece între suprafața activă de frecare 1 și suprafața 3 propagarea căldurii se face prin conductivitate, diferența $t_1 - t_3$ va fi însă redusă.

În cazul unui lagăr sub formă de cilindru simplu, ten Bosch, citat în [6], dă următoarele relații pentru diferența $t_i - t_e$ a temperaturilor suprafeței interioare și exterioare ale acestuia și pentru diferența $t_e - t_l$ a temperaturilor suprafeței exterioare și a mediului ambiant :

$$t_i - t_e = \frac{Kfp_m V}{2\pi\alpha_k b} \ln \frac{r_e}{r_i}, \tag{14}$$

$$t_e - t_l = \frac{Kfp_m V}{2\pi r_e b\alpha}. \tag{15}$$

Aplicînd aceste relații în cazul sistemului din figura 13, se obține

$$t_1 - t_2 = \frac{Kfp_m V}{2\pi\alpha_b b} \ln \frac{r_2}{r_1}, \tag{16}$$

$$t_2 - t_3 = \frac{Kfp_m V}{2\pi\alpha_c b} \ln \frac{r_3}{r_2}, \tag{17}$$

$$t_3 - t_l = \frac{Kfp_m V}{2\pi r_3 \alpha b}. \tag{18}$$

Eliminînd din aceste trei relații pe t_2 și termenul $Kfp_m V$, care reprezintă căldura generată prin frecare în lagăr, rezultă

$$t_3 = \frac{t_1 + \alpha r_3 \left(\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\alpha_b} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\alpha_c} \right) t_l}{1 + \alpha r_3 \left(\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\alpha_b} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\alpha_c} \right)} \tag{19}$$

și în mod analog

$$t_2 = \frac{t_l + t_1 \left(\dfrac{\ln \dfrac{r_3}{r_2}}{\alpha_c} + \dfrac{1}{\alpha r_3} \right) \Bigg/ \dfrac{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}{\alpha_b}}{1 + \left(\dfrac{\ln \dfrac{r_3}{r_2}}{\alpha_c} + \dfrac{1}{\alpha r_3} \right) \Bigg/ \dfrac{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}{\alpha_b}}. \tag{20}$$

În aceste expresii, α_b, α_c sînt coeficienții de conductivitate termică a materialului cuzinetului, respectiv a carcasei lagărului, iar α coeficientul global al transferului de căldură de la suprafața exterioară a carcasei (cu raza r_3) către mediul ambiant. Relațiile (12)—(20) au la bază ipoteza simplificatoare că pe la capetele cilindrului, care reprezintă schematic lagărul, nu are loc nici un transfer de căldură către mediul ambiant și că, carcasa lagărului se poate dilata liber în direcția lui r_3.

Luînd acum în considerare variația diametrului fusului datorită dilatării termice, aceasta este [6]

$$\Delta d_f = d_f \beta_f (t_1 - t_l). \tag{21}$$

Variația jocului în lagăr este în acest caz

$$\Delta\psi = \frac{\Delta d - \Delta d_f}{d}, \tag{22}$$

care poate fi pozitivă, cînd lagărul se dilată mai mult decît fusul, sau negativă, dacă fusul se dilată mai mult. Dacă carcasa lagărului nu se poate dilata liber la exterior, expresiile (12)—(20) nu se mai aplică, cuzinetul se dilată către interior ($\Delta d < 0$), iar $\Delta\psi$ rezultă din $\Delta d + \Delta d_f$.

Calculînd Δd cu ajutorul celor trei relații de calcul (10), (11) și (12), precum și dilatarea fusului cu (21) pentru temperaturile $t_c = t_m = t_1$ corespunzătoare caracteristicii de sarcină redate de tabela 1, în tabela 7 sînt arătate valorile parametrilor t_2, t_3, Δd și $\Delta\psi$, obținute pe această cale. Pentru efectuarea calculelor au fost luate următoarele valori pentru

Tabela 7

$t_c = t_1$ °C	t_l °C	t_2 °C	t_3 °C	$+\Delta d$ (11) ‰	$+\Delta d$ (12) ‰	$+\Delta d_f$ ‰	$-\Delta\psi$ (10) ‰	$-\Delta\psi$ (11) ‰	$-\Delta\psi$ (12) ‰
38,9		38,86	38,62	0,0027	0,069	0,155	0,235	0,152	0,086
50,5		50,43	49,98	0,0051	0,135	0,294	0,446	0,29	0,159
61,6	26	61,5	60,85	0,0075	0,202	0,427	0,648	0,42	0,225
69,5		69,38	68,59	0,0093	0,254	0,524	0,791	0,515	0,27
77,8		77,66	76,72	0,0108	0,298	0,621	0,942	0,61	0,323
84,8		84,64	83,58	0,012	0,346	0,705	1,08	0,693	0,359

lagărul experimental schematizat, considerat că se poate dilata liber către exterior în direcția razei r_3:

$r_1 = \frac{d}{2} = 1{,}8 \cdot 10^{-2}$ m; $r_2 = 2{,}4 \cdot 10^{-2}$ m; $r_3 = 5{,}6 \cdot 10^{-2}$ m; $b = 4{,}2 \cdot 10^{-2}$ m;

$\alpha_b = 97{,}1 \frac{\text{kcal}}{\text{mh°C}}$ pentru cuzinetul din bronz de plumb [13];

$m_b = 0{,}34$; pentru cuzinetul din bronz de plumb;

$E_b = 750.10^3$ kgf/cm² pentru cuzinetul din bronz de plumb [13];

$\beta_b = 18{,}6.10^{-6}$, 1/°C pentru cuzinetul din bronz de plumb [13];

$\alpha_c = 45$ kcal/mh °C pentru oțel [6];

$m_c = 0{,}27$ pentru oțel;

$E_c = 2160 \cdot 10^3$ kgf/cm² pentru oțel;

$\beta_c = \beta_t = 12 \cdot 10^{-6}$, 1/°C pentru oțel;

$\alpha = 16{,}8$ kcal/m²h °C, pentru oțel-aer liniștit [6];

$S = 18{,}2$ pentru bronz de plumb [5].

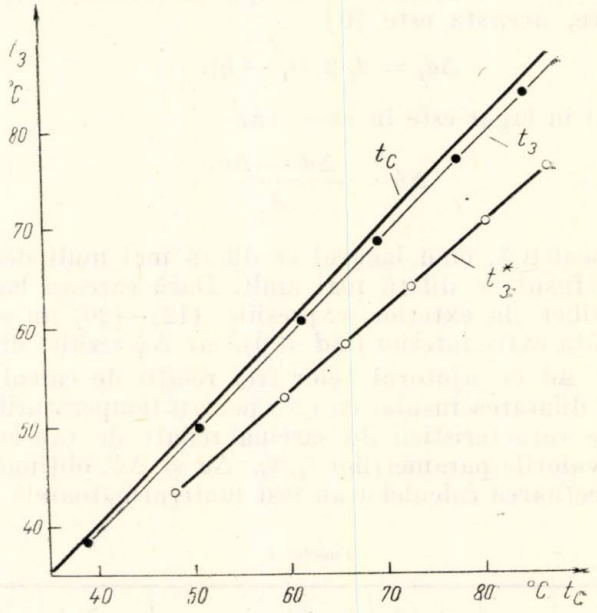


Fig. 14. — Temperatura t_3 pe suprafața exterioară a carcasei lagărului. t_c — temperatura cuzinetului, t_3 — valori calculate cu relația (19), t_3^* — valori măsurate la carcasa 4 (fig. 1).

Din aceste rezultate se poate constata mai întîi că, în ipotezele de calcul admise, diferența dintre temperatura t_c a suprafeței de frecare a cuzinetului și temperatura t_3 a suprafeței exterioare a carcasei lagărului este de ordinul de mărime a 1°C (fig. 14) la temperaturi de funcționare t_c

chiar mai mari, de peste 70°C. Măsurători ale temperaturii t_3 pe suprafața cu raza $r_3 = 56$ mm a carcasei lagărului experimental (poziția 4, fig. 1), la depărtare de 20 mm de direcția sarcinii și la mijlocul $b/2$ al cuzinetului în zona de suprapresiuni, au dat valorile arătate în figura 14 și notate cu t_3^*.

Măsurătorile au fost efectuate cu ajutorul unui termocuplu fier-constantan aplicat prin apăsare pe suprafața piesei. Valorile măsurate, mai mici decît cele calculate, se datoresc formei mai complicate a suprafeței exterioare a carcasei lagărului, precum și faptului că în realitate disiparea de căldură pe la capetele lagărului nu este neglijabilă, așa cum s-a admis în calcule. În legătură cu temperaturile mai trebuie menționat că

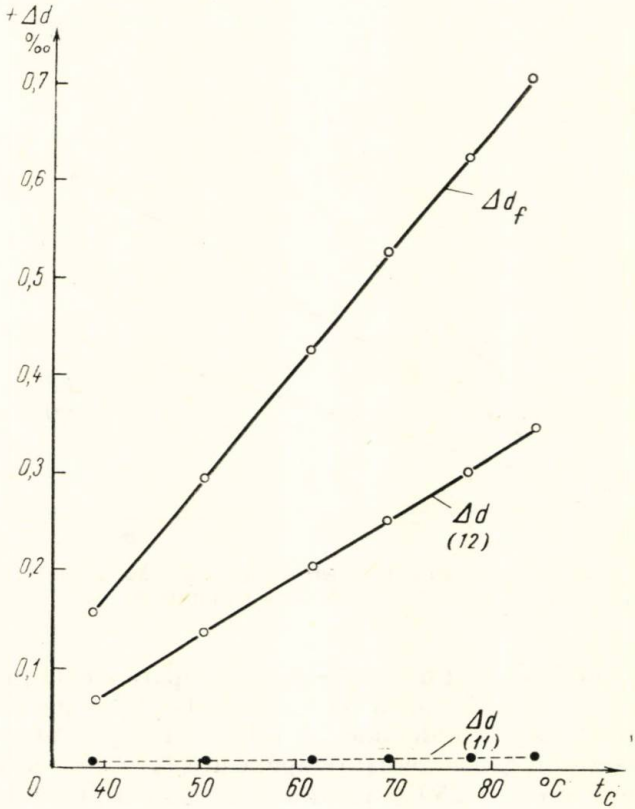


Fig. 15. — Variația Δd a diametrului lagărului cu temperatura t_c. Δd_f — variația diametrului fusului; Δd, Δd — $^{(11)}$ $^{(12)}$ variația diametrului cuzinetului calculată cu formula (11), respectiv (12).

și temperatura t_2 pe circumferința cu raza r_2 a cuzinetului are de asemenea valori foarte apropiate de t_c.

În ceea ce privește jocurile se poate constata că, la tipul de construcție cu carcasa lagărului liber expandabilă, modificările Δd ale diametrului

suprafeței de frecare a cuzinetului, provenite din dilatări termice și obținute cu valorile calculate t_2 și t_3, sînt pozitive, adică sînt creșteri de diametru în cazul ambelor formule (11) și (12) de calcul. La aceleași temperaturi t_c, dilatările Δd_f ale fusului masiv din oțel sînt însă mai mari (fig. 15). Datorită acestui fapt, relația (22) conduce la valori negative ($-\Delta\psi$) pentru jocuri, care cresc cu creșterea temperaturii de funcționare t_c a lagărului (fig. 16).

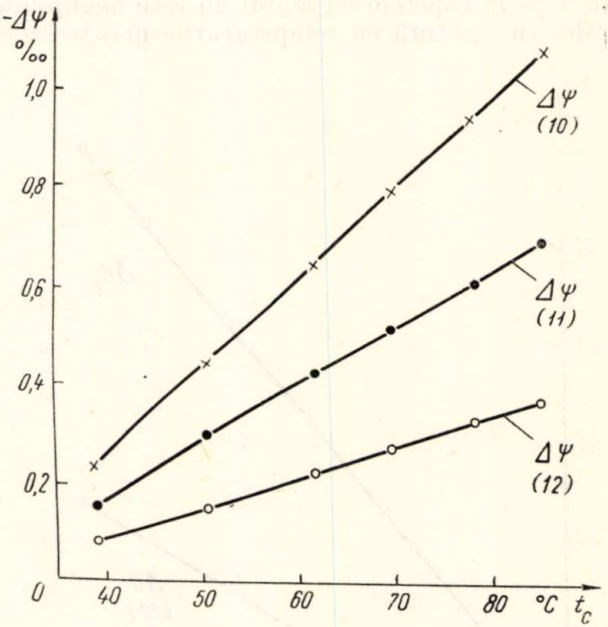


Fig. 16. — Variația cu temperatura a jocului $\Delta\psi$ în lagăr. Indicii (10), (11) și (12) arată formulele de calcul.

Valorile Δd depinzînd de condițiile de disipare a căldurii prin suprafața exterioară a carcasei, adică de t_3, variația $\Delta\psi$ a jocului la cald va depinde de acest factor. Calculînd cu relația (12) pe Δd și $\Delta\psi$ pentru diferite valori ale lui t_3, la aceeași temperatură $t_c = 80°C$ a lagărului și la aceeași temperatură $t_l = 25°C$ a mediului de răcire au fost obținute datele din tabela 8.

Se poate astfel constata că dilatarea cuzinetului poate deveni negativă dacă din cauza răcirii puternice a carcasei lagărului dilatarea redusă a acesteia obligă ca sporul de volum al cuzinetului să se facă pe seama diametrului său interior. Există astfel o temperatură t_3, în cazul de față 64°C (fig. 17), pentru care $\Delta d = 0$, adică raza r_1 a cuzinetului rămîne neschimbată, variația jocului $\Delta\psi$ la cald fiind dată numai de dilatarea Δd_f a fusului. Cu excepția valorilor pentru t_c și t_l, datele din

Tabela 8

$t_c = 80°C = \text{const.}$; $t_l = 25°C = \text{const.}$					
t_3 °C	75	70	65	60	50
Δd, ‰	+ 0,244	+ 0,133	+ 0,022	− 0,086	− 0,329
Δd_f, ‰	+ 0,656				
$\Delta\psi$, ‰	− 0,412	− 0,523	− 0,634	− 0,742	− 0,985

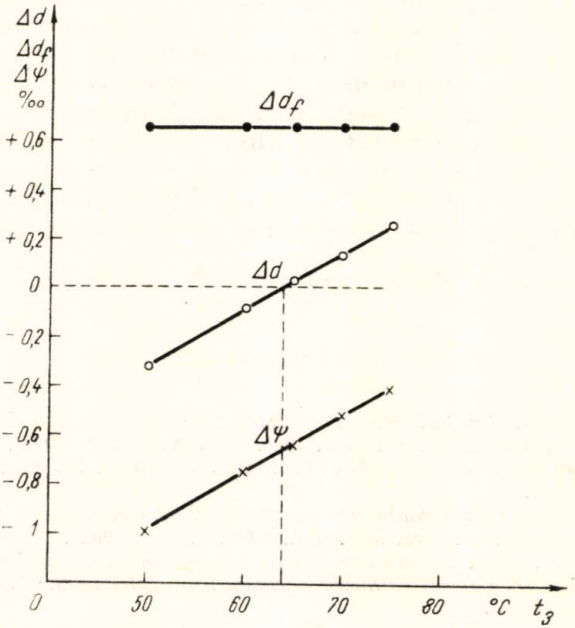


Fig. 17. — Variația jocului în funcție de temperatura t_3 a suprafeței exterioare a carcasei lagărului, pentru $t_c = 80°C = \text{const.}$ Δd — variația diametrului cuzinetului, Δd_f — dilatarea fusului, $\Delta\psi$ — variația jocului relativ.

tabela 8 sînt calculate cu aceleași valori ale parametrilor ca cele din tabela 7. Pentru calcularea temperaturii t_2 s-a folosit însă relația

$$t_2 = t_3 + \frac{t_1 - t_3}{\ln \frac{r_3}{r_1}} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2}, \qquad (23)$$

adică s-a admis ipoteza simplificatoare că cuzinetul și carcasa sînt din același material.

Din tabela 7 rezultă însă că valorile Δd şi, în consecinţă, $\Delta\psi$ prezintă diferenţe în funcţie de formula folosită pentru calcularea lor. Aceste diferenţe sînt relativ mari, ceea ce face ca determinarea cu suficientă precizie a jocului real, la cald, în lagăre să fie destul de incertă. Jocul real este însă un parametru de bază al lubrifierii şi unele nepotriviri constatate între valorile calculate şi cele măsurate privind coeficientul de încărcare, debitul de lubrifiant, forţa de frecare etc. pot fi atribuite preciziei insuficiente cu care se poate determina uneori jocul la cald. Din figura 16 se vede că relaţia empirică (10) conduce la cele mai mari diferenţe de joc la cald, cele mai mici valori $\Delta\psi$ fiind date de formula (12). Relaţia teoretică (11), care nu ţine seama de toate efectele temperaturii şi nici de deformaţiile elastice datorite presiunilor din lagăr, conduce la rezultate intermediare. Aceasta arată că, cu cît calculul cuprinde mai mulţi dintre parametrii acestei probleme, rezultatele diferă mai mult faţă de cele obţinute cu relaţia empirică (10), gradul mare de acoperire dat de aceasta putînd să nu mai apară justificat în toate cazurile. Dimpotrivă, mărind în mod inutil jocul, se obţine înrăutăţirea altor parametri ai lagărului, ca, de exemplu, a portanţei şi a forţei de frecare. Evident că ipotezele simplificatoare care stau la baza relaţiilor (11) şi (12) impun ca rezultatele obţinute pe această cale să fie interpretate corespunzător de la caz la caz.

Primită la redacţie la 10 august 1965

BIBLIOGRAFIE

1. N. Tipei, Al. Nica, *Cercetări asupra regimurilor de funcţionare a lagărelor. I. Influenţa variaţiei viscozităţii*, St. cerc. mec. apl., **X**, *3*, 738 (1959).
2. — *Asupra condiţiilor la limită în problema lubrificaţiei*, St. cerc. mec. apl., **VIII**, *1*, 64 (1957).
3. Gh. Vasilca, *Unele aspecte cantitative experimentale ale coeficientului de frecare la lagărele cu alunecare*, St. cerc. mec. apl., **XIII**, *4*, 957 (1962).
4. Gh. Vasilca, Al. Nica, *Asupra preciziei de măsurare a momentului de frecare la lagărele circulare cu ajutorul sistemelor mecanice tip paralelogram*, St. cerc. mec. apl., **IX**, *1*, 229 (1958).
5. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica, O. Bîţa, *Lagăre cu alunecare*, Edit. Acad. R.P.R., 1961.
6. G. Vogelpohl, *Betriebssichere Gleitlager*, Springer-Verlag, Berlin, 1958.
7. M. C. Shaw, E. F. Macks, *Analysis and Lubrication of Bearings*, McGraw-Hill, New York, 1949, p. 263.
8. N Tipei, *Hidroaerodinamica lubrificaţiei*, Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1957.
9. O. Pinkus, B. Sternlicht, *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, McGraw-Hill, New York, 1961.
10. E. Heidebroek, *Neuere Forschungen auf dem Gebiete der Lagertechnik*, ATZ, *14*, 351 (1941).
11. Gh. Vasilca, *Betrachtungen über isothermische Variation der Reibungszahl in Gleitlagern*, Rev. méc. appl., **III**, *3*, 323 (1958).
12. Al. Nica, *Contribution to the Determination of the Real Clearance in Sliding Bearings*, Paper *64*—WA/Lub—4.
13. E. Schmid, R. Weber, *Gleitlager*, Springer-Verlag, Berlin, 1953.

STUDIUL SISTEMELOR PLANE DE CORPURI CU LEGĂTURI PRIN METODA ACCELERAȚIILOR COMPUSE[1])

de CHR. PELECUDI
Centrul de mecanica solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

531.1

Utilizarea acceleraţiilor compuse permite simplificări în construcţiile grafice ale acceleraţiilor [1], [2], [3]. În planul acceleraţiilor se obţin două figuri corespunzătoare acceleraţiilor primare cunoscute şi acceleraţiilor compuse secundare, care au laturile paralele şi, respectiv, perpendiculare pe laturile figurii lanţului cinematic, separate între ele prin acceleraţiile simple ale punctelor.
Lucrarea cuprinde expunerea comparativă a proprietăţilor acceleraţiilor compuse, precum şi exemplificările şi adaptările pentru determinarea distribuţiilor de acceleraţii în lanţurile cinematice plane, simple sau închise. Prin asemănarea cu vitezele, calculele se fac direct pe ecuaţiile vectoriale ale acestora. Avantajele acceleraţiilor compuse sînt evidenţiate mai mult în cazul lanţurilor închise, unde, împreună cu metoda solidarizării, reduc la maxim construcţiile grafice, mărind precizia lor.
Sînt cercetate lanţurile cinematice deschise cu 1, 2, 3 şi $n = 6$ elemente, cu cuple de rotaţie şi de translaţie, şi lanţurile cinematice închise cu conture de clasele V—VI—VII—VIII, scoţîndu-se în evidenţă atît generalitatea metodei, cît şi caracteristicile construcţiilor respective.

Introducerea acceleraţiilor compuse de primul ordin sau de ordine superioare [1], [2], [3] se justifică prin analogia de calcul care se realizează faţă de viteze. Se pot utiliza în acest scop proprietăţile remarcabile ale vectorilor viteză şi pentru vectorii de acceleraţii de orice ordin. Cu ajutorul acestora, în reprezentările grafice apare o separaţie precisă între termenii necunoscuţi ai acceleraţiilor, asemănători celor din calculul vite-

[1]) Publicată şi în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique appliquée, **11**, *1* (1966) (în limba rusă).

zelor şi termenii cunoscuţi ai acceleraţiilor, adică aceia care depind de viteze, precum sînt : $\bar{a}^n_{BA}$ — acceleraţia normală din mişcarea de rotaţie relativă a punctului B faţă de punctul A pentru acelaşi element ; $\bar{a}^c_{B_{21}}$ — acceleraţia complementară Coriolis din mişcarea punctului B_2 faţă de primul element ; $\bar{a}^r_{I_{21}}$ — acceleraţia relativă din centrul instantaneu al vitezelor a punctului I_2 faţă de primul element. Prin această separare, metodele proiecţiilor, rabaterilor şi poligoanelor se aplică la fel ca pentru viteze.

În această lucrare se expune comparativ utilizarea acceleraţiilor compuse în determinarea distribuţiilor de acceleraţii pentru lanţurile cinematice simple, deschise sau închise, cu aplicaţii la rezolvarea celor mai frecvente grupe assurice şi a mecanismelor complexe.

Într-o altă serie de lucrări [4], [5] s-a introdus metoda solidarizării pentru lanţurile cinematice plane închise, care are avantajul reducerii construcţiilor grafice corespunzătoare metodei poligoanelor auxiliare, mărindu-le precizia. Astfel se va exemplifica, de asemenea, metoda solidarizării pentru acceleraţiile compuse.

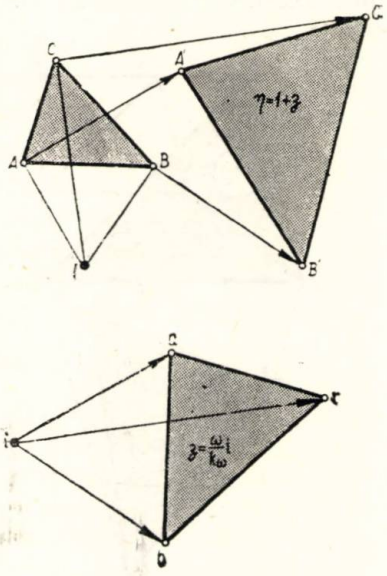
1. STUDIUL LANŢURILOR CINEMATICE PLANE DESCHISE

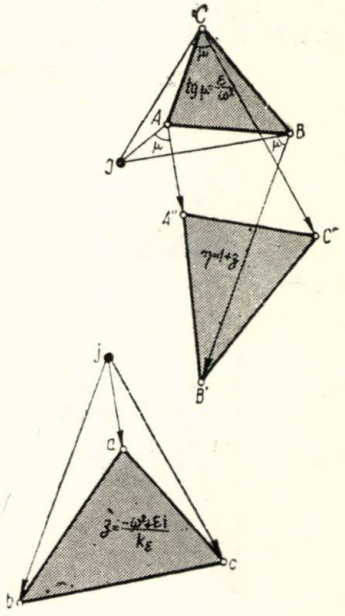
1.1. *Mişcarea plană a unui solid rigid.* Se cunoaşte că, pentru un solid rigid (fig. 1) în mişcare plană, figura din planul vitezelor $i\,a\,b\,c$ este asemenea cu figura din planul solidului $IABC$, în care I este centrul instantaneu al vitezelor, i polul planului de viteze, A,B,C puncte solidare solidului, iar a,b,c extremităţile vitezelor respective care au originile confundate în i. Raportul de asemănare complex este $\zeta = \frac{\omega}{k_\omega} i \left(k_\omega = \frac{k_v}{k_e} \right.$ scara vitezei unghiulare$\left.\right)$ şi marchează proprietatea importantă că poligonul de viteze abc este rotit în sensul vitezei unghiulare faţă de poligonul solidului ABC cu $\pi/2$. În planul elementului, poligonul de viteze $A'B'C'$, format cu extremităţile vectorilor viteză, prezintă faţă de poligonul elementului raportul complex de asemănare $\eta = 1 + \zeta$.

Pentru acceleraţii (fig. 2), figura din planul acceleraţiilor $j\,a\,b\,c$ este asemenea cu figura din planul solidului $JABC$, în care J este centrul instantaneu al acceleraţiilor, iar j polul poligonului de acceleraţii. De data aceasta, raportul complex de asemănare este $\zeta = \frac{-\omega^2 + \varepsilon i}{k_\varepsilon} \left(k_\varepsilon = \frac{k_a}{k_l} \right.$ scara acceleraţiilor unghiulare$\left.\right)$, iar proprietatea de perpendicularitate între poligonul de acceleraţii abc şi poligonul solidului ABC nu se păstrează, rotaţia făcîndu-se cu unghiul $(180 - \mu)$ în sensul acceleraţiei unghiulare ε, iar $\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$. Se permite deci aflarea unghiului de rotaţie μ, aflarea centrului instantaneu J etc. după determinarea acce-

leraţiei unghiulare ε, restricţie care nu există la studiul vitezelor. În planul elementului, poligonul de acceleraţii $A''B''C''$ are faţă de poligonul elementului raportul de asemănare complex $\eta = 1 + \jmath$.

Acceleraţiile compuse se definesc [1], [2], [3] prin suma vectorială a acceleraţiilor simple propriu-zise cu termenii cunoscuţi de natura





acceleraţiilor normale de rotaţie ale centrului caracteristic ajutător K, ales arbitrar :

$$\begin{aligned} \bar{a}''_A &= \bar{a}'_A + \bar{a}_A, \\ \bar{a}''_B &= \bar{a}'_B + \bar{a}_B. \end{aligned} \tag{1}$$

Ecuaţiile vectoriale ale acceleraţiilor primare cunoscute sînt

$$\bar{a}'_B = \bar{a}'_A + \bar{a}'_{BA}, \tag{2}$$

în care

$$\begin{aligned} \bar{a}'_B &= \bar{a}^n_{KB} = \omega^2 \overline{KB}, \\ \bar{a}'_A &= \bar{a}^n_{KA} = \omega^2 \overline{KA}, \\ \bar{a}'_{BA} &= -\bar{a}^n_{BA} = \omega^2 \overline{AB}. \end{aligned} \tag{3}$$

Pentru ecuaţiile vectoriale ale acceleraţiilor compuse secundare avem

$$\bar{a}''_B = \bar{a}''_A + \bar{a}''_{BA} \tag{4}$$

cu

$$\bar{a}''_{BA} = \bar{a}^t_{BA} = \bar{\varepsilon} \times \overline{AB}, \tag{5}$$

astfel că relaţiile pentru acceleraţiile simple

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^t_{BA} \qquad (6)$$

sînt verificate.

Separarea sub această formă a acceleraţiilor cunoscute de acceleraţiile compuse în relaţiile acceleraţiilor simple permite utilizarea unor proprietăţi foarte importante care simplifică construcţiile grafice.

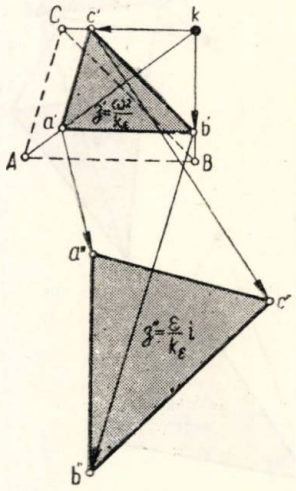


Fig. 3

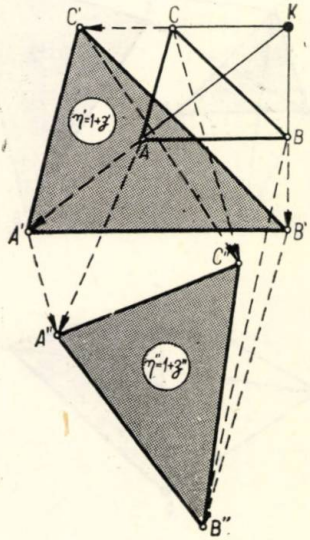


Fig. 4

În planul acceleraţiilor (fig. 3), figura acceleraţiilor primare cunoscute $k\,a'b'c'$, în care k este polul poligonului de acceleraţii, iar $a'b'c'$ sînt extremităţile acceleraţiilor $\bar{a}'_A$, $\bar{a}'_B$, $\bar{a}'_C$, construite concurente în k, $\bar{a}'_A = k_a(\overline{ka'})$; $\bar{a}'_B = k_a(\overline{kb'})$; $\bar{a}'_C = k_a(\overline{kc'})$, este asemenea cu figura solidului rigid $KABC$, în care K este punctul caracteristic ajutător. Cele două figuri au laturile paralele şi raportul de asemănare $\mathfrak{z}' = \dfrac{\omega^2}{k_a}$,

Prin adăugarea acceleraţiilor simple $\bar{a}_A = k_a(\overline{a'a''})$; $\bar{a}_B = k_a(\overline{b'b''})$; $\bar{a}_c = k_a(\overline{c'c''})$ cu originile în punctele $a'b'c'$ şi extremităţile în $a''b''c''$ se obţin acceleraţiile compuse $\bar{a}''_A = k_a(\overline{ka''})$; $\bar{a}''_B = k_a(\overline{kb''})$; $\bar{a}''_C = k_a(\overline{kc''})$, care au originile în polul k şi extremităţile în a'', b'', c''. Figura acceleraţiilor compuse $ka''b''c''$ este asemenea cu figura solidului $KABC$, iar raportul de asemănare complex este $\mathfrak{z}'' = \dfrac{\varepsilon}{k_a}\,i$. Cele două figuri au laturile perpendiculare, rotaţia dintre ele făcîndu-se în sensul acceleraţiei unghiulare ε.

Se obțin astfel două poligoane asemenea, dintre care unul are laturile paralele, iar celălalt laturile perpendiculare pe laturile poligonului solidului rigid.

În planul solidului (fig. 4), accelerațiile cunoscute sînt $\bar{a}'_A = k_a(\overline{AA'})$, $\bar{a}'_B = k_a(\overline{BB'})$, $\bar{a}'_C = k_a(\overline{CC'})$, iar poligonul lor $A'B'C'$ are raportul de asemănare $\eta' = 1 + \vartheta' = 1 + \frac{\omega^2}{k_\varepsilon}$ față de poligonul solidului, laturile lor fiind paralele. Accelerațiile simple $\bar{a}_A = k_a(\overline{A'A''})$, $\bar{a}_B = k_a(\overline{B'B''})$, $\bar{a}_C = k_a(\overline{C'C''})$, atașate în punctele $A'B'C'$, conduc la extremitățile $A''B''C''$ ale accelerațiilor compuse $\bar{a}''_A = k_a(\overline{AA''})$, $\bar{a}''_B = k_a(\overline{BB''})$, $\bar{a}''_C = k_a(\overline{CC''})$, care au originile în punctele A,B,C. Poligonul accelerațiilor compuse $A''B''C''$ are raportul de asemănare complex $\eta'' = 1 + \vartheta'' = 1 + \frac{\varepsilon}{k_\varepsilon} i$ față de poligonul elementului ABC.

Se subliniază analogia perfectă dintre accelerațiile compuse și viteze. Pentru determinarea accelerațiilor compuse se utilizează aceleași metode : metoda accelerațiilor vectoriale, metoda centrelor instantanee, metoda proiecțiilor, metoda rabaterilor, metoda poligoanelor [1], [2], [3]. După aceea accelerațiile simple se obțin prin diferențele dintre accelerațiile compuse secundare și accelerațiile primare cunoscute. Accelerația unghiulară ε se obține direct din accelerația compusă de rotație $\bar{a}''_{BA} = \bar{a}''_B - \bar{a}''_A = \bar{\varepsilon} \times \overline{AB}$, adică

$$\varepsilon = \frac{a''_{BA}}{AB} = k_\varepsilon \frac{(a''b'')}{(AB)}.$$

1.2. *Mișcarea plană a două solide.* Pentru compunerea accelerațiilor din mișcarea relativă se consideră punctele C_1 și C_2, legate separat de cele două corpuri, dar confundate în punctul geometric C. Față de două puncte caracteristice K_1 și K_2, cîte unul pentru fiecare corp, accelerațiile primare cunoscute sînt

$$\bar{a}'_{C_2} = \omega_2^2 \overline{K_2C}\,; \quad \bar{a}'_{C_1} = \omega_1^2 \overline{K_1C}, \tag{7}$$

iar accelerațiile secundare compuse se definesc, ca mai înainte, prin

$$\begin{aligned} \bar{a}''_{C_2} &= \bar{a}'_{C_2} + \bar{a}_{C_2}, \\ \bar{a}''_{C_1} &= \bar{a}'_{C_1} + \bar{a}_{C_1}. \end{aligned} \tag{8}$$

Deoarece între accelerațiile simple există relația

$$\begin{aligned} \bar{a}_{C_2} &= \bar{a}_{C_1} + \bar{a}_{C_{21}}, \\ \bar{a}_{C_{21}} &= \bar{a}^c_{C_{21}} + \bar{a}^r_{C_{21}}, \end{aligned} \tag{9}$$

care cuprinde accelerația complementară și relativă, iar pentru accelerațiile compuse avem

$$\bar{a}''_{C_2} = \bar{a}''_{C_1} + \bar{a}''_{C_{21}} \tag{10}$$

cu

$$\bar{a}''_{C_{21}} = \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{HC} = \bar{a}^{rt}_{C_{21}H_{21}},$$

în care $H = H_{21} = H_{12}$ este centrul unic instantaneu al accelerațiilor compuse relative, va corespunde pentru accelerațiile cunoscute

$$\bar{a}'_{C_2} = \bar{a}'_{C_1} + \bar{a}'_{C_{21}} \tag{11}$$

cu

$$\bar{a}'_{C_{21}} = \omega_2^2 \overline{K_2C} - \omega_1^2 \overline{K_1C}$$

sau

$$\bar{a}'_{C_{21}} = -[\bar{a}^{c}_{C_{21}} + \bar{a}^{r}_{H_{21}} + \bar{a}^{rn}_{C_{21}H_{21}}].$$

Se urmărește pentru reducerea calculelor [3] ca H să se confunde cu I, centrul instantaneu unic al vitezelor relative, care este de altfel ușor de localizat în lanțurile cinematice. În această situație, punctele caracteristice K_1 și K_2 sînt legate prin relația

$$\bar{a}'_{C_{21}} = \omega_2^2 \overline{K_2C} - \omega_1^2 \overline{K_1C} = (\omega_2^2 - \omega_1^2)\overline{IC} + \bar{a}^{r}_{I_{12}}, \tag{12}$$

adică

$$\omega_2^2 \overline{K_2I} = \omega_1^2 \overline{K_1I} + \bar{a}^{r}_{I_{21}}. \tag{13}$$

1.2.1. Exemplificînd pentru două corpuri legate printr-o cuplă de rotație $I \equiv P$ (diada de aspectul I, fig. 5), deoarece $\bar{a}^{r}_{I_{21}} = a^{r}_{P_{21}} = 0$, se obține

$$\bar{a}'_{C_{21}} = \omega_2^2 \overline{K_2C} - \omega_1^2 \overline{K_1C} = (\omega_2^2 - \omega_1^2)\overline{PC}, \tag{14}$$

adică

$$\omega_2^2 \overline{K_2P} = \omega_1^2 \overline{K_1P} = \bar{a}'_{P_2} = \bar{a}'_{P_1}. \tag{15}$$

De asemenea

$$\bar{a}''_{C_{21}} = \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{PC}. \tag{16}$$

Deoarece $\bar{a}^{r}_{P_{21}} = 0$, $\bar{a}'_{P_{21}} = 0$, $\bar{a}''_{P_{21}} = 0$, punctul P este centrul de rotație permanent pentru cele trei feluri de accelerații. Punctele K_1 și K_2 sînt construite de aceeași parte față de centrul P, iar deoarece s-a considerat $\omega_1 > \omega_2$ a rezultat $K_1P < K_2P$. În punctul P_{21} s-a figurat pe dreapta PK_1K_2 accelerația cunoscută $\bar{a}'_{P_2} = \bar{a}'_{P_1} = \omega_2^2 \overline{K_2P} = \omega_1^2 \overline{K_1P}$, de pe care accelerațiile cunoscute ale punctelor A_1 și B_2 s-au determinat prin intersecțiile dreptelor K_1A_1 și K_2B_2 cu paralele prin P'_{21} la A_1P_{12} și B_2P_{21}, astfel că $\bar{a}'_{A_1} = k_a(\overline{A_1A'_1})$, $\bar{a}'_{B_2} = k_a(\overline{B_2B'_2})$. În același fel se pot

construi și accelerațiile cunoscute ale punctelor C_1 și C_2 confundate în C și care diferă între ele prin accelerația $\bar{a}'_{C_{21}} = \bar{a}'_{C_2} - \bar{a}'_{C_1} = k_a\,(\overline{c'_1c'_2})$.

În planul accelerațiilor (fig. 6), triunghiurile $ka'_1p'_1$ și $kb'_2p'_2$ sînt asemenea și cu laturile paralele cu triunghiurile $K_1A_1P_1$ și $K_2B_2P_2$.

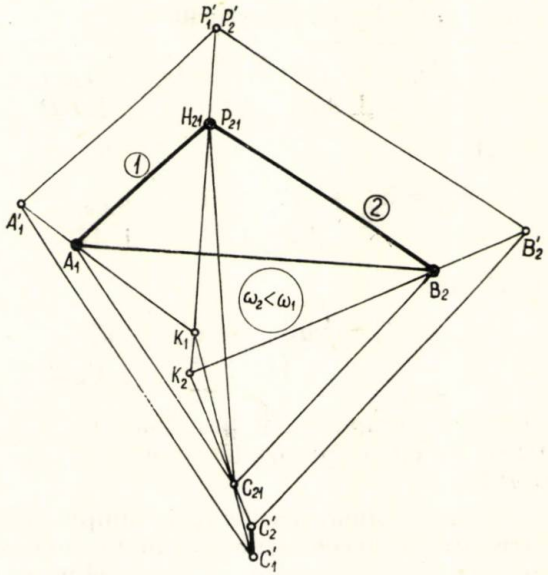


Fig. 5

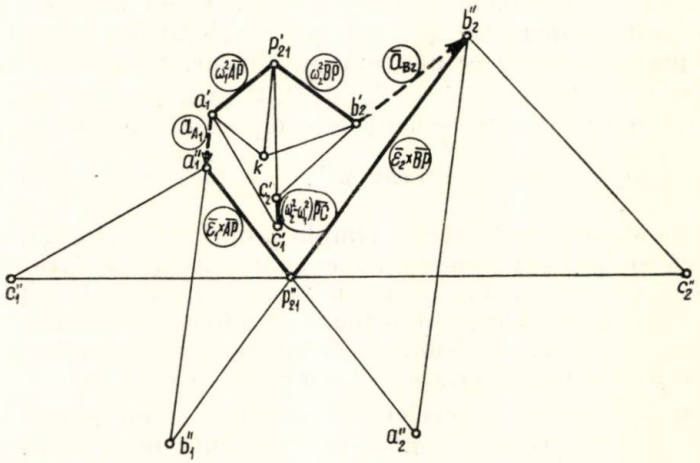


Fig. 6

Se obține conturul $a'_1p'_{12}b'_2$, care are laturile paralele și în același sens cu conturul $A_1P_{12}B_2$, dar cu lungimile modificate în raport cu $\omega_1^2\overline{A_1P_1}$ și

$\omega_2^2 \overline{P_2 B_2}$. Se pot figura şi punctele $c_1' c_2'$, corespunzătoare acceleraţiilor cunoscute ale punctelor C_1 şi C_2, construind triunghiurile asemenea cu laturi paralele $\Delta\, a_1' p_1' c_1' \sim \Delta\, A_1 P_1 C_1$ şi $\Delta\, b_2' p_2' c_2' \sim \Delta\, B_2 P_2 C_2$. În punctele a_1' şi b_2' se ataşează acceleraţiile cunoscute ale punctelor A_1 şi B_2, obţinîndu-se extremităţile a_1'' şi b_2'' pentru acceleraţiile compuse $\bar{a}''_{A_1}$ şi $\bar{a}''_{B_2}$. Acceleraţia compusă a punctului $P_1 \equiv P_2$ se găseşte prin

$$\bar{a}''_{P_1} = \underline{\underline{\bar{a}''_{A_1}}} + \underbrace{\bar{a}''_{P_1 A_1}}_{\perp AP} = \bar{a}''_{P_2} = \underline{\underline{\bar{a}''_{B_2}}} + \underbrace{\bar{a}''_{P_2 B_2}}_{\perp BP}, \tag{17}$$

iar pentru punctul A_2 din

$$\bar{a}''_{A_2} = \underline{\underline{\bar{a}''_{A_1}}} + \underbrace{\bar{a}''_{A_{21}}}_{\perp P_{12} A} = \underline{\underline{\bar{a}''_{B_2}}} + \underbrace{\bar{a}''_{A_2 B_2}}_{\perp AB} \tag{18}$$

şi pentru punctul B_1 din

$$\bar{a}''_{B_1} = \underline{\underline{\bar{a}''_{A_1}}} + \underbrace{\bar{a}''_{B_1 A_1}}_{\perp AB} = \underline{\underline{\bar{a}''_{B_2}}} + \underbrace{\bar{a}''_{B_{12}}}_{\perp P_{12} B}. \tag{19}$$

Pentru acceleraţiile compuse ale punctelor C_1 şi C_2 se construiesc triunghiuri asemenea cu laturi perpendiculare $\Delta\, a_1'' p_1'' c_1'' \sim \Delta\, A_1 P_1 C_1$ şi $\Delta\, b_2'' p_2'' c_2'' \sim \Delta\, B_2 P_2 C_2$.

Deoarece interesează numai acceleraţiile simple propriu-zise care se măsoară între extremităţile acceleraţiilor primare cunoscute şi extremităţile acceleraţiilor compuse secundare, se poate elimina din construcţie polul k şi construcţiile anexe ale sale $k\, a_1'$, $k\, p_{12}'$, $k\, b_2'$. Se reţine atunci numai conturul acceleraţiilor cunoscute $a_1' p_{12}' b_2'$ cu laturile paralele cu conturul lanţului cinematic şi conturul acceleraţiilor compuse $a_1'' p_{12}'' b_2''$ cu laturile perpendiculare pe ale celuilalt contur. Se găseşte $\bar{a}_{P_1} = \bar{a}_{P_2} = k_a (\overline{p_{12}' p_{12}''})$, $\bar{a}_{C_1} = k_a (\overline{c_1' c_1''})$, $\bar{a}_{C_2} = k_a (\overline{c_2' c_2''})$. Pentru determinarea acceleraţiilor unghiulare se pot lua acceleraţiile compuse de rotaţie

$$\bar{a}''_{B_2 A_2} = k_a (\overline{a_2'' b_2''}) = \bar{\varepsilon}_2 \times \overline{AB} \text{ sau } \bar{a}''_{C_1 A_1} = k_a (\overline{a_1'' c_1''}) = \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{AC} \text{ etc.}$$

Faţă de planul acceleraţiilor simple propriu-zise (fig. 7) se prezintă avantajul că se plasează acceleraţiile cunoscute de rotaţie normale la începutul construcţiei grafice, eliminînd totodată şi grija faţă de sensul acestora. Conturul acceleraţiilor primare cunoscute are acelaşi sens ca şi conturul lanţului cinematic. Numărul de laturi ale construcţiei propriu-zise rămîne acelaşi : $j a_1 \alpha_1 p_1 + j b_2 \alpha_2 p_2$ şi $p_1' a_1' a_1'' p_1'' + p_2' b_2' b_2'' p_2''$.

Pentru determinarea acceleraţiei simple a unui punct C_1 se construieşte un triunghi ducînd unghiurile cunoscute în a_1 şi în p_1 faţă de latura $a_1 p_1$. Utilizînd acceleraţiile compuse, se construiesc două triunghiuri : unul cu laturile paralele, celălalt cu laturi perpendiculare faţă de triunghiul lanţului cinematic. Acest avantaj este completat şi de faptul că numărul laturilor nou construite este numai de patru, $a_1' c_1' + p_1' c_1'$ şi $a_1'' c_1'' + p_1'' c_1''$, faţă de trei în cazul anterior, $a_1 p_1$, $a_1 c_1$ şi $p_1 c_1$, dar care

cere și construcția a două unghiuri în a_1 și p_1. Notațiile sînt mult simplificate și se prezintă sub formă simetrică.

Față de planul vitezelor (fig. 8) se prezintă o simetrie perfectă, construcțiile continuate din a_1 și b_2 (extremitățile vectorilor viteză) fiind

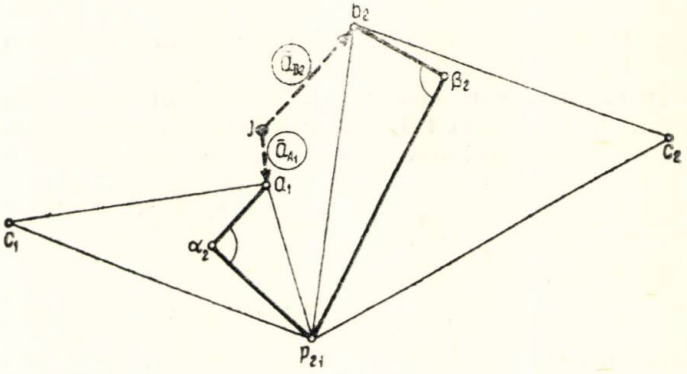


Fig. 7

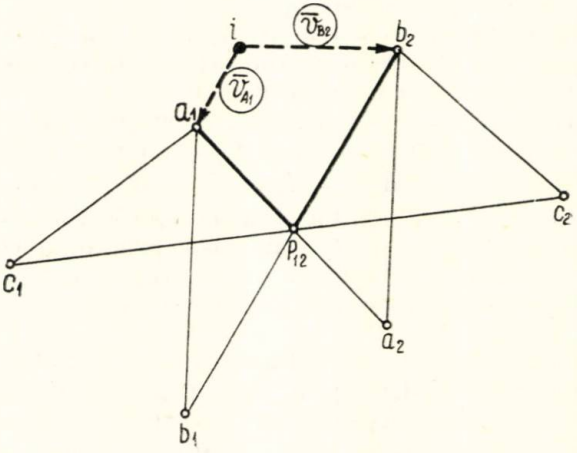


Fig. 8

analoge celor continuate din a_1'' și b_2'' (extremitățile vectorilor de accelerație compusă), deoarece se bazează pe același gen de ecuații (17—20, 18—21, 19—22):

$$\overline{v}_{P_1} = \overline{v}_{P_2} = \overline{\overline{v}}_{A_1} + \underbrace{\overline{v}_{P_1A_1}}_{\perp AP} = \overline{\overline{v}}_{B_2} + \underbrace{\overline{v}_{P_2B_2}}_{\perp BP} \tag{20}$$

$$\overline{v}_{A_2} = \underline{\underline{\overline{v}_{A_1}}} + \underbrace{\overline{v}_{A_{21}}}_{\perp PA} = \underline{\underline{\overline{v}_{B_2}}} + \underbrace{\overline{v}_{A_2B_2}}_{\perp AB} \tag{21}$$

$$\overline{v}_{B_1} = \underline{\underline{\overline{v}_{A_1}}} + \underbrace{\overline{v}_{B_1A_1}}_{\perp AB} = \underline{\underline{\overline{v}_{B_2}}} + \underbrace{\overline{v}_{B_{12}}}_{\perp PB}. \tag{22}$$

Această analogie prezintă avantajul utilizării numai a ecuațiilor simple de viteză.

1.2.2. În cazul în care cele două corpuri sînt legate printr-o cuplă de translație (diade de aspect III, fig. 9), centrul permanent este aruncat la infinit și vitezele unghiulare $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ sînt egale, astfel că se obține

$$\overline{a}'_{21} = \omega^2 \overline{K_2K_1} = -\overline{a}^c_{21} = -2\overline{\omega} \times \overline{v}_{21}, \tag{23}$$

adică

$$\omega^2 \overline{K_1K_2} = \overline{a}^c_{21} = 2\overline{\omega} \times \overline{v}_{21}. \tag{24}$$

De asemenea

$$\overline{a}''_{21} = \overline{a}^r_{21}. \tag{25}$$

Deci în mișcarea relativă de translație accelerația primară relativă cunoscută are aceeași valoare, independentă de poziția punctului considerat, egală cu accelerația Coriolis, dar de sens invers.

Accelerația compusă relativă, fiind egală cu accelerația simplă relativă, este paralelă cu dreapta translației relative, deci perpendiculară pe suportul accelerației cunoscute relative.

Punctele K_1 și K_2 se găsesc pe dreapta perpendiculară la axa translației relative. Într-un punct oarecare C_{21} s-au reprezentat accelerațiile primare cunoscute $\overline{a}'_{c_1} = \omega_1^2 \overline{K_1C} = k_a \overline{(c_1\, c'_1)}$ și $\overline{a}'_{c_2} = \omega_2^2 \overline{K_2C} = k_a \overline{(c_2\, c_2^1)}$, rezultînd $\overline{a}'_{c_{21}} = -\overline{a}^c_{21} = k_a \overline{(c_1^1\, c_2^1)}$. Ca și la paragraful anterior, accelerațiile cunoscute ale punctelor A_1 și B_2 s-au găsit prin intersecțiile dreptelor K_1A_1 și K_2B_2 cu paralele prin C'_1 și C'_2 la A_1C_1 și B_2C_2. Desigur, construcția poate fi pornită și invers, de la punctele A_1 și B_2, spre a se ajunge la punctele C_1 și C_2.

În planul accelerațiilor, triunghiurile $k\, a'_1\, c'_1$ și $k\, b'_2\, c'_2$ au laturile paralele cu triunghiurile $K_1A_1C_1$ și $K_2B_2C_2$ (fig. 10) din planul lanțului cinematic. Deci conturul accelerațiilor cunoscute care se execută fără ajutorul polului k este $a'_1\, c'_1\, c'_2\, b'_2$, adică între laturile $a'_1\, c'_1$ și $c'_2\, b'_2$ paralele cu A_1C_1 și C_2B_2 apare latura $c'_1\, c'_2$ reprezentativă a accelerației primare cunoscute relative perpendiculară pe dreapta translației relative în sensul invers accelerației Coriolis. Din punctele a'_1 și b'_2 se obțin cu ajutorul accelerațiilor $\overline{a}_{A_1}$ și $\overline{a}_{B_2}$ punctele a''_1 și b''_2, extremitățile accelerațiilor compuse. Prin construcțiile ecuațiilor (18) și (19) sau (21) și (22) se obțin extremitățile a''_2 și b''_1 ale accelerațiilor compuse respective. Pentru aflarea accelerațiilor punctelor A_2 sau B_1 se construiesc de la început punctele a'_2 și b'_1 sau prin triunghiuri asemenea cu laturi paralele $\Delta\, A\, C\, B \sim \Delta\, a'_2\, c'_2\, b'_2$; $\Delta\, A\, C\, B \sim \Delta\, a'_1\, c'_1\, b'_1$. Pentru determinarea accelerațiilor punctelor C_1 și C_2

trebuie să se construiască punctele c_1'' și c_2'' prin triunghiuri asemenea cu laturi perpendiculare $\Delta A C B \infty \Delta a_1'' c_1'' b_1''$ și $\Delta A C B \infty \Delta a_2'' c_2'' b_2''$.

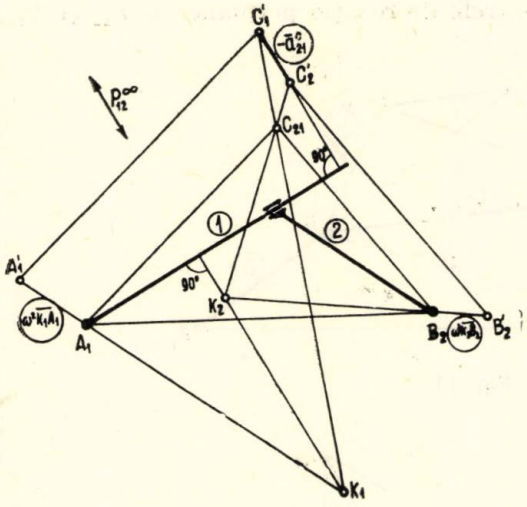


Fig. 9

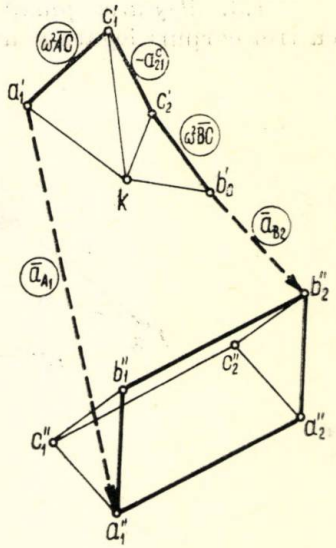


Fig. 10

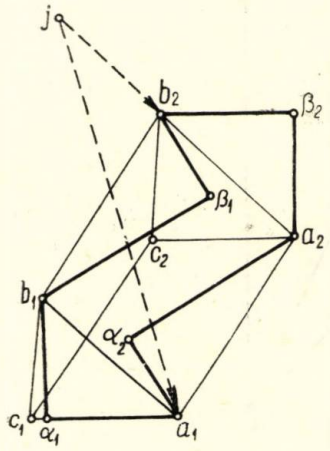


Fig. 11

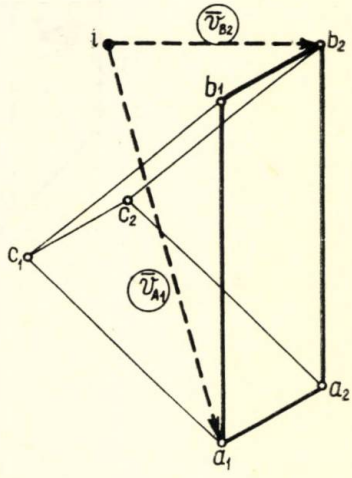


Fig. 12

Urmărind determinarea parametrilor cinematici pentru punctele C_1 și C_2, se verifică din nou avantajele menționate la paragraful anterior prin comparația atît cu planul accelerațiilor simple (fig. 11), cît și cu planul vitezelor (fig. 12). Laturile figurii accelerațiilor compuse, notate

prin indicele „secund", sînt perpendiculare pe laturile analoge ale figurii accelerațiilor cunoscute, notate prin indicele „prim" $a_1'' c_1'' \perp a_1' c_1'$, $c_1'' c_2'' \perp c_1' c_2'$, $c_2'' b_2'' \perp c_2' b_2'$.

1.3. *Mișcarea plană a trei solide.* Pentru lanțul cinematic format cu trei corpuri legate și avînd centrele de rotație permanente P_{12} și P_{23},

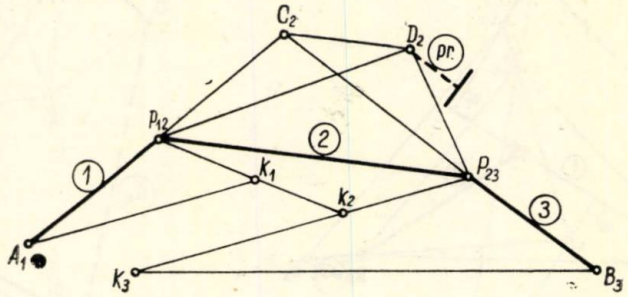


Fig. 13

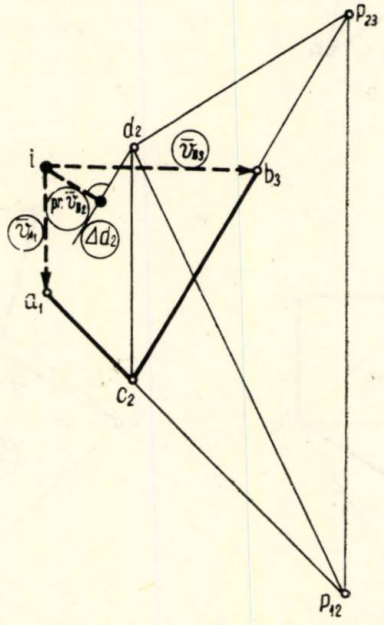


Fig. 14

se presupun cunoscute vitezele și accelerațiile punctelor A_1 și B_3 din corpurile extreme și o proiecție de viteze pr. $\overline{v}_{D_2}$, respectiv o proiecție de accelerație pr. $\overline{a}_{D_2}$ în corpul central. Rezolvarea vitezelor și accelerațiilor se face pe baza utilizării punctului particular assuric C_2 din corpul

central situat la intersecția dreptelor A_1P_{12} și B_3P_{32}. Astfel, considerînd cuple de rotație P_{12} și P_{23} (fig. 13), avem

$$\overline{v}_{C_2} = \underline{\underline{\overline{v}_{A_1}}} + \underbrace{\overline{v}_{P_1A_1} + \overline{v}_{C_2P_2^1}}_{\perp AC} = \underline{\underline{\overline{v}_{B_3}}} + \underbrace{\overline{v}_{P_3B_3} + \overline{v}_{C_2P_2^3}}_{\perp BC} . \tag{26}$$

În planul vitezelor (fig. 14) se obține c_2 la intersecția dreptelor $\perp AC$ prin a_1 și $\perp BC$ prin b_3. Punctul d_2 se găsește la intersecția dreptei

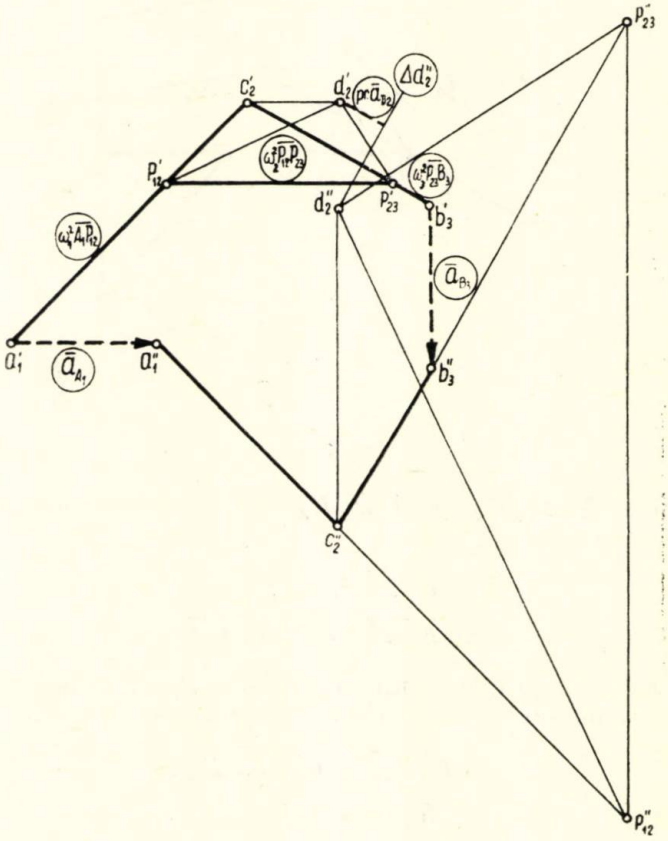


Fig. 15

$\perp CD$ prin c_2 și a dreptei Δd_2 perpendiculară pe direcția proiecției pr. $\overline{v}_{D_2}$ în extremitatea acesteia. Pentru obținerea punctelor p_1, p_2, p_3 se pot utiliza asemănările de triunghiuri.

În planul accelerațiilor (compuse) (fig. 15) se trasează conturul accelerațiilor primare cunoscute a'_1 p'_{12} p'_{23} b'_3 împreună cu c'_2 și d'_2, care are laturile paralele cu ale conturului $A_1P_{12}P_{23}B_3$, dar amplificate cu pătratele vitezelor unghiulare respective. Se adaugă accelerațiile a_{A_1} și

$\bar{a}_{B_3}$, obținînd punctele a_1'' și b_3'', precum și proiecția de accelerație pr. $\bar{a}_{D_2}$ față de d_2^1, obținînd dreapta $\Delta\ d_2''$. Pentru accelerațiile compuse se utilizează aceleași construcții grafice și aceeași cale ca și pentru viteze, ecuațiile respective fiind de același gen (26).

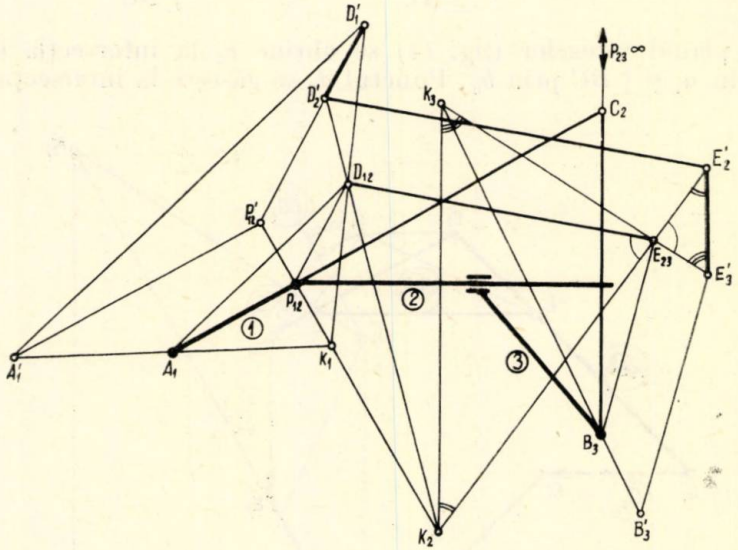


Fig. 16

Punctele $K_1\ P_{12}\ K_2$ și $K_2 P_{23} K_3$ sînt separat coliniare (fig. 13) îndeplinînd condițiile

$$\begin{aligned} \omega_1^2\ \overline{K_1\ P_{12}} &= \omega_2^2\ \overline{K_2\ P_{12}}, \\ \omega_2^2\ \overline{K_2\ P_{23}} &= \omega_3^2\ \overline{K_3\ P_{23}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Dacă lanțul cuprinde o cuplă de rotație P_{12} și o cuplă de translație $P_{23\infty}$ (fig. 16), punctele caracteristice îndeplinesc condițiile

$$\begin{aligned} \omega_1^2\ \overline{K_1\ P_{12}} &= \omega_{2,3}^2\ \overline{K_2\ P_{12}}, \\ \omega_{2,3}^2\ \overline{K_2\ K_3} &= -\ \bar{a}_{23}^e = \bar{a}_{23}'. \end{aligned} \tag{28}$$

În planul lanțului cinematic (fig. 16), din accelerația cunoscută a punctului P_{12}, $\bar{a}'_{P_{1,2}} = k_a\,(P_{1,2}\ P'_{1,2})$ se determină pozițiile punctelor caracteristice K_1 și K_2. Se pot determina, prin construcții simple de drepte paralele cu laturile elementelor, accelerațiile primare cunoscute ale punctelor A_1 și D_1. Din punctul K_2 se determină, pe dreapta perpendiculară la dreapta translației relative, punctul K_3. Din accelerația primară cunoscută a punctului D_2, dată prin $\bar{a}'_{D_2} = \omega_2^2\ \overline{K_2\ D_2} = k_a\,(\overline{D_2\ D_2'})$, se reprezintă accelerația primară cunoscută a punctului E_2, apoi a lui E_3 și B_3. Accelerația relativă cunoscută $\bar{a}'_{D_{21}} = k_a\,(\overline{D_1'\ D_2'}) = (\omega_2^2 - \omega_1^2)\ \overline{P_{12}\ D}$

este paralelă cu $P_{12}D_{12}$, iar $\bar{a}'_{E_{32}} = k_a(\overline{E'_2E'_3}) = -\bar{a}^c_{E_{32}}$ este perpendiculară pe dreapta translației.

Față de punctul P'_{12} de intersecție al dreptelor ΔK_1K_2 și $\Delta D'_1D'_2$, segmentele $\overline{K_1K_2}$ și $\overline{D'_1D'_2}$ au sensuri contrare. De asemenea, față de punctul

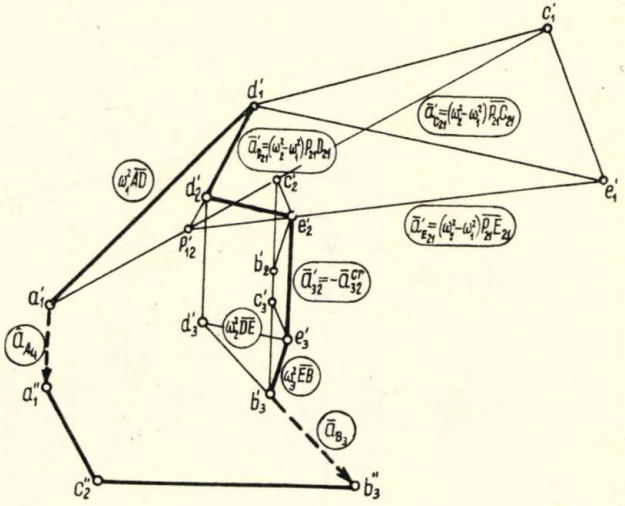


Fig. 17

de intersecție $P'_{23\infty}$ al dreptelor ΔK_2K_3 și $\Delta E'_2E'_3$, segmentele $\overline{K_2K_3}$ și $\overline{E'_2E'_3}$ au sensuri contrare. În al doilea caz, triunghiurile $K_2K_3E_{23}$ și $E'_2E'_3E_{23}$ sînt asemenea, din cauza unghiurilor egale. Raportul de asemănare este

$$\frac{\omega_2^2}{k_\varepsilon} = \frac{\omega_3^2}{k_\varepsilon} = \frac{(E_2E'_2)}{(K_2E_2)} = \frac{(E_3E'_3)}{(K_3E_3)} = \frac{(E'_2E'_3)}{(K_2K_3)}. \tag{29}$$

În planul accelerațiilor (fig. 17), conturul accelerațiilor cunoscute este $a'_1d'_1d'_2e'_2e'_3b'_3$ și se poate reduce pentru $D_{12} \equiv P_{12}$. Dacă se urmărește determinarea punctului assuric C_2 aflat la intersecțiile dreptelor A_1P_{12} și $B_3P_{23\infty}$, conturul accelerațiilor cunoscute se reduce la $a'_1c'_2b'_3$. Urmărind relațiile de viteze

$$\bar{v}_{C_2} = \underline{\underline{\bar{v}_{A_1}}} + \underbrace{\bar{v}_{P_1A_1} + \bar{v}_{C_2P_2}}_{\perp AC} = \underline{\underline{\bar{v}_{B_3}}} + \underbrace{v_{C_{23}} + \bar{v}_{C_3B_3}}_{\perp BC}, \tag{30}$$

din b''_3 și a''_1, ducînd perpendicularele pe BC și AC, se determină c''_2, respectiv accelerația compusă a punctului C_2. Pe cînd accelerațiile primare cunoscute pot fi reprezentate pentru orice puncte (fig. 17) legate din oricare din corpuri, de exemplu $d'_1d'_2d'_3$, $c'_1c'_2c'_3$, $e'_1e'_2e'_3$, accelerațiile

MOSZAKI

compuse se determină numai dacă se cunosc parametrii corespunzători în număr suficient.

1.4. *Mişcarea plană a unui lanţ cinematic de* n *solide rigide.* Pentru un lanţ cinematic deschis (fig. 18) care are corpuri legate succesiv prin

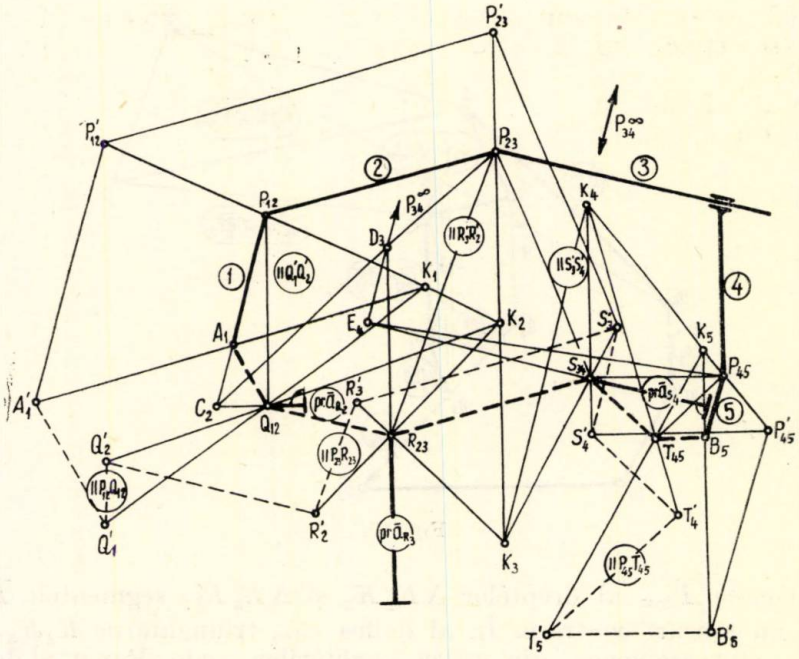


Fig. 18

cuple de rotaţie şi de translaţie, determinarea punctelor caracteristice se face din aproape în aproape pe baza relaţiilor :

— pentru cuple de rotaţie $P_{s,\,s+1} \equiv P_{s+1,\,s}$:

$$\omega_s^2 \overline{K_s P}_{s,\,s+1} = \omega_{s+1}^2 \overline{K_{s+1} P}_{s+1,\,s}, \tag{31}$$

în care

$$\overline{K_s P}_{s,\,s+1} = \overline{K_s P}_{s-1,\,s} + \overline{P_{s-1,s} P}_{s,\,s+1};$$

— pentru cuple de translaţie $P^{\infty}_{\sigma,\,\sigma+1} \equiv P^{\infty}_{K+1,\,\sigma}$ $\omega_\sigma = \omega_{\sigma+1}$:

$$\omega_\sigma^2 \overline{K_\sigma K}_{\sigma+1} = -\bar{a}^{c}_{\sigma,\,\sigma+1}, \tag{32}$$

în care

$$\overline{K_\sigma K}_{\sigma+1} = \overline{K_\sigma P}_{\sigma-1,\,\sigma} + \overline{P_{\sigma-1,\,\sigma} P}_{\sigma+1,\,\sigma+2} + \overline{P_{\sigma+1,\,\sigma+2} K}_{\sigma+1}.$$

Prin urmare, legătura dintre primul și ultimul punct caracteristic al lanțului este următoarea :

$$\omega_1^2 \overline{K_1 P_{12}} + \sum_s \omega_s^2 \overline{P_{s-1,s} P_{s,s+1}} + \sum_\sigma [\omega_\sigma^2 \overline{P_{\sigma-1,\sigma} P_{\sigma+1,\sigma+2}} + \bar{a}^c_{\sigma,\sigma+1}] + \omega_n^2 \overline{P_{n-1,n} K_n} = 0, \tag{33}$$

în care Σ_s se extinde asupra corpurilor legate numai prin cuple de rotație, iar Σ_σ se extinde asupra corpurilor legate prin cuple de translație.

Pentru reprezentarea accelerațiilor cunoscute se poate alege un contur al lanțului format cu punctele $A_1\ Q_{12}\ R_{23}\ S_{34} \ldots B_n$ (fig. 18), pentru care accelerațiile primare cunoscute sînt legate prin relațiile

$$\begin{aligned} \bar{a}'_{Q_1} &= \bar{a}'_{A_1} + \bar{a}'_{Q_1 A_1}, \\ \bar{a}'_{Q_2} &= \bar{a}'_{Q_1} + \bar{a}'_{Q_{21}}, \\ \bar{a}'_{R_2} &= \bar{a}'_{Q_2} + \bar{a}'_{R_2 Q_2}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \bar{a}'_{B_n} &= \bar{a}'_{T_n} + \bar{a}'_{B_n T_n}, \end{aligned} \tag{34}$$

adică

$$\bar{a}'_{B_n} = \bar{a}'_{A_1} + \bar{a}'_{B_n A_1}, \tag{35}$$

în care

$$\bar{a}'_{B_n A_1} = \bar{a}'_{Q_1 A_1} + \bar{a}'_{Q_{21}} + \bar{a}'_{R_2 Q_2} + \ldots + \bar{a}'_{B_n T_n}, \tag{36}$$

cu accelerațiile de rotație

$$\begin{aligned} \bar{a}'_{Q_1 A_1} &= k_a(\overline{a'_1 q'_1}) = \omega_1^2 \overline{AQ}, \\ \bar{a}'_{R_2 Q_2} &= k_a(\overline{q'_2 r'_2}) = \omega_2^2 \overline{QR}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{37}$$

și accelerațiile relative

$$\begin{aligned} \bar{a}'_{Q_{21}} &= k_a(\overline{q'_1 q'_2}), \\ \bar{a}'_{R_{32}} &= k_a(\overline{r'_2 r'_3}). \end{aligned} \tag{38}$$

Dacă elementele sînt legate prin cuple de rotație

$$\bar{a}'_{Q_{21}} = (\omega_2^2 - \omega_1^2) \overline{P_{12} Q_{12}}; \tag{39}$$

iar dacă elementele sînt legate prin cuple de translație

$$\bar{a}'_{S_{43}} = -\bar{a}^c_{43}. \tag{40}$$

În planul acceleraţiilor, conturul acceleraţiilor primare cunoscute (fig. 19) $a'_1 q'_1 q'_2 r'_2 r'_3 s'_3 s'_4 t'_4 t'_5 b'_5$ se reprezintă în conformitate cu ecuaţia (36). Acest contur se reduce la $a'_1 p'_{12} p'_{23} s'_3 s'_4 p'_{45} b'_5$ dacă se aleg punctele lanţului confundate cu centrele de rotaţie $R_{12} \equiv P_{12}$ etc. Conturul acceleraţiilor cunoscute are în general laturile paralele cu laturile conturului

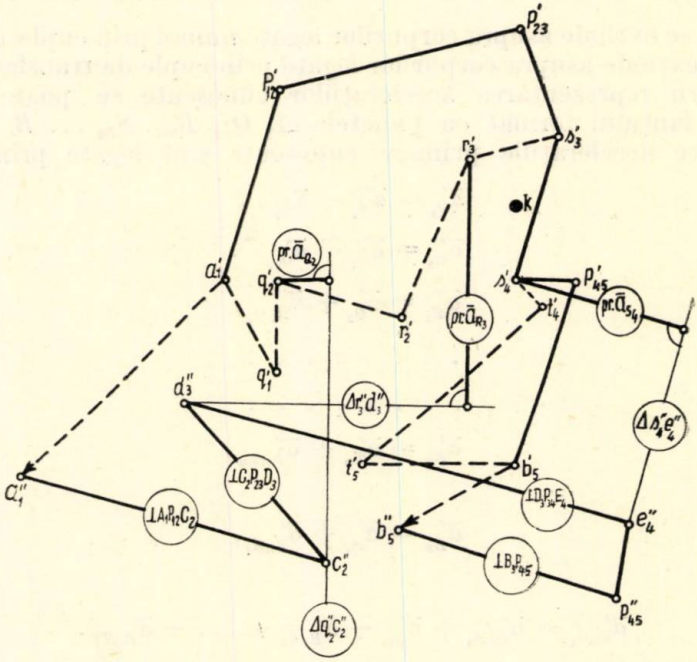


Fig. 19

lanţului cinematic din cauza acceleraţiilor de rotaţie. Pentru acceleraţiile relative în cazul cuplelor de translaţie, laturile respective sînt perpendiculare pe dreptele translaţiilor relative.

Acceleraţiile compuse secundare ale punctelor din care este formată figura lanţului cinematic sînt legate prin relaţiile.

$$\begin{aligned}
\bar{a}''_{Q_1} &= \bar{a}''_{A_1} + \bar{a}''_{Q_1 A_1}, \\
\bar{a}''_{Q_2} &= \bar{a}''_{Q_1} + \bar{a}''_{Q_2 Q_1}, \\
\bar{a}''_{R_2} &= \bar{a}''_{Q_2} + \bar{a}''_{R_2 Q_2}, \qquad (41) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\bar{a}''_{B_n} &= \bar{a}''_{T_n} + \bar{a}''_{B_n T_n},
\end{aligned}$$

adică

$$\bar{a}''_{B_n} = \bar{a}''_{A_1} + \bar{a}''_{B_n A_1}, \qquad (42)$$

în care

$$\bar{a}''_{B_n A_1} = \bar{a}''_{Q_1 A_1} + \bar{a}''_{Q_{21}} + \bar{a}''_{R_2 Q_2} + \ldots + \bar{a}''_{B_n T_n}, \tag{43}$$

cu accelerațiile de rotație

$$\begin{aligned} \bar{a}''_{Q_1 A_1} &= k_a(\overline{a''_1 q''_1}) = \bar{a}^t_{Q_1 A_1} = \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{AQ}, \\ \bar{a}''_{R_2 Q_2} &= k_a(\overline{q''_2 r''_2}) = \bar{a}^t_{R_2 Q_2} = \bar{\varepsilon}_2 \times \overline{QR} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{44}$$

și cu accelerațiile relative

$$\begin{aligned} \bar{a}''_{Q_{21}} &= k_a(\overline{q''_1 q''_2}). \\ \bar{a}''_{R_{32}} &= k_a(\overline{r''_2 r''_3}). \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{45}$$

Pentru elemente legate prin cuple de rotație

$$\bar{a}''_{Q_{21}} = \bar{a}^{rt}_{Q_{21} P_{21}} = \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{P_{12} Q_{12}}, \tag{46}$$

iar pentru cele legate prin cuple de translație

$$\bar{a}''_{S_{43}} = \bar{a}^r_{43}. \tag{47}$$

Conturul accelerațiilor compuse $a''_1\, q''_1\, q''_2\, r''_2\, r''_3\, s''_3\, s''_4\, t''_4\, t''_5\, b''_5$ se reprezintă în conformitate cu ecuația (43) și, desigur, se reduce dacă punctele lanțului sînt confundate cu centrele de rotație $R_{12} \equiv P_{12}$, adică devine $a''_1\, p''_{12}\, p''_{23}\, s''_3\, s''_4\, p''_{45}\, b''_5$. Acest contur are în general laturile perpendiculare pe laturile figurii lanțului cinematic, din cauza accelerațiilor de rotație. Pentru accelerațiile relative în cazul cuplelor de translație, laturile respective sînt paralele cu dreptele translațiilor relative.

Construcția conturului accelerațiilor compuse depinde însă de parametrii scalari cunoscuți ai lanțului cinematic.

Numărul de parametri scalari necesari pentru determinarea distribuțiilor de accelerații este $p = 3n - 2c = n + 2$, deoarece $c = n - 1$. Avînd în vedere că pentru o suită de i corpuri ($i < n$) numărul parametrilor cunoscuți trebuie să fie mai mic ($i + 2$), parametrii pot fi împărțiți între corpurile lanțului sub forma 2 1 1 1 ... 1 2. Deci este necesar să se cunoască accelerațiile punctelor A_1 și B_n, precum și cîte o proiecție de accelerație pentru cîte un punct din corpurile intermediare ale lanțului cinematic Q_2, R_3, S_4.

Rezolvarea se face transmițîndu-se cîte un parametru de la corpurile externe către corpurile centrale, calculînd accelerațiile punctelor particulare (assurice) pînă se ajunge la forma 2 + 2 studiată anterior (diadă).

Punctele particulare (fig. 18) sînt: C_2 la intersecția dreptei $\Delta A_1 P_{12}$, cu suportul proiecției pr. $\bar{a}_{Q_2}$; D_3 la intersecția dreptei $\Delta C_2 P_{23}$, cu suportul proiecției pr. $\bar{a}_{R_3}$; E_4 la intersecția dreptei $\Delta R_3 P^{\infty}_{34}$, cu suportul proiecției pr. $\bar{a}_{S_4}$. În planul accelerațiilor (fig. 19) se atașează

față de punctele $a_1' \; q_2' \; r_3' \; s_4' \; b_5'$ accelerațiile date $\bar{a}_{A_1} = k_a \overline{(a_1' \; a_1'')}$ și $\bar{a}_{B_5} = k_a \overline{(b_5' \; b_5'')}$ și proiecțiile de accelerații pr. $\bar{a}_{Q_2}$, pr. $\bar{a}_{R_3}$, pr. $\bar{a}_{S_4}$. Se obțin extremitățile accelerațiilor compuse a_1'' și b_5'', precum și dreptele extremităților $\Delta q_2''$, $\Delta r_3''$, $\Delta s_4''$, perpendiculare pe direcțiile proiecțiilor respective. Deoarece accelerațiile compuse se bucură de aceleași proprietăți de proiecții ca și vitezele, dreptele extremităților $\Delta q_2''$, $\Delta r_3''$, $\Delta s_4''$ se confundă cu dreptele extremităților $\Delta c_2''$, $\Delta d_3''$ și $\Delta e_4''$. Rezolvarea accelerațiilor compuse se face pe baza ecuațiilor analoge de viteze :

$$\begin{aligned}
\bar{v}_{C_2} &= \bar{\bar{v}}_{A_1} + \underbrace{\bar{v}_{P_1A_1} + \bar{v}_{C_2P_2}}_{\perp A_1 P_{12} C_2} = \underbrace{\bar{v}_{Q_2} + \bar{v}_{C_2Q_2}}_{\Delta q_2 c_2} \\
\bar{v}_{D_3} &= \bar{\bar{v}}_{C_2} + \underbrace{\bar{v}_{P_2C_2} + \bar{v}_{D_3P_3}}_{\perp C_2 P_{23} D_3} = \underbrace{\bar{v}_{R_3} + \bar{v}_{D_3R_3}}_{\Delta r_3 d_3} \\
\bar{v}_{E_4} &= \bar{\bar{v}}_{D_3} + \underbrace{\bar{v}_{D_{43}} + \bar{v}_{E_{43}}}_{\perp D_3 P_{34}^{\infty} E_4} = \underbrace{\bar{v}_{S_4} + \bar{v}_{E_4S_4}}_{\Delta s_4 e_4} \\
\bar{v}_{P_{45}} &= \bar{\bar{v}}_{E_4} + \underbrace{\bar{v}_{P_{45}E_4}}_{\perp EP_{45}} = \bar{\bar{v}}_{B_5} + \underbrace{\bar{v}_{P_{45}B_5}}_{\perp BP_{45}}.
\end{aligned} \tag{48}$$

Atît conturul accelerațiilor primare cunoscute, cît și conturul accelerațiilor compuse secundare se reduc dacă punctele intermediare cunoscute Q_{12}, R_{23}, S_{34}, T_{45} etc. se confundă în același punct geometric.

2. STUDIUL LANȚURILOR CINEMATICE PLANE ÎNCHISE

Într-un lanț cinematic simplu închis se consideră că elementul al $(n+1)$ — lea coincide cu primul. Se pot determina, pornind de la K_1 din aproape în aproape, punctele caracteristice $K_2, K_3, \ldots, K_{n+1} = K_1^* \neq K_1$, obținîndu-se la o parcurgere a sa un nou punct caracteristic K_1^* pentru primul corp diferit de punctul caracteristic inițial [1], [2] [3]. Aceeași situație se repetă, desigur, pentru orice alt corp al lanțului socotit ca inițial. Cele două sisteme de accelerații compuse, ca și accelerațiile cunoscute corespunzătoare punctelor K_1 și K_1^*, diferă printr-un vector de translație obținut din (33) astfel :

$$\begin{aligned}
\bar{T} &= -\omega_1^2 \overline{K_1 K_1^*} = -\omega_2^2 \overline{K_2 K_2^*} = \ldots \\
&= \sum_s \omega_s^2 \overline{P_{s-1,s} P_{s,s+1}} + \sum_\sigma [\omega_\sigma^2 \overline{P_{\sigma-1,\sigma} P_{\sigma+1,\sigma+2}} + \bar{a}^c_{\sigma,\sigma+1}].
\end{aligned} \tag{49}$$

Într-adevăr, deși considerăm un singur punct $A \equiv A^*$ pentru un corp, accelerațiile compuse secundare și accelerațiile primare cunoscute diferă între ele, iar accelerațiile simple sînt egale :

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{A^*}' &= \bar{a}_A' + \bar{a}_{A^*A}', \\
\bar{a}_{A^*}'' &= \bar{a}_A'' + \bar{a}_{A^*A}''.
\end{aligned} \tag{50}$$

Prin diferența relațiilor de mai sus, $\bar{a}_{A^*} = \bar{a}_A$, se găsește

$$\bar{a}'_{A^*A} = \bar{a}''_{A^*A} = \overline{T} = k_a(\overline{a'' a''^*}) = k_a(\overline{a' a'^*}). \tag{51}$$

Pentru ca distribuțiile de accelerații să fie determinate, sînt necesari $p = 3n - 2c = n$ parametri scalari, repartizați sub formele 2 0 2 0 2 ... ... sau 1 1 1 ...

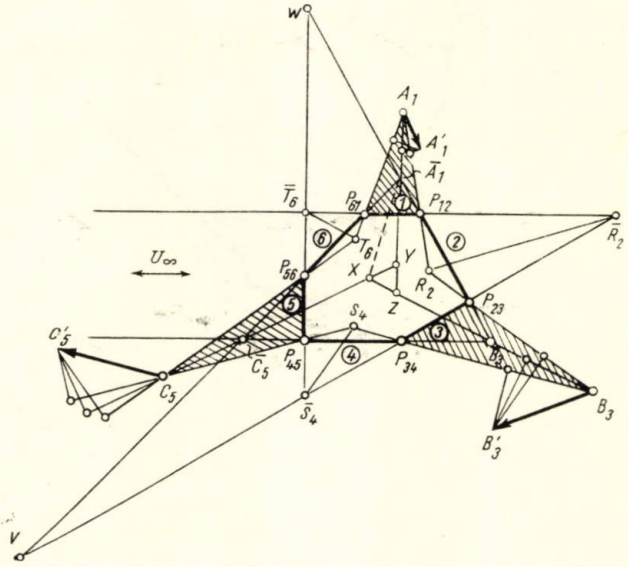


Fig. 20

Aflarea accelerațiilor se face cu ajutorul metodei poligoanelor auxiliare (false), aplicată direct pe conturul lanțului cinematic sau pe conturul redus prelucrat conform metodei solidarizării. Laturile poligoanelor auxiliare corespund ecuațiilor accelerațiilor compuse (asemănătoare celor de viteze), față de care se prezintă în plus latura cunoscută vectorului compensator $\overline{T}$ (50), (51).

2.1. *Mișcarea unui lanț cinematic închis care are numai cuple de rotație.* Pentru exemplificarea pe un contur de clasa VI se presupun cunoscute proiecțiile de accelerații în vîrfurile conturului, adică în centrele de rotație $P_{12}, P_{23}, \ldots, P_{61}$ (fig. 20). Se reprezintă conturul accelerațiilor primare cunoscute $p'_{23}\ p'_{34}\ p'_{45} \ldots p'^*_{23}$ cu laturile paralele cu conturul figurii lanțului cinematic (fig. 21). Rezultanta cunoscută $\overline{T} = k_a\ (\overline{p'_{23}\ p'^*_{23}})$ este așezată în poziția corespunzătoare punctului $P_{23} \equiv P^*_{23}$. În vîrfurile figurii accelerațiilor cunoscute se reprezintă proiecțiile de accelerații, obținîndu-se dreptele $\Delta p''_{23}, \Delta p''_{34}, \ldots, \Delta p''^*_{23}$, pe care sînt așezate extremitățile accelerațiilor compuse. Începînd construcția poligoanelor auxi-

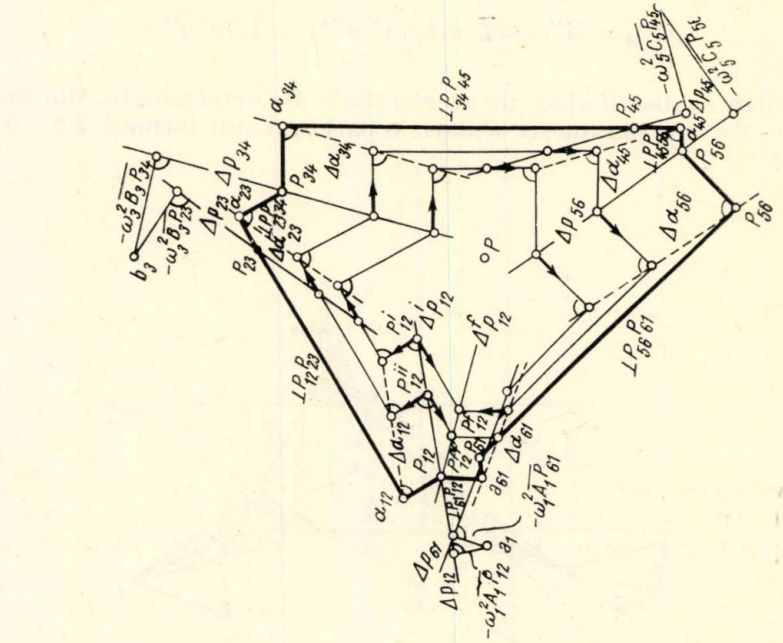


Fig. 22

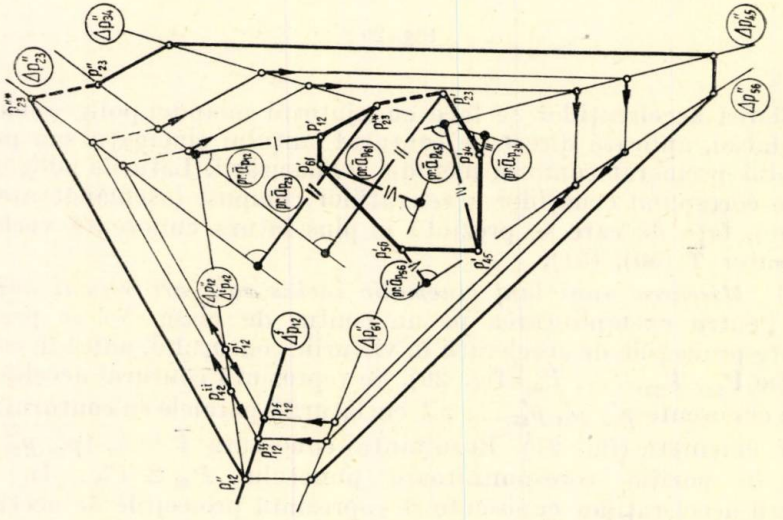


Fig. 21

liare de la dreapta inițială $\Delta^i p''_{12}$, se obține dreapta finală $\Delta^f p''_{12}$, conform ecuațiilor

$$\begin{aligned} \bar{a}''^{*}_{P_2^3} &= \bar{a}''_{P_1^2} + \bar{a}''_{P_2^3 P_1^2}, \\ \bar{a}''^{3}_{P^2} &= \bar{a}''_{P_2^{3*}} + \bar{a}''_{P_2^3 P_2^{3*}}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{52}$$

în care față de ecuațiile de viteze apare ecuația suplimentară a rezultantei cunoscute

$$\begin{aligned} \bar{a}''_{P_2^3} &= \bar{a}''^{*}_{P_2^3} + \bar{a}''_{P_2^3 P_2^{3*}} \\ \bar{a}''_{P_2^3 P_2^{3*}} &= -\overline{T} = k_a(\overline{p^*_{23} p_{23}}). \end{aligned} \tag{53}$$

Avantajele metodei accelerațiilor compuse se evidențiază mai mult în cazul lanțurilor închise. Astfel, accelerațiile primare cunoscute sînt reprezentate pe un singur poligon, ceea ce reduce construcțiile față de metoda obișnuită (fig. 22) [1]—[5].

Totodată, împreună cu metoda solidarizării [4], [5] sînt continuate simplificările în construcțiile grafice. Pentru exemplul anterior al conturului exagonal (fig. 20) se alege conturul redus triunghiular $\overline{A}_1\overline{B}_3\overline{C}_5$ din planul lanțului cinematic.

În planul accelerațiilor (fig. 23), figura accelerațiilor primare cunoscute este $\overline{b}'_3\,\overline{c}'_5\,\overline{a}'_1\,\overline{b}'^{*}_3$, închisă prin rezultanta cunoscută $\overline{T} = k_a(\overline{b}'_3\,\overline{b}'^{*}_3) = \bar{a}'_{\overline{B}^*_3\,\overline{B}_3}$, corespunzătoare punctului $\overline{B}_3 \equiv \overline{B}^*_3$, egală, desigur, cu cea corespunzătoare punctului $P_{23} = P^*_{23}$ (fig. 21). Figura accelerațiilor compuse secundare prezintă aceeași rezultantă $\overline{T} = k_a(\overline{b}''_3\,\overline{b}''^{*}_3) = \bar{a}''_{\overline{B}^*_3\,\overline{B}_3}$, iar construcțiile poligoanelor auxiliare se execută după ecuațiile

$$\begin{aligned} \underline{\bar{a}''_{\overline{C}_5}} &= \underline{\bar{a}''_{\overline{B}_3}} + \frac{\bar{a}''_{\overline{C}_5\,\overline{B}_3}}{\perp \overline{B}_3\overline{C}_5} \\ \underline{\bar{a}''_{\overline{A}_1}} &= \underline{\bar{a}''_{\overline{C}_5}} + \frac{\bar{a}''_{\overline{A}_1\,\overline{C}_5}}{\perp \overline{C}_5\overline{A}_1} \\ \underline{\bar{a}''_{\overline{B}^*_3}} &= \underline{\bar{a}''_{A_1}} + \frac{\bar{a}''_{\overline{B}^*_3\,\overline{A}_1}}{\perp \overline{A}_1\overline{B}_3} \\ \underline{\bar{a}''_{\overline{B}_3}} &= \underline{\bar{a}''_{\overline{B}^*_3}} + \frac{\bar{a}''_{\overline{B}_3\,\overline{B}^*_3}}{\| \overline{T}}\,. \end{aligned} \tag{54}$$

Faţă de construcţiile vitezelor (fig. 24), asemănarea este întreruptă de rezultanta $\overline{T} = \overline{a}'_{\overline{B}_3^* \overline{B}_3} = \overline{a}''_{\overline{B}_3^* \overline{B}_3}$. Dacă figurile acceleraţiilor primare şi secundare se întregesc prin triunghiurile haşurate (fig. 23), care au aceeaşi bază $\overline{b}'_3 \overline{b}'^*_3 \equiv \overline{b}''_3 \overline{b}''^*_3$, dar celelalte două laturi perpendiculare

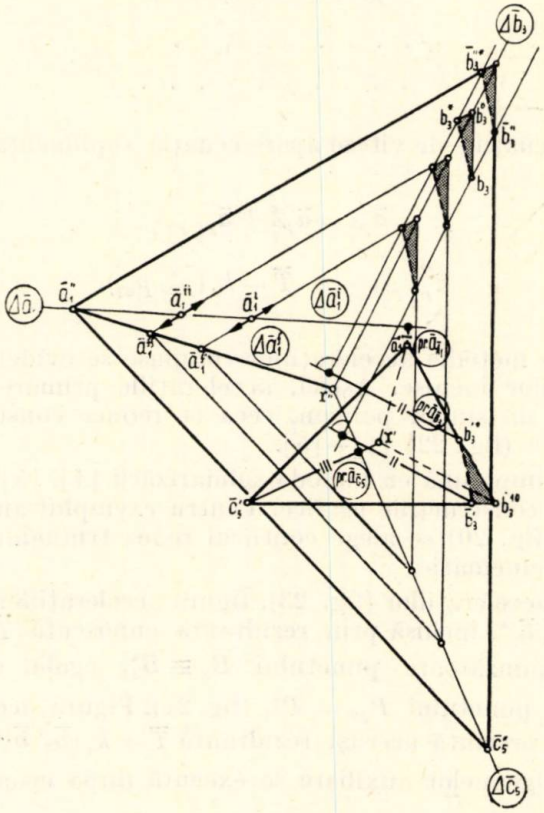


Fig. 23

între ele, se pot aplica întocmai rezultatele de la metoda solidarizării pentru viteze. Mai întîi triunghiul $\overline{a}'_1 \overline{b}'_3 \overline{c}'_5$ al acceleraţiilor primare cunoscute are laturile paralele cu triunghiul conturului redus $\overline{A}_1 \overline{B}_3 \overline{C}_5$ şi raportul de asemănare

$$r' = \frac{(\overline{c}'_5 \overline{a}'_1)}{(\overline{C}_5 \overline{A}_1)} = \frac{\omega^2}{k_\varepsilon}, \tag{55}$$

unde

$$\omega^2 = \frac{\omega_5^2 \overline{C}_5 P_{56} + \omega_6^2 P_{56} P_{61} + \omega_1^2 P_{61} \overline{A}_1}{\overline{C}_5 \overline{A}_1}.$$

Apoi triunghiul $\bar{a}_1'' \bar{b}_3''^0 \bar{c}_5''$ al acceleraţiilor secundare compuse are laturile perpendiculare cu triunghiul conturului redus $\bar{A}_1 B_3 \bar{C}_5$ şi are raportul de asemănare

$$r'' = \frac{(\bar{c}_5'' \bar{a}_1'')}{(\bar{C}_5 \bar{A}_1)} = \frac{\varepsilon}{k_\varepsilon}, \tag{56}$$

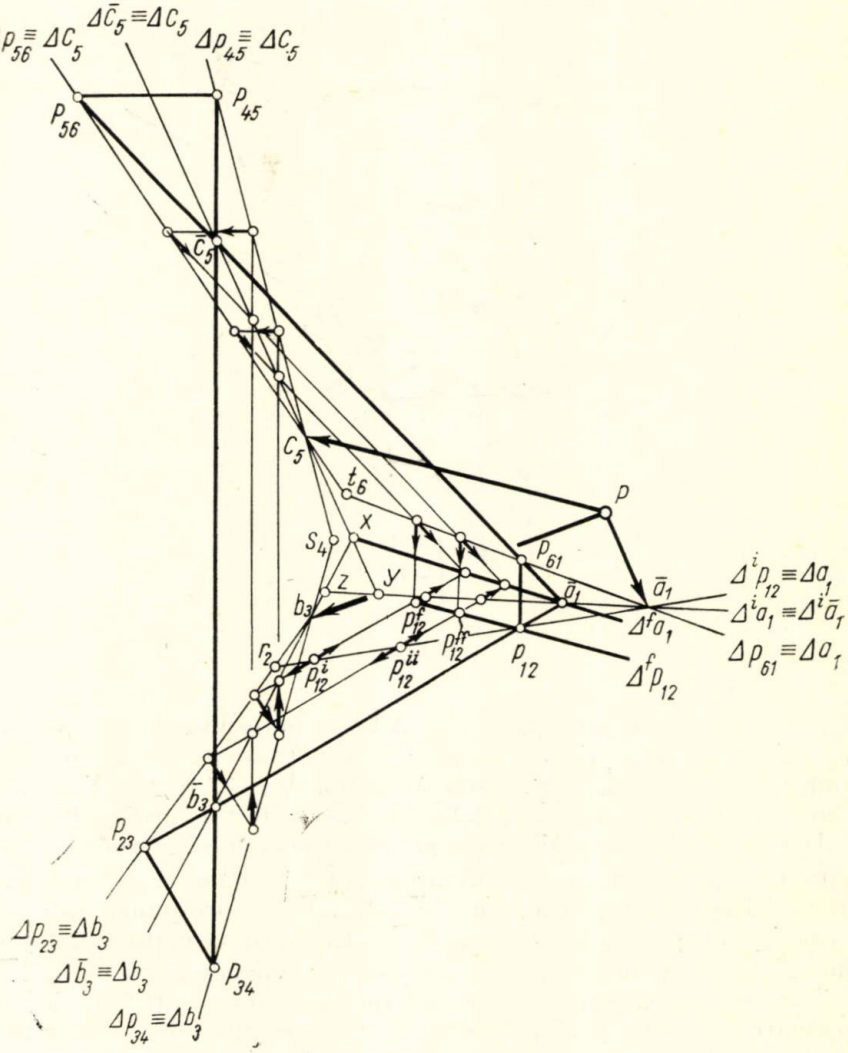


Fig. 24

unde

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_5 \bar{C}_5 P_{56} + \varepsilon_6 P_{56} P_{61} + \varepsilon_1 P_{61} \bar{A}_1}{\bar{C}_5 \bar{A}_1}.$$

Prin solidarizarea triunghiului $\overline{A}_1\overline{B}_3\overline{C}_5$ se extinde asemănarea pentru triunghiurile corespunzătoare punctelor analoge x', x'', X, adică $\Delta X\overline{A}_1\overline{B}_3 \sim \Delta x'\,\overline{a}'_1\,\overline{b}'^0_3 \sim \Delta x''\,\overline{a}''_1\,\overline{b}''^0_3$, $\Delta X\overline{B}_3\overline{C}_5 \sim \Delta x'\,b'^0_3\,\overline{c}'_5 \sim \Delta x''\,\overline{b}''^0_3\,\overline{c}''_5$; $\Delta X\overline{C}_5\overline{A}_1 \sim \Delta x'\,\overline{c}'_5\,\overline{a}'_1 \sim \Delta x''\,\overline{c}''_5\,\overline{a}''_1$. Punctul x' din figura acceleraţiilor primare cunoscute se găseşte la intersecţia dreptelor $\Delta x'\overline{c}'_5$ şi $\Delta x'\,\overline{b}'^0_3$, care

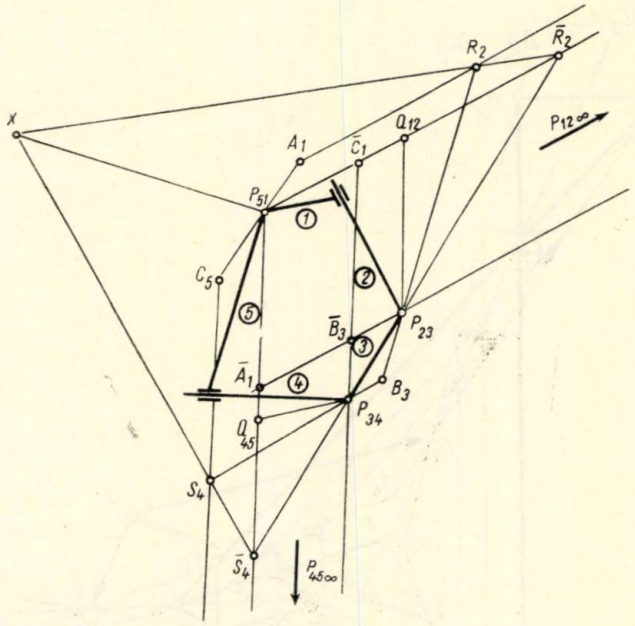


Fig. 25

sînt paralele cu dreptele $\Delta X\overline{C}_5$ şi $\Delta X\overline{B}_3$, corespunzătoare proiecţiilor pr.$_{\Delta C_5 \overline{C}_5}\,\overline{a}_{\overline{C}_5}$ şi pr.$_{\Delta B_3 \overline{B}_3}\,\overline{a}_{\overline{B}_3}$. Punctul x'' din figura acceleraţiilor compuse secundare se găseşte la intersecţia dreptelor $\Delta x''\,\overline{c}''_5$ şi $\Delta x''\,\overline{b}''^0_3$, perpendiculare pe dreptele $\Delta X\overline{C}_5$ şi $\Delta X\overline{C}_3$ în extremităţile proiecţiilor respective. Dacă însă dreapta $\Delta\overline{c}''_5$ corespunde proiecţiei de acceleraţie pr. $\overline{a}_{\overline{C}_5}$ ataşată în punctul $\overline{c}'_5$, pentru dreapta $\Delta\overline{b}''^0_3$ trebuie să se construiască triunghiul haşurat între dreptele $\Delta\overline{b}''_3$ şi $\Delta\overline{b}''^*_3$, corespunzătoare proiecţiei pr. $\overline{a}_{\overline{B}_3}$, ataşată în punctele $\overline{b}'_3$ şi $\overline{b}'^*_3$. În continuare, dreapta punctelor finale $\Delta'\,\overline{a}''_1$ trece prin punctul x'' şi este perpendiculară pe $\Delta X\overline{A}_1$ sau $\Delta x'\,\overline{a}'_1$. Se obţine la intersecţia cu dreapta punctelor iniţiale $\Delta^i\,\overline{a}''_1$, corespunzătoare proiecţiei pr. $\overline{a}_{\overline{A}_1}$ ataşată în $\overline{a}'_1$, punctul real $\overline{a}''_1$, pentru care se poate construi un singur poligon real.

2.2. *Mişcarea unui lanţ cinematic închis care cuprinde şi cuple de translaţie.* Se urmăreşte exemplificarea pe un contur deformabil de clasa V (fig. 25) care are cinci elemente legate prin trei cuple de rotaţie P_{51}, P_{23} şi P_{34} şi două cuple de translaţie cu centrele la infinit $P_{12\infty}$ şi $P_{45\infty}$. Pentru

reducerea construcțiilor, în locul polurilor $P_{12\infty}$ și $P_{45\infty}$ se aleg punctele Q_{12} și Q_{45}, așezate la distanțe finite acceptabile pe dreptele $P_{51}\ P_{12\infty}$ și, respectiv, P_{51}, $P_{45\infty}$ [5]. Conturul accelerațiilor primare cunoscute este $p'_{51}\ q'_2\ p'_{23}\ p'_{34}\ q'_4\ p^{1*}_{51}$ (fig. 26), a cărui rezultantă cunoscută este $\overline{T} = k_\varepsilon(p'_{51}\ p'^{*}_{51})$. Între q'_1 și q^1_2 sau între și $q'_4\ q'_5$ se introduc accelerațiile Cori-

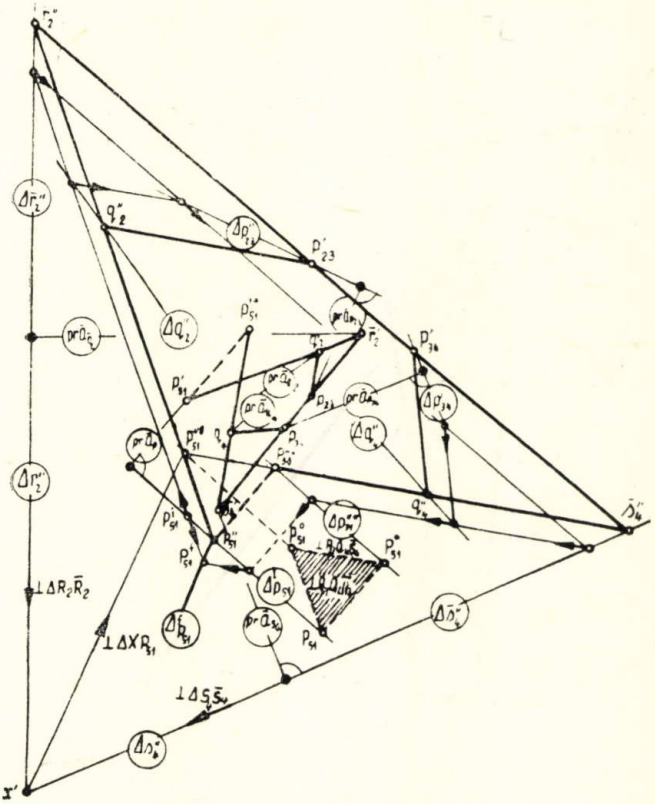


Fig. 26

olis cunoscute de semn schimbat $-\overline{a}^c_{21}/k_\varepsilon$ și $-\overline{a}^c_{54}/k_\varepsilon$, restul segmentelor corespunzînd mărimilor $\omega_1^2\ \overline{P_{51}\ Q_1}$, $\omega_2^2\ \overline{Q_2\ P_{23}}$, $\omega_3^2\ \overline{P_{23}\ P_{34}}$, $\omega_4^2\ \overline{P_{34}\ Q_4}$, $\omega_5^2\ \overline{Q_5\ P_{51}}$, care conțin pătratele vitezelor unghiulare respective $\omega_1 = \omega_2$, ω_3, $\omega_4 = \omega_5$. În vîrfurile acestui contur se atașează proiecțiile de accelerații și se obțin dreptele extremităților $\Delta p''_{51}$, $\Delta q''_2$, $\Delta p''_{23}$, $\Delta p''_{34}$, $\Delta q''_4$, $\Delta p''^{*}_{51}$. Cu ajutorul acestora se construiește un singur poligon auxiliar care poziționează punctul final p^f_{51} prin care trece dreapta punctelor finale $\Delta^f p_{51}$ cu direcția paralelă la cea obținută în cazul vitezelor (fig. 27).

Se remarcă diferența față de poligoanele de accelerații simple (fig. 28).

Dacă se utilizează metoda solidarizării, corespunzător triunghiului $P_{51}\ \overline{R}_2\ \overline{S}_4$ (fig. 25) se găsește conturul accelerațiilor primare $p'_{51}\ \overline{r}'_2\ \overline{s}'_4\ \overline{p}'^{*}_{51}$, cu aceeași rezultantă $\overline{T} = k_\varepsilon(p'_{51}\ p'^{*}_{51})$ (fig. 26). Față de acest contur,

prin ataşarea proiecţiilor de acceleraţii se obţin dreptele $\Delta p''_{51}$, $\Delta \bar{r}''_2$, $\Delta \bar{s}''_4$, $\Delta p''^*_{51}$, cu care se pot construi poligoanele auxiliare ale acceleraţiilor secundare cu laturile perpendiculare pe laturile conturului acceleraţiilor primare. Construcţia dreptei punctelor finale se poate obţine

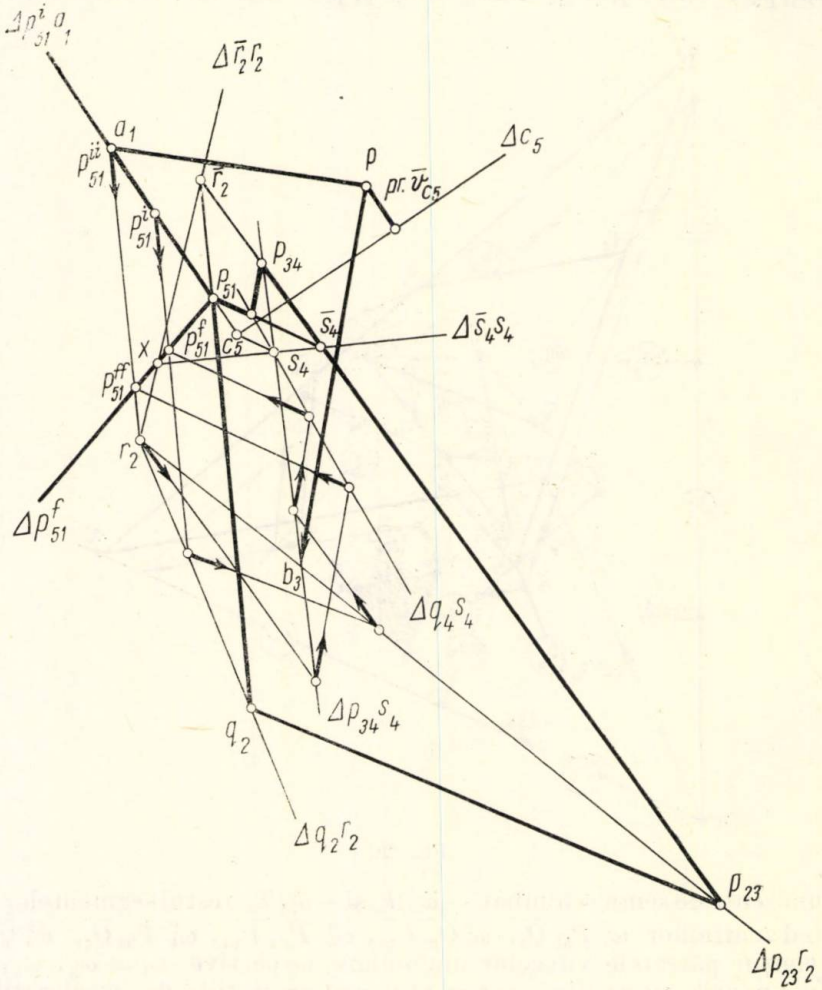


Fig. 27

şi direct, pe baza solidarizării conturului $P_{51}\bar{R}_2\bar{T}_4$ pe aceeaşi cale ca pentru viteze (fig. 27). Astfel, la intersecţia dreptelor $\Delta \bar{r}''_2$ şi $\Delta s''_4$, obţinute cu ajutorul proiecţiilor pr. $\bar{a}_{\bar{R}_2}$ şi pr. $\bar{a}_{\bar{S}_4}$ şi perpendiculare pe dreptele $\Delta R_2\bar{R}_2$ şi $\Delta S_4\bar{S}_4$, se găseşte punctul x'', omologul punctului X. Din acest punct se duce dreapta $\Delta x'' p''^0_{51}$, perpendiculară pe dreapta $\Delta X P_{51}$, corespunzînd în direcţia cu dreapta punctelor finale $\Delta^f p_{51}$. Punctul p''^0_{51}, se găseşte la intersecţia dreptei precedente cu dreapta $\Delta p^0_{51} \parallel \Delta p''_{51} \parallel \Delta p''^*_{51}$,

care trece prin vîrful p_{51}^0 al triunghiului $p_{51}\, p_{51}^*\, p_{51}^0$. Acest triunghi are aceeași bază ca triunghiul $p'_{51}\, p_{51}^{'*}\, p_{51}^{'0}$, adică rezultanta $\overline{T}$, dar celelalte două laturi sînt perpendiculare laturilor analoge.

2.3. *Aplicarea metodei accelerațiilor compuse la un lanț pentru care se cunosc proiecțiile de accelerații ale punctelor confundate geometric.* Pentru

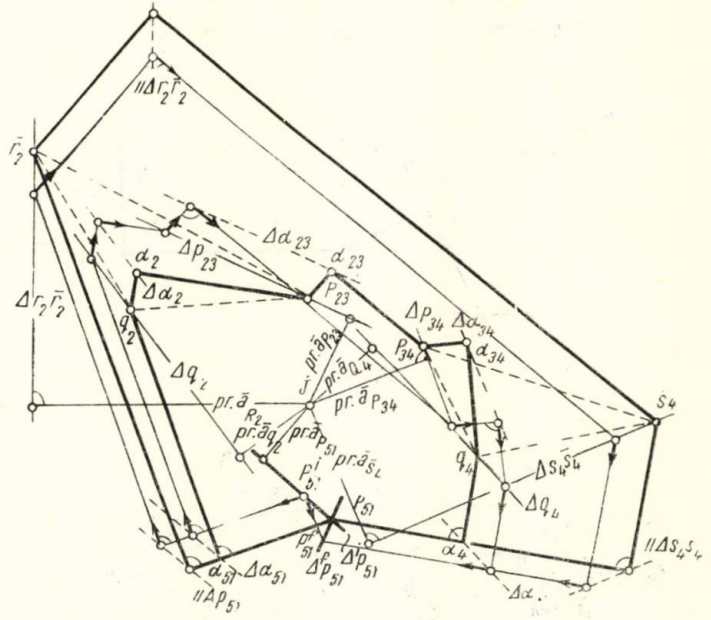
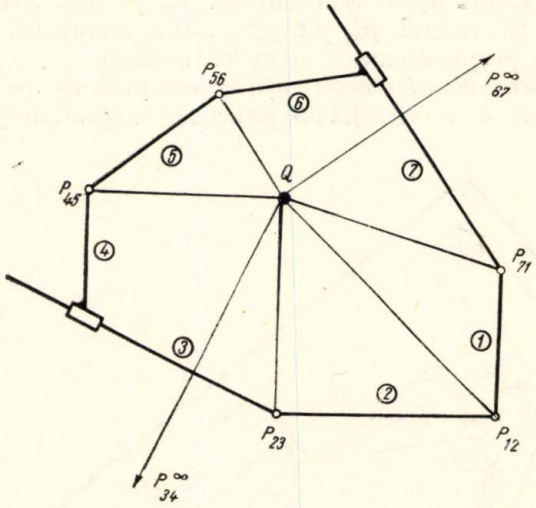


Fig. 28

lanțul cinematic închis de clasa VII (fig. 29) care are cuple de rotație și de translație, se construiește pentru punctele $Q_1 Q_2, \ldots Q_7$, confundate în punctul geometric Q, conturul accelerațiilor primare $q'_1\, q'_2\, q'_3 \ldots q'_7\, q_1^{'*}$ (fig. 30), cu rezultanta $\overline{T} = k_\varepsilon (\overline{q'_1\, q_1^{'*}})$. Segmentele dintre punctele conturului sînt determinate în raport cu legăturile elementelor prin cuple de rotație sau cuple de translație (39), (40). Ele sînt îndreptate după direcțiile determinate de punctul Q și de polurile relative P_{12}, P_{23}, ..., P_{71}, indiferent că acestea se găsesc la distanță finită sau la infinit.

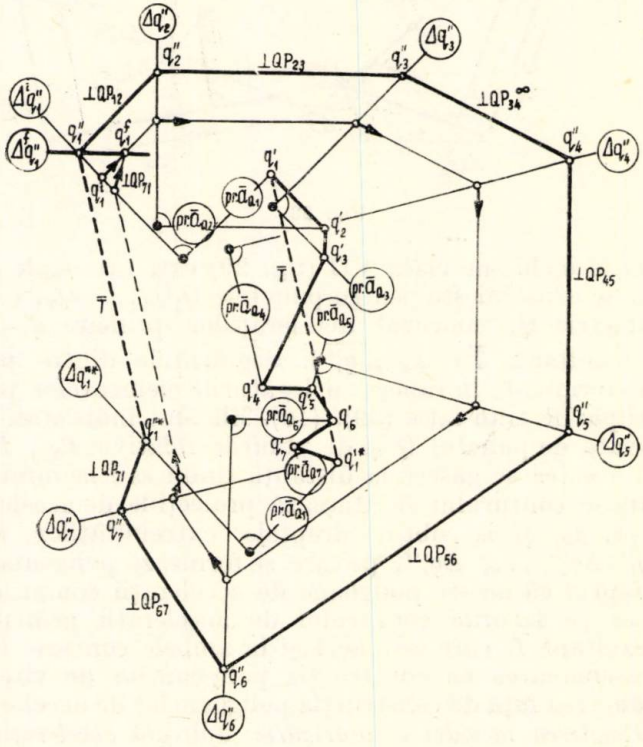
În vîrfurile conturului se atașează proiecțiile de accelerații pr. $\bar{a}_{Q_1}$, pr. $\bar{a}_{Q_2} \ldots$ pr. $\bar{a}_{Q_7}$ și se obțin dreptele extremităților accelerațiilor compuse $\Delta q_1''$, $\Delta q_2''$, ..., $\Delta q_1''^*$, pe care se formează poligoanele auxiliare. Se remarcă faptul că aceste poligoane de accelerații compuse au laturile perpendiculare pe laturile conturului de accelerații primare, în afara vectorului rezultant $\overline{T}$, care este același în ambele conture. De asemenea se remarcă asemănarea cu construcția poligoanelor de viteză (fig. 31), precum și reducerea față de construcția poligoanelor de accelerații (fig. 32).

2.4. *Extinderea metodei solidarizării, aplicată accelerațiilor compuse la conture de clase superioare.* Pentru un lanț cinematic închis cu contur



P_{56}
P_{67}^{∞}
P_{45}
Q
P_{71}
P_{23}
P_{12}
P_{34}^{∞}

Fig. 29



$\perp QP_{23}$
$\perp QP_{12}$
$\perp QP_{34}^{\infty}$
$\perp QP_{71}$
$\perp QP_{45}$
$\perp QP_{56}$
$\perp QP_{67}$

Fig. 30

de clasa VIII (fig. 33) se alege prin metoda solidarizării conturul redus de clasa IV $\overline{A}_1\overline{B}_3\overline{C}_5\overline{D}_7$, în vîrfurile căruia se cunosc proiecțiile de accelerații pe direcțiile $\Delta A_1\overline{A}_1$, $\Delta B_3\overline{B}_3$, $\Delta C_5\overline{C}_5$, $\Delta D_7\overline{D}_7$. Pentru accelerațiile compuse secundare se urmăresc aceleași construcții ca pentru viteze (fig. 34). Se reprezintă conturul accelerațiilor primare cunoscute

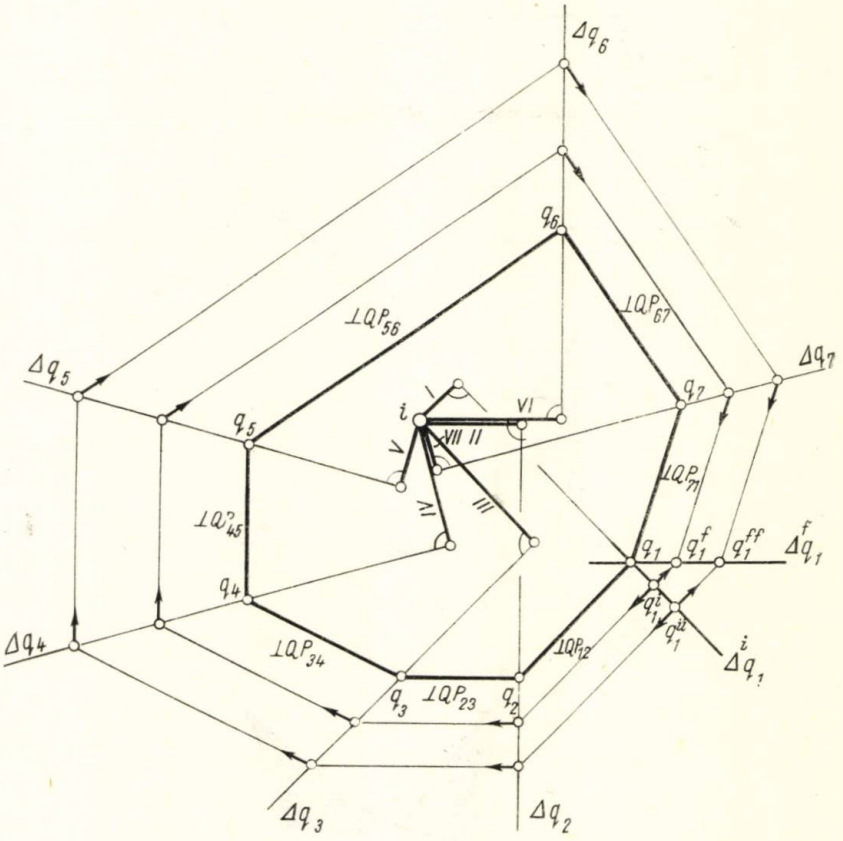


Fig. 31

$\overline{a}_1'\overline{b}_3'\overline{c}_5'\overline{d}_7'\overline{a}_1'^*$, care determină vectorul compensator $\overline{T} = k_a(\overline{a}_1'\ \overline{a}_1^{*\prime})$, corespunzător punctului $\overline{A}_1 \equiv \overline{A}_1^*$ (fig. 35).

Prin atașarea proiecțiilor de accelerații se obțin dreptele extremităților accelerațiilor compuse $\Delta\overline{a}_1''$, $\Delta\overline{b}_3''$ $\Delta\overline{c}_5''$, $\Delta\overline{d}_7''$, perpendiculare pe direcțiile proiecțiilor în extremitățile lor. Apoi se execută poligoanele auxiliare, avîndu-se în vedere închiderea lor prin vectorul cunoscut $\overline{T} = k_a(\overline{a}_1''\ \overline{a}_1'^*)$. Ca și în cazul vitezelor (fig. 34 și 35), construcția dreptei punctelor finale se poate face prin extragerea din conturul solidarizat $\overline{A}_1\overline{C}_3\overline{C}_5\overline{D}_7$ a două conture triunghiulare $W\overline{A}_1\overline{B}_3$ și $'W\overline{C}_5\overline{D}_7$, considerate rigidizate. Prelungind deci asemănarea figurilor, la intersecția dreptelor $\Delta\overline{c}_5''$ și $\Delta\overline{d}_7''$ din planul accelerațiilor compuse, se obține punctul

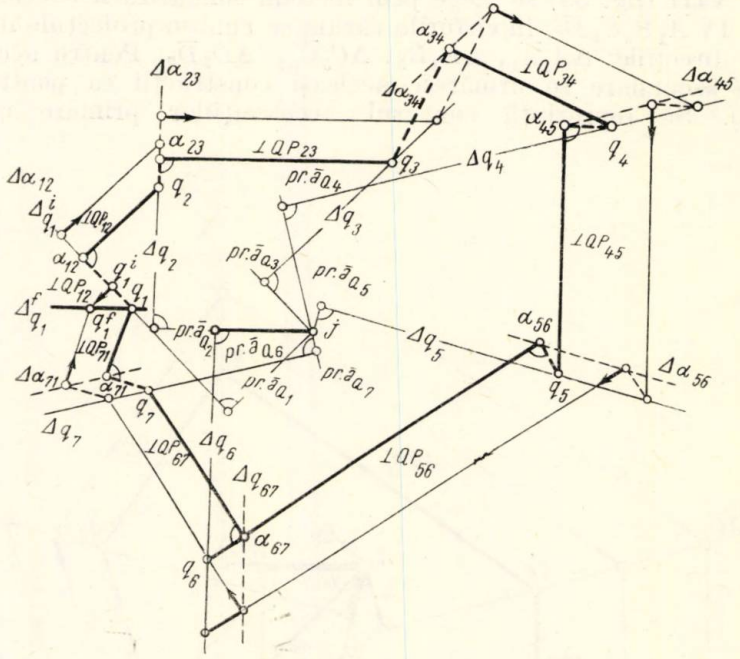

α_{34}
$\Delta\alpha_{34}$
$\perp QP_{34}$
$\Delta\alpha_{45}$
α_{45}
q_4
$\Delta\alpha_{23}$
α_{23}
$\perp QP_{23}$
q_3
Δq_4
$\Delta\alpha_{12}$
q_2
$pr.\bar{a}_{a_4}$
Δq_3
Δq_1^i
$\perp QP_{45}$
α_{12}
q_1^i
Δq_2
$pr.\bar{a}_{a_3}$
$pr.\bar{a}_{a_5}$
$\perp QP_{12}$
Δq_1^f
q_1^f
q_1
$pr.\bar{a}_{a_2}$
j
Δq_5
α_{56}
$\perp QP_{71}$
$\Delta\alpha_{71}$
$pr.\bar{a}_{a_6}$
$pr.\bar{a}_{a_1}$
$pr.\bar{a}_{a_7}$
$\Delta\alpha_{56}$
α_{71}
q_5
q_7
Δq_7
$\perp QP_{67}$
Δq_6
Δq_{67}
$\perp QP_{56}$
α_{67}
q_6

Fig. 32

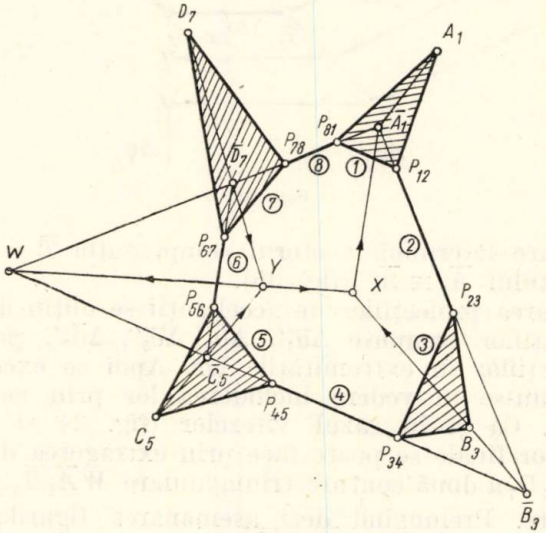

D_7
A_1
P_{81}
P_{78}
$\bar{D}_7$
A_1
P_{12}
W
P_{67}
Y
X
P_{23}
P_{56}
C_5
P_{45}
C_5
P_{34}
B_3
$\bar{B}_3$

Fig. 33

y'', analogul punctului Y de la intersecția dreptelor $\Delta C_5 \overline{C}_5 \perp \Delta \overline{c}_5''$ și $\Delta D_7 \overline{D}_7 \perp \Delta \overline{d}_7''$ din planul lanțului cinematic. Derapta $\Delta w''y''$, perpendiculară pe dreapta ΔWY, întîlnește dreapta $\Delta \overline{b}_3'' \perp \Delta B_3 \overline{B}_3$ în punctul x'' analog punctului X. Ducînd prin x'' dreapta $\Delta x'' \, \overline{a}_1''^0$ perpendiculară pe dreapta $\Delta X \overline{A}_1$, se găsește la intersecția cu dreapta $\Delta \overline{a}_1''^0 \parallel \Delta \overline{a}_1'' \parallel \Delta \overline{a}_1''^*$

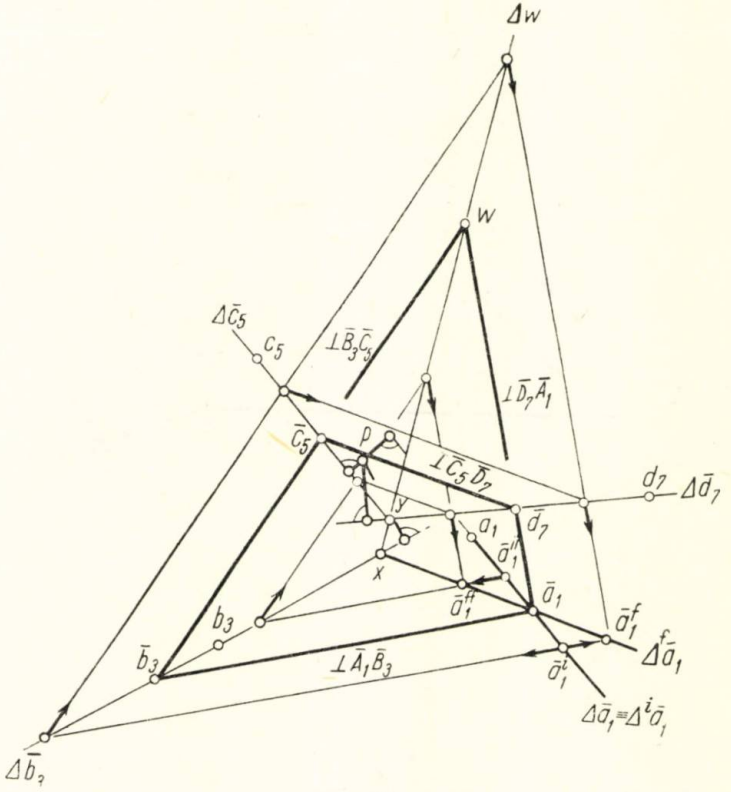


Fig. 34

punctul $\overline{a}_1''^0$ pentru care se poate construi poligonul real. Dreapta $\Delta \overline{a}_1''^0$ se găsește prin construcția triunghiului $\overline{a}_1 \overline{a}_1^* \overline{a}_1^0$, la fel ca în cazurile precedente.

Asemănarea cu poligoanele de viteză (fig. 34) este perfectă, iar reducerea față de poligoanele de accelerații (fig. 36) este evidentă.

3. Prin utilizarea accelerațiilor compuse secundare, distribuțiile de accelerații în lanțurile cinematice plane deschise sau închise capătă proprietăți deosebite, care permit simplificări în construcțiile grafice. Astfel, în general, se obține în planul accelerațiilor două figuri corespunzătoare accelerațiilor primare cunoscute și accelerațiilor compuse secundare cu laturile paralele și, respectiv, perpendiculare pe laturile conturului lanțului cinematic, separate între ele prin accelerațiile simple ale punctelor. Accelerațiile unghiulare se obțin direct din accelerațiile compuse de rotație.

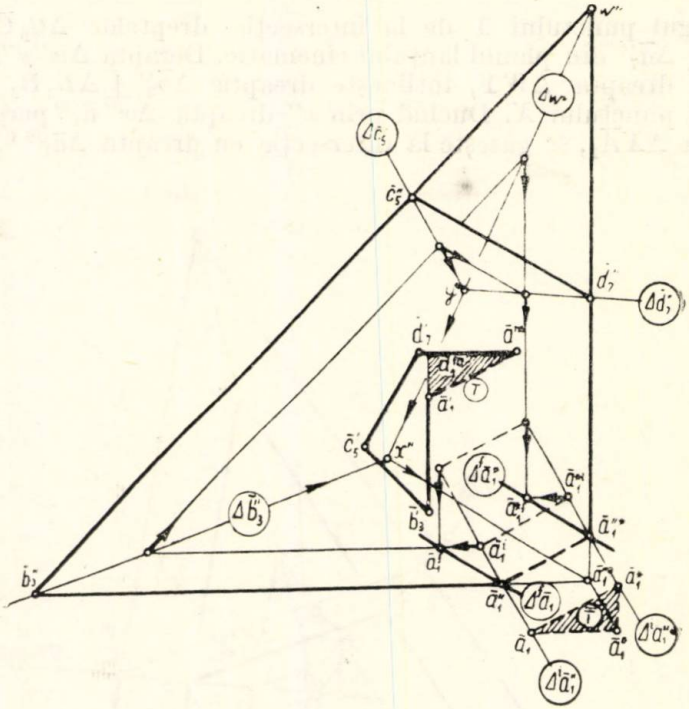


Fig. 35

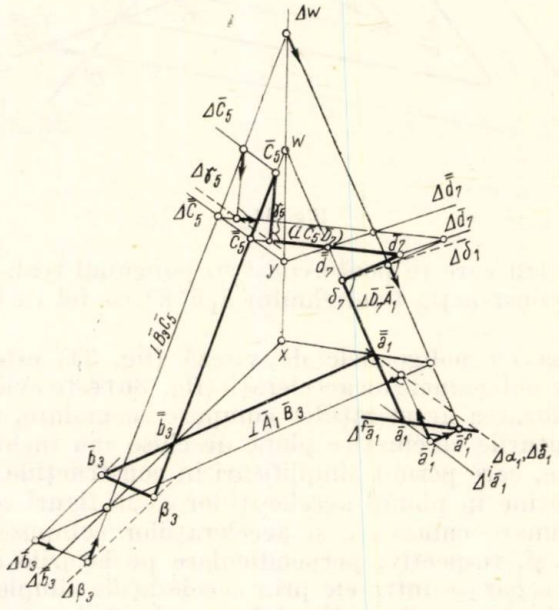


Fig. 36

Din cauza asemănării cu vitezele, calculele se fac direct pe ecuațiile vectoriale ale acestora, ele fiind valabile și pentru accelerații compuse. Se pot aplica ușor metodele ecuațiilor vectoriale, a proiecțiilor, a rabaterilor, a poligoanelor asemenea etc. Avantajele accelerațiilor compuse sînt exemplificate mai mult în cazul lanțurilor cinematice închise, unde, împreună cu metoda solidarizării, reduce la maximum construcțiile grafice, mărind precizia lor, putînd determina direct poligonul real de accelerații și eliminînd construcțiile ajutătoare.

BIBLIOGRAFIE

1. Pelecudi Chr., *Metoda accelerațiilor compuse în lanțurile cinematice plane*, St. cerc. mec. apl., **16**, *2* (1965).
2. — *Metoda accelerațiilor compuse superioare în lanțurile cinematice plane*, St. cerc. mec. apl., **16**, *3* (1965).
3. — *Punctele caracteristice ale accelerațiilor compuse superioare*, St. cerc. mec. apl., **16**, *4* (1965).
4. — *Metoda solidarizării pentru lanțurile cinematice închise*. I. St. cerc. mec. apl., **16**, *5* (1965).
5. — *Metoda solidarizării pentru lanțurile cinematice închise*. *II*. St. cerc. mec. apl., **16**, *6* (1965).

TRANSMISII CARDANICE SINCRONE[1)]

de FL. DUDIȚĂ
Institutul politehnic Brașov

531.1

După un succint studiu cinematic al articulației cardanice, considerată ca variantă a mecanismului patrulater sferic, se studiază cinematica transmisiilor policardanice, stabilindu-se algoritmul deducerii legii de transmitere pentru cazul general. Se stabilesc apoi condițiile și numărul de posibilități pentru realizarea transmisiilor policardanice sincrone. Se analizează amănunțit transmisiile sincrone cu două, trei și patru articulații.
În final se indică o metodă analitică pentru determinarea parametrilor geometrici în proiectare.

Transmisiile cardanice sînt în general mecanisme spațiale, formate din arbori legați prin articulații sau cuplaje universale, care servesc transmiterii energiei mecanice. Articulația universală este mecanismul spațial capabil a transmite mișcarea de rotație între doi arbori necoliniari intersectați. Se cunoaște o mare varietate de articulații universale mecanice sincrone (homocinetice): articulații Rzeppa [1]—[5], Weiss (Bendix — Weiss) [1], [6], Garrington [7], Tracta [1], [5], Bouchard [8], Glaenzer tripode [5]. Se utilizează tot mai des cuplaje elastice universale, care înlocuiesc cu succes articulațiile universale: cuplaje Metalastik, Juboflex, Straflex etc. [9]—[14].

Transmisiile formate din *articulații universale sincrone* sau din *cuplaje elastice universale* sînt totdeauna sincrone. Cu toate acestea, o serie de avantaje economice (simplitate constructivă, randament ridicat, durabilitate etc.) asigură utilizarea pe scară largă a *articulațiilor cardanice* (articulații Hooke sau articulații cu cruce) [1], [3], [4], [15], deși aceste arti-

[1)] Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, *1* (1966) (în limba franceză).

culații sînt asincrone. Construcția clasică a articulației cardanice și a elementelor componente este arătată în figura 1.

O cerință fundamentală a transmisiilor formate din articulații cardanice, care sînt asincrone (nehomocinetice), este ca mișcarea să se transmită sincron, adică legea de mișcare a arborelui inițial să fie aceeași cu a arborelui final. Realizarea transmisiilor cardanice sincrone în acest

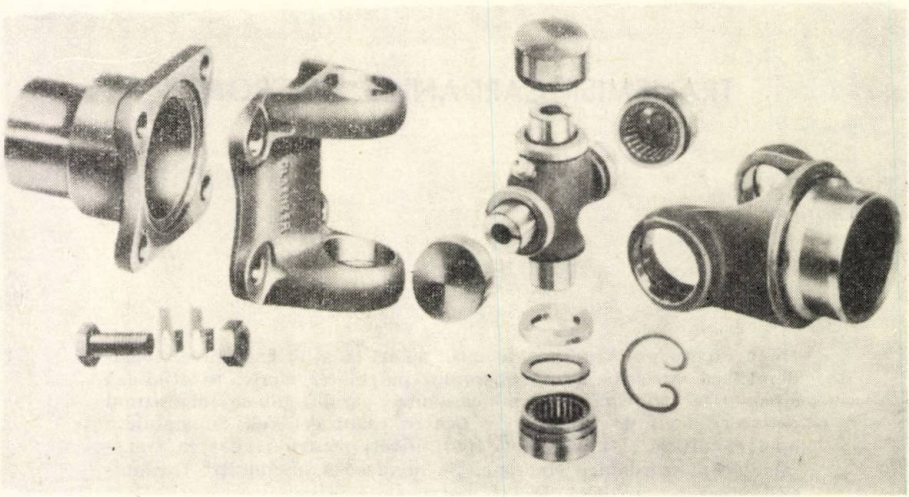


Fig. 1

sens este posibilă dacă se respectă anumite condiții între parametrii săi geometrici care influențează cinematica. Deducerea condițiilor necesare sincronismului mișcării și stabilirea schemelor cinematice ale transmisiilor cardanice sincrone constituie scopul acestei lucrări.

1. DOMENII DE UTILIZARE A TRANSMISIILOR CU ARTICULAȚII CARDANICE

Dintre domeniile de utilizare se amintesc cele principale : automobile [15]—[19], mașini agricole [20], [21], locomotive diesel [22], [23], [25], avioane și elicoptere [26], nave maritime [24], mașini-unelte (mașini de frezat și de rectificat) [27], laminoare [28]—[30], mașini de ridicat și de transportat [31], utilaj petrolier, pompe, mașini textile și poligrafice standuri de încercare etc. Datorită acestei extrem de largi utilizări în construcția de mașini, o serie de firme sînt specializate în livrarea articulațiilor și transmisiilor cardanice : „Glanezer-Spicer" în Franța ; GWB („Gelenkwellenbau GmbH"), „Löhr & Bromkamp Gmb" în R.F.G. ; „Hardy Spicer", „Mollart Eng. Co Ltd." în Anglia ; „Borg-Warner Corp.", „Dana Corp." în S.U.A. etc.

Pentru ilustrarea diversității domeniilor de utilizare și a gradului de complexitate al transmisiilor cardanice, în cele ce urmează se dau cîteva exemple. Astfel, în figura 2 este reprezentată transmisia carda-

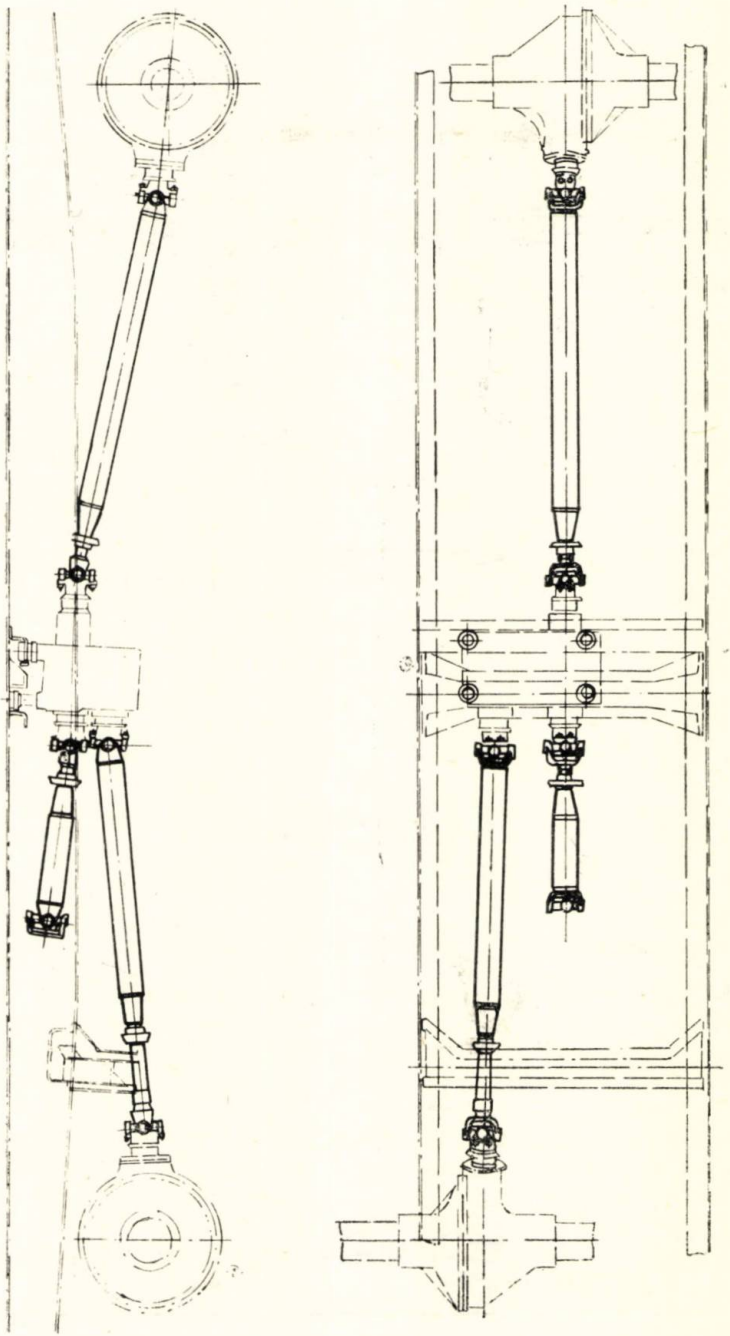


Fig. 2

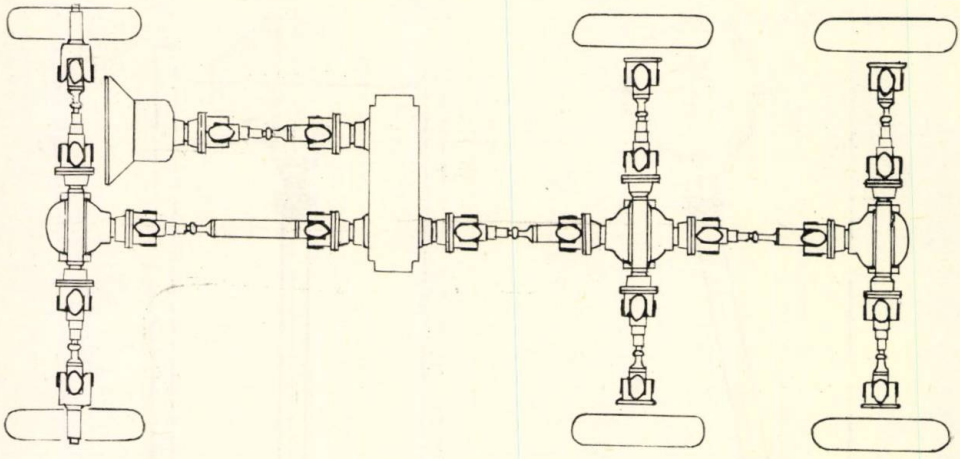


Fig. 3

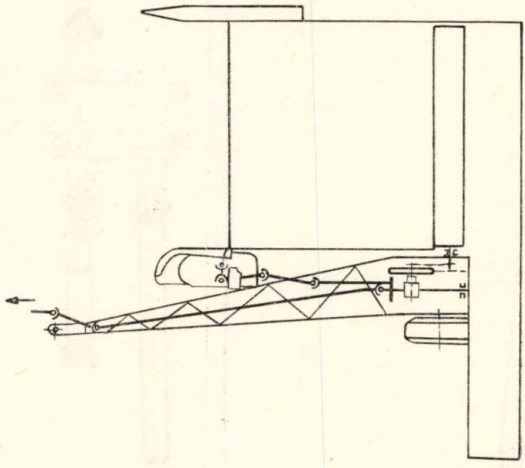


Fig. 4

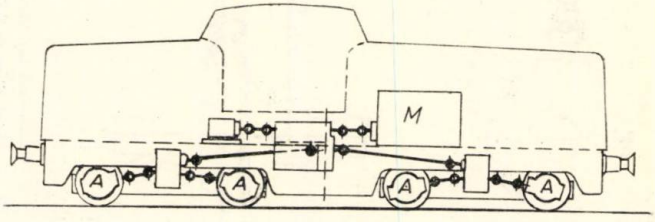


Fig. 5

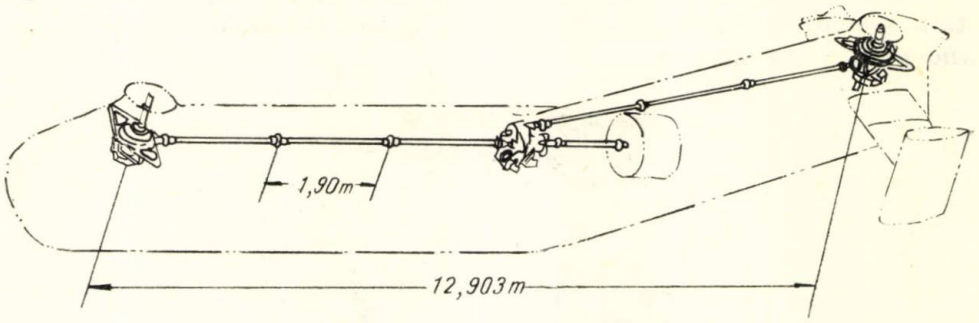


Fig. 6

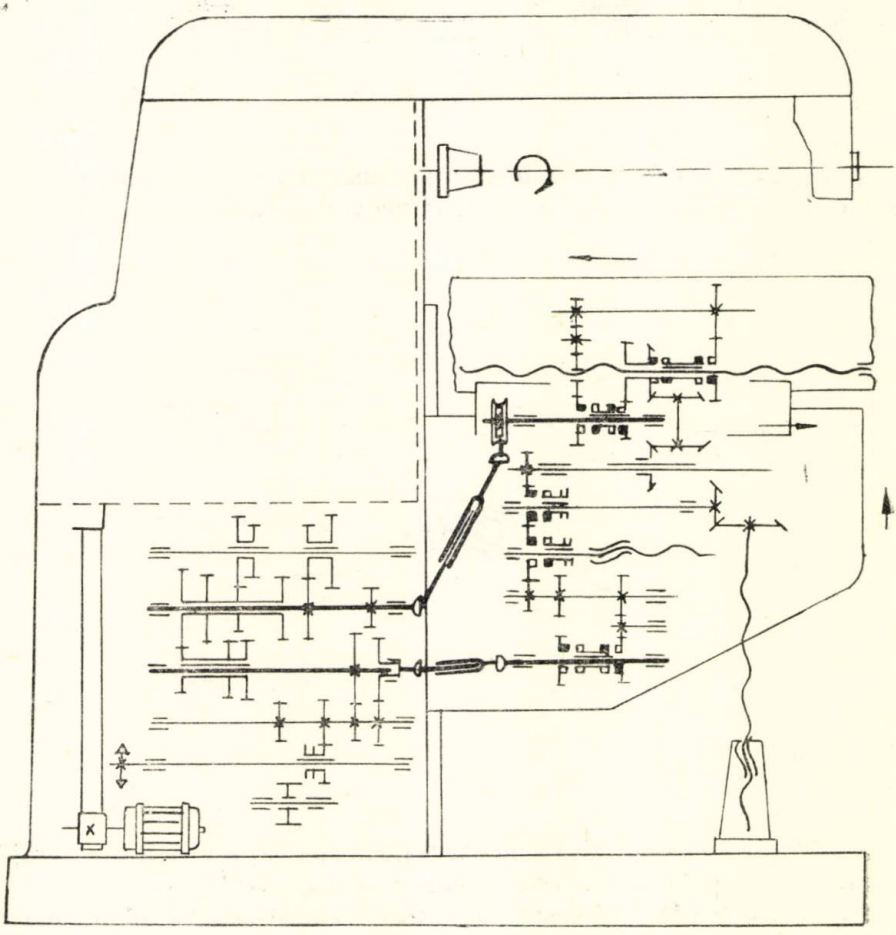


Fig. 7

nică a autocamionului S.R. cu dublă tracțiune, iar în figura 3 este arătată schematic transmisia cardanică a unui autocamion cu șase roți independente și motoare.

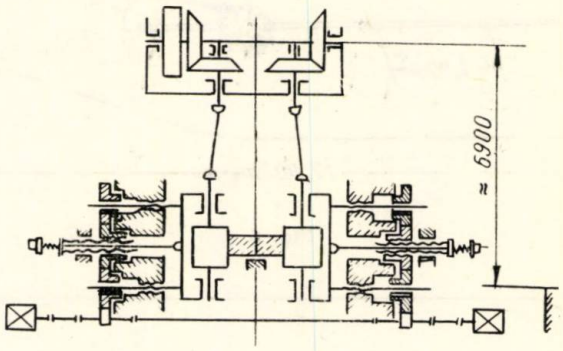


Fig. 8

În figura 4 este arătată schema transmisiei cardanice a unei combine de însilozat și recoltat, în figura 5 a unei locomotive diesel, iar în figura 6 a unui elicopter.

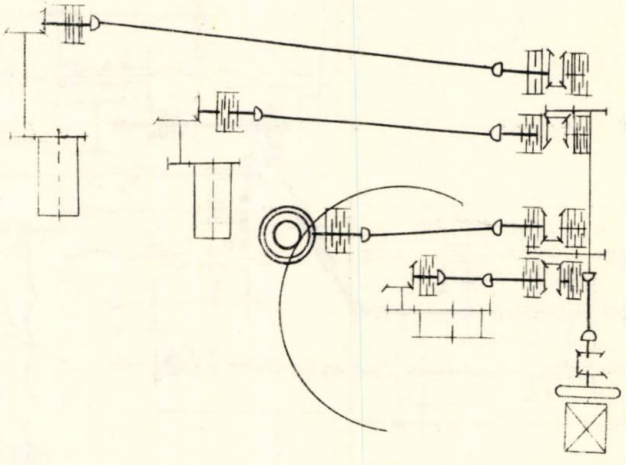


Fig. 9

În figura 7 este arătată schema transmisiei cardanice a unei mașini de frezat, iar în figura 8 a unui laminor cu caje verticale.

În figura 9 este reprezentată schema transmisiei cardanice a unei automacarale.

După această succintă enumerare a domeniilor de utilizare devine evidentă importanţa studiului cinematicii transmisiilor cardanice cu scopul stabilirii condiţiilor de sincronism.

2. CINEMATICA ARTICULAŢIEI CARDANICE

Articulaţia cardanică este un caz particular al mecanismului patrulater sferic cu două manivele (fig. 10 [39]).

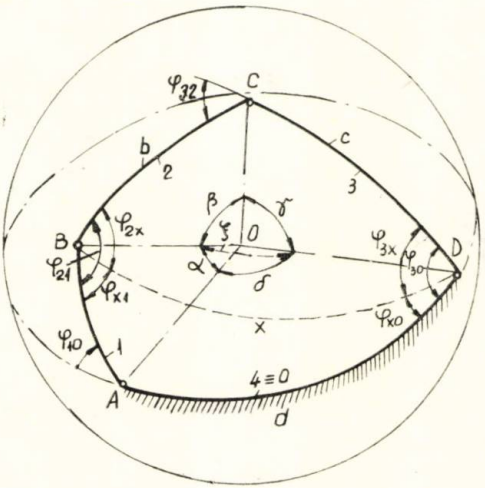


Fig. 10

Utilizînd notaţiile din figura 10, dependenţa dintre deplasările unghiulare ale celor două manivele (legea de transmitere), scrisă pe baza relaţiilor cunoscute din trigonometria sferică, este [39]

$$\varphi_{30} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \varphi_{10}}{\operatorname{ctg} \alpha \sin \delta + \cos \delta \cos \varphi_{10}} + \\ + \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{(\sin\beta \sin\gamma)^2 - (\cos\beta \cos\gamma - \cos\alpha \cos\delta + \sin\alpha \sin\delta \cos\varphi_{10})^2}}{\cos\beta - \cos\alpha \cos\gamma \cos\delta + \sin\alpha \sin\delta \cos\gamma \cos\varphi_{10}}. \tag{1}$$

Prin particularizarea acestei relaţii se deduc legile de transmitere pentru toate mecanismele derivate : articulaţie cardanică avînd braţele crucii neperpendiculare, articulaţie cardanică clasică (cu braţele crucii perpendiculare) [32]—[39], mecanism cu şaibă oscilantă [35] etc.

Astfel, particularizînd pentru articulația cardanică ($\alpha = \beta = \gamma = 90°$; $\delta > 90°$ deci $\varphi_{30} \to -\varphi_{30}$), se obține (fig. 11)

$$\varphi_{30} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\cos\delta}\operatorname{tg}\varphi_{10}\right), \tag{2}$$

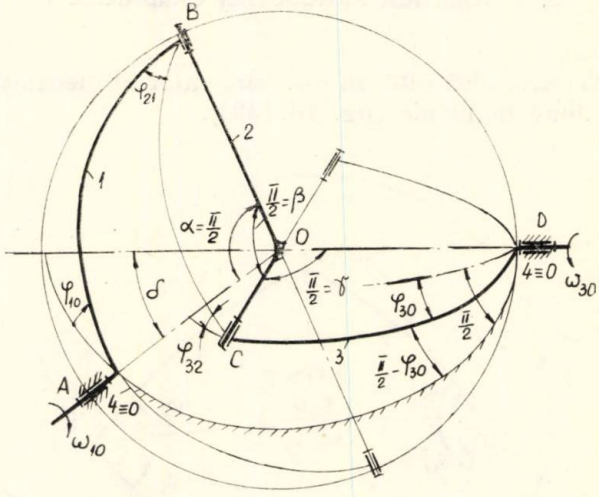


Fig. 11

care, cu notațiile utilizate în continuare pentru transmisiile cardanice (fig. 12), se transcrie

$$\varphi_{12} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\cos\alpha_1}\cdot\operatorname{tg}\varphi_{11}\right). \tag{3}$$

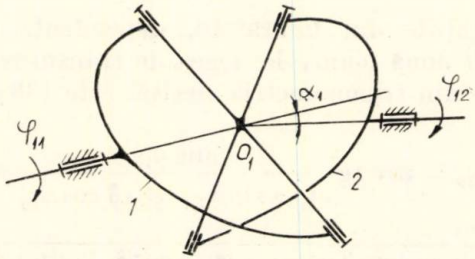


Fig. 12

Asincronismul mișcării furcilor cardanice poate fi caracterizat complet prin deplasarea unghiulară relativă a lor

$$\psi = \varphi_{12} - \varphi_{11} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\cos\alpha_1}\operatorname{tg}\varphi_{11}\right) - \varphi_{11}. \tag{4}$$

Anulînd derivata parţială $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_{11}}$, se găsec valorile extreme ale abaterii unghiulare

$$\psi_{\substack{\max \\ \min}} = \pm \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1 - \cos \alpha_1}{2\sqrt{\cos \alpha_1}}\right). \tag{5}$$

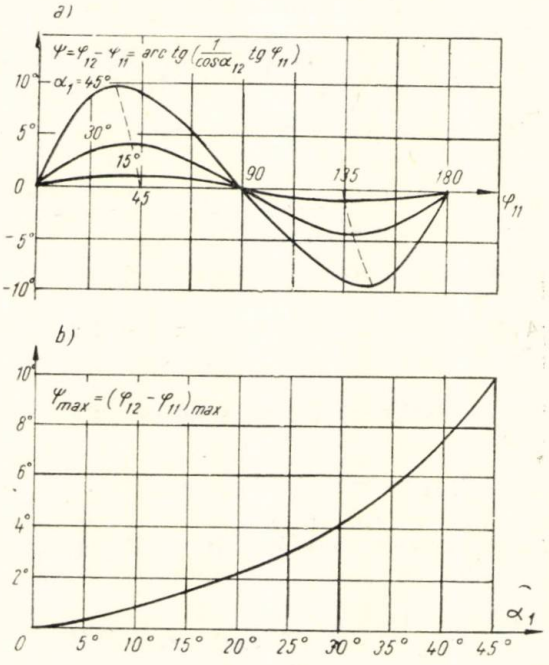


Fig. 13

În figura 13 *a* este reprezentată dependenţa (4) pentru diferite unghiuri α_1, iar în figura 13 *b* dependenţa valorii maxime (5) a abaterii de unghiul α_1.

Relaţia (4) este incomodă în calcule. Se observă însă că funcţia ψ, (4) este de perioadă π, continuă şi cu variaţie mărginită, deci, satisfăcînd condiţiilor lui Dirichlet, se poate dezvolta în serie Fourier

$$\psi = \varphi_{12} - \varphi_{11} = \varepsilon \sin 2\varphi_{11} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin 4\varphi_{11} + \frac{1}{3}\varepsilon^3 \sin 6\varphi_{11} + \ldots, \tag{6}$$

unde

$$\varepsilon = \frac{1 - \cos \alpha_1}{1 + \cos \alpha_1}. \tag{7}$$

Pentru $\alpha_1 < 20°$, cu o eroare mai mică de 0,1%, din dezvoltarea (6) se poate reține numai primul termen,

$$\psi = \varphi_{12} - \varphi_{11} \approx \varepsilon \sin 2\varphi_{11}\,; \quad \varepsilon \approx \frac{\alpha_1^2}{4}, \tag{8}$$

unghiul α_1 fiind măsurat în radiani.

Viteza unghiulară a furcii conduse, în cazul general cînd unghiul dintre axe (α_1) este variabil, se determină prin derivarea relației (3):

$$\omega_{12} = \frac{\cos \alpha_1}{1 - \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \varphi_{11}} \cdot \omega_{11} + \frac{\sin \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi_{11}}{\cos^2 \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_{11}} \cdot \frac{d\alpha_1}{dt}, \tag{9}$$

unde $\dot{\varphi}_{12} = \omega_{12}$; $\dot{\varphi}_{11} = \omega_{11}$. În cazul cînd $\alpha_1 = \text{const.}$, ținînd seama de (8), se obține

$$\omega_{12} = \frac{\cos \alpha_1}{1 - \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \varphi_{11}} \cdot \omega_{11} \approx \omega_{11}(1 + 2\varepsilon \sin 2\varphi_{11}), \tag{10}$$

de unde rezultă imediat raportul de transmitere

$$i = \frac{\omega_{12}}{\omega_{11}} = \frac{\cos \alpha_1}{1 - \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \varphi_{11}} \approx 1 + 2\varepsilon \sin 2\varphi_{11}. \tag{11}$$

Rezolvînd $\frac{\partial i}{\partial \alpha_1} = 0$, se găsesc valorile extreme ale raportului de transmitere

$$i_{max} = \frac{1}{\cos \alpha_1}; \quad i_{min} = \cos \alpha_1. \tag{12}$$

Gradul de neuniformitate (*neregularitate*) al articulației cardanice se determină cu ajutorul expresiei

$$\delta = \frac{(\omega_{12})_{max} - (\omega_{12})_{min}}{\omega_{11}} = i_{max} - i_{min} = \operatorname{tg} \alpha_1 \sin \alpha_1. \tag{13}$$

Dependențele valorilor maxime ale raportului de transmitere și ale gradului de neuniformitate de unghiul dintre axe (α_1) sînt reprezentate grafic în figura 14.

Accelerația unghiulară în cazul general se determină prin derivarea expresiei (3) în raport cu timpul. În cazul cînd $\alpha_1 = \text{const.}$; $\omega_{11} = \text{var.}$, se obține

$$\dot{\omega}_{12} = \varepsilon_{12} = \frac{\frac{4}{\cos \alpha_1}\left(1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha_1}\right)\sin 2\varphi_{11}}{\left[\left(1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha_1}\right)\cos 2\varphi_{11}\right]^2} \cdot \omega_{11}^2 + \\ + \frac{\frac{2}{\cos \alpha_1}}{\left(1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha_1}\right)\cos 2\varphi_{11}} \cdot \varepsilon_{11}, \tag{14}$$

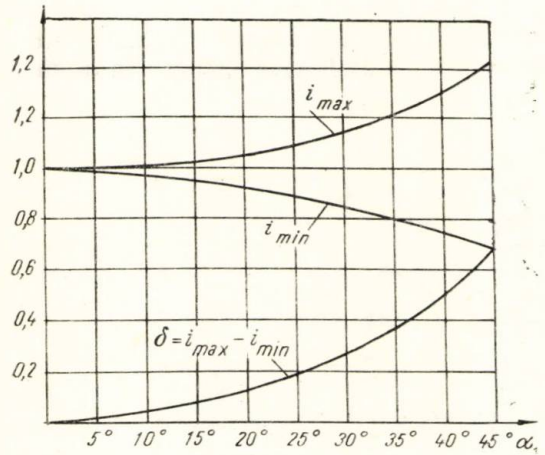

1,2
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
i_{max}
i_{min}
$\delta = i_{max} - i_{min}$
5° 10° 15° 20° 25° 30° 35° 40° 45° α_1

Fig. 14

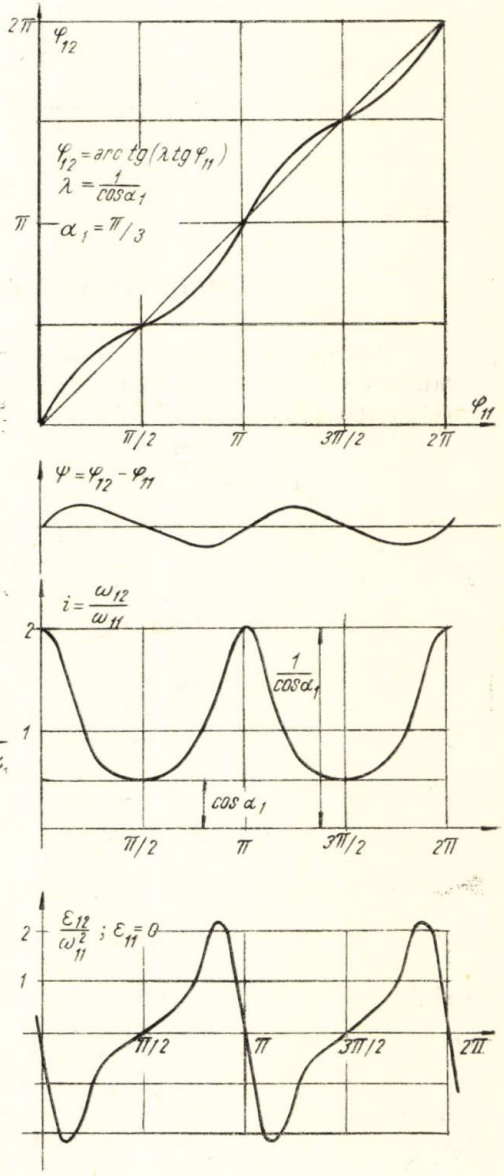

2π
φ_{12}
$\varphi_{12} = arc\,tg(\lambda\, tg\,\varphi_{11})$
$\lambda = \frac{1}{\cos\alpha_1}$
π
$\alpha_1 = \pi/3$
φ_{11}
$\pi/2$ π $3\pi/2$ 2π
$\psi = \varphi_{12} - \varphi_{11}$
$i = \frac{\omega_{12}}{\omega_{11}}$
2
1
$\frac{1}{\cos\alpha_1}$
$\cos\alpha_1$
$\pi/2$ π $3\pi/2$ 2π
$\frac{\varepsilon_{12}}{\omega_{11}^2}$; $\varepsilon_{11} = 0$
2
1
$\pi/2$ π $3\pi/2$ 2π

Fig. 15

iar în cazul particular cînd $\alpha_1 = \text{const.}$; $\omega_{11} = \text{const.}$, ținînd seama de (8), se obține

$$\dot{\omega}_{12} = \varepsilon_{12} = \frac{\dfrac{4}{\cos\alpha_1}\left(1 - \dfrac{1}{\cos^2\alpha_1}\right)\sin 2\varphi_{11}}{\left[\left(1 + \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right) + \left(1 - \dfrac{1}{\cos^2\alpha_1}\right)\cos 2\varphi_{11}\right]^2} \cdot \omega_{11}^2 . \qquad (15)$$

În figura 15 sînt reprezentate funcțiile (3), (4), (11) și (14), pentru $\alpha_1 = 60°$.

3. CINEMATICA TRANSMISIILOR CARDANICE [36] – [40]

Pentru introducerea notațiilor necesare, din lanțul cinematic al transmisiei cu n articulații cardanice se desprinde lanțul format din două articulații (fig. 16).

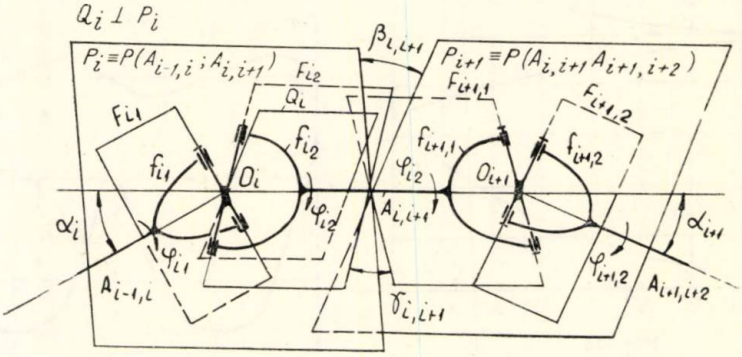


Fig. 16

În figura 16 și în continuare se adoptă notațiile:

i	— numărul de ordine al articulației cardanice ($i = 1, 2, \ldots, n$);
f_{i1}; f_{i2}	— furcile conducătoare și, respectiv, condusă ale articulației i;
$A_{i,\,i+1}$	— axa arborelui care leagă articulațiile i și $i+1$ (A_{01} și $A_{n,\,n+1}$ arbori extremi);
F_{i1}; F_{i2}	— planele furcilor f_{i1} și respectiv, f_{i2};
P_i	— planul axelor furcilor articulației i (planul de referință al articulației);
Q_i	— planul care conține axa furcii conduse f_{i2} și e perpendicular pe P_i (planul de referință al furcii conduse); cînd $F_{i1} \equiv P_i$ și $F_{i2} \equiv Q_i$;
α_i	— unghiul ascuțit între axele furcilor articulației i;

φ_{i1} — unghiul format de planul F_{i1} cu poziția sa inițială (unghiul de rotire al furcii f_{i1} în jurul axei proprii de rotație față de poziția sa inițială);

φ_{i2} — unghiul format de planul F_{i2} cu poziția sa inițială (unghiul de rotire al furcii f_{i2} în jurul axei proprii față de poziția sa inițială);

$\gamma_{i,\,i+1}$ — unghiul format de planele F_{i2} și $F_{i+1,1}$ ale furcilor f_{i2} și $f_{i+1,2}$ montate pe același arbore (defazarea furcilor);

$\beta_{i,\,i+1}$ — unghiul format de planele de referință ale articulațiilor P_i și P_{i+1} (defazarea planelor de referință = deplanare);

$\delta_{i,i+1}=\gamma_{i,i+1}-\beta_{i,i+1}$ — defazarea relativă a articulației $(i+1)$ față de articulația i.

Transmisiile la care arborii $A_{i,i+1}$, inclusiv axele furcilor extremale, se găsesc în același plan se vor numi transmisii plane, iar celelalte transmisii spațiale.

3.1. TRANSMISII BICARDANICE

Pentru stabilirea legilor generale de transmitere ale transmisiilor cardanice se va proceda de la simplu la complex, stabilind astfel și influențele parțiale ale diferiților parametri.

Atunci cînd unghiul de rotație (φ_{11}) al furcii conducătoare (f_{11}) se măsoară față de planul articulației (P_1), iar unghiul (φ_{12}) al furcii conduse (f_{12}) față de planul perpendicular pe P_1 care conține axa (A_{12}) a furcii (f_{12}) (fig. 17), legea de transmitere are forma (3), adică

$$\varphi_{12} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\cos\alpha_1}\cdot \operatorname{tg}\,\varphi_{11}\right) \text{ sau } \operatorname{tg}\varphi_{12} = \frac{1}{\cos\alpha_1}\operatorname{tg}\,\varphi_{11}. \qquad (16)$$

Se observă că, atunci cînd $\varphi_{11} = 90°$ și $\varphi_{12} = 90°$,

deci

$$\operatorname{tg}(\varphi_{12}+90°) = \frac{1}{\cos\alpha_1}\operatorname{tg}(\varphi_{11}+90°),$$

de unde rezultă că, atunci cînd sistemul de referință ales este rotit față de primul cu 90°, legea de transmitere (16) se scrie

$$\varphi_{12} = \operatorname{arc\,tg}(\cos\alpha_1 \operatorname{tg}\varphi_{11}) \text{ sau } \operatorname{tg}\varphi_{12} = \cos\alpha_1 \operatorname{tg}\varphi_{11}. \qquad (17)$$

Transmisie bicardanică plană avînd furcile arboreluï intermediar nedefazate (fig. 17). Cu aceste observații, legile de transmitere pentru

cele două articulații ale transmisiei bicardanice plane cu furcile arborelui intermediar nedefazate (fig. 17) se scriu ($\varphi_{12} = \varphi_{21}$)

$$\begin{cases} \varphi_{12} = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{\cos\alpha_1}\operatorname{tg}\varphi_{11}\right), \\ \varphi_{22} = \operatorname{arc\,tg}\left(\cos\alpha_2 \operatorname{tg}\varphi_{12}\right), \end{cases} \tag{18}$$

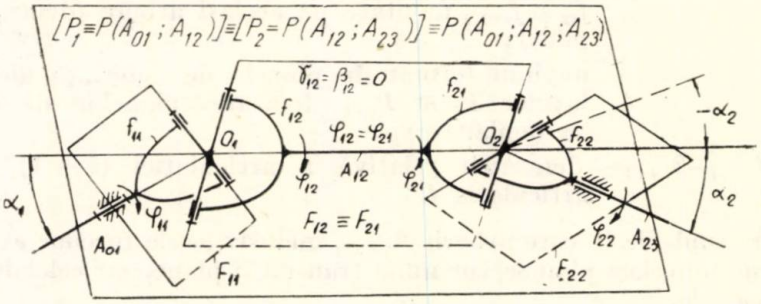


Fig. 17

de unde, eliminînd parametrul φ_{12}, rezultă legea de transmitere în cazul particular analizat ($\gamma_{12} = \beta_{12} = 0$):

$$\varphi_{22} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}\operatorname{tg}\varphi_{11}\right). \tag{19}$$

Se observă că în cazul $\alpha_1 \neq \alpha_2$ această transmisie bicardanică se comportă ca o articulație simplă în care

$$\frac{1}{\cos\alpha_1} \longrightarrow \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}.$$

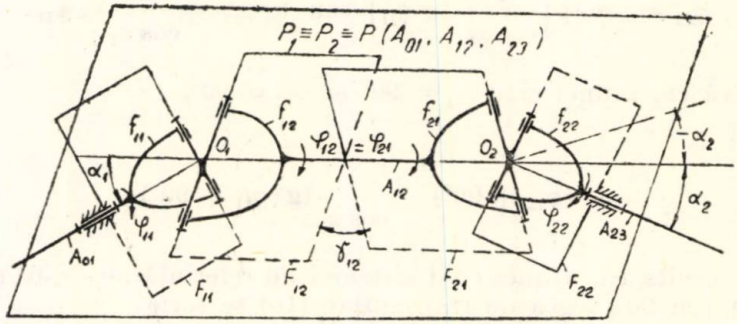


Fig. 18

Transmisie bicardanică plană cu furcile arborelui intermediar defazate (fig. 18). Pentru același sens de măsurare a unghiurilor se observă că, față de cazul anterior, furca conducătoare (f_{21}) a articulației a doua

este defazată cu γ_{12} în raport cu furca condusă (f_{12}) a primei articulații, deci, ținînd seama de observația (17), rezultă

$$\begin{cases} \varphi_{12} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\cos\alpha_1}\operatorname{tg}\varphi_{11}\right), \\ \varphi_{22} = \operatorname{arc\,tg}\left[\cos\alpha_2 \operatorname{tg}(\varphi_{12}+\gamma_{12})\right] - \operatorname{arctg}(\cos\alpha_2 \operatorname{tg}\gamma_{12}), \end{cases} \tag{20}$$

de unde, eliminînd parametrul φ_{12} ($\varphi_{12} = \varphi_{21}$), se obține legea de transmitere pentru cazul analizat ($\gamma_{12} \neq 0$; $\beta_{12} = 0$):

$$\varphi_{22} = \operatorname{arctg}\left[\frac{\cos\alpha_2(\operatorname{tg}\varphi_{11} + \cos\alpha_1 \operatorname{tg}\gamma_{12})}{\cos\alpha_1 - \operatorname{tg}\gamma_{12}\operatorname{tg}\varphi_{11}}\right] - \operatorname{arctg}(\cos\alpha_2 \operatorname{tg}\gamma_{12}) =$$

$$= G(\varphi_{11}, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_{12}). \tag{21}$$

Asincronismul mișcării se caracterizează complet prin abaterea unghiulară

$$\psi = \varphi_{22} - \varphi_{11} = G(\varphi_{11}, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_{12}) - \varphi_{11}. \tag{22}$$

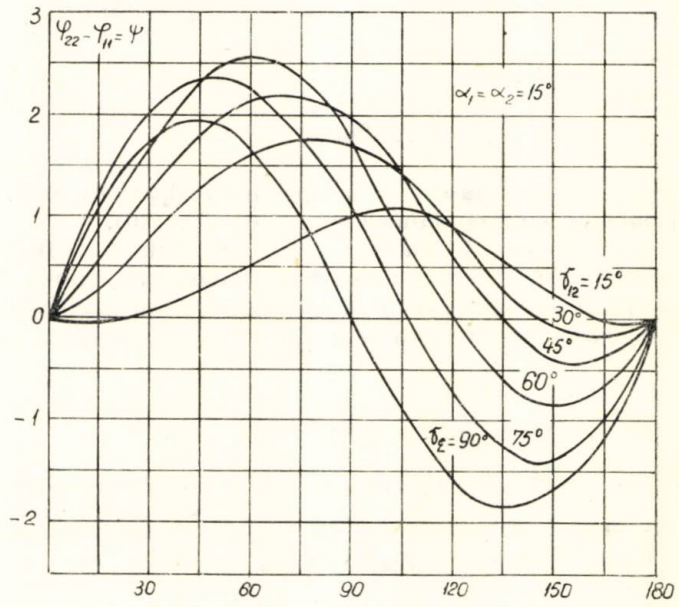


Fig. 19

În figura 19 este reprezentată variația abaterii unghiulare (22) în ipoteza $\alpha_1 = \alpha_2 = 15°$ pentru diferite defazări între furci (γ_{12}).

Impunînd $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ în relația (21), rezultă că *transmisia bicardanică plană (fig. 18), indiferent de corelația dintre unghiurile α, rămîne totdeauna asincronă dacă furcile arborelui intermediar sînt defazate* ($\gamma_{12} \neq 0$), excluzînd, evident, cazul banal $\alpha_1 = \alpha_2 = 0°$.

Se observă că pentru $\gamma_{12} = 0°$ formula (21) coincide cu (19), iar pentru $\gamma_{12} = 90°$ ea devine

$$\varphi_{22} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2} \operatorname{tg}\varphi_{11}\right), \tag{23}$$

ceea ce confirmă regula enunțată.

Transmisie bicardanică spațială cu furcile arborelui intermediar coplanare (fig. 20). În acest caz, spre deosebire de celelalte (fig. 17 și 18),

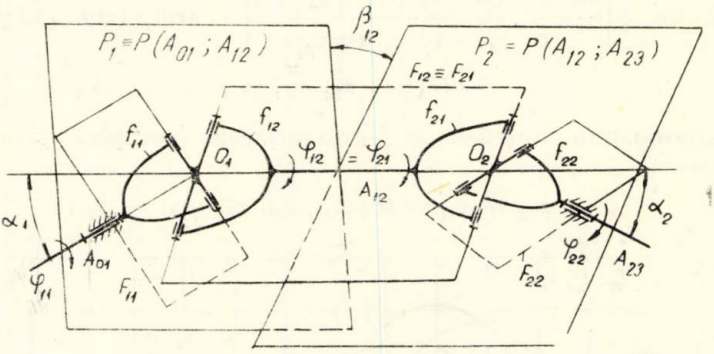


Fig. 20

axele furcilor nu se mai găsesc în același plan ($\beta_{12} \neq 0$), însă furcile arborelui intermediar sînt coplanare ($\gamma_{12} = 0$) (fig. 20).

Pentru același sens de măsurare a unghiurilor se observă că, față de cazul precedent, furca conducătoare a articulației a doua (f_{21}) rămîne în spatele planului de referință (P_2). Defazarea fiind deci negativă, legile de transmitere ale celor două articulații, scrise comparativ cu (20), sînt (fig. 20)

$$\begin{cases} \varphi_{12} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\cos\alpha_1} \operatorname{tg}\varphi_{11}\right), \\ \varphi_{22} = \operatorname{arctg}\left[\cos\alpha_2 \operatorname{tg}(\varphi_{12} - \beta_{12})\right] + \operatorname{arc\,tg}(\cos\alpha_2 \operatorname{tg}\beta_{12}), \end{cases} \tag{24}$$

de unde, eliminînd parametrul φ_{12} ($\varphi_{12} = \varphi_{21}$), se obține legea de transmitere pentru cazul analizat ($\beta_{12} \neq 0$; $\gamma_{12} = 0$):

$$\varphi_{22} = \operatorname{arctg}\left[\frac{\cos\alpha_2(\operatorname{tg}\varphi_{11} - \cos\alpha_1 \operatorname{tg}\beta_{12})}{\cos\alpha_1 + \operatorname{tg}\varphi_{11} \operatorname{tg}\beta_{12}}\right] + \operatorname{arc\,tg}(\cos\alpha_2 \operatorname{tg}\beta_{12}) =$$

$$= f(\varphi_{11}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}). \tag{25}$$

Impunînd în (25) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, se deduce că *transmisia bicardanică deplanată* ($\beta_{12} \neq 0$) *cu furcile arborelui intermediar nedefazate* ($\gamma_{12} = 0$) *este totdeauna asincronă, indiferent de corelația între unghiurile* α, excluzînd, evident, cazul banal $\alpha_1 = \alpha_2 = 0°$.

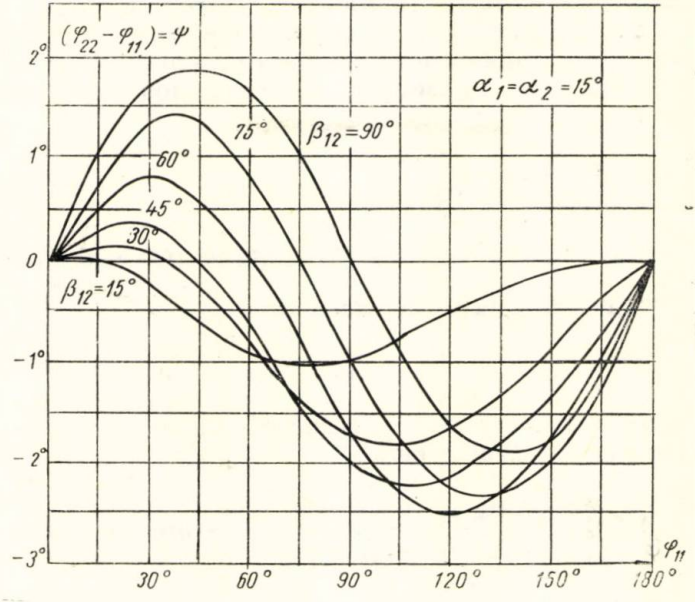


Fig. 21

Asincronismul acestei transmisii este caracterizat complet de abaterea unghiulară relativă a furcilor extreme

$$\psi = \varphi_{22} - \varphi_{11} = f(\varphi_{11}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}) - \varphi_{11}. \qquad (26)$$

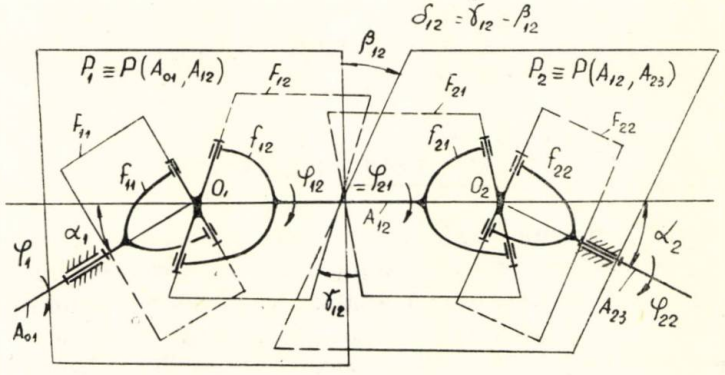


Fig. 22

În figura 21 este reprezentată variația abaterii unghiulare (26) în ipoteza $\alpha_1 = \alpha_2 = 15°$ pentru diferite valori ale deplanării β_{12}.

Comparînd graficele din figurile 19 și 21, se observă că influența defazării furcilor (γ_{12}) este asemănătoare cu cea a deplanării articulațiilor (β_{12}).

Transmisie bicardanică spațială cu furcile arborelui intermediar defazate (fig. 22). În cazul general ($\gamma_{12} \neq 0$; $\beta_{12} \neq 0$) (fig. 22) și ținînd seama de modul de influențare al defazării γ_{12} (20), (21) și al deplanării β_{12} (24), (25), legile de transmitere ale celor două articulații se scriu prin analogie:

$$\begin{cases} \varphi_{12} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\cos\alpha_1}\operatorname{tg}\varphi_{11}\right), \\ \varphi_{22} = \operatorname{arctg}\left[\cos\alpha_2 \operatorname{tg}(\varphi_{12}+\gamma_{12}-\beta_{12})\right] - \operatorname{arctg}\left[\cos\alpha_2 \operatorname{tg}(\gamma_{12}-\beta_{12})\right], \end{cases} \tag{27}$$

de unde, introducînd notația defazării totale

$$\delta_{12} = \gamma_{12} - \beta_{12}, \tag{28}$$

după eliminarea parametrului φ_{12}, rezultă legea de transmitere a transmisiei bicardanice în cazul general

$$\varphi_{22} = \operatorname{arctg}\left[\frac{\cos\alpha_2(\operatorname{tg}\varphi_{11} + \cos\alpha_1 \operatorname{tg}\delta_{12})}{\cos\alpha_1 - \operatorname{tg}\delta_{12}\operatorname{tg}\varphi_{11}}\right] - \operatorname{arc\,tg}(\cos\alpha_2 \operatorname{tg}\delta_{12}). \tag{29}$$

Legile de transmitere deduse (19), (21), (23), (25) sînt particularizări ale legii generale (29) și au fost analizate separat, pentru a desprinde modul de influențare al fiecărui parametru. Astfel, comparînd (19), (23) cu (4), (5), din figura 13 rezultă influența unghiurilor α_1 și α_2, din relațiile (21), (22) și din figura 19 rezultă influența defazării furcilor (γ_{12}), din relațiile (25), (26) și din figura 21 rezultă influența deplanării articulațiilor (β_{12}). Ținînd seama de notația (28), diferitele cazuri ale abaterilor unghiulare relative ($\psi = \varphi_{22} - \varphi_{11}$) ale furcilor extreme ale transmisiei bicardanice spațiale (deplanate) cu furcile arborelui intermediar defazate se studiază utilizînd graficele din figurile 19 și 21.

3.2. TRANSMISII TRICARDANICE

Deoarece influența unghiurilor dintre arbori (α), a defazării furcilor (γ) și a deplanării articulațiilor (β) asupra mișcării transmisiei cardanice a fost stabilită cu ocazia analizei cazurilor particulare ale transmisiei bicardanice, pentru transmisia tricardanică se va analiza numai cazul general (fig. 23), toate celelalte cazuri putînd fi analizate prin particularizare.

Se reamintește că, din cauza ortogonalității brațelor crucii cardanice, fiecare furcă conducătoare a articulației cardanice următoare este defazată față de aceeași furcă a articulației precedente cu 90°, deci legea de transmitere pentru fiecare articulație a lanțului cinematic se va scrie (ținînd seama de defazări și deplanări) alternativ sub forma (16) sau (17),

așa cum s-a procedat și în cazul transmisiilor bicardanice. Pe baza acestei observații, utilizînd notațiile din figura 23, se obține

$$\begin{cases} \varphi_{12} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\cos\alpha_1}\operatorname{tg}\varphi_{11}\right), \\ \varphi_{22} = \operatorname{arctg}\left[\cos\alpha_2\operatorname{tg}(\varphi_{12}+\delta_{12})\right] - \operatorname{arc\,tg}(\cos\alpha_2\operatorname{tg}\delta_{12}), \\ \varphi_{32} = \operatorname{arctg}\left[\dfrac{1}{\cos\alpha_3}\operatorname{tg}(\varphi_{22}+\delta_{23})\right] - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\cos\alpha_3}\operatorname{tg}\delta_{23}\right), \end{cases} \tag{30}$$

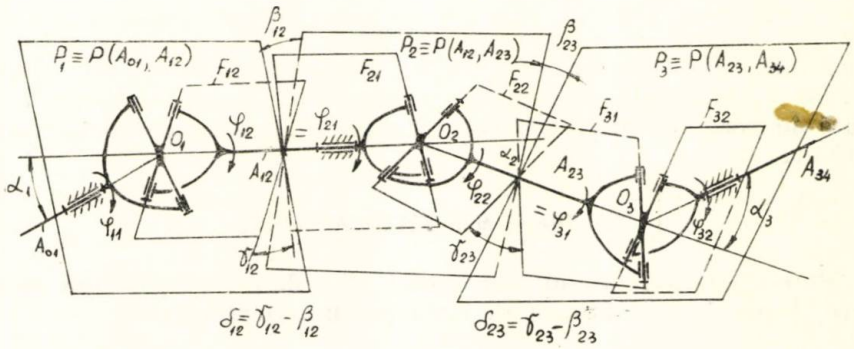


Fig. 23

de unde, prin eliminarea parametrilor φ_{12} și φ_{22}, se obține legea de transmitere a transmisiei tricardanice în cazul general

$$\varphi_{32} = \operatorname{arctg} \times$$

$$\times\left[\frac{(\cos\alpha_2 - \operatorname{tg}\delta_{12}\operatorname{tg}\delta_{23})\operatorname{tg}\varphi_{11} + \cos\alpha_1(\operatorname{tg}\delta_{12}\cos\alpha_2 + \operatorname{tg}\delta_{23})}{\cos\alpha_1\cos\alpha_3(1-\cos\alpha_2\operatorname{tg}\delta_{12}\operatorname{tg}\delta_{23}) - \cos\alpha_3(\operatorname{tg}\delta_{12}+\cos\alpha_2\operatorname{tg}\delta_{23})\operatorname{tg}\varphi_{11}}\right] -$$

$$- \operatorname{arctg}\left[\frac{\cos\alpha_2\operatorname{tg}\delta_{12} + \operatorname{tg}\delta_{23}}{\cos\alpha_3(1-\cos\alpha_2\operatorname{tg}\delta_{12}\operatorname{tg}\delta_{23})}\right] = F(\varphi_{11}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \beta_{12}, \beta_{23}). \tag{31}$$

Comparînd legile de transmitere ale articulației cardanice simple (3), transmisiei bicardanice (19), (21), (23), (25), (29) și transmisiei tricardanice (31), rezultă că legea de transmitere a mecanismului format din articulații cardanice este de forma (32)

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{a\,.\operatorname{tg}\varphi_{11} + b}{c\,.\operatorname{tg}\varphi_{11} + d}\right) - \operatorname{arctg}\frac{b}{d}. \tag{32}$$

Coeficienții a, b, c și d, pentru cîteva cazuri, sînt dați în tabela 1.

Tabela 1

	Numărul articulațiilor transmisiei		
	1	2	3
a	1	$\cos \alpha_2$	$\cos \alpha_2 - \operatorname{tg} \delta_{12} \cdot \operatorname{tg} \delta_{23}$
b	0	$\cos\alpha_1 \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \delta_{12}$	$\cos \alpha_1 (\cos \alpha_2 \operatorname{tg} \delta_{12} + \operatorname{tg} \delta_{23})$
c	0	$- \operatorname{tg} \delta_{12}$	$- \cos \alpha_3 (\operatorname{tg} \delta_{12} + \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \delta_{23})$
d	$\cos \alpha_1$	$\cos \alpha_1$	$\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 (1 - \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \delta_{12} \operatorname{tg} \delta_{23})$

Analizînd (32), se deduce că, indiferent de numărul articulațiilor, legea de transmitere a transmisiei policardanice poate totdeauna fi dezvoltată în serie Fourier, deoarece funcția (32) satisface condițiilor lui Dirichlet.

3.3. TRANSMISII TETRACARDANICE

Procedînd ca în cazul transmisiei tricardanice și păstrînd aceleași notații, legile de transmitere ale celor patru articulații sînt

$$\begin{cases} \varphi_{12} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\cos \alpha_1} \operatorname{tg} \varphi_{11}\right), \\ \varphi_{22} = \operatorname{arc\,tg}\,[\cos \alpha_2 \operatorname{tg} (\varphi_{12} + \delta_{12})] - \operatorname{arc\,tg}\,(\cos \alpha_2 \operatorname{tg} \delta_{12}), \\ \varphi_{32} = \operatorname{arc\,tg}\left[\dfrac{1}{\cos \alpha_3} \operatorname{tg} (\varphi_{22} + \delta_{23})\right] - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\cos \alpha_3} \operatorname{tg} \delta_{23}\right), \\ \varphi_{42} = \operatorname{arc\,tg}\,[\cos \alpha_4 \operatorname{tg} (\varphi_{32} + \delta_{34})] - \operatorname{arc\,tg}\,(\cos \alpha_4 \operatorname{tg} \delta_{34}), \end{cases} \tag{33}$$

de unde, eliminînd parametrii φ_{12}, φ_{22}, φ_{32}, se obține legea de transmitere a transmisiei tetracardanice în cazul general

$$\varphi_{42} = F(\varphi_{11}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{34}, \beta_{12}, \beta_{23}, \beta_{34}). \tag{34}$$

3.4. TRANSMISII POLICARDANICE [38]

Procedînd ca mai sus, în cazul general, păstrînd notațiile introduse, legile de transmitere pentru cele n articulații se scriu conform schemei din figura 24 :

$$\begin{aligned} \varphi_{12} &= \operatorname{arc\,tg}\,(\lambda_1 \operatorname{tg} \varphi_{11}), \\ \varphi_{22} &= \operatorname{arc\,tg}\,[\lambda_2 \operatorname{tg} (\varphi_{12} + \delta_{12})] - \operatorname{arc\,tg}\,(\lambda_2 \operatorname{tg} \delta_{12}), \\ \varphi_{32} &= \operatorname{arc\,tg}\,[\lambda_3 \operatorname{tg} (\varphi_{22} + \delta_{23})] - \operatorname{arc\,tg}\,(\lambda_3 \operatorname{tg} \delta_{23}), \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{42} &= \operatorname{arc\,tg}\left[\lambda_4 \operatorname{tg}\left(\varphi_{32}+\delta_{34}\right)\right]-\operatorname{arc\,tg}\left(\lambda_4 \operatorname{tg}\delta_{34}\right),\\ &\vdots\\ \varphi_{n2} &= \operatorname{arctg}\left[\lambda_n \operatorname{tg}\left(\varphi_{n-1,2}+\delta_{n-1,n}\right)\right]-\operatorname{arc\,tg}\left(\lambda_n \operatorname{tg}\delta_{n-1,n}\right),\end{aligned} \tag{35}$$

unde

$$\lambda_i = (\cos\alpha_i)^{(-1)^i}. \tag{36}$$

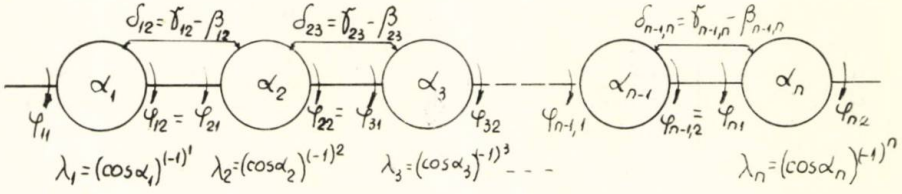


Fig. 24

Din şirul de relaţii (35) eliminînd $n-1$ parametri φ_{12}, φ_{22}, φ_{32}, ..., ..., $\varphi_{n-1,2}$, se obţine legea de transmitere pentru cazul general al transmisiei policardanice :

$$\varphi_{n2} = F(\varphi_{11}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \ldots \gamma_{n-1,n}, \beta_{12}, \beta_{23}, \ldots \beta_{n-1,n}). \tag{37}$$

3.5. CONDIŢII DE SINCRONISM ALE TRANSMISIEI POLICARDANICE

Analizînd şirul de relaţii (35), se observă că, dacă

$$\delta_{i,i+1} = \gamma_{i,i+1} - \beta_{i,i+1} = 0 \text{ sau } 90^\circ;\ i = 1, 2, -n-1, \tag{38}$$

atunci relaţiile (35) sînt de forma

$$\varphi_{i2} = \operatorname{arc\,tg}\left(\lambda_i \operatorname{tg}\varphi_{i-2,2}\right);\ i = 2, 3, \ldots, n. \tag{39}$$

În acest caz, legea de transmitere (37) va fi de forma

$$\varphi_{n2} = \operatorname{arc\,tg}\left(\lambda \operatorname{tg}\varphi_{11}\right);\ \lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \tag{40}$$

Se observă că în acest caz (38), dacă în (40) $\lambda \equiv 1$, se poate obţine transmisie policardanică sincronă ($\varphi_{n2} \equiv \varphi_{11}$). Se observă, de asemenea că, dacă defazările δ sînt peste tot ortogonale ($\delta_{i,i+1} = 90^\circ$; $i = 1, 2, \ldots n$), parametrul λ_i (36) va avea forma $\lambda_i = (\cos\alpha_i)^{-1}$. În acest caz particular rezultă

$$\lambda = \frac{1}{\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n}, \tag{41}$$

deci transmisia policardanică, cu toate defazările ortogonale, este totdeauna asincronă, ea comportîndu-se ca o articulaţie cardanică simplă (3).

4. TRANSMISII CARDANICE SINCRONE

În urma precizărilor (38) — (41) rezultă următoarea regulă importantă :

Transmisia policardanică sincronă se poate obține prin alegerea unor anumite unghiuri între axe ($\lambda \equiv 1$) *dacă defazările* δ *sînt nule sau nule și ortogonale (38), fără ca toate să fie ortogonale (41),* [38].

Numărul schemelor cinematice ale transmisiilor policardanice sincrone se determină observînd că în cazul general al transmisiei cu n articulații cardanice există $n - 1$ defazări δ și că fiecare dintre ele, conform precizărilor regulii deduse, poate lua două valori (38). În această ipoteză, numărul schemelor posibile este

$$N = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \ldots C_{n-1}^k + \ldots C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}, \qquad (42)$$

unde C_{n-1}^k este numărul schemelor cinematice ale transmisiei n cardanice avînd k articulații ortodefazate ($\delta_{i,i+1} = 90°$; $i = 1, 2, \ldots k$), iar restul nedefazate ($\delta_{i,i+1} = 0°$; $i = k, k-1, \ldots n-1$).

Excluzînd cazul (41), cînd toate defazările sînt ortogonale ($C_{n-1}^{n-1} = 1$), rezultă numărul schemelor cinematice ale transmisiilor cardanice sincrone [38] :

$$N_s = 2^{n-1} - 1. \qquad (43)$$

Conform acestei formule (43), pentru realizarea mișcării sincrone în cazul transmisiei, bicardanice există o singură posibilitate, în cazul celei tricardanice trei posibilități iar în cazul celei tetracardanice șapte posibilități.

4.1. TRANSMISIE BICARDANICĂ SINCRONĂ

Este reprezentată în figura 25 ($\delta_{12} = 0$).

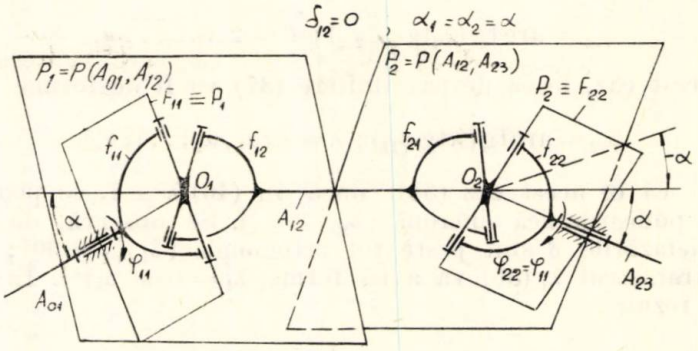


Fig. 25

Înlocuind valoarea $\delta_{12} = \gamma_{12} - \beta_{12} = 0$ în legea de transmitere pentru cazul general (29), se obține (19), deci *condiția necesară și suficientă realizării transmisiei bicardanice sincrone* (*homocinetice*) este ca

atunci cînd furca conducătoare a primei articulații se găsește în planul articulației sale ($F_{11} \equiv P_1$), furca condusă a celeilalte articulații să se găsească de asemenea în planul articulației sale ($F_{22} \equiv P_2$) și în aceste condiții unghiurile α măsurate în planele articulațiilor să fie egale (fig. 25).

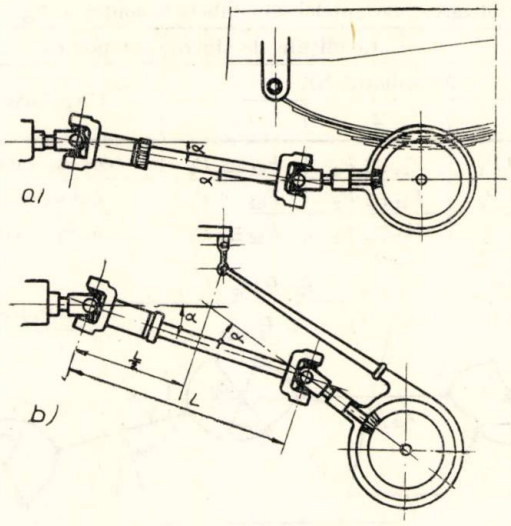


Fig. 26

În figura 26 sînt arătate două scheme sincrone utilizate în construcția de automobile.

4.2. TRANSMISII TRICARDANICE SINCRONE

Condițiile generale ale realizării mișcării sincrone pentru cele trei variante posibile (43), conform relației stabilite (31), sînt sistematizate în tabela 2 (fig. 27).

Tabela 2

Varianta	Variante ale transmisiilor tricardanice sincrone		
	Condiții de sincronism pentru		
	defazările		unghiurile α_1, α_2, α_3
	$\delta_{12} = \gamma_{12} - \beta_{12}$	$\delta_{23} = \gamma_{23} - \beta_{23}$	$\lambda = 1$
1	0°	0°	$\cos \alpha_2 = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2$
2	90°	0°	$\cos \alpha_3 = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2$
3	0°	90°	$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3$

Realizarea variantelor din tabela 2 la montaj este sistematizată în tabela 3, iar schemele obținute conform acestei tabele sînt reprezentate în figura 27.

Tabela 3

Realizarea variantelor din tabela 2 conform fig. 27

Varianta din tab. 2	Condițiile de sincronism pentru Articulația Nr. 1	2	3	Unghiurile α_1, α_2, α_3
1	$F_{11} \equiv P_1$	$F_{22} \equiv P_2$	$F_{31} \equiv P_3$	$\cos \alpha_2 = \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_3$
2	$F_{11} \equiv P_1$	$F_{21} \equiv P_2$	$F_{32} \equiv P_3$	$\cos \alpha_3 = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2$
3	$F_{11} \equiv P_1$	$F_{22} \equiv P_2$	$F_{32} \equiv P_3$	$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3$

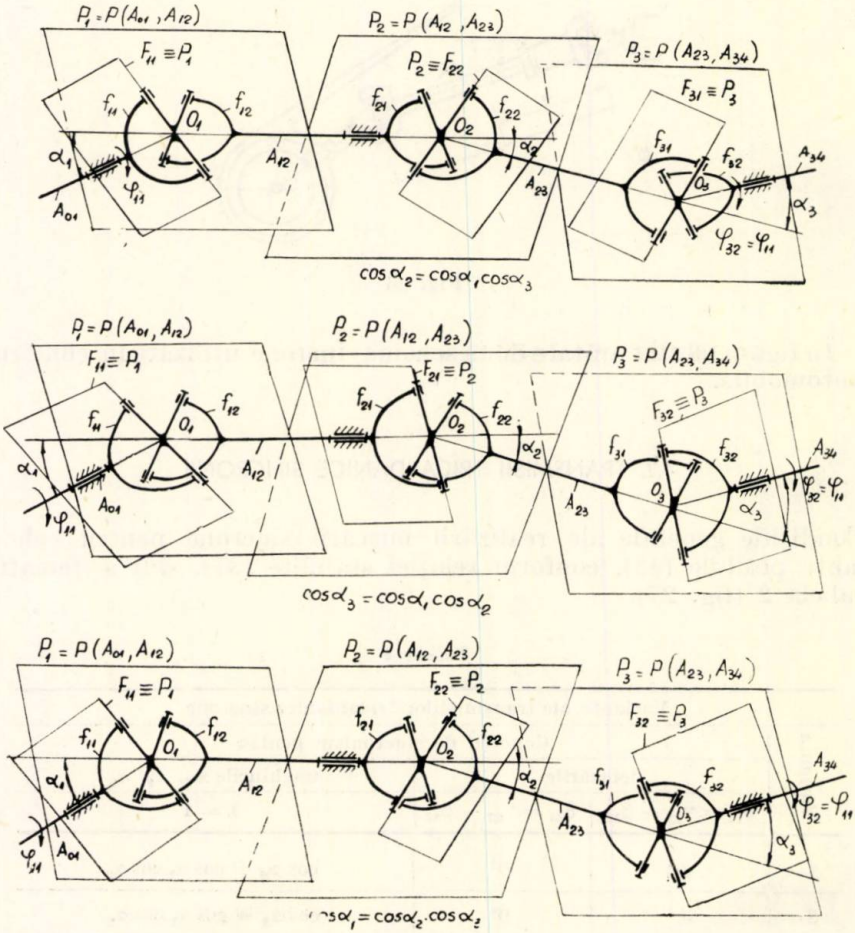


Fig. 27

4.3. TRANSMISII TETRACARDANICE SINCRONE

Condiţiile realizării mişcării sincrone pentru toate cele şapte variante posibile (43) sînt sistematizate, ţinînd seama de relaţiile (33), în tabela 4, iar realizarea variantelor din tabela 4, conform notaţiilor din figura 28, este sistematizată în tabela 5.

Tabela 4

Varianta	Variante ale transmisiilor tetracardanice sincrone			
	Condiţii de sincronism pentru			
	defazările			unghiurile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
	$\delta_{12}=\gamma_{12}-\beta_{12}$	$\delta_{23}=\gamma_{23}-\beta_{23}$	$\delta_{34}=\gamma_{34}-\beta_{34}$	$\lambda = 1$
1	0°	0°	0°	$\cos\alpha_1 \cos\alpha_3 = \cos\alpha_2 \cos\alpha_4$
2	90°	0°	0°	$\cos\alpha_3 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_4$
3	0°	90°	90°	$\cos\alpha_2 \cos\alpha_3 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_4$
4	0°	0°	90°	$\cos\alpha_2 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 \cos\alpha_4$
5	90°	90°	0°	$\cos\alpha_4 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3$
6	90°	0°	90°	$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 = \cos\alpha_3 \cos\alpha_4$
7	0°	90°	90°	$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 \cos\alpha_4$

Tabela 5

Varianta din tabela 5	Realizarea variantelor din tabela 4 conform notaţiilor din fig. 28				
	Condiţii de sincronism pentru				
	Articulaţia Nr.				unghiurile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
	1	2	3	4	
1	$F_{11} \equiv P_1$	$F_{22} \equiv P_2$	$F_{31} \equiv P_3$	$F_{42} \equiv P_4$	$\cos\alpha_1 \cos\alpha_3 = \cos\alpha_2 \cos\alpha_4$
2	$F_{11} \equiv P_1$	$F_{21} \equiv P_2$	$F_{32} \equiv P_3$	$F_{41} \equiv P_4$	$\cos\alpha_3 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_4$
3	$F_{11} \equiv P_1$	$F_{22} \equiv P_2$	$F_{32} \equiv P_3$	$F_{41} \equiv P_4$	$\cos\alpha_2 \cos\alpha_3 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_4$
4	$F_{11} \equiv P_1$	$F_{22} \equiv P_2$	$F_{31} \equiv P_3$	$F_{41} \equiv P_4$	$\cos\alpha_2 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 \cos\alpha_4$
5	$F_{11} \equiv P_1$	$F_{21} \equiv P_2$	$F_{31} \equiv P_3$	$F_{42} \equiv P_4$	$\cos\alpha_4 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3$
6	$F_{11} \equiv P_1$	$F_{21} \equiv P_2$	$F_{32} \equiv P_3$	$F_{42} \equiv P_4$	$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 = \cos\alpha_3 \cos\alpha_4$
7	$F_{11} \equiv P_1$	$F_{22} \equiv P_2$	$F_{32} \equiv P_3$	$F_{42} \equiv P_4$	$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 \cos\alpha_4$

Abaterile de la sincronism cauzează vibrații parametrice în transmisie [40]. De aceea o deosebită importanță are stabilirea parametrilor conform cerințelor de sincronism (tabelele 2 și 4).

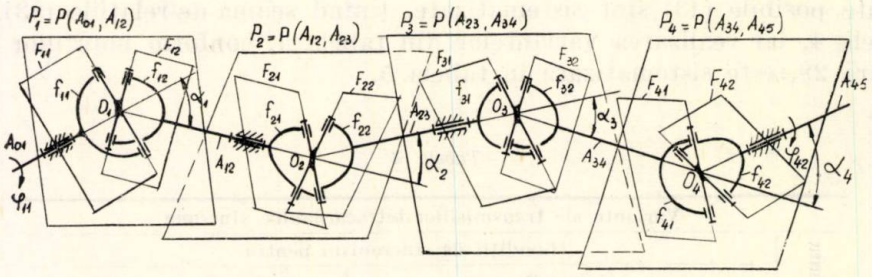


Fig. 28

5. DETERMINAREA PARAMETRILOR GEOMETRICI AI TRANSMISIEI CARDANICE SPAȚIALE

Desenul tehnic în construcția de mașini utilizează pe scară largă reprezentarea în plane de proiecție ortogonale. La proiectarea transmisiilor cardanice spațiale sincrone este necesară deci exprimarea unghiurilor între arborii legați de aceeași articulație (α) și a unghiurilor formate de planele arborilor articulațiilor (β) în funcție de proiecțiile lor pe două plane ortogonale.

Fiind date două plane perpendiculare (xoy și yoz) și o dreaptă (A) (fig. 29), între unghiurile formate de proiecțiile dreptei pe cele două plane

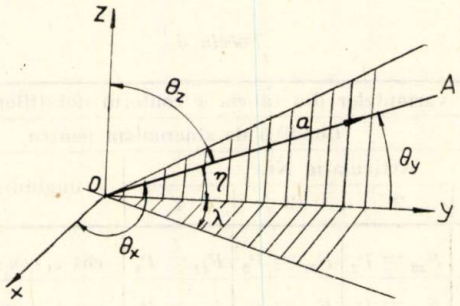


Fig. 29

cu dreapta lor de intersecție (oy) și unghiul format de dreapta dată (A) cu aceeași dreaptă de intersecție a celor două plane perpendiculare, conform notațiilor din figură, există relația

$$\operatorname{tg}^2 \theta_y = \operatorname{tg}^2 \lambda + \operatorname{tg}^2 \eta. \qquad (44)$$

Această relație este nomogramată în figura 30.

Ecuațiile dreptei A în funcție de parametrii directori l, m, n ai vectorului director a și utilizînd notațiile din figura 29

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \tag{45}$$

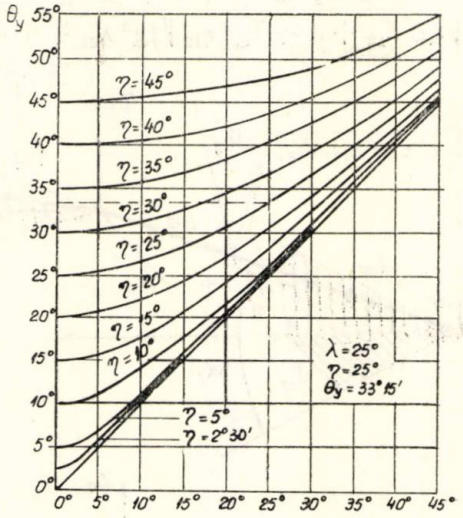


Fig. 30

se pot scrie sub una dintre formele

$$\frac{x}{\cos\theta_x} = \frac{y}{\cos\theta_y} = \frac{z}{\cos\theta_z}, \tag{46}$$

$$\frac{x}{\operatorname{tg}\lambda} = \frac{y}{1} = \frac{z}{\operatorname{tg}\eta}. \tag{47}$$

Se notează cu $\vec{a}_{i,i+1}$ vectorul director al arborelui $A_{i,i+1}$ și cu l, m, n, purtînd aceiași indici, parametrii săi directori (proiecțiile pe axele ox, oy și respectiv, oz). Pe baza observației precedente (46), (47), conform notațiilor din figura 31, ținînd seama de semne, se poate scrie

$$\begin{aligned}
&\vec{a}_{01}(l_{01},\ m_{01},\ n_{01}) \text{ sau } \vec{a}_{01}(-\operatorname{tg}\lambda_{11},\ 1,\ -\operatorname{tg}\eta_{11}),\\
&\vec{a}_{12}(l_{12},\ m_{12},\ n_{12}) \text{ sau } \vec{a}_{12}(\operatorname{tg}\lambda_{12},\ 1,\ \operatorname{tg}\eta_{12}),\\
&\vec{a}_{23}(l_{23},\ m_{23},\ n_{23}) \text{ sau } \vec{a}_{23}(\operatorname{tg}\lambda_{22},\ 1,\ \operatorname{tg}\eta_{22}).
\end{aligned} \tag{48}$$

Formulele pentru determinarea unghiurilor α_1 și α_2 ($\alpha < 90°$) atunci cînd se cunosc parametrii directori ai axelor arborilor într-un sistem de

coordonate ales se determină utilizînd cunoscuta formulă din geometria analitică. Astfel, conform notațiilor din figura 31, rezultă

$$\cos \alpha_1 = \frac{-\operatorname{tg} \lambda_{11} \cdot \operatorname{tg} \lambda_{12} + 1 - \operatorname{tg} \eta_{11} \operatorname{tg} \eta_{12}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \lambda_{11} + 1 + \operatorname{tg}^2 \eta_{11}} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \lambda_{12} + 1 + \operatorname{tg}^2 \eta_{12}}}, \tag{49}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{\operatorname{tg} \lambda_{12} \cdot \operatorname{tg} \lambda_{22} + 1 + \operatorname{tg} \eta_{12} \operatorname{tg} \eta_{22}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \lambda_{12} + 1 + \operatorname{tg}^2 \eta_{12}} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \lambda_{22} + 1 + \operatorname{tg}^2 \eta_{22}}}. \tag{50}$$

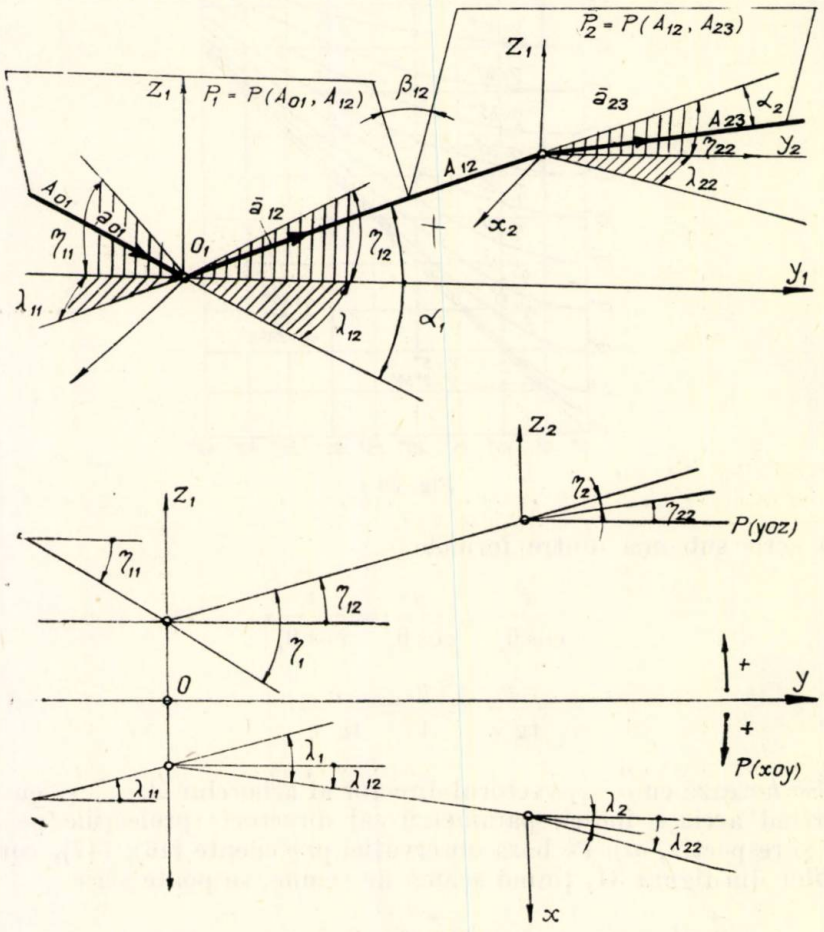


Fig. 31

Unghiul (β_{12}), format de planele articulațiilor P_1 și P_2 (fig. 31), este egal cu unghiul format de normalele lor. Vectorul director al normalei planului P_1 se notează cu $\vec{N}_1$ și se obține ca produs vectorial al vectorilor $\vec{a}_{01}$ și $\vec{a}_{12}$, iar vectorul director al normalei planului P_2 se notează cu $\vec{N}_2$ și se obține ca produs vectorial al vectorilor $\vec{a}_{12}$ și $\vec{a}_{23}$. Componentele vec-

torilor $\vec{N}_1$ şi $\vec{N}_2$ pe axele ox, oy şi oz se notează, respectiv, cu l, m, n, purtînd aceiaşi indici, deci

$$\vec{N}_1 = \vec{a}_{01} \times \vec{a}_{12} = \vec{N}_1(l_1,\ m_1,\ n_1),$$
$$\vec{N}_2 = \vec{a}_{12} \times \vec{a}_{23} = \vec{N}_2(l_2,\ m_2,\ n_2).$$

Ţinînd seama de expresiile produselor vectoriale exprimate analitic în funcţie de componentele vectorilor $\vec{a}_{01}$, $\vec{a}_{12}$, $\vec{a}_{23}$, componentele vectorilor normali pentru cazul analizat (fig. 31) au expresiile

$$l_1 = \begin{vmatrix} 1 & -\operatorname{tg}\eta_{11} \\ 1 & \operatorname{tg}\eta_{12} \end{vmatrix};\quad m_1 = \begin{vmatrix} -\operatorname{tg}\eta_{11} & -\operatorname{tg}\lambda_{11} \\ \operatorname{tg}\eta_{12} & \operatorname{tg}\lambda_{12} \end{vmatrix};\quad n_1 = \begin{vmatrix} -\operatorname{tg}\lambda_{11} & 1 \\ \operatorname{tg}\lambda_{12} & 1 \end{vmatrix},$$
$$l_2 = \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{tg}\eta_{12} \\ 1 & \operatorname{tg}\eta_{22} \end{vmatrix};\quad m_2 = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}\eta_{12} & \operatorname{tg}\lambda_{12} \\ \operatorname{tg}\eta_{22} & \operatorname{tg}\lambda_{22} \end{vmatrix};\quad n_2 = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}\lambda_{12} & 1 \\ \operatorname{tg}\lambda_{22} & 1 \end{vmatrix}. \tag{51}$$

Unghiul β_{12}, format de planele articulaţiilor (fig. 31), se determină cu formula cunoscută din geometria analitică, ţinînd seama de componentele vectorilor (51)

$$\cos\beta_{12} = \cos(\vec{N}_1,\ \vec{N}_2) = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{52}$$

Cu aceste formule, deduse în funcţie de parametrii geometrici utilizaţi în proiectare (49), (52), se uşurează realizarea practică a schemelor transmisiilor cardanice sincrone stabilite mai sus.

Primită la redacţie la 7 ianuarie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. J. Brondel, *Accouplements, joints de cardan, encliquetages*, Dunod, Paris, 1961.
2. A. H. Rzeppa, *Universal joints drives*, Machine Design, 1953.
3. A. C. Francis, *Survey of universal joints*, Engineering Materials and Design, **5**, *11* (1962).
4. Fred M. Potgieter, *Universal joints*, Machine Design, **34**, *29* (1962).
5. P. Guimbretiére, A. Treyer, *Joints mécaniques de transmission; la traction avant, le joint Tracta*, Ingénieurs de l'automobile, *4* (1964).
6. A. Furia, *Les joints mécaniques de transmission; les joints à billes Bendix*, Ingenieurs de l'automobile, *5* (1964).
7. * * * *The Garrington constant-velocity universal joint (Garrington Ltd., Bromsgrove, Worcestershire)*, Automobile Engineer (1957).
8. R. Bouchard, *Joints mécaniques de transmission*, Ingenieurs de l'automobile, *2* (1964).
9. J. Morlon, *Les joints de transmission élastiques*, Ingénieurs de l'automobile, *5* (1964).
10. G. Mollard, *Un nouvel accouplement élastique*, Méc.—électr., *162* (1963).
11. * * * *Accouplement elastique „Juboflex"*, Usine belge, **41**, *1880* (1964).
12. * * * *Hochelastische Stemin-Giubo-Kupplung*, Maschine, **18**, *1* (1964).
13. H. Stucki, *Die Bauman-Flex-Kupplung*, Tehn. Rundschau, **5b**, *16, 19, 21* (1964).
14. F. W. Lohr, *Kupplungs-Atlas (Angebotsübersicht und Neuentwicklungen auf dem Kupplungssector)*, A.G.T.—Verlag, Ludwigsburg/Württ., 1961.
15. Л.Е. Малаховски., *Карданные передачи*, Машгиз, Москва, 1962.

16. Р. Буссиен, *Автомобильный справочник* (trad. din l. germană), Машгиз, Москва, 1959.
17. * * * *Справочник инженера автомобильной промышленности* (trad. din l. engleză) том 2, Машгиз, Москва, 1963.
18. G. Pollone, *Il veicolo*, Libr. editrice universit. Levrotto & Bella, Torino, 1960.
19. R. F. Ansdale, *Transmission shaft and final drives assemblies*, Autom. Engn. *5*, *6* (1963); *5* (1964).
20. * * * *Manualul constructorului de maşini agricole*, vol. 1, Edit. tehnică, Bucureşti, 1963.
21. А. А. Гафанович, Новые карданные передачи, Техника в сельском хозяйстве, *9* (1958).
22. * * * *Cardan shaft design and performance*, Diesel Railway Tract., *14* (1960).
23. Wieland, *Gelenkwellen als Kraftübertragungselemente in Dieselschiffen und Schienenfahrzeugen sowie in ortsfesten Anlagen*, MTZ (1954).
24. — *Gelenkwellenantriebe in Schiffbau*, MTZ (1955).
25. Friedrich und Fürst, *Die Nebenbahn Diesellokomotive V. 100 der Deutschen Bundsbahn*, Glassers Annalen, *84* (1960).
26. M. Bruyére, *Nouvelles transmissions souples de puissance utilisées en aéronautique*, Ingénieurs de l'automobile, *12* (1963).
27. I. Diaconescu şi colab., *Maşini-unelte*, vol. IV, V, VI, Edit. transporturilor şi telecomunicaţiilor, Bucureşti, 1962.
28. A. I. Ţelikov, V. V. Smirnov, *Laminoare*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1961.
29. M. Adrian, *Laminarea la cald a tablelor şi a benzilor*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1963.
30. A. Schultz, *Spindelverbindungen für den Walzenantrieb*, VDI—Z, **102**, *31* (1960).
31. * * * *Справочник по кранам*, том 2, Машгиз, 1962.
32. W. Meyer zur Capellen, *Das Kreuzgelenk als periodisches Getriebe*, Werkstatt u. Betr., 91 (1958).
33. W. Steede, *The Hookes joints*, Automobile engineer, *4* (1957).
34. J. Hering, *Cardano-Gelenkwellenkupplungen*, Acta technica, Academiae Scientiarum Hungaricae, **XXI**, *3—4* (1958).
35. D. Tutunaru, M. Segărceanu, *Contribuţii la studiul mecanismelor sferice pentru acţionarea aparatelor de tăiere la maşinile de recoltat*, Constr. de maşini, 7 (1964).
36. Fl. Dudiţă, *Cinematica transmisiilor cardanice*, Metalurgia şi constr. de maşini, *9* (1960).
37. — *Dinamica transmisiei cardanice a automobilului*, Metalurg. şi constr. de maşini, *2* (1961).
38. — *Transmisii policardanice*, St. cerc. mec. apl., *1* (1962); Rev. méc. appl., *6* (1962)
39. — *Existenţa manivelei la mecanismele patrulatere sferice*, St. cerc. mec. apl., *2* (1965)

CONTRIBUȚII PRIVIND CALCULUL DIAFRAGMELOR CU GOLURI, AL DIAFRAGMELOR CUPLATE ȘI AL CADRELOR-DIAFRAGME. II[1)]

de VIRGILIU FLORIAN
Institutul de petrol, gaze și geologie

539.4

În această parte a lucrării (capitolul 3) se indică o metodă de calcul, prin încercări repetate, de îmbunătățire pînă la obținerea gradului de exactitate dorit a valorilor aproximative rezultate din calculele indicate în capitolele anterioare (partea I a lucrării).
În exemplul tratat, se continuă calculele efectuate în partea I, pentru îmbunătățirea valorilor obținute, arătîndu-se totodată modul de organizare a acestor calcule în tablouri, în general prin sumări finite.

3. ÎMBUNĂTĂȚIREA VALORILOR CUPLELOR EXTERIOARE C_{kr} ($r=1,2$) PRIN ÎNCERCĂRI REPETATE

Sub acțiunea forțelor exterioare F_{kr}, a cuplelor exterioare (introduse arbitrar) C_{kr}, precum și a forțelor exterioare $\mathfrak{F}_k^1$ (în dependență de acestea din urmă) și a forțelor axiale din buiandrugi (grinzi de cuplare), care apar o dată cu aplicarea cuplelor C_{kr}, cei doi spaleți ai sistemului de bază se deformează.

Datorită acestor deformații, în dreptul articulațiilor grinzilor de cuplare se produc, pe lîngă deplasările laterale (săgețile) y_{kr}, și deplasările u_{kr} (în lungul axelor celor doi spaleți), precum și rotirile θ_{kr} ($r = 1, 2$).

---

1) Partea I este publicată în „St. cerc. mec. apl.", **20**, *6* (1965).

Pentru a reface continuitatea grinzilor de cuplare, neglijînd deformaţiile locale, este necesar a introduce la capetele acestora cuplele L_{kr} ($r = 1, 2$), ale căror expresii sînt (fig. 8)

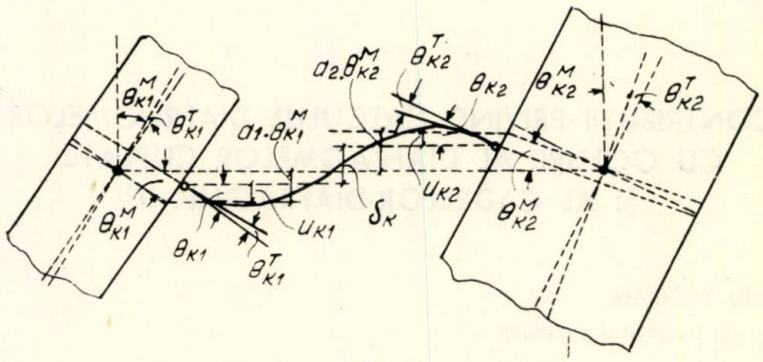


Fig. 8

$$L_{k1} = \frac{2E_g.\,k_r.}{1+0,2\Delta_g}\left[3\,\frac{a_1.\theta^M_{k1} + a_2.\theta^M_{k2} - u_{k1} - u_{k2}}{l} + \right.$$
$$\left. + 2\theta_{k1} + \theta_{k2} + (\theta_{k1} - \theta_{k2})\cdot\frac{\Delta_g}{10}\right]$$
$$L_{k2} = \frac{2E_g.\,k_r.}{1+0,2\Delta_g}\left[3\,\frac{a_1.\,\theta^M_{k1} + a_2.\,\theta^M_{k2} - u_{k1} - u_{k2}}{l} + \right. \tag{3.1}$$
$$\left. + \theta_{k1} + 2\theta_{k2} - (\theta_{k1} - \theta_{k2})\cdot\frac{\Delta_g}{10}\right],$$

precum şi forţele

$$\Phi_k = \frac{L_{k1} + L_{k2}}{l} \tag{3.1'}$$

la capetele acestora.

3.1. CALCULUL ROTIRILOR θ^M_{kr} ŞI θ_{kr}

Rotirea secţiunii k din încovoiere a unei console încărcate cu forţe concentrate echidistante (fig. 9*a*) este [9]:

$$\theta^M_k = -\frac{h}{2E.I}\cdot\left(\sum_1^k M_{j-1} + M_j\right). \tag{3.2}$$

De asemenea, rotirea din forță tăietoare este

$$\theta_k^T = -\frac{h}{2E.I}\cdot\frac{\Delta}{30}\cdot(M_{k-1} - M_k) \tag{3.3}$$

și deci rotirea totală va fi

$$\theta_k = -\frac{h}{2E.I}\cdot\left[\sum_1^k (M_{j-1} + M_j) + \frac{\Delta}{30}\cdot(M_{k-1} - M_k)\right], \tag{3.4}$$

unde

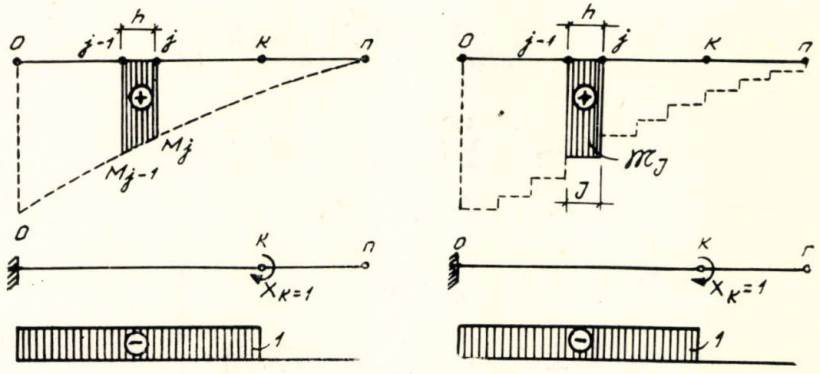


Fig. 9

$$M_j = -h.\sum_j^n F_i.(i-j) = -h.\sum_{j+1}^n\sum_i^n F_l. \tag{3.5}$$

În mod similar, din încărcarea cu cuple echidistante

$$\theta_k = \theta_k^M = -\frac{h}{E.I}\sum_1^k \mathfrak{M}_J, \tag{3.6}$$

unde $\mathfrak{M}_J$ este momentul încovoietor pe tronsonul J (între nivelele $j-1$ și j):

$$\mathfrak{M}_J = -\sum_j^n C_l. \tag{3.7}$$

În expresiile (3.5) și (3.7), forțele F_l și cuplele C_l sînt astfel dirijate, încît întind fibra superioară (sau din stînga) (fig. 10).

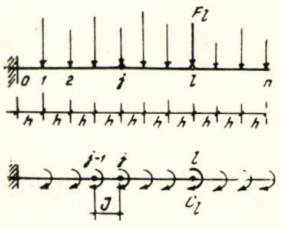


Fig. 10

În cele ce urmează vom nota cu θ_{kr}^{0M} și θ_{kr}^0 rotirile din încărcarea sistemului de bază cu forțele exterioare F_{lr} ($r = 1, 2$), căreia îi corespund momentele M'_{jr}:

$$\left.\begin{aligned} M'_{j1} &= M_{j1} + m'_j \\ M'_{j2} &= M_{j1} - m'_j \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

şi cu $\Delta\theta_{kr}^{M}$ şi $\Delta\theta_{kr}$ rotirile din încărcarea cu cuplele C_{lr} $(r = 1, 2)$, căreia îi corespund momentele suprapuse $\mathfrak{M}_J$ şi m_j''.

Conform principiului suprapunerii efectelor,

$$\left.\begin{aligned}\theta_{kr}^{M} &= \theta_{kr}^{0M} + \Delta\theta_{kr}^{M}\\ \theta_{kr} &= \theta_{kr}^{0} + \Delta\theta_{kr}\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

unde, în baza celor de mai sus,

$$\left.\begin{aligned}\theta_{kr}^{0M} &= -\frac{1}{2E_{\mathcal{D}}\cdot K_r}\cdot A_{kr}\\ \theta_{kr}^{0} &= -\frac{1}{2E_{\mathcal{D}}\cdot K_r}\left(A_{kr}+\frac{\Delta_r}{30}\cdot B_{kr}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

în care s-au notat

$$\left.\begin{aligned}A_{kr} &= \sum_{1}^{k}\left(M'_{j-1,\,r}+M'_{jr}\right)\\ B_{kr} &= M'_{k-1,\,r}-M'_{kr}\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

precum şi

$$\left.\begin{aligned}\Delta\theta_{kr}^{M} &= -\frac{1}{2E_{\mathcal{D}}\cdot K_r}\cdot \mathcal{A}_{kr}\\ \Delta\theta_{kr} &= -\frac{1}{2E_{\mathcal{D}}\cdot K_r}\cdot\left(\mathcal{A}_{kr}+\frac{\Delta_r}{30}\cdot \mathfrak{B}_{kr}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

în care s-au notat

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{A}_{kr} = \sum_{1}^{k}\mathfrak{M}'_{jr},\\ &\text{unde}\\ &\mathfrak{M}'_{jr} = 2\mathfrak{M}_{jr} \pm (m''_{j-1}+m''_{j})\\ &\mathfrak{B}_{kr} = \pm\,(m''_{k-1}-m''_{k}) = \pm\,\mathfrak{B}_{k}\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

semnul $(+)$ revenind spaletului 1 $(r = 1)$ şi semnul $(-)$, spaletului 2 $(r = 2)$.

Termenii A_{kr}, B_{kr}, $\mathcal{A}_{kr}$ şi $\mathfrak{B}_{k}$ se pot calcula prin sumări finite în tablouri, aşa cum se arată în exemplul de mai jos.

3.2. CALCULUL DEPLASĂRILOR AXIALE U_{kr}

Acestea se datoresc aplicării forţelor $\mathfrak{F}_k$ (dependente de C_{kr}), egale şi de sensuri contrare pe cei doi spaleţi.

Rezultă

$$\left.\begin{aligned}u_{k1} &= \frac{h}{E_{\mathcal{D}}\cdot A_1}\cdot\sum_{1}^{k}\sum_{j}^{n}\mathfrak{F}_i\\ u_{k2} &= \frac{h}{E_{\mathcal{D}}\cdot A_2}\cdot\sum_{1}^{k}\sum_{j}^{n}\mathfrak{F}_i.\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Deplasarea relativă dintre cele două secțiuni de la nivelul k, va fi:

$$u_k = \frac{h}{E_D} \cdot \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) \cdot Q_k. \tag{3.15}$$

unde

$$Q_k = \sum_{1}^{k} \sum_{j}^{n} \mathfrak{F}_i$$

poate fi calculat prin sumări finite.

3.3. CALCULUL CUPLELOR L_{kr}

3.3.1. *Etapa I de calcul.* Dezvoltînd relațiile (3.1) de mai sus, în baza relațiilor (3.9) rezultă

$$L_{kr} = L^0_{kr} + \Delta L_{kr}. \tag{3.16}$$

Folosind relațiile (3.10) — (3.15), după efectuarea calculelor respective se obține

$$\left.\begin{aligned} L^0_{k1} &= -\frac{E_g}{E_D} \cdot \left(\frac{1{,}5}{1 + 0{,}2\Delta_g} \cdot P_k + 0{,}5\, R_k \right) \\ L^0_{k2} &= -\frac{E_g}{E_D} \cdot \left(\frac{1{,}5}{1 + 0{,}2\Delta_g} \cdot P_k - 0{,}5\, R_k \right) \end{aligned}\right\} \tag{3,17}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} P_k &= \rho'_1 \cdot A_{k1} + \rho'_2 \cdot A_{k2} + \rho''_1 \cdot B_{k1} + \rho''_2 \cdot B_{k2} \\ R_k &= \rho_1 \cdot A_{k1} - \rho_2 \cdot A_{k2} + \rho''_1 \cdot B_{k1} - \rho''_2 \cdot B_{k2} \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

în care ρ_r și ρ'_r au expresiile date în (1.34'), iar

$$\rho''_r = \frac{\Delta_r}{30} \cdot \rho_r \qquad (r = 1,\ 2). \tag{3.19}$$

De asemenea

$$\left.\begin{aligned} \Delta L_{k1} &= -\frac{E_g}{E_D} \cdot \left(\frac{1{,}5}{1 + 0{,}2\Delta_g} \cdot \mathfrak{A}_k + 0{,}5\, \mathfrak{R}_k \right) \\ \Delta L_{k2} &= -\frac{E_g}{E_D} \cdot \left(\frac{1{,}5}{1 + 0{,}2\Delta_g} \cdot \mathfrak{A}_r - 0{,}5\, \mathfrak{R}_k \right) \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_k &= \rho'_1 \cdot \mathcal{A}_{k1} + \rho'_2 \cdot \mathcal{A}_{k2} + (\rho''_1 - \rho''_2) \cdot \mathfrak{B}_k + p \cdot Q_k \\ \mathfrak{R}_k &= \rho_1 \cdot \mathcal{A}_{k1} - \rho_2 \cdot \mathcal{A}_{k2} + (\rho''_1 + \rho''_2) \cdot \mathfrak{B}_k \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

în care

$$p = \frac{4h}{l} \cdot K_g \cdot \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right). \tag{3.22}$$

Din relaţiile (3.9) şi (3.11) se vede că L^0_{kr} sînt cuplele ce ar trebui introduse la capetele grinzilor de cuplare, pe sistemul de bază, pentru a restabili continuitatea acestora în poziţia deformată a spaleţilor încărcaţi numai cu forţele exterioare F_{kr}.

Dacă în locul grinzilor de cuplare articulate la marginile spaleţilor se consideră grinzile de cuplare fictive (fig. 11), articulate în axul spaleţilor, cuplele corespunzătoare ce ar trebui aplicate la capetele acestora pentru a restabili continuitatea vor fi

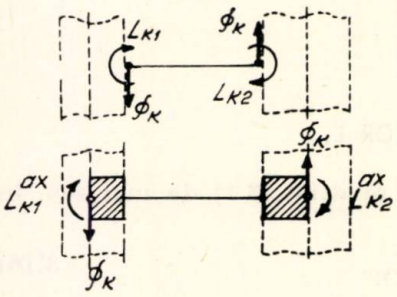


Fig. 11

$$L^{0ax}_{kr} = L^0_{kr} + \frac{a_r}{l} \cdot (L^0_{k1} + L^0_{k2}), \tag{3.23}$$

respectiv

$$L^{ax}_{kr} = L_{kr} + \frac{a_r}{l} \cdot (L_{k1} + L_{k2}). \tag{3.24}$$

Condiţiile (3), ca valorile iniţiale de calcul să fie cele reale, adică să fie egale cu salturile de moment pe diagramele reale de eforturi, devin

$$C_{kr} = L^{ax}_{kr} \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2 \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Dacă această condiţie nu este îndeplinită (în gradul de aproximaţie dorit), calculele urmează a fi continuate prin încercări repetate.

3.3.2. *Etapa a II-a (şi următoarele) de calcul.* Din expresiile (3.24) şi în baza relaţiilor (3.16), (3.20) şi celelalte anterioare se observă că, folosind notaţiile tensoriale, se poate scrie

$$L^{ax}_{kr} = \alpha^{r,q}_{kj} \cdot C_{jq} + L^{0ax}_{kl} \qquad \begin{Bmatrix} j = 1, 2, \ldots, n \\ q = 1, 2, \end{Bmatrix}, \tag{3.26}$$

unde $\alpha^{r,q}_{kj}$ sînt coeficienţii de influenţă, avînd semnificaţia obişnuită ($\alpha^{r,q}_{kj}$ este cuplul care restabileşte continuitatea grinzii de cuplare de la nivelul k la spaletul r cînd numai pe spaletul q, la nivelul j, acţionează cuplul $C_{jq} = 1$, în absenţa forţelor exterioare) şi care depind numai de structură. De asemenea L^{0ax}_{kr} depinde numai de încărcarea exterioară.

Întrucît încercările urmează a se face în mod organizat (C_{jq} sînt dependente, după o regulă oarecare, între ele), se poate scrie

$$C_{jq} = f_{jq}\,(\,C_{kr}) \tag{3.27}$$

și deci relația (3.26) devine

$$L_{kr}^{ax} = L_{kr}^{0ax} + F_{kr}\,(C_{kr}), \tag{3.28}$$

în care $F_{kr}\,(C_{kr})$ este o funcție continuă care se anulează pentru $C_{kr} = 0$.

Reprezentarea grafică a expresiei (3.28) este dată în figura 12 *a*.

Valoarea reală a cuplului $C_{kr}\,(C_{kr}^r)$ se poate deci obține prin intersectarea curbei respective cu o dreaptă la 45°.

Întrucît însă funcția $F_{kr}\,(C_{kr})$ nu se cunoaște, diagrama din figura

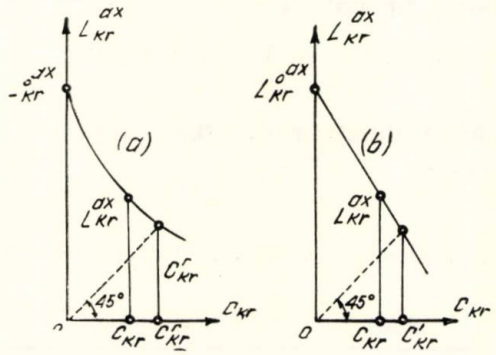


Fig. 12

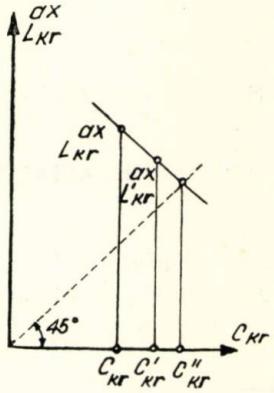


Fig. 13

12*a* nu poate fi trasată. Ea poate fi asimilată însă, într-o primă aproximație, cu o dreaptă (fig. 12 *b*), de unde rezultă valorile C_{kr}' pentru a doua încercare.

Așadar, valorile C_{kr}' pot fi determinate fie grafic, construind pe hîrtie milimetrică (cu valorile rezultate din etapa I de calcul : L_{kr}^{0ax}, C_{kr} și L_{kr}^{ax}) astfel de diagrame pentru $k = 1, 2, \ldots, n$ și $r = 1, 2$, fie analitic cu formula

$$C_{kr}' = \rho_{kr} \cdot C_{kr}, \tag{3.29}$$

unde

$$\rho_{kr} = \frac{1}{1 - \alpha_{kr}}, \qquad \alpha_{kr} = \frac{L_{kr}^{ax} - C_{kr}}{L_{kr}^{0ax}}. \tag{3.30}$$

Dacă noile valori C_{kr}' nu satisfac (în gradul de aproximație dorit) condițiile (3.25), se pot obține valorile îmbunătățite C_{kr}'', fie grafic, construind diagramele liniare (pentru $k = 1, 2, \ldots, n$ și $r = 1, 2$) din figura 13, fie analitic cu formula

$$C_{kr}'' = \rho_{kr}' \cdot C_{kr}', \tag{3.31}$$

unde

$$\rho'_{kr} = 1 + \frac{\alpha_{kr} \cdot \alpha'_{kr}}{1 - \alpha'_{kr}}, \tag{3.32}$$

$$\alpha'_{kr} = \frac{L'^{ax}_{kr} - C'_{kr}}{L^{ax}_{kr} - C_{kr}} \tag{3.33}$$

ş.a.m.d.

După cum se poate constata şi din exemplul alăturat, în general sînt suficiente două încercări.

EXEMPLU DE CALCUL

Se continuă exemplul tratat în partea I a lucrării cu :

4. ÎMBUNATĂŢIREA VALORILOR CUPLELOR C_{kr} PRIN ÎNCERCĂRI

4.1. ETAPA I DE CALCUL

a) *Calculul cuplelor* L^0_{kr}

În tabloul 5, prin sumări finite, se calculează termenii expresiilor (3.17) şi (3.18).

Tabloul 5

k	$h \cdot F_k$	$h \cdot \Sigma F_k$	M_k	M_{k1}	M_{k2}	m'_k	M'_{k1}	M'_{k2}
0	0	0	−1391,50	−483,90	−907,60	∓12,20	−496,10	−895,40
1	2,75	181,50	−1210,00	−420,78	−789,22	∓3,33	−424,11	−785,89
2	5,50	178,75	−1031,24	−358,62	−672,63	∓0,74	−359,36	−671,89
3	8,25	175,25	−858,00	−298,37	−559,63	±0,08	−298,29	−559,71
4	11,00	165,00	−693,00	−240,99	−452,01	±0,40	−240,59	−452,41
5	13,75	154,00	−539,00	−187,44	−351,56	±0,58	−186,86	−352,14
6	16,50	140,25	−398,75	−138,67	−260,08	±0,71	−137,96	−260,79
7	19,25	123,75	−275,00	−95,63	−179,37	±0,83	−94,80	−180,20
8	22,00	104,50	−170,50	−59,29	−111,21	±0,93	−58,36	−112,14
9	24,75	82,50	−88,00	−30,60	−57,40	±0,97	−29,63	−58,37
10	27,50	57,75	−30,25	−10,52	−19,73	±0,83	−9,70	−20,55
11	30,25	30,25	0	0	0	0	0	0

Tabloul 5 (continuare)

k	B_{k1}	$M'_{k-1,1} + M'_{k,2}$	A_{k1}	B_{k2}	$M'_{k-1,2} + M'_{k,2}$	A_{k2}
0	0	0	0	0	0	0
1	−71,99	−920,21	−920,21	−109,51	−1681,29	−1681,29
2	−64,75	−783,46	−1703,67	−114,00	−1457,78	−3139,07
3	−61,07	−657,65	−2361,32	−112,18	−1231,60	−4370,67
4	−57,70	−538,88	−2900,20	−107,30	−1012,12	−5382,79
5	−53,73	−427,45	−3327,65	−100,27	− 804,55	−6187,34
6	−48,90	−324,82	−3652,47	− 91,35	− 612,93	−6800,27
7	−43,16	−232,76	−3885,23	− 80,59	− 440,99	−7241,26
8	−36,44	−153,16	−4038,39	− 68,06	− 292,34	−7533,60
9	−28,73	− 87,99	−4126,38	− 53,77	− 170,51	−7704,11
10	−19,93	− 39,33	−4165,71	− 37,87	− 78,92	−7783,03
11	− 9,70	− 9,70	−4175,41	− 20,55	− 20,55	−7803,58

Tabloul 5 (continuare)

k	$\rho'_1 \cdot A_{k1}$	$\rho'_2 \cdot A_{k2}$	$\rho''_1 \cdot B_{k1}$	$\rho''_2 \cdot B_{k2}$	$\rho_1 \cdot A_{k1}$	$\rho_2 \cdot A_{k2}$	P_k	R_k	L^0_{k1}	L^0_{k2}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	− 8,93	− 7,87	−0,38	−0,40	− 3,76	− 3,66	−17,58	−0,08	26,4	26,3
2	−16,53	−14,69	−0,34	−0,42	− 6,96	− 6,84	−31,98	−0,05	48,0	48,0
3	−22,92	−20,45	−0,33	−0,41	− 9,65	− 9,52	−44,10	−0,04	66,2	66,1
4	−28,15	−25,18	−0,31	−0,39	−11,85	−11,72	−54,03	−0,04	81,1	81,0
5	−32,30	−28,94	−0,29	−0,37	−13,59	−13,48	−61,89	−0,04	92,9	92,8
6	−35,45	−31,81	−0,26	−0,34	−14,92	−14,81	−67,86	−0,03	101,8	101,8
7	−37,71	−33,88	−0,23	−0,30	−15,87	−15,77	−72,11	−0,03	108,2	108,1
8	−39,19	−35,24	−0,19	−0,25	−16,50	−16,41	−74,88	−0,03	112,3	112,3
9	−40,05	−36,04	−0,15	−0,20	−16,86	−16,78	−76,44	−0,03	114,7	114,6
10	−40,43	−36,41	−0,11	−0,14	−17,02	−16,95	−77,08	−0,03	115,6	115,6
11	−40,52	−36,51	−0,05	−0,08	−17,06	−17,00	−77,16	−0,04	115,8	115,7

b) *Calculul cuplelor* ΔL_{kr}, L_{kr}, L_{kr}^{ax}, L_{kr}^{0ax}

Se calculează termenii expresiilor (3.20) şi (3.21) în tabloul 6.

Tabloul 6

k	$2C_{k1}$	$2C_{k2}$	$2\mathfrak{M}_{k1}$	$2\mathfrak{M}_{k2}$	m_k''	$\mathfrak{B}_{k1,2}$ *	$m_{k-1}''+m_k''$ *	$\mathfrak{M}_{k1}'$	$\mathfrak{A}_{k1}$	$\mathfrak{M}_{k2}'$	$\mathfrak{A}_{k2}$
0	0	0	0	0	∓121,1	0	0	0	0	0	0
1	40,0	36,2	738,3	669,7	∓118,2	∓ 2,9	∓239,3	498,8	498,8	909,3	909,3
2	62,6	56,8	698,3	633,5	∓110,5	∓ 7,7	∓228,7	469,7	968,5	862,2	1771,5
3	76,4	69,2	635,7	576,7	∓ 99,5	∓11,0	∓210,0	425,7	1394,2	786,7	2558,1
4	82,8	75,2	559,4	507,4	∓ 86,7	∓12,8	∓186,2	373,2	1767,3	693,7	3251,8
5	84,4	76,6	476,5	432,3	∓ 73,1	∓13,6	∓159,8	316,8	2084,1	592,0	3843,8
6	82,0	74,4	392,2	355,7	∓ 59,4	∓13,7	∓132,5	259,7	2343,9	488,2	4332,0
7	76,6	69,4	310,2	281,4	∓ 46,3	∓13,1	∓105,7	204,6	2548,5	387,0	4719,0
8	69,2	63,0	233,6	211,9	∓ 34,0	∓12,3	∓ 80,3	153,4	2701,8	292,5	5011,2
9	61,6	56,0	164,1	148,9	∓ 22,7	∓11,3	∓ 56,7	107,4	2809,2	205,6	5216,8
10	54,4	49,4	102,5	93,0	∓ 12,0	∓10,7	∓ 34,7	67,8	2877,0	127,7	5344,5
11	48,2	43,6	48,2	43,6	0	∓12,0	∓ 12,0	36,1	2913,1	55,6	5400,2

Notă. Coloanele însemnate cu * se completează simultan, prin însumare, respectiv scădere, în ordinea indicată prin săgeţile $|\rightarrow$.

Tabloul 6 (continuare)

k	$\mathfrak{F}_k$	$\Sigma\,\mathfrak{F}_k$	Q_k	$P \cdot Q_k$	$\rho_1' \cdot \mathfrak{A}_{k1}$	$\rho_2' \cdot \mathfrak{A}_{k2}$	$\rho_1'' \cdot \mathfrak{B}_{k1}$	$\rho_2'' \cdot \mathfrak{B}_{k2}$	$\rho_1 \cdot \mathfrak{A}_{k1}$	$\rho_2 \cdot \mathfrak{A}_{k2}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5,5	102,1	102,1	1,52	4,84	4,25	−0,02	0,01	20,38	19,81
2	8,7	96,6	198,7	2,96	9,40	8,29	−0,04	0,03	19,19	18,78
3	10,5	87,9	287,6	4,26	13,53	11,97	−0,06	0,04	17,39	17,13
4	11,5	77,4	364,0	5,41	17,15	15,21	−0,07	0,05	15,24	15,11
5	11,7	65,9	429,9	6,39	20,23	17,98	−0,07	0,05	12,94	12,90
6	11,3	54,2	484,1	7,20	22,75	20,27	−0,07	0,05	10,61	10,63
7	10,6	42,9	527,0	7,84	24,74	22,08	−0,07	0,05	8,36	8,43
8	9,6	32,3	559,3	8,32	26,22	23,44	−0,07	0,05	6,27	6,36
9	8,5	22,7	582,0	8,66	27,27	24,40	−0,06	0,04	4,39	4,48
10	7,5	14,2	596,2	8,87	27,93	25,00	−0,06	0,04	2,77	2,78
11	6,7	6,7	602,9	8,97	28,28	25,26	−0,06	0,04	1,48	1,21

Tabloul 6 (continuare)

k	$\mathfrak{L}_k$	$\mathfrak{R}_k$	ΔL_{k1}	ΔL_{k2}	L_{k1}	L_{k2}	L_{k1}^{ax}	L_{k2}^{ax}	$L_{k1}^{0\,ax}$	$L_{k2}^{0\,ax}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	10,61	0,54	−16,2	−15,6	10,2	10,7	24,6	22,7	62,7	56,6
2	20,63	0,34	−31,1	−30,8	16,9	17,2	40,3	36,7	114,0	103,0
3	29,74	0,16	−44,7	−44,5	21,5	21,6	51,1	46,3	157,2	142,1
4	37,76	0,02	−56,6	−56,6	24,5	24,4	58,0	52,4	192,6	174,1
5	44,58	−0,08	−66,8	−66,9	26,1	25,9	61,8	55,7	220,6	199,4
6	50,19	−0,15	−75,2	−75,4	26,6	26,4	63,0	56,8	241,9	218,6
7	54,63	−0,19	−81,8	−82,0	26,4	26,1	62,3	56,2	256,9	232,3
8	57,97	−0,21	−86,8	−87,1	25,5	25,2	60,4	54,4	266,9	241,2
9	60,31	−0,19	−90,3	−90,6	24,4	24,0	57,6	51,9	272,4	246,3
10	61,78	−0,11	−92,6	−92,7	23,0	22,9	54,6	49,2	274,7	248,3
11	62,48	0,37	−93,9	−93,5	21,9	22,2	52,1	47,4	275,0	248,6

După cum se vede, cuplele L_{kr}^{ax} de refacere a continuității diferă de cuplele inițiale C_{kr}, deci condiția (3.25) nu este îndeplinită.

În consecință, încercările se continuă în etapa a II-a.

4.2. ETAPA A II-a DE CALCUL

a) *Calculul cuplelor* C'_{kr}

Acestea urmează a fi calculate cu formulele (3.29) și (3.30) în tabloul 7.

Tabloul 7

k	$L_{k1}^{ax}-C_{k1}$	α_{k1}	$1-\alpha_{k1}$	C'_{k1}	$L_{k2}^{ax}-C_{k2}$	α_{k2}	$1-\alpha_{k2}$	C'_{k2}
1	4,6	0,073	0,927	21,6	4,6	0,081	0,919	19,7
2	9,0	0,079	0,921	34,0	8,3	0,081	0,919	30,9
3	12,9	0,082	0,918	41,6	11,7	0,082	0,918	37,7
4	16,6	0,086	0,914	45,3	14,8	0,085	0,915	41,1
5	19,6	0,089	0,911	46,3	17,4	0,087	0,913	42,0
6	22,0	0,091	0,909	45,1	19,6	0,091	0,910	40,9
7	24,0	0,093	0,907	42,2	21,5	0,093	0,907	38,2
8	25,7	0,096	0,904	38,4	22,9	0,095	0,905	34,8
9	26,8	0,098	0,902	34,2	23,9	0,098	0,902	31,0
10	27,4	0,100	0,900	30,2	24,5	0,099	0,901	27,4
11	28,0	0,102	0,898	26,8	25,6	0,102	0,898	24,3

b) *Calculul momentelor* m_k''

Calculul membrului II al ecuaţiilor (4) (din etapa I de calcul) se face în tabloul 8 (similar cu tabloul 3).

Tabloul 8

k	C'_{k1}	$\mathfrak{M}_{k1}$	$\mathfrak{M}_{k1} + \mathfrak{M}_{k+1,1}$	C'_{k2}	$\mathfrak{M}_{k2}$	$\mathfrak{M}_{k2} + \mathfrak{M}_{k+1,2}$	$-0{,}1553 \cdot (\mathfrak{M}_{k1}+)$	$0{,}0829 \cdot (\mathfrak{M}_{k2}+)$	Σ
0	0	405,7	811,4	0	368,0	736,0	−126,0	61,0	−65,0
1	21,6	405,7	789,8	19,7	368,0	716,3	−122,7	59,4	−63,3
2	34,0	384,1	334,2	30,9	348,3	665,7	−114,0	55,2	−58,8
3	41,6	350,1	658,6	37,7	317,4	597,1	−102,3	49,5	−52,8
4	45,3	308,5	571,7	41,1	279,7	518,3	− 88,8	43,0	−45,8
5	46,3	263,2	480,1	42,0	238,6	435,2	− 74,6	36,1	−38,5
6	45,1	216,9	388,7	40,9	196,6	352,3	− 60,4	29,2	−31,2
7	42,2	171,8	301,4	38,2	155,7	273,2	− 46,8	22,6	−24,2
8	38,4	129,6	220,8	34,8	117,5	200,2	− 34,3	16,6	−17,7
9	34,2	91,2	148,2	31,0	82,7	134,4	− 23,0	11,1	−11,9
10	30,2	57,0	83,8	27,4	51,7	76,0	− 13,0	6,3	− 6,7
11	26,8	26,8	0	24,3	24,3	0	0	0	0

Calculele prin aproximaţii succesive se fac pe schema de transmiteri ($t = 0{,}262$) din tabloul 9.

Tabloul 9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
65,0	63,3	58,8	52,8	45,8	38,5	31,2	24,2	17,7	11,9	6,7
21,0	17,0									
21,1	80,3	21,1								
42,1	20,9	79,9	20,9							
8,3	11,0	19,3	73,7	19,3						
8,4	31,9	8,4	17,1	65,1	17,1					
16,7	7,3	27,7	7,3	14,6	55,6	14,6				
3,0	4,4	6,4	24,4	6,4	12,0	45,8	12,0			
3,1	11,7	3,1	5,5	21,0	5,5	9,5	36,2	9,5		
6,1	2,5	9,5	2,5	4,6	17,5	4,6	7,1	27,2	7,1	
1,1	1,6	2,1	8,0	2,1	3,7	14,1	3,7	5,0	19,0	5,0
1,1	4,1	1,1	1,8	6,7	1,8	2,8	10,8	2,8	3,0	11,7
2,2	0,8	3,2	0,8	1,4	5,5	1,4	2,0	7,8	2,0	
0,4	0,6	0,7	2,6	0,7	1,1	4,2	1,1	1,3	5,0	1,3
0,3	1,4	0,4	0,6	2,1	0,6	0,8	3,1	0,8	0,3	1,3
0,7	0,3	1,1	0,3	0,4	1,7	0,4	0,6	2,1	0,6	
0,1	0,2	0,2	0,9	0,2	0,3	1,2	0,3	0,2	0,9	0,2
0,1	0,5	0,1	0,2	0,6	0,2	0,2	0,9	0,2	0,1	0,2
0,2	—	0,3	0,1	0,1	0,5	0,1	0,1	0,4	0,1	
—	0,1	0,1	0,3	0,1	0,1	0,3	0,1	—	0,2	
—	0,1	—	—	0,2	—	—	0,2	—		
		0,1			0,1					
−133,0		−121,8		−95,7		−65,6		−37,5		−13,2
	−130,0		−109,9		−80,9		−51,2		−25,1	

c) *Calculul cuplelor* $\Delta L'_{kr}$, L'_{kr}, L'^{ax}_{kr}

Se procedează similar ca în etapa I de calcul, calculele fiind efectuate în tabloul 10 (similar cu tabloul 6).

Tabloul 10

k	$2C'_{k1}$	$2C'_{k2}$	$2\mathfrak{M}_{k1}$	$2\mathfrak{M}_{k2}$	m''_k	$\mathfrak{B}_{k1,2}$	$m''_{k-1}+$ $+ m''_k$	$\mathfrak{M}'_{k1}$	$\mathfrak{A}_{k1}$	$\mathfrak{M}'_{k2}$	$\mathfrak{A}_{k2}$
0	0	0	0	0	∓133,0	0	0	0	0	0	0
1	43,2	39,4	811,0	736,0	∓130,0	∓ 3,0	∓263,0	548,0	548,0	999,0	999,0
2	68,0	61,8	767,8	696,6	∓121,8	∓ 8,2	∓251,8	516,0	1064,0	948,4	1947,4
3	83,2	75,4	699,8	634,8	∓109,9	∓11,9	∓231,7	468,1	1532,1	866,5	2813,9
4	90,6	82,2	616,6	559,4	∓ 95,7	∓14,2	∓205,6	411,0	1943,1	765,0	3578,9
5	92,6	84,0	526,0	577,2	∓ 80,9	∓14,8	∓176,6	349,4	2299,5	753,8	4332,7
6	90,2	81,8	433,4	493,2	∓ 65,6	∓15,3	∓146,5	286,9	2579,4	639,7	4972,4
7	84,4	76,4	343,2	411,4	∓ 51,2	∓14,4	∓116,8	226,4	2805,8	528,2	5500,6
8	76,8	69,6	258,8	335,0	∓ 37,5	∓13,7	∓ 88,7	170,1	2975,9	423,7	5924,3
9	68,4	62,0	182,0	165,4	∓ 25,1	∓12,4	∓ 62,6	119,4	3095,3	228,0	6152,3
10	60,4	54,8	113,6	103,4	∓ 13,2	∓11,9	∓ 38,3	75,3	3170,6	141,7	6294,0
11	53,2	48,6	53,2	48,6	0	∓13,2	∓ 13,2	40,0	3210,6	61,8	6355,8

Tabloul 10 (continuare)

k	$\mathfrak{F}'_k$	$\Sigma\mathfrak{F}'_k$	Q_k	$p \cdot Q_k$	$r'_1 \cdot \mathfrak{A}_{k1}$	$r'_2 \cdot \mathfrak{A}_{k2}$	$r''_1 \cdot \mathfrak{B}_{k1}$	$r''_2 \cdot \mathfrak{B}_{k2}$	$r_1 \cdot \mathfrak{A}_{k1}$	$r_2 \cdot \mathfrak{A}_{k2}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	6,0	109,7	109,7	1,6	5,3	4,7	0	0	2,2	2,2
2	9,4	103,7	213,4	3,2	10,3	9,1	0	0	4,3	4,2
3	11,5	94,3	307,7	4,6	14,9	13,2	−0,1	0,1	6,3	6,1
4	12,5	82,8	390,5	5,8	18,9	16,7	−0,1	0,1	7,9	7,8
5	12,5	70,3	460,8	6,9	22,3	20,3	−0,1	0,1	9,4	9,4
6	12,5	57,8	518,6	7,7	25,0	23,3	−0,1	0,1	10,5	10,8
7	11,7	45,3	563,8	8,4	27,2	25,7	−0,1	0,1	11,5	12,0
8	10,6	33,6	597,5	8,9	28,9	27,7	−0,1	0,1	12,2	12,9
9	8,7	23,0	620,5	9,2	30,0	28,8	−0,1	0,1	12,6	13,4
10	7,6	14,3	634,8	9,4	30,8	29,4	−0,1	0,1	13,0	13,7
11	6,7	6,7	641,5	9,5	31,2	29,7	−0,1	0,1	13,1	13,8

Notă. $\mathfrak{F}'_k = \dfrac{C'_{k1} + C'_{k2}}{L}$.

Tabloul 10 (continuare)

k	$\mathfrak{A}_k$	$\mathfrak{B}_k$	$\Delta L'_{k1}$	$\Delta L'_{k2}$	L'_{k1}	L'_{k2}	L'^{ax}_{k1}	L'^{ax}_{k2}
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	11,6	0	17,4	17,4	9,0	8,9	21,3	19,2
2	27,6	0,1	34,0	33,9	14,0	14,1	33,3	30,2
3	32,7	0	49,1	49,1	17,1	17,0	40,5	36,7
4	41,4	−0,1	62,1	62,2	19,0	18,8	45,0	40,5
5	49,5	−0,2	74,2	74,4	18,7	18,4	44,2	39,7
6	56,0	−0,5	83,8	84,3	18,0	17,5	42,4	38,2
7	61,3	−0,7	91,6	92,3	16,6	15,8	38,9	34,5
8	65,5	−0,9	97,8	98,7	14,5	13,6	33,8	29,7
9	68,0	−1,1	101,5	102,6	13,2	12,1	30,7	26,6
10	69,6	−0,9	104,0	104,9	11,6	10,7	26,9	23,5
11	70,4	−0,9	105,2	106,1	10,6	9,8	24,5	21,4

Avînd în vedere diferențele mici între valorile C'_{kr} și L'^{ax}_{kr}, încercările se limitează aici.

5. CALCULUL MOMENTELOR ÎNCOVOIETOARE ÎN SPALEȚI

Pe baza valorilor obținute mai sus, momentele încovoietoare în spaleți sînt calculate în tabloul 11.

Tabloul 11

Tronson		Din F_{k1}		Din C_{k1}		Mom. totale (1)	Din F_{k2}		Din C_{k2}		Mom. totale (2)
		M_{k1}	m'_k	m''_k	$\mathfrak{M}_{k1}$		M_{k2}	m'_k	m''_k	$\mathfrak{M}_{k2}$	
I	*j*	−483,9	−12,2	−133,0	+405,7	−223,4	−907,6	+12,2	+133,0	+368,0	−394,4
	s	−420,8	− 3,3	−130,0	+405,7	−148,4	−789,2	+ 3,3	+130,0	+368,0	−280,7
II	*j*	−420,8	− 3,3	−130,0	+384,1	−170,0	−789,2	+ 3,3	+130,0	+348,3	−307,6
	s	−358,6	− 0,7	−121,8	+384,1	−103,3	−672,6	+ 0,7	+121,8	+348,3	−201,8
III	j	−358,6	− 0,7	−121,8	+350,1	−131,0	−672,6	+ 0,7	+121,8	+317,4	−232,7
	s	−298,4	+ 0,1	−109,9	+350,1	− 58,1	−559,6	− 0,1	+109,9	+317,4	−132,4
IV	*j*	−298,4	+ 0,1	−109,9	+308,5	− 99,7	−559,6	− 0,1	+109,9	+279,7	−170,1
	s	−241,0	+ 0,4	− 95,7	+308,6	− 27,8	−452,0	− 0,4	+ 95,7	+279,7	− 80,6
V	*j*	−241,0	+ 0,4	− 95,7	+263,2	−73,1	−452,0	− 0,4	+ 95,7	+238,6	−121,7
	s	−187,4	+ 0,6	− 80,9	+263,2	− 4,5	−351,6	− 0,6	+80,9	+238,6	− 32,7
VI	*j*	−187,4	+ 0,6	− 80,9	+216,9	− 50,8	−351,6	− 0,6	+80,9	+196,6	− 74,7
	s	−138,7	+ 0,7	− 65,6	+216,9	+13,3	−260,1	− 0,7	+ 65,6	+196,6	+ 1,4
VII	*j*	−138,7	+ 0,7	− 65,6	+171,8	+ 31,8	−260,1	− 0,7	+ 65,6	+155,7	− 39,5
	s	− 95,6	+ 0,8	− 51,2	+171,8	+ 25,8	−179,4	− 0,8	+51,2	+155,7	+ 26,7
VIII	*j*	−95,6	+ 0,8	− 51,2	+129,6	+ 16,4	−179,4	− 0,8	+51,2	+117,5	− 11,5
	s	− 59,3	+ 0,9	− 37,5	+129,6	+ 33,7	−111,2	−0,9	+ 37,5	+117,5	+ 42,9
IX	*j*	− 59,3	+ 0,9	− 37,5	+ 91,2	− 4,7	−111,2	− 0,9	+ 37,5	+ 82,7	+ 8,1
	s	− 30,6	+ 1,0	− 25,1	+ 91,2	+ 36,5	− 57,4	− 1,0	+ 25,1	+82,7	+ 49,4
X	*j*	− 30,6	− 1,0	− 25,1	+ 57,0	− 2,3	− 57,4	−1,0	+ 25,1	+ 51,7	+ 18,4
	s	− 10,5	+ 0,8	− 13,2	+ 57,0	+34,1	− 19,7	− 0,8	+ 13,2	+ 51,7	+ 44,4
XI	*j*	− 10,5	+ 0,8	− 13,2	+ 26,8	+ 3,9	− 19,7	− 0,8	+ 13,2	+ 24,3	+ 17,0
	s	0	0	0	+26,8	+ 26,8	0	0	0	+ 24,3	+ 24,3

6. OBSERVAȚII PRIVIND CALCULELE DE MAI SUS

După cum se vede din aceste calcule (tabloul 10), cuplele L'^{ax}_{kr} satisfac condiția (3.25) cu o eroare de aprox. 10%.

În consecință, valorile cuplelor C'_{kr} pot fi considerate ca valori finale ale acestor mărimi.

Momentele suplimentare din spaleți sînt m'_k din etapa I de calcul și m''_{kj} din etapa a II-a.

Forțele tăietoare în grinzile de cuplare sînt egale cu $\mathfrak{F}'_k$, iar momentele încovoietoare de la capetele acestora cu. $C'_{kr} - \frac{a_r}{L} \sum_{r=1,2} C'_{kr}$.

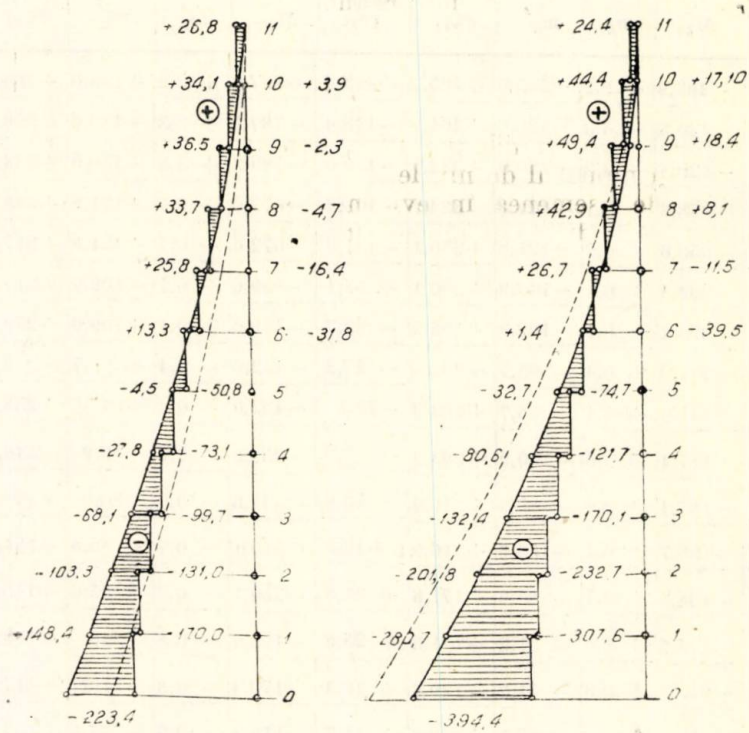


Fig. 14

Eforturile axiale din spaleți sînt $\Sigma\, \mathfrak{F}'_k$ din tabloul 10.

Față de valorile inițiale de calcul (C_{kr}), valorile finale (C'_{kr}) sînt în medie cu aprox. 10% mai mari (după cum rezultă din tabloul 7). Momentele încovoietoare însă din spaleți sînt cu mult diferite, datorită diferenței dintre rigiditățile acestora, față de situația în care încărcarea exterioară se consideră preluată de spaleți proporțional cu rigiditățile acestora. Astfel, la baza spaletelui 1 (de rigiditate mai mică), momentele cresc cu aprox. 104%, după cum rezultă din figura 14.

Într-un calcul mai puțin exact, dar îndeajuns de corect, acesta s-ar fi putut limita la determinarea valorilor inițiale C_{kr} și a momentelor suplimentare m_k.

D. CONCLUZII GENERALE

Din cele expuse mai sus, precum și din exemplul de calcul tratat, rezultă că aplicarea metodei propuse, în cazul cînd se urmărește obținerea unor rezultate mai exacte, necesită un volum de calcule relativ mare.

Totuși aceste calcule sînt simple ; ele pot fi organizate în tablouri și, se efectuează destul de rapid, în general prin sumări finite.

Astfel, calculul cifric devine mecanic, proiectantul avînd totuși permanent în atenția sa aspectul fizic al fiecărei etape de calcul.

Avantajul principal al metodei constă în faptul că, egalîndu-se doar săgețile celor doi spaleți în dreptul grinzilor de cuplare (prin neglijarea deformațiilor axiale ale acestora), aplicarea metodei este generală, fără restricții privind dimensiunile golurilor, rigiditățile elementelor verticale și orizontale sau numărul de nivele.

Se pune de asemenea în evidență supraîncărcarea spaleților (și anume a celor cu rigiditate mai mică), începînd de la baza lor (momentele m_k, determinate în cap. 2 al lucrării), față de încărcarea inițială proporțională cu rigiditățile acestora, în general admisă de unele din metodele cunoscute, atunci cînd poziția golurilor este disimetrică.

Un alt avantaj important al metodei constă în faptul că poate fi aplicată pentru orice distribuție a forțelor exterioare pe înălțime, așa cum rezultă de altfel din conlucrarea spațială a diferitelor tipuri de elemente portante verticale.

De asemenea, prin încercări repetate, se poate obține un grad mare de exactitate.

Așa-numitele valori inițiale de calcul ale momentelor încovoietoare, reduse în axul spaleților, de la capetele grinzilor de cuplare (stabilite în cap. 1 al lucrării) sînt comparabile cu valorile respective date prin metodele cunoscute, iar determinarea lor este cel puțin tot atît de simplă.

Aceste valori pot fi considerate ca definitive în cazul poziției simetrice (sau aproape simetrice) a șirului de goluri.

În cazul disimetriei, dar cu rigiditățile celor doi spaleți comparabile ca mărime, calculele pot fi limitate la cele indicate în cap. 1 și 2.

Pentru disimetrii foarte pronunțate (fig. 1c), organizarea încercărilor va fi expusă într-un număr viitor.

În cazul elementelor cu două șiruri de goluri simetrice (fig. 2), calculele se conduc în mod similar, folosind simetria. Se consideră astfel un element fictiv, rezultat din secționarea elementului real prin axul de simetrie, care se încarcă cu jumătate din sarcina totală. Rigiditatea la încovoiere a spaletelui fictiv, rezultat prin secționarea spaletelui din mijlocul elementului real, se va considera egală cu jumătate din valoarea rigidității respective a spaletelui real. Poziția axului și caracteristica relativă la forfecare a acestuia (Δ) se vor lua însă aceleași cu cele ale spaletelui

real. De asemenea, rigiditatea lui la deformații axiale trebuie considerată infinit de mare ($i_r = 0$; $u_{kr} = 0$, în formulele (1,9′), respectiv (3,14).

Momentele încovoietoare în acest spalet vor fi egale cu dublul valorilor aflate.

Notă. a) Pentru ca într-un caz concret calculele din exemplul tratat mai sus să poată servi ca orientare, se recomandă ca spaletele cu rigiditate mai mică să fie considerat în stînga (spaletul 1).

b) În calculele expuse în metoda propusă au fost luate în considerare rigiditățile la încovoiere și forța tăietoare ale tuturor elementelor verticale și orizontale (spaleți și grinzi de cuplare), precum și la întindere-compresiune numai ale elementelor verticale.

De la caz la caz vor putea fi însă neglijate caracteristicile relative la forfecare (Δ), ale elementelor verticale subțiri.

Primită la redacție la 16 august 1965

DETERMINAREA TENSIUNILOR ŞI A CUPLURILOR DE TENSIUNI GENERATE DE DISLOCAŢII ÎN MEDII IZOTROPE[1])

de C. TEODOSIU
Centrul de mecanica solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

539.3

Lucrarea se ocupă cu determinarea stării de tensiune produse de distribuţiile continue de dislocaţii în medii izotrope, finite sau infinite. Pe calea construirii unei soluţii particulare a sistemului de ecuaţii, problema determinării tensiunilor şi a cuplurilor de tensiuni generate de dislocaţii este redusă la o problemă la limită asociată pentru un mediu Cosserat cu rotaţii constrînse. Metoda prezentată este aplicată în cazul distribuţiilor uniforme de dislocaţii şi al dislocaţiilor singulare.

Apariţia cuplurilor de tensiuni ca reacţii specifice ale mediului împotriva curbărilor de structură produse de dislocaţii a fost semnalată în numeroase lucrări (vezi de ex. [1] — [4]), fără a fi elaborată însă o metodă de determinare cantitativă a lor. În lucrarea [5], E. Kröner a obţinut expresia cuplurilor de tensiuni produse de o distribuţie uniformă de dislocaţii-treaptă, prin sumarea cîmpurilor de tensiuni generate de fiecare dislocaţie izolată.

După cum a arătat pentru prima dată W. Günther [6], modelul cinematic folosit de teoria dislocaţiilor este cel al unui continuu Cosserat incompatibil. Cadrul natural al determinării tensiunilor şi a cuplurilor de tensiuni generate de dislocaţii este deci cel al continuului Cosserat. Ecuaţiile cîmpului pentru acest continuu au fost stabilite încă din 1909 de către E. şi F. Cosserat [7]. Ecuaţiile constitutive au fost elaborate însă abia în ultimii cinci ani, în lucrările [8] — [13] pentru medii Cosserat cu rotaţii constrînse şi în lucrările [14] — [17] pentru cazul general al

[1]) Publicată şi în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **1**, *1* (1966) (în limba engleză)

rotațiilor independente. Folosind sistemul complet de ecuații al continuului Cosserat, autorul a elaborat în [18] o metodă de determinare a tensiunilor și cuplurilor de tensiuni în cazul mediilor izotrope infinite.

În lucrarea de față se prezintă o nouă metodă de determinare a stării de tensiune generată de dislocații, utilizabilă și pentru corpuri finite. Soluția generală a problemei este găsită ca sumă a două componente : una dintre ele este o soluție particulară a sistemului de ecuații și, în cazul unui mediu finit, nu trebuie să satisfacă în general condițiile la limită ; a doua componentă se determină prin rezolvarea unei probleme la limită în cadrul teoriei mediilor Cosserat cu rotații constrînse și deformații compatibile, elaborate în lucrările [8] — [13]. Metoda expusă permite determinarea completă a tensiunilor și a cuplurilor de tensiuni generate de dislocații în corpuri finite sau infinite ; în încheierea lucrării, ea este aplicată la cazul distribuțiilor uniforme de dislocații și al dislocațiilor izolate.

În lucrarea de față ne vom limita la studiul mediilor izotrope și vom utiliza coordonate carteziene ortogonale. Într-o lucrare viitoare, metoda prezentată va fi extinsă la cazul mediilor anizotrope și al coordonatelor curbilinii oarecare.

1. ECUAȚIILE GEOMETRICE

Ecuația geometrică fundamentală a teoriei de continuu a dislocațiilor este, în cazul micilor deformații,

$$\in_{ikl} \partial_k \beta_{lj} = \alpha_{ij}, \tag{1.1}$$

unde α_{ij} este tensorul densității dislocațiilor[2]), β_{ij} tensorul distorsiunii elastice, $\in_{ikl}$ tensorul de ordinul trei total antisimetric, $\partial_k \equiv \partial/\partial x_k$, iar x_k reprezintă un sistem de coordonate carteziene, la care este raportat corpul în starea finală.

Tensorul asimetric β_{ij} este definit prin relația

$$\mathrm{d}u_j = \beta_{ij}\, \mathrm{d}x_i, \tag{1.2}$$

unde $\mathrm{d}u_j$ reprezintă variația distanței relative dintre două puncte a căror poziție relativă inițială este dată de $\mathrm{d}x_i$. În absența dislocațiilor ($\alpha_{ij} \equiv 0$), forma *Pfaff* (1.2) devine integrabilă și se obțin funcțiile $u_j(x_i)$, care reprezintă componentele deplasării elastice a continuului clasic.

Tensorul distorsiunii elastice poate fi descompus[3]) în partea sa simetrică, $\beta_{(ij)} \equiv \varepsilon_{ij}$, și cea antisimetrică, $\beta_{[ij]} \equiv \omega_{ij}$,

$$\beta_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}. \tag{1.3}$$

---

[2]) În lucrarea de față vom presupune că α_{ij} reprezintă o distribuție spațială de dislocații. Cazul distribuțiilor superficiale de dislocații va fi tratat în altă lucrare.

[3]) Notăm, ca de obicei,

$$\beta_{(ij)} \equiv \frac{1}{2}(\beta_{ij} + \beta_{ji}) \quad , \quad \beta_{[ij]} \equiv \frac{1}{2}(\beta_{ij} - \beta_{ji}).$$

Tensorul antisimetric ω_{ij} poate fi înlocuit la rîndul său, cu un vector ω_i prin relaţiile

$$\omega_{ij} = \in_{ijk} \omega_k \quad , \quad \omega_i = \frac{1}{2} \in_{ijk} \omega_{jk} . \tag{1.4}$$

Ţinînd seama de (1.3) şi (1.4), ecuaţia (1.1) devine

$$\in_{ikl} \partial_k \varepsilon_{lj} + \in_{ikl} \in_{ljm} \partial_k \omega_m = \alpha_{ij}$$

sau încă, ţinînd seama că $\in_{ikl} \in_{ljm} = \delta_{ij} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kj}$,

$$\in_{ikl} \partial_k \varepsilon_{lj} + \delta_{ij} \partial_m \omega_m - \partial_j \omega_i = \alpha_{ij} . \tag{1.5}$$

Introducem acum tensorul asimetric al curbărilor de structură ($\varkappa_{ij}$), definit prin relaţia

$$\varkappa_{ij} \equiv \partial_i \omega_j . \tag{1.6}$$

Ecuaţia (1.5) se mai poate scrie acum

$$\in_{ikl} \partial_k \varepsilon_{lj} + \delta_{ij} \varkappa_{mm} - \varkappa_{ji} = \alpha_{ij}, \tag{1.7}$$

de unde, prin contragere, obţinem

$$\varkappa_{mm} = \frac{1}{2} \alpha_{mm} . \tag{1.8}$$

Înlocuind (1.8) în (1.7), obţinem în cele din urmă

$$\in_{ikl} \partial_k \varepsilon_{lj} - \varkappa_{ji} = \alpha_{ij} - \frac{1}{2} \alpha_{mm} \delta_{ij} . \tag{1.9}$$

Datorită lui (1.6), curbările de structură satisfac, evident, condiţia de compatibilitate

$$\in_{ikl} \partial_k \varkappa_{lj} = 0. \tag{1.10}$$

Explicitînd pe $\varkappa_{ij}$ din (1.9)

$$\varkappa_{ij} = \frac{1}{2} \alpha_{mm} \delta_{ij} - \alpha_{ji} + \in_{jkl} \partial_k \varepsilon_{li} \tag{1.11}$$

şi înlocuind în (1.10), obţinem

$$- \in_{ikl} \in_{jmn} \partial_k \partial_m \varepsilon_{ln} = \eta_{ij} , \tag{1.12}$$

unde am utilizat notaţia lui Kröner [1]

$$\eta_{ij} \equiv - \frac{1}{2} \in_{ijk} \partial_k \alpha_{mm} - \in_{ikl} \partial_k \alpha_{jl} . \tag{1.13}$$

Se verifică uşor că partea antisimetrică a lui η_{ij} este nulă. Într-adevăr, din (1.13) obţinem succesiv

$$\eta_{[ij]} = -\frac{1}{2} \in_{ijk} \partial_k \alpha_{mm} - \frac{1}{2} \in_{ijk} \in_{krs} \in_{rpl} \partial_p \alpha_{sl} =$$

$$= -\frac{1}{2} \in_{ijk} \partial_k \alpha_{mm} - \frac{1}{2} \in_{ijk} (\delta_{kp} \delta_{sl} - \delta_{kl} \delta_{sp}) \partial_p \alpha_{sl} \equiv 0.$$

În ultima egalitate am ţinut seama de relaţia

$$\partial_p \alpha_{pl} = 0, \tag{1.14}$$

care se deduce imediat din (1.1). Acum (1.13) se mai scrie

$$\eta_{ij} \equiv \eta_{(ij)} \equiv -\frac{1}{2} (\in_{ikl} \partial_k \alpha_{jl} + \in_{jkl} \partial_k \alpha_{il}). \tag{1.15}$$

Notînd acum cu $\partial_{(i} s_{j)}$ partea compatibilă a deformaţiei ε_{ij}, definim vectorul rotaţiei incompatibile

$$\theta_i \equiv \omega_i - \frac{1}{2} \in_{ikl} \partial_k s_l, \tag{1.16}$$

care reprezintă rotaţia locală suplimentară a elementelor de volum ale mediului faţă de rotaţia medie $\frac{1}{2} \in_{ikl} \partial_k s_l$. Nu vom insista aici asupra descompunerilor lui β_{ij}, în care apare θ_i, pentru care trimitem la lucrarea [1].

Starea de deformaţie produsă de distribuţiile continue de dislocaţii va fi descrisă, ca în cazul continuului Cosserat [6], [17], de tensorul simetric al deformaţiilor ε_{ij} (6 componente), de tensorul asimetric al curbărilor de structură $\varkappa_{ij}$ (9 componente) şi de vectorul rotaţiei incompatibile θ_i (3 componente), în total de 18 funcţii[4]).

În cele ce urmează, sistemul de ecuaţii geometrice va fi format de ecuaţiile (1.9), (1.10) sau de sistemul echivalent format de ecuaţiile (1.11) şi (1.12).

2. ECUAŢIILE STATICE

Statica continuului cu dislocaţii, ca şi statica continuului Cosserat [7], este descrisă prin tensorul asimetric al tensiunilor σ_{ij} (9 componente)

[4]) Utilizăm aici denumirile consacrate în teoria dislocaţiilor ([1], [2]). În studiile consacrate mediilor Cosserat (vezi, de exemplu, [17]), ε_{ij}, $\varkappa_{ij}$ şi θ_i sînt denumite uneori deformaţii de deplasare (*Verschiebungsdeformationen*), deformaţii de rotaţie (*Verdrehungsdeformationen*) şi, respectiv, deformaţii de curbare (*Krümmungsdeformationen*).

și prin tensorul asimetric al cuplurilor de tensiuni μ_{ij} (9 componente). Ele satisfac ecuațiile de echilibru (vezi de ex. [6])

$$\partial_j \sigma_{ji} + \mathfrak{F}_i = 0, \tag{2.1}$$

$$\partial_j \mu_{ji} + 2\sigma_i + \mathfrak{M}_i = 0, \tag{2.2}$$

unde $\mathfrak{F}_i$ este vectorul forțelor masice pe unitatea volum, $\mathfrak{M}_i$ vectorul momentelor masice pe unitatea de volum, iar σ_i vectorul asociat părții antisimetrice a tensorului tensiunii

$$\sigma_{ij} = \sigma_{(ij)} + \sigma_{[ij]}, \tag{2.3}$$

$$\sigma_{[ij]} = \in_{ijk} \sigma_k \quad , \quad \sigma_i = \frac{1}{2} \in_{ijk} \sigma_{[jk]}. \tag{2.4}$$

Din (2.2) obținem

$$\sigma_i = -\frac{1}{2}(\partial_j \mu_{ji} + \mathfrak{M}_i), \tag{2.5}$$

și din (2.4),

$$\sigma_{[ij]} = -\frac{1}{2} \in_{ijk} (\partial_l \mu_{lk} + \mathfrak{M}_k). \tag{2.6}$$

Înlocuind acum în (2.1), obținem

$$\partial_j \sigma_{(ji)} + \frac{1}{2} \in_{ijk} \partial_j (\partial_l \mu_{lk} + \mathfrak{M}_k) + \mathfrak{F}_i = \mathbf{0}. \tag{2.7}$$

În cele ce urmează vom înlocui cele șase ecuații de echilibru (2.1)—(2.2) prin sistemul echivalent format de cele trei ecuații (2.7) și de cele trei ecuații (2.5).

3. ECUAȚIILE CONSTITUTIVE

Vom utiliza acum ipoteza, adoptată în general în teoria dislocațiilor, că în afara unei zone restrînse în vecinătatea fiecărei dislocații (așa-numita inimă a dislocației) sînt valabile ecuațiile constitutive ale continuului nedislocat, cu aceleași constante de material [5]). Ca urmare, vom adopta aceleași ecuații constitutive ca în cazul continuului Cosserat compatibil.

[5]) Această ipoteză este, evident, susceptibilă de corectări, de exemplu prin introducerea unor noi constante de material pentru starea de tensiune generată de dislocații, diferite de cele corespunzătoare stării de tensiune generate de forțele exterioare.

Notînd constantele de material ca în [16] şi [18], relaţiile de legătură între cele 18 mărimi statice σ_{ij}, μ_{ij} şi cele 18 mărimi geometrice ε_{ij}, $\varkappa_{ij}$, θ_i se scriu, în cazul mediilor centrosimetrice izotrope,

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2\mu\varepsilon_{(ij)}, \tag{3.1}$$

$$\sigma_i = 2\alpha\theta_i, \tag{3.2}$$

$$\mu_{(ij)} = \beta \delta_{ij} \varkappa_{mm} + 2\gamma \varkappa_{(ij)}, \tag{3.3}$$

$$\mu_i = 2\varepsilon\varkappa_i \tag{3.4}$$

sau, sub formă inversă,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{mm} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{(ij)}, \tag{3.1'}$$

$$\theta_i = \frac{1}{2\alpha} \sigma_i, \tag{3.2'}$$

$$\varkappa_{(ij)} = \frac{\beta}{3\beta + 2\gamma} \mu_{mm} \delta_{ij} + \frac{1}{2\gamma} \mu_{(ij)}, \tag{3.3'}$$

$$\varkappa_i = \frac{1}{2\varepsilon} \mu_i, \tag{3.4'}$$

unde am notat, analog cu $(2.4)_2$,

$$\varkappa_i = \frac{1}{2} \in_{ijk} \varkappa_{[jk]} \quad , \quad \mu_i = \frac{1}{2} \in_{ijk} \mu_{[jk]}. \tag{3.5}$$

După cum a arătat S. Kessel [17], constantele α, β, γ, ε se pot exprima prin relaţiile

$$2\alpha = \mu c_1, \qquad \beta = 2\mu c_3 L^2, \qquad \gamma = \mu L^2, \qquad 2\varepsilon = \mu c_2 L^2, \tag{3.6}$$

unde c_1, c_2, c_3 sînt constante de material adimensionale, iar L este o constantă de material, care are dimensiunea unei lungimi.

4. SISTEMUL COMPLET DE ECUAŢII ŞI CONDIŢII LA LIMITĂ

Geometria şi statica unui continuu cu dislocaţii sînt complet descrise prin cele 36 de cantităţi ε_{ij}, θ_i, $\varkappa_{(ij)}$, $\varkappa_i$, $\sigma_{(ij)}$, σ_i, $\mu_{(ij)}$, μ_i, care, aşa cum am văzut, trebuie să satisfacă 36 de ecuaţii, şi anume 18 ecuaţii ale cîmpului (1.11), (1.12), (2.5), (2.7) şi 18 ecuaţii constitutive (3.1)—(3.4). Pentru

uşurinţa urmăririi raţionamentelor ulterioare retranscriem aici aceste ecuaţii :

$$\varkappa_{ij} = \frac{1}{2}\,\alpha_{mm}\,\delta_{ij} - \alpha_{ji} + \in_{jkl}\,\partial_k\,\varepsilon_{li}\,, \tag{4.1}$$

$$- \in_{ikl} \in_{jmn} \partial_k\,\partial_m\,\varepsilon_{ln} = \eta_{ij}\,, \tag{4.2}$$

$$\sigma_i = -\frac{1}{2}\,(\partial_j\,\mu_{ji} + \mathfrak{M}_i), \tag{4.3}$$

$$\partial_j\,\sigma_{(ji)} + \frac{1}{2} \in_{ijk} \partial_j\,(\partial_l\,\mu_{lk} + \mathfrak{M}_k) + \mathfrak{F}_i = 0, \tag{4.4}$$

$$\sigma_{(ij)} = \lambda\delta_{ij}\,\varepsilon_{mm} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}\,, \tag{4.5}$$

$$\sigma_i = 2\alpha\theta_i\,, \tag{4.6}$$

$$\mu_{(ij)} = \beta\,\delta_{ij}\,\varkappa_{mm} + 2\gamma\varkappa_{(ij)}\,, \tag{4.7}$$

$$\mu_i = 2\,\varepsilon\varkappa_i\,. \tag{4.8}$$

În ceea ce priveşte condiţiile la limită, acestea pot fi formulate fie în tensiuni, fie în deplasări. În lucrarea de faţă vom studia cazul mediilor infinite sau al corpurilor finite mărginite de medii nerigide. Ca urmare, nu există distribuţii superficiale de dislocaţii pe frontiera corpului, iar condiţiile la limită sînt identice cu cele ale continuului Cosserat compatibil.

Pentru simplicitate vom presupune că mediul studiat este simplu-conex, fiind mărginit de o suprafaţă S netedă, pe care se dau vectorul forţelor superficiale p_i şi vectorul cuplurilor superficiale q_i. În acest caz [6]), condiţiile la limită pe S sînt

$$\sigma_{ji}\,n_j = p_i\,, \tag{4.9}$$

$$\mu_{ji}\,n_j = q_i\,, \tag{4.10}$$

unde n_j este versorul normalei exterioare la suprafaţa S.

După cum au arătat R. D. Mindlin şi H. F. Tiersten [12] şi W. T. Koiter [13], din (4.9) şi (4.10) se pot deduce, ţinînd seama de (2.6), condiţii la limită în care să intervină numai partea simetrică a tensorului tensiunii şi deviatorul tensorului cuplurilor de tensiuni. Aici menţionăm numai că, dacă se înlocuieşte (2.6) în (4.10), se obţine

$$\left[\sigma_{(ji)} + \frac{1}{2} \in_{ijk} (\partial_l\,\mu_{lk} + \mathfrak{M}_k)\right] n_j = p_i\,. \tag{4.11}$$

---

[6]) Pentru o analiză amplă a condiţiilor la limită de tip mixt şi a cazului cînd S este netedă pe porţiuni, trimitem la lucrările [12], [13].

5. DETERMINAREA TENSIUNILOR ŞI A CUPLURILOR DE TENSIUNI GENERATE DE O DENSITATE DE DISLOCAŢII DATĂ (VARIANTA I)

După cum s-a remarcat mai sus, ecuaţiile (4.1)—(4.8) şi condiţiile la limită (4.9) şi (4.10) sînt aceleaşi ca în cazul continuului Cosserat compatibil, cu excepţia termenilor $\frac{1}{2}\alpha_{mm}\,\delta_{ij} - \alpha_{ji}$ şi η_{ij}, care apar în ecuaţiile (4.1) şi, respectiv, (4.2). În cazul unei densităţi date a dislocaţiilor, aceşti termeni se calculează uşor cu ajutorul formulei (1.15). De aceea vom căuta soluţia problemei ca sumă dintre o soluţie particulară a ecuaţiilor (4.1) şi (4.2) şi, respectiv, a ecuaţiilor (4.5)—(4.8) şi o soluţie a problemei la limită pentru un mediu Cosserat compatibil cu rotaţii constrînse, care verifică ecuaţiile (4.1) şi (4.2) fără termeni suplimentari. Aşa cum vom vedea, pentru soluţia problemei la limită, p_i şi q_i se corectează cu termeni care ţin seama de valorile la limită ale tensiunilor şi cuplurilor de tensiuni corespunzătoare soluţiei particulare. După rezolvarea problemei la limită se determină σ_i şi θ_i, care nu intervin în calculele anterioare decît în mod indirect.

În acest paragraf vom indica un procedeu direct de determinare a unei soluţii particulare a ecuaţiilor (4.2), fără alte condiţii speciale. În paragraful 6 vom indica o altă metodă de determinare a unei soluţii particulare a ecuaţiilor (4.2), dar pentru care tensiunile simetrice corespunzătoare satisfac condiţia suplimentară

$$\partial_j\,\sigma_{(ji)} = 0.$$

Deşi aparent această cale este mai complicată, ea conduce la relaţii finale ceva mai simple şi, în afară de aceasta, are avantajul că soluţia particulară obţinută coincide, în ceea ce priveşte tensiunile simetrice şi deformaţiile, cu soluţia problemei de sumare a autotensiunilor dată de E. Krőner [1]. Apare în acest fel posibilitatea utilizării oricărei soluţii cunoscute pînă în prezent în teoria de continuu a dislocaţiilor, prin completarea ei cu soluţia unei probleme la limită Cosserat asociate.

A. DETERMINAREA UNEI SOLUŢII PARTICULARE A SISTEMULUI DE ECUAŢII

Vom nota o soluţie particulară a ecuaţiilor (4.2) cu ε^*_{ij} şi vom afecta toate mărimile corespunzătoare ei de asemenea cu cîte un asterisc. Vom avea deci

$$-\in_{ikl}\in_{jmn}\partial_k\,\partial_m\,\varepsilon^*_{ln} = \eta_{ij}. \tag{5.1}$$

După cum se ştie ([19], § 4), dacă pe suprafaţa S a corpului $\eta_{ij} = 0$, sau cel puţin $\eta_{ij}\,n_j = 0$, soluţia acestei ecuaţii este

$$\varepsilon^*_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\eta_{ij}(\mathbf{x}') - \eta_{lml}(\mathbf{x}')\,\delta_{ij}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,\mathrm{d}V', \tag{5.2}$$

unde am notat cu $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{x}'$ vectorii de poziţie ai punctelor de coordonate (x_1, x_2, x_3) şi respectiv (x_1', x_2', x_3'), V este domeniul ocupat de corpul elastic, iar $\mathrm{d}V' = \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \mathrm{d}x_3'$. În cazul general se poate obţine de asemenea o soluţie particulară a ecuaţiilor (5.1) cu ajutorul formulelor (5.2), dar înlocuind tensorul η_{ij} cu un alt tensor $\bar{\eta}_{ij}$, care se racordează la η_{ij} continuu şi diferenţiabil pe suprafaţa corpului şi care se anulează suficient de repede la infinit. Soluţia astfel obţinută satisface ecuaţiile (5.1) în toate punctele din interiorul şi de pe suprafaţa corpului, cu condiţia ca să luăm drept domeniu de integrare tot spaţiul.

Vom introduce acum notaţiile

$$\varkappa_{ij}^* = \frac{1}{2}\,\alpha_{mm}\,\delta_{ij} - \alpha_{ji} + \in_{jkl}\,\partial_k\,\varepsilon_{li}^*, \tag{5.3}$$

$$\sigma_{(ij)}^* = \lambda\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{mm}^* + 2\mu\,\varepsilon_{ij}^*, \tag{5.4}$$

$$\mu_{(ij)}^* = \beta\,\delta_{ij}\,\varkappa_{mm}^* + 2\gamma\varkappa_{(ij)}^*, \tag{5.5}$$

$$\mu_i^* = 2\,\varepsilon\varkappa_i^*. \tag{5.6}$$

Restrîngînd relaţiile (5.5) şi (5.6), obţinem succesiv

$$\begin{aligned}\mu_{ij}^* = \mu_{(ij)}^* + \in_{ijk}\mu_k^* = \beta\varkappa_{mm}^*\,\delta_{ij} + 2\gamma\varkappa_{(ij)}^* + 2\,\varepsilon\varkappa_{[ij]}^* = \\ = \beta\varkappa_{mm}^*\,\delta_{ij} + (\gamma + \varepsilon)\,\varkappa_{ij}^* + (\gamma - \varepsilon)\,\varkappa_{ji}^*.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Înlocuind acum (5.3) în (5.7), obţinem

$$\begin{aligned}\mu_{ij}^* = \left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right)\alpha_{mm}\,\delta_{ij} - \gamma\,(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) + \varepsilon\,(\alpha_{ij} - \alpha_{ji}) + \\ + (\gamma + \varepsilon) \in_{jkl} \partial_k\,\varepsilon_{li}^* + (\gamma - \varepsilon) \in_{ikl} \partial_k\,\varepsilon_{lj}^*.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Pentru corectarea ecuaţiilor de echilibru utilizate în rezolvarea problemei la limită este necesar să calculăm de asemenea expresiile $\partial_j\,\mu_{ji}^*$. Din (5.8) obţinem, ţinînd seama de (1.14),

$$\partial_j\,\mu_{ji}^* = \left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right)\partial_i\,\alpha_{mm} - (\gamma + \varepsilon)\,(\partial_j\,\alpha_{ij} - \in_{ikl}\,\partial_k\,\partial_j\,\varepsilon_{lj}^*). \tag{5.9}$$

Pe de altă parte, din (5.4) rezultă

$$\partial_j\,\varepsilon_{lj}^* = \frac{1}{2\mu}\,(\partial_j\,\sigma_{(jl)}^* - \lambda\partial_l\,\varepsilon_{mm}^*)$$

şi, introducînd în (5.9), obţinem

$$\partial_j\,\mu_{ji}^* = \left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right)\partial_i\,\alpha_{mm} - (\gamma + \varepsilon)\,(\partial_j\,\alpha_{ij} - \frac{1}{2\mu} \in_{ikl} \partial_k\,\partial_j\sigma_{(jl)}^*). \tag{5.10}$$

B. PROBLEMA LA LIMITĂ ASOCIATĂ

Notînd cu semnul $\sim$ mărimile obţinute prin scăderea cantităţilor cuprinse în soluţia particulară din cele totale, obţinem

$$\varepsilon_{ij} \equiv \varepsilon^*_{ij} + \tilde{\varepsilon}_{ij} \quad , \quad \varkappa_{ij} \equiv \varkappa^*_{ij} + \tilde{\varkappa}_{ij}, \tag{5.11}$$

$$\sigma_{(ij)} \equiv \sigma^*_{(ij)} + \tilde{\sigma}_{(ij)} \quad , \quad \mu_{ij} \equiv \mu^*_{ij} + \tilde{\mu}_{ij}. \tag{5.12}$$

Înlocuind acum relaţiile (5.1) şi (5.3) în (4.2) şi respectiv (4.1) şi ţinînd seama de (5.11), obţinem

$$- \in_{ikl} \in_{jmn} \partial_k \partial_m \tilde{\varepsilon}_{ln} = 0 \tag{5.13}$$

şi

$$\tilde{\varkappa}_{ij} = \in_{jkl} \partial_k \tilde{\varepsilon}_{li}. \tag{5.14}$$

Întrucît însă (5.13) reprezintă tocmai condiţiile de compatibilitate ale lui Saint-Venant, rezultă că $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ este de forma

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i \tilde{u}_j + \partial_j \tilde{u}_i), \tag{5.15}$$

unde $\tilde{u}_i$ sînt componentele vectorului deplasare al problemei Cosserat asociate. Dar atunci, din (5.14) obţinem

$$\tilde{\varkappa}_{ij} = \frac{1}{2} \in_{jkl} \partial_i \partial_k \tilde{u}_l \tag{5.16}$$

şi deci

$$\tilde{\varkappa}_{mm} = 0. \tag{5.17}$$

Înlocuind acum relaţiile (5.4), (5.6) în (4.4)—(4.8) şi ţinînd seama de (5.12), obţinem

$$\partial_j \tilde{\sigma}_{(ji)} + \frac{1}{2} \in_{ijk} \partial_j (\partial_l \tilde{\mu}_{lk} + \tilde{\mathfrak{M}}_k) + \tilde{\mathfrak{F}}_i = 0 \tag{5.18}$$

$$\tilde{\sigma}_{(ij)} = \lambda \delta_{ij} \tilde{\varepsilon}_{mm} + 2\mu \tilde{\varepsilon}_{ij}, \tag{5.19}$$

$$\tilde{\mu}_{ij} = 2\gamma \tilde{\varkappa}_{(ij)} + 2\varepsilon \tilde{\varkappa}_{[ij]} = (\gamma + \varepsilon) \tilde{\varkappa}_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \tilde{\varkappa}_{ji}, \tag{5.20}$$

$$\tilde{\mu}_{mm} = 0. \tag{5.21}$$

unde am introdus notaţiile

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{F}}_i &\equiv \mathfrak{F}_i + \partial_j \sigma^*_{(ji)}, \\ \tilde{\mathfrak{M}}_i &\equiv \mathfrak{M}_i - (\gamma + \varepsilon) (\partial_j \alpha_{ij} - \frac{1}{2\mu} \in_{ikl} \partial_k \partial_j \sigma^*_{(jl)}). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Înlocuind (5.15) şi (5.16) în (5.18) prin intermediul ecuaţiilor constitutive (5.19) şi (5.20), obţinem ecuaţiile de echilibru în deplasări

$$\mu\Delta\widetilde{u}_i+(\lambda+\mu)\partial_i\partial_j\widetilde{u}_j+\frac{1}{4}(\gamma+\varepsilon)\Delta(\partial_i\partial_j\widetilde{u}_j-\Delta\widetilde{u}_i)+\widetilde{\mathfrak{F}}_i+\frac{1}{2}\in_{ijk}\partial_j\widetilde{\mathfrak{M}}_k=0. \quad (5.23)$$

În sfîrşit, condiţiile la limită (4.11) şi (4.10) devin

$$\left[\widetilde{\sigma}_{(ji)}+\frac{1}{2}\in_{ijk}(\partial_l\widetilde{\mu}_{lk}+\mathfrak{M}_k)\right]n_j=\widetilde{p}_i, \quad (5.24)$$

$$\widetilde{\mu}_{ji}\,n_j=\widetilde{q}_i,$$

cu notaţiile

$$\widetilde{p}_i\equiv p_i-\sigma^*_{(ji)}\,n_j, \qquad \widetilde{q}_i\equiv q_i-\mu^*_{ji}\,n_j. \quad (5.25)$$

Ţinînd seama că datorită lui (5.21) tensorul μ_{ij} este un deviator, se observă că ecuaţiile (5.15)—(5.21) şi condiţiile la limită (5.24) coincid, abstracţie făcînd de notaţii, cu cele ale continuului Cosserat compatibil cu rotaţii constrînse [7]). Prin urmare, pentru rezolvarea problemei la limită asociate se pot utiliza metodele de rezolvare a problemelor la limită pentru medii Cosserat cu rotaţii constrînse, aşa cum sînt ele prezentate în [8]—[13]. De exemplu, se pot utiliza reprezentările vectorului deplasării $\widetilde{u}_i$ cu ajutorul funcţiilor de tensiune introduse în [12], § 11, care generalizează reprezentările date de Neuber, Papkovici şi Galerkin în teoria clasică a elasticităţii. Menţionăm doar că în absenţa forţelor şi a momentelor masice, ecuaţiile pe care le satisfac funcţiile de tensiune devin mult mai simple. Pe de altă parte, cazul general se poate reduce totdeauna la cazul absenţei forţelor şi momentelor masice, găsind o soluţie particulară a ecuaţiilor

$$\partial_j\widetilde{\sigma}_{(ji)}+\widetilde{F}_i=0, \quad (5.26)$$

unde am notat

$$\widetilde{F}_i\equiv\widetilde{\mathfrak{F}}_i+\frac{1}{2}\in_{ijk}\partial_j\widetilde{\mathfrak{M}}_k. \quad (5.27)$$

Dar, aşa cum a arătat M. E. Gurtin [20], se poate construi totdeauna o soluţie particulară a ecuaţiilor (5.26), în condiţii de regularitate destul de largi pentru funcţiile $\widetilde{F}_i$, cu ajutorul unui potenţial newtonian iterat, utilizînd formulele

$$\widetilde{\sigma}_{(ji)}=\Delta(\partial_i\psi_j+\partial_j\psi_i)-\partial_i\partial_j\partial_k\psi_k,$$

$$\Delta\Delta\,\psi_k=-\widetilde{F}_i,$$

$$\psi_k(\mathbf{x})=-\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\rho_k(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,dV', \qquad \rho_k(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\widetilde{F}_k(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,dV'.$$

[7]) Vezi, de exemplu, [13], § 4.

Prin urmare, în rezolvarea problemei la limită asociate, putem presupune de la început că ecuaţiile (5.23) sînt omogene şi deci

$$\mu\Delta\tilde{u}_i + (\lambda + \mu)\partial_i\,\partial_j\tilde{u}_j + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\,\Delta\,(\partial_i\,\partial_j\,\tilde{u}_j - \Delta\tilde{u}_i) = 0, \quad (5.28)$$

cu condiţia modificării corespunzătoare a condiţiilor la limită.

C. DETERMINAREA TENSIUNILOR ANTISIMETRICE ŞI A ROTIRILOR INCOMPATIBILE

După rezolvarea problemei la limită asociate, tensiunile antisimetrice şi rotirile incompatibile rezultă imediat din formulele (4.3) şi (4.6):

$$\sigma_i = -\frac{1}{2}(\partial_j\,\mu_{ji} + \mathfrak{M}_i) = -\frac{1}{2}(\partial_j\,\tilde{\mu}_{ji} + \tilde{\mathfrak{M}}_i), \quad (5.29)$$

$$\theta_i = \frac{1}{2\alpha}\sigma_i. \quad (5.30)$$

După cum se vede, σ_i şi θ_i nu se anulează decît în absenţa momentelor masice şi dacă divergenţa tensorului cuplurilor de tensiuni este nulă.

Putem da acum o demonstraţie imediată a unicităţii soluţiei construite mai sus. Într-adevăr, diferenţa a două soluţii oarecare ale sistemului de ecuaţii (4.1)—(4.8) şi ale condiţiilor la limită (4.9), (4.10) va satisface ecuaţiile (5.14)—(5.21) şi condiţiile la limită ale continuului Cosserat compatibil cu rotaţii constrînse, în care funcţiile $\mathfrak{F}_i$, $\mathfrak{M}_i$, $\tilde{p}_i$ şi $\tilde{q}_i$ sînt acum identic nule. Dar, după cum au arătat R. D. Mindlin şi H. F. Tiersten [12], precum şi W. T. Koiter [13], dacă potenţialul elastic este o formă pătratică omogenă, pozitiv definită, o soluţie de acest fel trebuie să fie identic nulă în interiorul şi pe suprafaţa corpului elastic. Prin aceasta însă, unicitatea soluţiei problemei la limită, formulată în § 5, este complet demonstrată.

6. DETERMINAREA TENSIUNILOR ŞI A CUPLURILOR DE TENSIUNI GENERATE DE O DENSITATE DE DISLOCAŢII DATĂ (VARIANTA II)

Aşa cum am menţionat la începutul paragrafului precedent, putem căuta o soluţie particulară a ecuaţiilor (4.2) pentru care tensiunile simetrice corespunzătoare au divergenţa nulă, deci care satisface ecuaţiile

$$-\in_{ikl}\in_{jmn}\partial_k\,\partial_m\,\varepsilon^*_{ln} = \eta_{ij}, \quad (6.1)$$

$$\varepsilon^*_{ij} = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\sigma^*_{mm}\,\delta_{ij} + \frac{1}{2\mu}\sigma^*_{(ij)} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma^*_{(ij)} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma^*_{hh}\,\delta_{ij}\right), \quad (6.2)$$

$$\partial_j\,\sigma^*_{(ji)} = 0, \quad (6.3)$$

unde ν este coeficientul lui Poisson.

Găsirea unei soluții particulare a sistemului (6.1)—(6.3) se poate face prin metoda elaborată de E. Kröner [1] pentru determinarea tensiunilor generate de dislocații în medii infinite. Rezumăm aici procedeul de utilizare a acestei metode.

Ecuațiile (6.3) sînt identic satisfăcute în cazul corpului simplu-conex dacă utilizăm binecunoscuta substituție cu funcții de tensiune a lui Beltrami

$$\sigma^*_{(ij)} = - \in_{ikl} \in_{jmn} \partial_k \partial_m \chi_{ln}, \tag{6.4}$$

unde χ_{ij} este un tensor simetric. După cum se știe, întrucît $\sigma^*_{(ij)}$ nu are decît trei grade funcționale de libertate, funcțiile χ_{ij} pot fi supuse la trei condiții suplimentare, cu condiția ca acestea să nu introducă restricții asupra stărilor de tensiune posibile.

Pe de altă parte, (6.1) se mai poate scrie

$$\Delta \varepsilon^*_{ij} - (\partial_i \partial_h \varepsilon^*_{hj} + \partial_j \partial_h \varepsilon^*_{hi}) + \partial_h \partial_l \varepsilon^*_{hl} \delta_{ij} + (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \Delta) \varepsilon^*_{hh} = \eta_{ij} \tag{6.5}$$

și, dacă înlocuim pe ε^*_{ij} din (6.2), obținem, ținînd seama de (6.3), ecuațiile de tip Betrami

$$\Delta \sigma^*_{(ij)} + \frac{1}{1+\nu} (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \Delta) \sigma^*_{hh} = 2\mu \eta_{ij}. \tag{6.6}$$

Înlocuind (6.4) în (6.6), putem obține ecuațiile pe care trebuie să le satisfacă funcțiile de tensiune. După cum a arătat însă E. Kröner, ecuațiile obținute se pot simplifica mult dacă se introduc noi funcții de tensiune χ_{ij} prin relațiile

$$\chi_{ij} = 2\mu (\chi'_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \chi'_{hh} \delta_{ij}), \tag{6.7}$$

cu condițiile suplimentare

$$\partial_j \chi'_{ji} = 0. \tag{6.8}$$

Se observă analogia dintre relațiile (6.1), (6.2), (6.3) și respectiv (6.4), (6.7) și (6.8). Ca urmare, înlocuind (6.7) în (6.4) și ținînd seama de (6.8), se obțin ecuații analoge cu (6.5), și anume

$$\Delta \chi'_{ij} + \frac{1}{1-\nu} (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \Delta) \chi'_{hh} = \frac{1}{2\mu} \sigma^*_{(ij)}. \tag{6.9}$$

În sfîrșit, înlocuind (6.9) în (6.6), se obțin ecuațiile bipotențiale neomogene

$$\Delta \Delta \chi'_{ij} = \eta_{ij}. \tag{6.10}$$

Problema determinării soluției particulare căutate a ecuațiilor (6.1)—(6.3) revine deci la găsirea unei soluții particulare a ecuațiilor

(4.13) cu condițiile suplimentare (4.11). În cazul mediului infinit, o soluție particulară de acest fel este

$$\chi'_{ij}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi}\int_V \eta_{ij}(\mathbf{x}')\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\,dV', \tag{6.11}$$

unde integralele din membrul drept sînt extinse la întreg spațiul.

În cazul unui corp finit, după cum a arătat E. Kröner, soluția (6.11) rămîne valabilă dacă se înlocuiesc η_{ij} cu funcțiile $\bar{\eta}_{ij}$, obținute prin prelungirea lui η_{ij} continuu diferențiabil prin frontiera corpului în tot spațiul și astfel încît $\bar{\eta}_{ij}$ să se anuleze suficient de repede la infinit [1].

După obținerea lui χ'_{ij} se calculează $\sigma^*_{(ij)}$ și ε^*_{ij} cu ajutorul relațiilor (6.9) și (6.2). Determinarea lui $\varkappa^*_{jj}$, μ^*_{ij}, a ecuațiilor problemei la limită asociate și a vectorilor σ_i și θ_i se face apoi ca în paragraful precedent. Ținînd seama însă de condițiile suplimentare (6.3), relațiile (5.10), (5.22) se simplifică și devin

$$\partial_j \mu^*_{ji} = \left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right)\partial_i \alpha_{mm} - (\gamma + \varepsilon)\,\partial_j \alpha_{ij}, \tag{6.12}$$

$$\widetilde{\mathfrak{F}}_i \equiv \mathfrak{F}_i,$$

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_i \equiv \mathfrak{M}_i - (\gamma + \varepsilon)\,\partial_j \alpha_{ij}. \tag{6.13}$$

Se observă că problema la limită asociată nu mai depinde de soluția particulară decît prin intermediul condițiilor la limită, întrucît expresiile $\partial_i \mu^*_{ji}$ se pot calcula imediat cu ajutorul relațiilor (6.12) dacă se cunoaște densitatea dislocațiilor.

Metoda expusă în acest paragraf prezintă unele avantaje față de metoda din paragraful precedent, întrucît în multe cazuri se cunoaște soluția particulară a ecuațiilor (6.1) și (6.2), care satisface condițiile suplimentare (6.3) ca rezultat al determinării tensiunilor simetrice generate de dislocații în medii infinite. Apare deci, așa cum am mai spus, posibilitatea completării soluțiilor cunoscute pînă în prezent în teoria de continuu a dislocațiilor, cu termeni care să țină seama de condițiile la limită și de prezența cuplurilor de tensiuni și a tensiunilor antisimetrice, prin rezolvarea problemelor la limită asociate.

7. DISTRIBUȚIE UNIFORMĂ DE DISLOCAȚII-TREAPTĂ ÎNTR-O PLACĂ PLANĂ

Ca prim exemplu al teoriei expuse în paragrafele anterioare vom studia cazul unei distribuții uniforme de dislocații-treaptă într-o placă plană infinită de grosime $2h$, în absența forțelor și a momentelor masice. Vom alege axele x_1 și x_2 în planul median al plăcii și vom presupune că singura componentă nenulă a densității dislocațiilor este $\alpha_{12} = \text{const.}$ și deci

$$\alpha_{ij} = \alpha_{12}\,\delta_{i1}\delta_{j2}. \tag{7.1}$$

În acest caz obţinem din (1.15)

$$\eta_{ij} \equiv 0 \tag{7.2}$$

şi deci putem lua ca soluţie particulară a ecuaţiilor (6.1)—(6.3)

$$\varepsilon^*_{ij} \equiv 0 \quad , \quad \sigma^*_{(ij)} \equiv 0. \tag{7.3}$$

Înlocuind $(7.3)_1$ în (5.3) şi (5.5), obţinem

$$\varkappa^*_{ij} = -\alpha_{ji} = -\alpha_{12}\delta_{i2}\delta_{j1} \tag{7.4}$$

şi deci singurele componente nenule ale curbărilor de structură şi ale cuplurilor de tensiuni sînt

$$\varkappa^*_{21} = -\alpha_{12}, \tag{7.5}$$

$$\mu^*_{12} = -(\gamma - \varepsilon)\,\alpha_{12} \quad , \quad \mu^*_{21} = -(\gamma + \varepsilon)\alpha_{12}\,. \tag{7.6}$$

Întrucît $\partial_j \mu^*_{ji} \equiv 0$, obţinem din (5.29)

$$\sigma_i \equiv 0. \tag{7.7}$$

Întrucît soluţia particulară (7.3), (7.5)—(7.7) satisface evident atît ecuaţiile (4.1)—(4.8), cît şi condiţiile la limită pe suprafeţele $x_3 = \pm h$ (întrucît $\mu^*_{3i} = 0$, $i = 1, 2, 3$), ea reprezintă soluţia completă a problemei la limită. Este de remarcat că pe feţele $x_1 = \text{const.}$ şi $x_2 = \text{const.}$ apar momentele neechilibrate

$$M_2 = \int_{-h}^{h} \mu^*_{12}\,\mathrm{d}x_3 = -2\,(\gamma - \varepsilon)\,\alpha_{12}\,h \tag{7.8}$$

şi, respectiv,

$$M_1 = \int_{-h}^{h} \mu^*_{21}\,\mathrm{d}x_3 = -2\,(\gamma + \varepsilon)\,\alpha_{12}\,h \tag{7.9}$$

care, în teoria clasică a elasticităţii, sînt caracteristice pentru încovoierea pură a plăcii plane.

Aşa cum am menţionat în introducere, E. Kröner a studiat [5] cazul unei distribuţii uniforme de dislocaţii-treaptă într-un mediu elastic infinit, pe calea sumării cîmpurilor de tensiuni produse de fiecare dislocaţie izolată. Rezultatele obţinute coincid, abstracţie făcînd de notaţii, cu cele din acest paragraf [8]). Aceasta arată că ecuaţiile constitutive (4.7) şi (4.8) reprezintă efectiv o generalizare a celor deduse de E. Kröner, întrucît ele sînt valabile şi în cazul unei densităţi variabile a dislocaţiilor.

Pe de altă parte, comparînd ecuaţia constitutivă, dedusă de E. Kröner ([5], relaţia (13)) prin sumare, cu ecuaţia

$$\mu^*_{21} = (\gamma + \varepsilon)\,\varkappa^*_{21}$$

[8]) În lucrarea [5] se calculează o singură componentă a tensorului cuplurilor de tensiuni, şi anume μ^*_{21}. Dacă ţinem seama însă de nota adăugată ulterior de E. Kröner ([5], p. 267), prin care se completează ecuaţia constitutivă, rezultă că în cazul distribuţiei de dislocaţii considerate componenta μ^*_{12} nu se anulează decît dacă $\gamma = \varepsilon$, ceea ce nu se întîmplă în general.

dedusă din (7.5) și (7.6), obținem

$$\gamma + \varepsilon = \frac{\pi^2}{24} \cdot \frac{\mu}{1 - \nu} \cdot (2d)^2, \tag{7.10}$$

ceea ce ne dă o indicație asupra factorilor care determină, în cazul distribuțiilor uniforme de dislocații, constantele de material suplimentare γ și ε. Într-adevăr, introducînd notația lui R. D. Mindlin

$$\gamma + \varepsilon = 4\mu l^2,$$

unde l este o constantă de material cu dimensiunea de lungime, obținem din (7.10)

$$l = \frac{\pi}{4\sqrt{6(1 - \nu)}} \cdot (2d),$$

ceea ce arată că în cazul studiat lungimea caracteristică a materialului este proporțională cu distanța $2d$ dintre planele de lunecare. De asemenea se poate stabili ordinul de mărime al lui l, știind că $2d$ ia valori între 10^{-4} și 10^{-3} cm.

8. DISLOCAȚIE-ȘURUB ÎNTR-O BARĂ CILINDRICĂ INFINITĂ

Vom considera o bară cilindrică infinită a cărei secțiune transversală este un cerc de rază R. Alegem axa barei ca axă x_3 și vrem să evaluăm starea de tensiune produsă de o dislocație-șurub dirijată după axa barei, al cărei vector Burgers are mărimea b. Singura componentă nenulă a densității dislocațiilor este

$$\alpha_{33} = b\,\delta(x_1)\,\delta(x_2), \tag{8.1}$$

unde $\delta(x_1)$ și $\delta(x_2)$ sînt funcții Dirac.

În acest caz se cunoaște [1] soluția particulară a ecuațiilor (6.1)—(6.3). Singurele componente nenule ale tensorilor $\sigma^*_{(ij)}$ și ε_{ij} sînt

$$\sigma^*_{(13)} = -\frac{\mu b}{2\pi} \cdot \frac{x_2}{\rho^2}, \quad \sigma^*_{(23)} = \frac{\mu b}{2\pi} \cdot \frac{x_1}{\rho^2}, \tag{8.2}$$

$$\varepsilon^*_{13} = -\frac{b}{4\pi} \cdot \frac{x_2}{\rho^2}, \quad \varepsilon^*_{23} = \frac{b}{4\pi} \cdot \frac{x_1}{\rho^2}, \tag{8.3}$$

unde $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Prin calcule elementare deducem din (5.3)

$$\varkappa_{11}^* = \frac{\alpha_{33}}{2} - \frac{b}{4\pi} \cdot \frac{x_1^2 - x_2^2}{\rho^4},$$

$$\varkappa_{22}^* = \frac{\alpha_{33}}{2} + \frac{b}{4\pi} \cdot \frac{x_1^2 - x_2^2}{\rho^4},$$

$$\varkappa_{12}^* = \varkappa_{21}^* = -\frac{b}{2\pi} \cdot \frac{x_1 x_2}{\rho^4}, \tag{8.4}$$

$$\varkappa_{33}^* = -\frac{\alpha_{33}}{2}, \quad \varkappa_{mm}^* = \frac{\alpha_{33}}{2}.$$

$$\varkappa_{13}^* = \varkappa_{31}^* = \varkappa_{23}^* = \varkappa_{32}^* = 0,$$

iar din (5.4)

$$\mu_{11}^* = \frac{\alpha_{33}}{2}(\beta + 2\gamma) - \frac{b\gamma}{2\pi} \cdot \frac{x_1^2 - x_2^2}{\rho^4},$$

$$\mu_{22}^* = \frac{\alpha_{33}}{2}(\beta + 2\gamma) + \frac{b\gamma}{2\pi} \cdot \frac{x_1^2 - x_2^2}{\rho^4},$$

$$\mu_{12}^* = \mu_{21}^* = -\frac{b\gamma}{2\pi} \cdot \frac{x_1 x_2}{\rho^4}, \tag{8.5}$$

$$\mu_{33}^* = \frac{\alpha_{33}}{2}(\beta - 2\gamma), \quad \mu_{mm}^* = \frac{\alpha_{33}}{2}(3\beta + 2\gamma),$$

$$\mu_{13}^* = \mu_{31}^* = \mu_{23}^* = \mu_{32}^* = 0.$$

După cum se observă, toate componentele nenule ale soluţiei particulare au discontinuităţi pe axa de simetrie. Acest fapt este bine cunoscut în teoria dislocaţiilor şi se datorează înlocuirii lăţimii finite a dislocaţiei printr-o densitate de tipul (8.1).

Din (8.5) deducem uşor

$$\partial_j \mu_{j1}^* = \frac{1}{2}(\beta + 2\gamma)\, \partial_1 \alpha_{33},$$

$$\partial_j \mu_{j2}^* = \frac{1}{2}(\beta + 2\gamma)\, \partial_2 \alpha_{33}, \tag{8.6}$$

$$\partial_j \mu_{j3}^* = 0$$

şi, presupunînd că forţele şi momentele masice lipsesc, rezultă din (4.3)

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{4}(\beta + 2\gamma)\,\partial_1 \alpha_{33},$$

$$\sigma_2^* = -\frac{1}{4}(\beta + 2\gamma)\,\partial_2 \alpha_{33}, \tag{8.7}$$

$$\sigma_3^* = 0.$$

Pentru rezolvarea problemei la limită Cosserat asociate, înlocuim (8.6) în (6.13) şi (5.18) şi obţinem

$$\widetilde{\mathfrak{F}}_i = \widetilde{\mathfrak{M}}_i = 0, \tag{8.8}$$

$$\partial_j \widetilde{\sigma}_{(ji)} + \frac{1}{2} \in_{ijk} \partial_j \partial_l \widetilde{\mu}_{lk} = 0. \tag{8.9}$$

În sfîrşit, din (8.2), (8.5) obţinem condiţiile la limită ale problemei asociate pe suprafaţa laterală a barei, înlocuind în (5.24)

$$n_1 = \cos\theta \quad , \quad n_2 = \sin\theta \quad , \quad n_3 = 0,$$

$$\rho = R \quad , \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{x_2}{x_1}.$$

Se constată uşor că

$$\sigma_{ji}^* n_j = \sigma_{(ji)}^* n_j = 0,$$

$$\mu_{ji}^* n_j = -\frac{b\gamma}{2\pi R^2} n_i, \tag{8.10}$$

şi deci din (5.24) obţinem condiţiile la limită

$$\left(\widetilde{\sigma}_{ji)} + \frac{1}{2} \in_{ijk} \partial_l \widetilde{\mu}_{lk}\right) n_j = 0,$$

$$\widetilde{\mu}_{ji}\, n_j = \frac{b\gamma}{2\pi R^2} n_i, \tag{8.11}$$

unde j ia numai valorile 1 şi 2.

Ţinînd seama că ecuaţia $(8.11)_2$ se mai poate scrie

$$\left(\widetilde{\mu}_{ji} - \frac{b\gamma}{2\pi R^2}\,\delta_{ij}\right) n_j \; 0 \qquad (j = 1,2) \tag{8.12}$$

şi că $\widetilde{\mu}_{mm} = 0$, putem satisface identic condiţiile la limită luînd

$$\widetilde{\sigma}_{(ji)}\, n_j = 0, \tag{8.13}$$

$$\widetilde{\mu}_{11} = \widetilde{\mu}_{22} = \frac{b\gamma}{2\pi R^2}\,, \quad \widetilde{\mu}_{33} = -\frac{b\gamma}{2\pi R^2},$$

$$\widetilde{\mu}_{13} = \widetilde{\mu}_{31} = \widetilde{\mu}_{23} = \widetilde{\mu}_{32} = 0. \tag{8.14}$$

Dar ecuaţiile (8.9), (8.14) şi condiţiile la limită (8.13) sînt de aceeaşi formă cu cele ale problemei torsiunii unei bare cilindrice cu proprietăţi elastice de tip Cosserat cu rotaţii constrînse. Soluţia acestei probleme a fost dată de către W. T. Koiter [13] şi, în cazul nostru, se scrie

$$\widetilde{u}_1 = -\frac{b}{2\pi R^2} x_2 x_3\,, \quad \widetilde{u}_2 = \frac{b}{2\pi R^2} x_1 x_3\,, \quad \widetilde{u}_3 = 0,$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{13} = \frac{b}{4\pi R^2} x_2 \quad , \quad \widetilde{\varepsilon}_{23} = -\frac{b}{4\pi R^2} x_1,$$

$$\widetilde{\varkappa}_{11} = \widetilde{\varkappa}_{22} = \frac{b}{4\pi R^2} \quad , \quad \widetilde{\varkappa}_{33} = -\frac{b}{2\pi R^2}, \tag{8.15}$$

$$\widetilde{\sigma}_{(13)} = \frac{b\mu}{2\pi R^2} x_2 \quad , \quad \widetilde{\sigma}_{(23)} = -\frac{b\mu}{2\pi R^2} x_1,$$

$$\widetilde{\mu}_{21} = \widetilde{\mu}_{22} = \frac{b\gamma}{2\pi R^2} \quad , \quad \widetilde{\mu}_{33} = -\frac{b\gamma}{\pi R^2} \quad , \quad \partial_j \widetilde{\mu}_{ji} = 0.$$

Celelalte componente ale tensorilor $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$, $\widetilde{\varkappa}_{ij}$, $\widetilde{\sigma}_{(ij)}$ şi $\widetilde{\mu}_{ij}$ sînt nule.

În sfîrşit, adunînd soluţia particulară cu soluţia problemei la limită asociate, obţinem

$$\varepsilon_{13} = \frac{bx_2}{4\pi R^2}\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right) \quad , \quad \varepsilon_{23} = -\frac{bx_1}{4\pi R^2}\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right),$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0 \quad ,$$

$$\varkappa_{11} = \frac{\alpha_{33}}{2} + \frac{b}{4\pi R^2}\left[1 - \frac{R^2(x_1^2 - x_2^2)}{\rho^4}\right] \quad , \quad \varkappa_{12} = \varkappa_{21} = -\frac{bx_1 x_2}{2\pi\rho^4},$$

$$\varkappa_{22} = \frac{\alpha_{33}}{2} + \frac{b}{4\pi R^2}\left[1 + \frac{R^2(x_1^2 - x_2^2)}{\rho^4}\right] \quad , \quad \varkappa_{33} = -\frac{\alpha_{33}}{2} - \frac{b}{2\pi R^2},$$

$$\varkappa_{13} = \varkappa_{31} = \varkappa_{23} = \varkappa_{32} = 0, \tag{8.16}$$

$$\sigma_{(13)} = \frac{\mu b x_2}{2\pi R^2}\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right), \quad , \quad \sigma_{(23)} = -\frac{\mu b x_1}{2\pi R^2}\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right),$$

$$\sigma_{(11)} = \sigma_{(12)} = \sigma_{(22)} = \sigma_{(23)} = 0 \quad ,$$

$$\mu_{11} = \frac{\alpha_{33}}{2}(\beta + 2\gamma) + \frac{b\gamma}{2\pi R^2}\left[1 - \frac{R^2(x_1^2 - x_2^2)}{\rho^4}\right], \quad \mu_{12} = \mu_{12} = -\frac{b\gamma x_1 x_2}{\pi\rho^4},$$

$$\mu_{22} = \frac{\alpha_{33}}{2}(\beta + 2\gamma) + \frac{b\gamma}{2\pi R^2}\left[1 + \frac{R^2(x_1^2 - x_2^2)}{\rho^4}\right], \quad \mu_{33} = \frac{\alpha_{33}}{2}(\beta - 2\gamma) - \frac{b\gamma}{\pi R^2},$$

$$\mu_{13} = \mu_{31} = \mu_{23} = \mu_{32} = 0,$$

$$\sigma_1 = -\frac{1}{4}(\beta + 2\gamma)\,\partial_1 \alpha_{33} \quad , \quad \sigma_2 = -\frac{1}{4}(\beta + 2\gamma)\,\partial_2 \alpha_{33} \quad , \quad \sigma_3 = 0.$$

Dacă facem abstracţie de zona din imediata apropiere a dislocaţiei, putem neglija în relaţiile de mai sus termenii care conţin densitatea dislocaţiilor α_{33}.

Primită la redacţie la 7 august 1965

BIBLIOGRAFIE

1. E. Kröner, *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Erg. angew. Math., **5**, 1—176 (1958).
2. — *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Arch. Rational Mech. Anal., **4**, *1*, 273—334 (1959).
3. F. A. Mc. Clintock, *Contribution of interface couples to the energy of a dislocation*, Acta metallurgica, *8*, 127—128 (1960).
4. E. Kröner, *Dislocations and continuum mechanics*, Appl. Mech. Rev., **15**, *8*, 599—606 (1962).
5. — *On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics*, Int. J. Engng. Sci., *1*, 261—278 (1963).
6. W. Günther, *Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums*, Abh. Braunschw. Wiss. Ges., *10*, 195—213 (1958).
7. E. et F. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, A. Hermann et Fils, Paris, 1909.
8. C. Truesdell, R. A. Toupin, *The classical field theories. Encyclopedia of Physics*, vol. III/1, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960, Secs. 200, 203, 205.
9. G. Grioli, *Elasticità asimmetrica*, Ann. di Mat. pura ed appl., ser. **IV**, *50*, 389—417 (1960).
10. Е. Л. Аеро, Е. В. Кувшински, *Основные уравнения теории упругих сред с вращательно взаимодействием частиц*, Физ. тверд. тела, **2**, *7*, 1399—1400 (1960).
11. R. A. Toupin, *Elastic materials with couple-stresses*, Arch. Rational Mech. Anal., **11**, *5*, 385—414 (1962).
12. R. D. Mindlin, H. F. Tiersten, *Effects of couple-stresses in linear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., **11**, *5*, 415—448 (1962).
13. W. T. Koiter, *Couple-stresses in the theory of elasticity*, I and II. *Proc. koninkl.* Nederl. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, series B, **67**, *1*, 17—44 (1964).
14. H. Schaefer, *Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat Kontinuums*, Miszellaneen der Angewandten Mechanik, Akademie-Verlag, Berlin, 1962, p. 277—292.
15. Е. В. Кувшински, Е. Л. Аеро, *Теория континуума асимметрической упругости*, Учет „внутреннего" вращения, Физ. тверд, тела, **5**, *9*, 2591—2598 (1963).
16. В. А. Палмов, *Основные уравнения теории несимметричной упругости*, Прикл. Мат. Мех., **28**, *3*, 401—408 (1964).
17. S. Kessel, *Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums*, Abh. Braunschw. Wiss. Ges., *16*, 1—22 (1964).
18. C. Teodosiu, *On the determination of internal stresses and couple-stresses in the continuum theory of dislocations*, Bull. Acad. Polon. Sci., sér. Sci. techn., *12*, 605—610 (1964).
19. J. D. Eshelby, *The continuum theory of lattice defects*, Solid State Physics, New York, *3*, 79—144 (1956).
20. M. E. Gurtin, *A generalization of the Beltrami stress functions in continuum mechanics*, Arch. Rational Mech. Anal., **13**, *5*, 321—329 (1963).

BUCLAREA MULTIPLĂ A GARNITURII DE FORAJ[1])

de NICOLAE S. PĂRVULESCU

Institutul de proiectări pentru forajul sondelor și extracția țițeiului (I.P.F.E.), București

539.4 : 622.24

Se consideră două aspecte ale problemei : flambajul multiplu și formule de interpolare în instabilitatea de rotație. Referitor la primul aspect se determină distanțele dintre nodurile prăjinilor stabilizate prin centrori cînd se apasă pe sapă cu o greutate a prăjinilor grele de mare lungime (pînă la 10 bucle). În cel de-al doilea aspect se stabilesc formule de interpolare pentru determinarea turațiilor critice ale ansamblului de prăjini grele.
Se fac aplicații într-un exemplu și considerații asupra coeficientului de siguranță și asupra posibilităților de evitarea turațiilor critice.

1. FLAMBAREA MULTIPLĂ A GARNITURII DE FORAJ

S-a arătat [1], [2], [3] că lungimea comprimată critică $h^{i,i'}_{j,j'}$ a unei tije zvelte în diferitele condiții de legare a capetelor, notate cu indicii j, j', i, i', este dată de expresia

$$h^{i,i'}_{j,j'} = c^{i,i'}_{j,j'} \sqrt[3]{A}\,, \tag{1}$$

în care

$c^{i,i'}_{j,j'}$ este coeficientul de flambaj în diferitele condiții precizate prin indici,

A — volumul de rigiditate al tijei la gravitație dat de expresia

$$A = \frac{EI}{q}, \tag{2}$$

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, *1* (1966) (în limba engleză).

ST. CERC. MEC. APL. TOM 21 NR. 1 P. 209–218 BUCUREȘTI 1966

unde

EI este rigiditatea tijei,

q — greutatea specifică aparentă a unității de lungime din tijă.

Valorile coeficientului $c_{j,j'}^{i,i'}$ au fost determinate [4], [5], [6] pentru diferitele condiții de legare a capetelor precizate prin indici. Deoarece expresiile acestui coeficient sînt complicate și calculul lor este laborios, am propus pentru tijele încărcate suplimentar (peste greutatea proprie), în cazurile cu articulație jos și fără deplasarea laterală [7], următoarea formulă empirică :

$$\overline{c}_{1,3}^{i,i'} \approx \frac{h}{L} \sqrt[3]{\frac{K^2\pi^2}{\frac{h}{L}-\varkappa}}, \tag{3}$$

în care k și $\varkappa$ sînt date în tabela 1. Suprabararea coeficientului de flambaj se referă la supraîncărcare.

Tabela 1

Coeficienții empirici în cazurile de flambaj

Cazul	$C_{1,3}^{1,0}$	$C_{1,3}^{1,3}$	$C_{1,3}^{2,0}$	$C_{1,3}^{2,3}$
K	$\sqrt{2}$	1/2	1	$\sqrt{2}$
$\varkappa$	0,35	0,30	0,47	0,23

Ne putem servi de formula (3) pentru determinarea coeficientului de flambaj în cazul forajului greu (forțat), cînd se apasă pe sapă cu o greutate mai mare decît valoarea critică referitoare unei singure bucle.

În cazul $C_{1,3}^{2,0}$ (ambele capete articulate și fără deplasare laterală), conform tabelei 1, avem $c_{1,3}^{i,i'} = c_{1,3}^{2,0}$ și formula (3) devine

$$\overline{c}_{1,3}^{2,0} \approx \frac{h}{L} \sqrt{\frac{\pi^2}{\frac{h}{L}-\varkappa}}, \tag{4}$$

în care $\varkappa = 0{,}47$ și, ținînd seama de (1),

$$h = c_{1,3}^{2,0} \sqrt[3]{A}. \tag{5}$$

În figura 1 se arată linia deformată elastic în flambajul cu un număr multiplu de bucle, în care avem notațiile :

l_ν — lungimea buclei,

h_ν — lungimea comprimată critică,

L_ν — lungimea tijei,

unde $\nu = 1, 2, 3$ este numărul curent al buclei.

Denumim noduri punctele de inflexiune a liniei elastice a căror poziție poate fi centrată prin stabilizatori (centrori). Tija poate fi consi-

derată ca încastrată elastic în noduri. Pentru simplificare considerăm tija articulată în noduri, ceea ce este acoperitor și ne permite deci să folosim coeficienți de siguranță mai mici.

Prima buclă. În acest caz relația (5) devine

$$h_1 = c_1 \sqrt[3]{A} . \qquad (6)$$

Valoarea c_1 pentru acest caz a fost studiată anterior astfel :

$c_1 \approx 1{,}7$ după datele noastre experimentale [4],
$c_1 \approx 1{,}88$ după Willers [8],
$c_1 \approx 1{,}94$ după Lubinski [7],
$c_1 \approx 2$ după interpretările noastre din [5].

Prin urmare, putem folosi expresia

$$h_1 = 2 \sqrt[3]{A} . \qquad (7)$$

Bucla dublă. Din considerații geometrice (fig. 1) avem

$$h_2 = h_1 + l_2, \qquad (8)$$

iar relația (5) devine

$$h_2 = c_2 \sqrt[3]{A} . \qquad (9)$$

Din (6), (9) rezultă

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{c_2}{c_1} \qquad (10)$$

și, ținînd seama de (8),

$$c_2 = \left(1 + \frac{l_2}{h_1}\right) c_1 . \qquad (11)$$

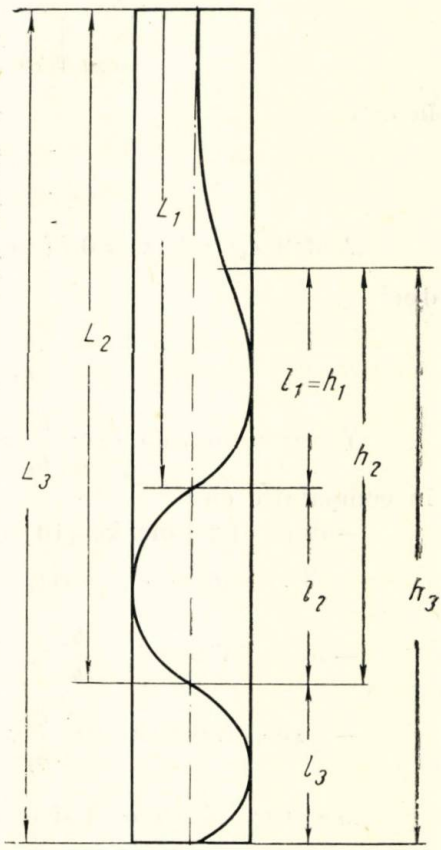


Fig. 1

Referindu-ne la l_2, expresia (3) devine

$$c_2 = \frac{h_2}{l_2} \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{\frac{h_2}{l_2} - \varkappa}} . \qquad (12)$$

Facem înlocuirea dată de (10), ținînd seama de (8) :

$$\frac{l_2}{h_1} = \frac{1}{c_1} \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{\frac{h_1}{l_2} + 1 - \varkappa}} , \qquad (13)$$

care se mai poate pune sub forma

$$\frac{l_2}{h_1} = \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{1 + (1 - \varkappa)\frac{l_2}{h_1}}}, \tag{14}$$

în care

$$\mathcal{C} = \pi c_1^{-\frac{3}{2}}. \tag{15}$$

Pentru $c_1 = 2$, $\varkappa = 0{,}47$ se obține $\mathcal{C} = 1{,}109$,

deci

$$\frac{l_2}{h_1} \approx 0{,}911.$$

Ținem seama de (8): $\frac{h_2}{h_1} \approx 1{,}911$

în comparație cu:

— după Timoshenko [10] (repartizînd la ambele capete cîte 50% din greutatea proprie) revine la $\frac{h_2}{h_1} \approx 1{,}84$;

— după Willers [8] $\frac{h_2}{h_1} \approx \frac{3{,}59}{1{,}88} = 1{,}91$;

— după Lubinski [9] $\frac{h_2}{h_1} \approx \frac{3{,}753}{1{,}94} = 1{,}93$.

Bucla triplă. Procedînd în mod analog, obținem succesiv

$$h_3 = h_2 + l_3 = c_3 \sqrt[3]{A} = h_2 \frac{c_3}{c_2} = h_1 \frac{c_3}{c_1}, \tag{16}$$

$$c_3 = c_1\left[1 + \frac{l_2 + l_3}{l_1}\right] = \frac{h_3}{l_3}\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{\frac{h_2}{l_3} + 1 - \varkappa}}. \tag{17}$$

Prin urmare,

$$\frac{l_3}{h_2} = \frac{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{\frac{3}{2}}\mathcal{C}}{\sqrt{1 + (1 - \varkappa)\frac{l_3}{h_2}}} \tag{18}$$

şi, făcînd calculele, se obţine

$$\frac{l_3}{h_1} \approx 0{,}731, \qquad h_3 = (1 + 0{,}911 + 0{,}731)\, h_1 = 2{,}642\ h_1.$$

Bucla multiplă. Generalizînd, se obţine

$$h_\nu = h_1 + \sum_{\mu=2}^{\nu} l_\mu \ , \qquad c_\nu = \frac{h_\nu}{h_1}\, c_1 , \tag{19}$$

$$\frac{l_\nu}{h_{\nu-1}} = \left[\frac{h_{\nu-1}}{h_1}\right]^{-\frac{3}{2}} \frac{e}{\sqrt{1 + (1-\varkappa)\dfrac{l_\nu}{h_{\nu-1}}}} \tag{20}$$

şi în cele din urmă

$$\frac{l_\nu}{h_1} = \frac{e}{\sqrt{\dfrac{h_{\nu-1}}{h_1} + (1-\varkappa)\dfrac{l_\nu}{h_1}}} \ . \tag{21}$$

Făcînd calculele, de exemplu, pentru 10 bucle, se obţine

$$\frac{h_{10}}{h_1} = 1 + 0{,}911 + 0{,}731 + 0{,}642 + 0{,}585 + 0{,}544 + 0{,}512 + \\ + 0{,}487 + 0{,}466 + 0{,}448.$$

În tabela 2 se dau valorile h_ν/h_1 pînă la $\nu = 10$.

Tabela 2

Raportul lungimilor comprimate la flambajul multiplu

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{h_\nu}{h_1}$	1	1,911	2,642	3,284	3,869	4,413	4,925	5,412	5,878	6,326

Prin urmare, cu numărul de bucle ν lungimea comprimată creşte mai încet decît ν.

2. FORMULE DE INTERPOLARE ÎN INSTABILITATEA DE ROTAŢIE

Instabilitatea de rotaţie în cazul sarcinilor repartizate a fost studiată [11], după ce în prealabil s-a integrat ecuaţia liniei elastice respective [12].

S-a considerat cazul $C^{2,0}_{1,3}$ (ambele capete articulate, fără deplasare laterală) şi s-au calculat valorile β în funcţie de α şi z, în aproximaţiile 1° şi 3°, trecute în tabela 4 din [11].

Expresiile notaţiilor menţionate sînt

$$\beta = \beta(L) = wL^4, \qquad w = \frac{B}{A} = \frac{q\omega^2}{gEI}, \tag{22}$$

$$\alpha = \alpha(L) = \frac{h}{L}, \qquad z = z(L) = \frac{L^3}{A}, \tag{23}$$

în care ω este viteza de rotaţie a garniturii de prăjini.

S-a observat (tabela 4 din [11]) că, pentru z şi α din ce în ce mai mici, β se apropie de $\pi^4 \approx 97{,}4$ şi deci la limită, relaţia (22) devine

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{g}{q}EI}, \tag{24}$$

adică formula cunoscută a turaţiei critice pentru tijele de greutate neglijabilă. Într-adevăr, ţinînd seama de (2), ultima relaţie (23) devine

$$z = \frac{q}{EI}I^3 \tag{25}$$

şi deci neglijînd greutatea proprie q, $z \to 0$.

În aplicaţiile practice, la prăjini grele este necesar să se cunoască lungimea l a buclei în funcţie de turaţia n şi de apăsarea pe sapă qh. Pentru a pune în evidenţă turaţia, din relaţiile (22) şi (23) se obţine raportul adimensional

$$\frac{\beta}{z} = \frac{l\omega^2}{g} \approx \left(\frac{n}{30}\right)^2 l, \tag{26}$$

în care l este dat în metri, iar n în rotaţii pe minut.

Prin prelucrarea valorilor din tabelul menţionat s-au obţinut valorile β/z în funcţie de z şi h/L, trecute în tabela 6 din [11], cu ajutorul căruia s-a construit diagrama pe care o redăm (fig. 2) pentru prăjinile grele de $4^1/_2$ in. Diametrul exterior ale prăjinilor grele luate în considerare este cu ceva inferior celui prevăzut în STAS 1 898—50, încît valorile obţinute prezintă uşoare diferenţe.

Observăm că turaţia critică creşte pronunţat cînd scade lungimea buclei şi scade mai încet cu creşterea apăsării pe sapă. Astfel, conform formulei (24), turaţia creşte invers proporţional cu pătratul lungimei buclei l, adică, dacă se reduce lungimea buclei la jumătate, turaţia

creşte de patru ori. Prin urmare, turaţia critică de ordinul al doilea este de patru ori mai mare decît aceea de ordinul întîi.

Observaţiile menţionate ne-au condus la formularea unor relaţii de interpolare analoge celor folosite [7] pentru flambajul fără rotaţie.

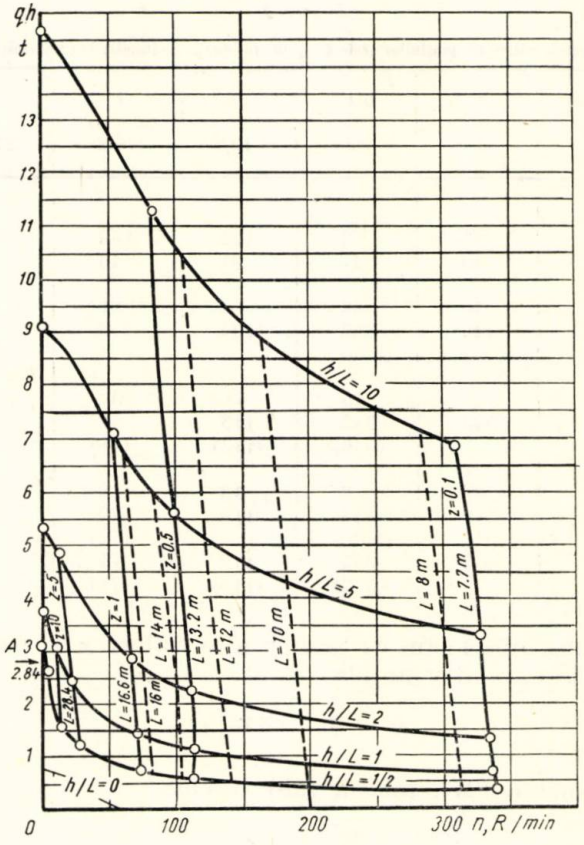


Fig. 2

S-au recalculat valorile turaţiilor critice pentru prăjini grele de 4 $^1/_2$ in. conform STAS 1 898—50 ($\sqrt[3]{A} = 16{,}15$ m) şi s-au trecut între paranteze în tabela 3.

Se observă că pentru $\alpha = 0$ valorile turaţiilor critice se pot exprima cu relaţia

$$\frac{n_0}{n_{01}} = \left(\frac{l_1}{l}\right)^2, \tag{27}$$

în care

n_0 este turația critică pentru $\alpha = 0$, corespunzătoare lungimei l a buclei,

n_{01} — turația critică pentru $\alpha = 0$ și $z = 1$, corespunzătoare lungimei l_1 a buclei.

Tabela 3

Turațiile critice ale prăjinilor grele 4 $^1/_2$ in în funcție de lungimile comprimate

α	z / l / m	0,05	0,1	0,5	1	5	10
		6,0	7,5	12,8	16,2	27,6	59,5
10	h_{10}						
	m	60	75	128	162		
	n_{10}	439	321	91	40		
5	h_5						
	m	30	38	64	81		
	n_5	446	337	105	58		
			(333)				
2	h_2						
	m	12	15	26	32	56	
	n_2	549	342	113	68	14	
			(340)	(113)	(68)		
1	h_1						
	m	6	8	13	16	28	35
	n_1	551	343	116	72	20	9
			(342)		(72)		
0	n_0	552	345	119	75	26	16
			(343)	(119)	(76)	(28)	(19)

De asemenea observăm că pentru alte valori α se poate folosi formula de interpolare, relativ simplă,

$$n = n_0 - \varkappa \alpha z^{1/3}, \tag{28}$$

în care $\varkappa \approx 3{,}5$.

Ținînd seama de (27), relația (28) devine

$$\varkappa \alpha z + n z^{1/3} - n_{01} = 0. \tag{29}$$

Cu aceste formule empirice de interpolare s-au calculat valorile trecute în tabela 3. Se pot aprecia aproximațiile făcute în comparație cu valorile din paranteză. Cu ajutorul acestor formule s-au putut detecta valorile eronate, care au fost eliminate.

3. APLICAȚII ȘI CONCLUZII

Ca exemplu s-au făcut aplicații la prăjini grele $4^1/_2$ in. ($D_e = 146{,}1$ mm și $g = 111{,}5$ kg).

Pentru flambajul multiplu fără rotație, admițînd legăturile articulate și fără deplasare laterală și folosind tabela 2, s-au calculat distan-

ţele dintre noduri, în care sînt amplasaţi stabilizatori, precum şi greutăţile respective, pînă la un flambaj de ordinul 10 (zece bucle), trecute în tabela 4.

Tabela 4

Distanţele critice şi admisibile ale nodurilor la prăjini grele 4 1/2 (D_e = 116,1 mm; q = 111,5 kg/m)

Notaţiile	U/M	Coef. desig.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l_ν	m	1	32,3	29,4	23,6	28,7	18,9	17,6	16,5	15,7	15,0	14,5
		1,5	21,5	19,6	15,7	13,8	12,6	11,7	11,0	10,5	10,1	9,7
Σh_ν	m	1,	32,3	61,7	85,3	106,1	125,0	142,6	159,1	174,8	189,9	804,3
		1,5	21,5	41,2	56,9	70,7	83,3	95,0	106,3	116,5	126,6	136,2
$q\Sigma h_\nu$	to	1	3,60	6,88	9,52	11,83	13,93	15,89	17,74	19,49	21,77	22,78
		1,5	2,40	4,59	6,34	7,88	9,35	10,59	11,82	12,99	14,11	15,19

Avînd în vedere premisele simplificatoare acoperitoare, s-a luat un coeficient de siguranţă relativ redus, şi anume 1,5. Coeficientul de siguranţă are de preluat diferenţa dintre lungimile calculate şi cele realizabile, neatenţia sondorului-şef în ceea ce priveşte cuantumul apăsării pe sapă, jocul diametrului în gaura de sondă, rectilinitatea şi uzura prăjinilor grele, efectul circulaţiei ş.a. Coeficientul de siguranţă se poate aplica direct asupra distanţei dintre noduri, cum s-a făcut în tabelul 4, indirect apăsînd pe sapă numai cu o parte (2/3—3/4) din greutatea ansamblului de prăjini grele şi combinînd aceste două procedeuri.

În ceea ce priveşte instabilitatea de rotaţie, tot pentru prăjini de 4 1/2 in. ca exemplu şi folosind tabela 4, s-a alcătuit tabela 5, în care s-au trecut valorile critice pentru fiecare buclă cu noduri stabilizate, servindu-ne de formulele de interpolare stabilite mai sus.

Tabela 5

Turaţiile critice ale prăjinilor grele de 4 1/2 in cu noduri stabilizate.

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l_ν	32,3	29,4	23,6	20,7	18,9	17,6	16,5	15,7	15,0	14,5
$\alpha = h_\nu/h_1$	1	1,31	2,64	3,28	3,87	4,41	4,93	5,41	5,88	6,33
$z^{1/3}$	2,00	1,82	1,46	1,28	1,17	1,09	1,02	0,97	0,93	0,90
$n_0 = n_{01} / z^{2/3}$	18,8	22,6	35,1	15,5	54,8	63,4	71,5	79,1	86,4	93,4
n	16,75	19,1	31,2	41,3	50,2	58,6	66,5	73,8	80,9	87,8

Tabela 6

Funcţiile critice ale prăjinilor grele de 4 1/2 in cu noduri la distanţă 14.5 m

α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha z^{2/3}$	0,896	1,792	2,69	3,58	4,48	5,38	6,27	7,11	8,06	8,96
n	92,5	91,6	90,7	89,8	88,9	88,0	87,3	86,3	85,4	84,5

Efectul dăunător al forței centrifuge se evită alegînd o turație intermediară între două turații critice de ordin consecutiv. Din citirea tabelei 5 se observă că în cazul unei compresiuni pe o mare lungime, fiecare buclă are o altă turație critică, încît devine foarte greu să se evite rezonanța.

Dacă amplasăm stabilizatori la egală distanță, fie cazul cel mai defavorabil al celei de-a zecea buclă de lungime 14,5 m, se obțin turațiile critice din tabela 6. Observăm că turația critică scade o dată cu comprimarea buclei, cea de-a zecea buclă fiind mai lentă cu sub 9%.

Prin urmare, pentru a evita turațiile critice este preferabil ca stabilizatorii să fie amplasați la distanțe egale, ceea ce este mai practic. Distanța dintre noduri trebuie să fie mai mică decît lungimea de flambaj a buclei celei mai comprimate (de la talpa sondei) și poate fi aleasă cu ajutorul formulelor de interpolare menționate (cu care se pot face și anumite extrapolări), încît să prezinte turațiile critice cele mai convenabile.

Efectul dăunător al turațiilor critice din timpul forajului este manifest mai ales pentru bucla din vecinătatea imediată a sapei și care face să oscileze axul de rotație al sapei.

Primită la redacție la 14 iunie 1965.

BIBLIOGRAFIE

1. N. S. PÂRVULESCU, *Sur les contributions aux flambage et vibrations des tijes verticales lourdes et sveltes*, în l'Académie R.P.R., Bul. de la Sect. Scientifique, **XXX**, *9*.
2. — *Неустойчивость бурильной колонны*, Журнал прикладной механики, **1**, *2* (1956).
3. — *On the instability of drill pipe strings*, Rev. méc. appl., I, *2* (1956).
4. — *Despre flambajul tijelor sub acțiunea unei compresiuni date de o parte din greutatea proprie*, St. cerc. mec. și metalurg., **III**, *3—4* (1952).
5. — *Flambajul tijelor sub acțiunea unei compresiuni date de o parte din greutatea proprie*, St. cerc. mec. apl., *1—2* (1954).
6. — *Flambajul tijelor verticale încastrate la extremitatea inferioară și adîncimile critice ale pompelor cu prăjini tubulare*, St. cerc. mec. apl., *1—2* (1955).
7. — *Formule de flambaj, pentru prăjini grele*, St. cerc. mec. apl., **X**, *2* 1959 și Rev. méc. appl., **V**, *2* (1960).
8. FR. A. WILLERS, *Das Knichen schwerer Gestänge*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, **21**, *1* (1941).
9. A. LUBINSKY, *A study of the buckling of rotary drilling string*, in *Drilling and Production Practice*, 1950, A.P.I., 1951, p. 128.
10. A. TIMOSCHENKO, *Théorie de la stabilité élastique*, Paris, 1947, p. 110.
11. N. S. PÂRVULESCU, *Instabilitatea prăjinilor grele în rotație*, St. cerc. mec. apl., **VII**, *4* (1956).
12. — *Integrarea ecuației liniei elastice în instabilitatea de rotație a tijelor verticale*, St. cerc. mec. apl., **VI**, *3—4* (1955).

STUDII

STUDIU STATISTIC AL DISTANȚEI DINTRE FISURI ȘI AL DESCHIDERII LOR LA ELEMENTE ÎNCOVOIATE DE BETON ARMAT[1])

de GEORGETA STĂNCULESCU și MARIANA IONESCU

Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor, București

539.4

Studiul reprezintă o aplicație a calculului statistic la prelucrarea rezultatelor încercărilor efectuate în ultimii ani la INCERC și în unele institute de cercetări în construcții din alte țări privind fisurarea grinzilor din beton armat solicitate la încovoiere.
Printr-un calcul de corelație se determină influența raportului dintre diametrul armăturii și procentul de armare asupra distanței dintre fisuri. De asemenea se stabilește influența distanței dintre fisuri, a efortului în armătură și a rezistenței la întindere a betonului asupra deschiderii fisurilor.
Studiul se bazează pe determinările făcute pe grinzi grupate în funcție de tipul armăturii, forma secțiunii și laboratorul în care s-au făcut experimentările.
Expresiile comparabile obținute pentru distanța dintre fisuri atît din încercările de la INCERC, cît și din străinătate arată că liniile de regresie pentru diferitele grupe de grinzi sînt estimații ale uneia și aceleiași linii de regresie teoretică, a cărei ecuație este stabilită în cadrul acestui studiu.

1. INTRODUCERE

Calculul la starea-limită de deschidere a fisurilor la elementele de beton armat supuse la încovoiere necesită cunoașterea modului în care au loc fisurarea acestor elemente sub acțiunea încărcărilor și influența principalilor parametri de care depind distanța și deschiderea fisurilor: caracteristicile armăturii, ale betonului și forma secțiunii.

---

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée, **11**, *1* (1966) (în limba engleză).

Obiectul prezentei lucrări îl formează sistematizarea, prelucrarea şi extinderea studiului statistic al rezultatelor de la încercările efectuate la noi şi în străinătate, atît în ce priveşte distanţa între fisuri, cît şi deschiderea lor, la grinzi cu diferite forme de secţiune şi tipuri de armătură.

Folosirea la noi în ţară pe o scară din ce în ce mai largă a oţelurilor superioare sub formă de bare cu profil periodic ca armătură pentru betonul armat şi introducerea metodei de calcul la stări-limită au impus studiul deschiderii excesive a fisurilor, deoarece acestea pot conduce la o exploatare în condiţii nenormale şi la o degradare rapidă a construcţiilor.

Dintre stările-limită ale exploatării normale, starea-limită de deschidere a fisurilor defineşte cel mai bine durabilitatea betonului, condiţie de o însemnătate deosebită pentru construcţiile din beton armat [12].

Calea cea mai indicată pentru abordarea problemei betonului armat în general, după părerea profesorilor M. F. Campus [7], A. A. Gvozdiov [6] şi M. Tihi [8], cît şi a problemei fisurării betonului armat în special, după opinia profesorului H. Rüsch [2], şi L. Brice [13], constă în studiul statistic al unui cît mai mare număr de rezultate experimentale, dată fiind dispersia lor deosebit de mare, provocată de natura fenomenelor ce se petrec într-o structură atît de complexă şi de eterogenă ca aceea a betonului armat.

Metodele statistice pot folosi pentru a pune mai bine în evidenţă corelaţiile dintre datele iniţiale şi caracteristicile materialelor, pe de o parte, şi rezultatele experimentale, pe de altă parte.

Înainte de a se efectua studiul fisurilor la scară mare pe construcţii, în diverse condiţii de exploatare, s-a considerat util şi reprezentativ pentru aceste cercetări să se urmărească problema fisurării în laborator în condiţii de experimentare controlate.

Cercetările prezentate în lucrarea de faţă au urmărit studiul legăturii dintre distanţa dintre fisuri sau deschiderea lor şi un număr de factori depinzînd de armătură şi de beton, a căror influenţă esenţială asupra fisurării a fost pusă în evidenţă şi prin studii anterioare [2]).

În acest scop s-a aplicat la prelucrarea rezultatelor încercărilor a 329 de grinzi din beton armat un calcul de corelaţie simplă şi multiplă şi de comparare a expresiilor obţinute, formîndu-se diferite grupe după tipul de oţel, forma secţiunii şi laboratorul în care au fost efectuate încercările, şi anume :

— bare de armătură cu profil periodic laminate la cald (PC), cu profil periodic torsionate la rece (TOR) sau bare netede (OL)[3]);

— secţiuni dreptunghiulare sub formă de T sau de plăci ;

— laboratoare de încercări în construcţii din Bucureşti [1] München [2], Dresda [3], Lisabona [4] sau Stockholm [5].

---

[2]) G. Stănculescu şi M. Ionescu, *Studiu privind formarea şi deschiderea fisurilor la elemente de beton armat supuse la încovoiere*, INCERC, decembrie 1962.

[3]) Prescurtări de notaţii folosite în STAS 438—61 [16].

2. MATERIALE UTILIZATE

2.1. OȚELUL

Oțelurile folosite la INCERC au fost din cele fabricate la noi în țară în anii 1958—1962. Unele caracteristici ale acestor oțeluri diferă de la an la an.

În general, oțelurile folosite au corespuns claselor CAER A. I pentru barele netede, A.II și A.III pentru cele cu profil periodic laminate la cald cu nervuri transversale drepte, ca și pentru barele torsionate, A.II, A.III și A.IV pentru barele cu profil periodic laminate la cald cu nervuri oblice.

Pînă în 1961 nervurile transversale erau mai rare și mai proeminente decît se prevede la barele din clasele CAER.

Drept caracteristică a armăturii s-au luat valorile $\sigma_{0,2}$, care reprezintă limita de curgere la oțelurile cu palier de curgere sau limita de curgere convențională la cele fără palier de curgere.

La INCERC s-au folosit oțeluri cu profil periodic laminate la cald cu :

— nervuri transversale drepte (asemănător cu Queri)[4]), avînd Ø 16—25 mm ;

— nervuri elicoidale rare Ø 18—30 mm ;

— nervuri elicoidale dese (asemănător cu Nori)[4]) Ø 16—26 mm ;

— nervuri brăduleț Ø 18 mm.

Calitatea acestor oțeluri a corespuns, conform STAS 438-61, la PC 52 cu σ_c min = 3 400[5]) kg/cm² și la PC 60 cu σ_c min =4 000 kg/cm² (oțeluri cu palier de curgere) și la un oțel produs în fază experimentală de tipul oțelului sovietic 30 HG2S cu $\sigma_{0,2} \geqslant 6\,000$ kg/cm².

Oțelurile cu profil periodic torsionate la rece cu 2 sau 4 nervuri elicoidale au avut diametrele de 6—20 mm și cele cu două nervuri elicoidale și nervuri transversale (asemănător cu Rippentor)[4]) diametre de 16—18 mm. Calitatea lor a corespuns, conform STAS 438—61, la TOR 47 cu $\sigma_{0,2}$ min =3 500 kg/cm² și la TOR 57 cu $\sigma_{0,2}$ min =4 200 kg/cm².

Oțelul-beton rotund a avut diametrul de 10—30 mm și σ_c min $\geqslant$ 2 200 kg/cm², corespunzător STAS-ului 438-61 pentru calitatea OL 38. Aceeași calitate de oțel s-a folosit pentru etrieri și bare de montaj.

La încercările efectuate la München [2] s-au folosit oțeluri de producție specială, în majoritatea cazurilor cu limita de curgere mai mare decît 5 000 kg/cm² și uneori oțel din comerț cu limita de curgere de minimum 4 000 kg/cm².

Sînt de remarcat în special limitele de curgere ridicate la barele netede cu palier de curgere între 4 760 și 5 430 kg/cm².

Oțelurile cu profil periodic laminate la cald au fost cu :

— nervuri transversale drepte (Queri) cu Ø 16 și 32 mm ;

— nervuri elicoidale dese (Nori) cu Ø 8—32 mm ;

— (Noreck)[4]) Ø 16—26 mm ;

— (Hi-Bond)[4]) Ø 26 mm.

[4]) Prescurtări de notații folosite în lucrarea lui H. Rüsch și G. Rehm [2].

[5]) În lucrare s-a folosit notația kg, subînțelegîndu-se prin aceasta kgf, conform STAS 739—58.

Oţelurile cu profil periodic torsionate la rece cu patru nervuri elicoidale (TOR) au avut Ø 8—26 mm şi (Rippentor)[4]) Ø 26 mm.

Pentru etrieri s-a folosit oţel-beton rotund II, conform DIN 1 045.

La încercările efectuate la Dresda [3] s-a folosit oţel-beton rotund I Ø 14—36 mm cu $\sigma_c = 2\,485 - 2\,900$ kg/cm², conform TGL 11 422 [17].

La încercările efectuate la Lisabona [4] s-au folosit:

— oţeluri cu profil periodic laminate la cald, cu nervuri oblice Ø 8 şi 20 mm cu $\sigma_{0,2} = 4\,440$ şi 4 720 kg/cm²;

— oţeluri cu profil periodic torsionate la rece, Ø 8 şi 20 mm (TOR 40), cu $\sigma_{0,2} = 4\,360$ şi 4 880 kg/cm² şi (TOR 60) cu $\sigma_{0,2} = 6\,360$ şi 6 520 kg/cm²;

— bare de oţel neted torsionate Ø 5,6 şi 8 mm cu $\sigma_{0,2} = 4\,750 - 5\,040$ kg/cm².

La încercările efectuate la Stockholm [5] s-au folosit:

— bare cu profil periodic laminate la cald cu nervuri drepte (Kam 40)[6]) Ø 19 mm cu $\sigma_c = 4\,240 - 4\,420$ kg/cm²;

— oţel cu profil periodic torsionat la rece, cu patru nervuri elicoidale, cu acelaşi diametru şi $\sigma_{0,2} = 4\,290 - 4\,950$ kg/cm².

2.2. BETONUL

Grinzile încercate la INCERC au fost executate din beton obişnuit sau uşor.

Marca betonului a variat între 200 şi 400 kg/cm², la grinzile din beton obişnuit, şi între 200 şi 300 kg/cm², la cele din beton uşor.

La cîteva grinzi şi plăci, marca betonului a fost de circa 150 kg/cm².

Betoanele s-au confecţionat cu ciment Portland PZ 400 şi PZ 500, cu agregate pînă la 15 mm.

În cazul betoanelor uşoare s-a adăugat şi nisip de carieră, obţinîndu-se pentru granulitul cu densitatea în grămadă de 750 kg/m³ o densitate aparentă a betonului la 28 de zile de circa 1 600 kg/m³.

Elementele s-au păstrat în aer în hala de încercări aproape o lună pînă la încercare.

Elementele încercate la München au fost executate din beton obişnuit de marca proiectată 120; 160; 225; 300 şi 450 kg/cm², realizîndu-se rezistenţe ale betonului între 120 şi 515 kg/cm² la data încercării elementelor, în general la o lună şi uneori la circa 8, 14 sau 40 zile.

Betoanele acestea s-au confecţionat cu ciment Z 225 şi cu agregate pînă la 15 mm.

După decofrarea efectuată la una sau la două zile vechime, elementele s-au păstrat 7 zile acoperite cu prelate umede şi apoi în aer, în interior, pînă la încercare.

Elementele încercate la Dresda au fost din beton obişnuit, de marcă proiectată 120, 160 şi 450 kg/cm², realizîndu-se rezistenţe ale betonului între 121 şi 558 kg/cm² la 28 de zile vechime.

---

[6]) Notaţie folosită în lucrarea lui G. Wästlund şi P. O. Jonsson [5].

Betoanele acestea s-au confecționat cu ciment Z 325 și agregate pînă la 30 mm. La betonul de marcă 450 kg/cm^2 s-au folosit ca agregate nisip și piatră spartă.

Probele s-au păstrat 7 zile de la turnare acoperite cu prelate umede și restul de timp în aer, în interior pînă la încercare, la vechimea de o lună.

Grinzile încercate la Lisabona au fost executate din beton obișnuit, cu rezistențe între 260 și 298 kg/cm^2 la 28 zile vechime.

Aceste betoane s-au confecționat cu ciment portland și cu agregatul mare pînă la 13, 19 sau 38 mm, în funcție de scara probelor : 4, 2,5 și 1.

Grinzile s-au încercat între 35 și 42 de zile vechime și au fost păstrate pînă atunci într-o atmosferă cît mai saturată posibil.

Grinzile încercate la Stockholm au fost din beton de marcă proiectată 300 ; 340 ; 400 kg/cm^2, realizîndu-se rezistența betonului de 281—407 kg/cm^2 la data încercării la 28 de zile vechime.

Betoanele s-au confecționat cu ciment standard Slite și agregate pînă la 32 mm.

Probele s-au păstrat 7 zile în cofraj acoperite cu saci umezi, după care s-au păstrat decofrate 21 de zile în aer, în laborator, pînă la încercare. Două dintre probele decofrate după patru zile s-au păstrat pînă la 27 de zile în apă.

3. DESCRIEREA PROBELOR

În tabela 1, conținînd ansamblul probelor utilizate, este arătat numărul de probe încercate pentru fiecare tip de secțiune de grindă, calitate de oțel și beton.

De asemenea este arătat pentru fiecare grupă de grinzi cîte probe s-au considerat în calculul statistic la distanța dintre fisuri sau la deschiderea fisurilor.

3.1. ÎNCERCĂRI INCERC

Din diferitele studii efectuate în cadrul Laboratorului de proprietăți fizico-mecanice ale betonului armat de la INCERC în anii 1958—1963, privind grinzile din beton armat obișnuit sau din beton ușor armat cu agregate din granulit solicitate static, s-au ales 225 de grinzi și plăci care s-au împărțit în șapte grupe după tipul de oțel și forma secțiunii.

Grinzile dreptunghiulare au avut toate secțiunea transversală de 15 × 25 cm și deschiderea de 3 și 5 m.

Grinzile *T* cu deschiderea de 6 m au avut înălțimea și lățimea tălpii de 60 cm, grosimea nervurii de 10 cm și înălțimea plăcii de 8 cm. Grinzile *T* încercate în 1961 și 1963 au fost la scara 1/2 față de precedentele. Unele dintre ele au avut lățimea nervurii de trei ori mai mare. Considerînd aplicabilă legea similitudinii [4], în studiul statistic efectuat s-au introdus distanțele dintre fisuri și deschiderile lor cu valorile măsurate

Tabela 1

ANSAMBLUL PROBELOR UTILIZATE

Nr. crt.	Autorul	Secţiunea probei	Calitatea oţelului	Beton obişnuit				Beton uşor			Total încercări
				Distanţa dintre fisuri		Deschiderea fisurilor		Distanţa dintre fisuri	Deschiderea fisurilor		
				med.	max.	med.	max.	med.	med.	max.	
1	INCERC		PC	54	—	56	56	20	23	24	80
2			TOR	30	—	37	37	9	7	10	47
3			OL	34	—	27	34	12	10	14	52
4			TOR şi PC	15	—	15	15	2	2	2	17
5			OL	7	—	7	7	1	2	2	9
6			TOR	5	—	5	5	5	5	5	10
7			OL	6	—	7	7	3	3	3	10
										Total	225
8	RÜSCH		PC	33	—	33	19	—	—	—	19
9			TOR	16	—	16	8	—	—	—	8
10			OL	7	—	10	6	—	—	—	6
11			TOR şi PC	16	—	16	10	—	—	—	10
12			OL	13	—	13	8	—	—	—	8
13			PC	8	—	8	4	—	—	—	4
14			TOR	10	—	10	5	—	—	—	5
15			OL	2	—	2	1	—	—	—	1
										Total	61
16	SCHRÖDER		OL	13	—	—	14	—	—	—	14
17	F. BORGES		PC şi TOR	6	—	—	6	—	—	—	6
18			OL	6	—	—	1	—	—	—	6
										Total	12
19	WÄSTLUND		PC şi TOR	—	6	—	6	—	—	—	6
20			OL	—	11	—	11	—	—	—	11
										Total	17

pe grinzile T la scara 1/2 și cu valorile măsurate împărțite la coeficientul de asemănare 2 pentru grinzile T la scara 1/1.

Plăcile au avut secțiunea transversală de 7 × 42 cm și deschiderea de 2,40 m.

Elementele au fost simplu armate.

Majoritatea elementelor armate cu bare cu profil periodic n-au fost prevăzute cu ciocuri la capete. Ancorarea lor a fost suficient de bună, deoarece s-au măsurat alunecări la capete de ordinul sutimilor de milimetri și numai la eforturi în apropierea ruperii.

Bare ridicate au avut numai trei grinzi T.

Grinzile au fost prevăzute cu etrieri de obicei mai rari pe zona de moment constant, iar patru grinzi au fost complet fără armătură transversală.

Procentul de armare μ a variat în general între 0,4 și 3,0%, la elementele armate cu bare cu profil periodic, și între 0,35 și 4,5%, la cele cu bare netede.

Grinzile s-au încercat static cu două forțe concentrate la treimea deschiderii, în trepte de 0,1 P_r. De cele mai multe ori, în jurul valorii de 0,6 M_r s-au descărcat pînă la treapta inițială și s-au reîncărcat în aceleași trepte pînă la rupere.

La grinzile încercate pentru aderența din încovoiere, armătura rămînea descoperită pe două porțiuni de 10 cm lungime, iar forțele erau aplicate în dreptul marginilor exterioare ale acestor porțiuni.

Apariția, progresarea și deschiderea fisurilor s-au observat cu ajutorul unei lupe cu gradații de 0,1 mm, pe fețele laterale ale grinzilor albite cu var, în dreptul barelor de armătură.

La plăci, distanțele și deschiderile de fisuri au fost măsurate în dreptul barelor de armare de la margini.

3.2. ÎNCERCĂRI H. RÜSCH ȘI G. REHM

Grinzile dreptunghiulare au avut secțiunea transversală de 30 × × 62,5 cm și deschiderea de 4 m.

Grinzile T au avut aceeași deschidere, înălțimea de 62,5 cm, grosimea tălpii de 12,5 cm, lățimea nervurii de 20 cm și lățimea tălpii de 60 cm.

Plăcile au avut lățimea de 95 cm, grosimea de 15 sau 30 cm și deschiderea de 4 m.

În total s-au ales pentru calculul statistic 61 de elemente.

Elementele au fost simplu armate, în unele cazuri cu armătură transversală nesimetrică pe cele două jumătăți ale grinzii, alcătuită din etrieri și bare ridicate și fără etrieri pe zona de moment constant, cu excepția a patru grinzi.

Majoritatea elementelor armate cu bare cu profil periodic n-au fost prevăzute cu ciocuri la capete.

Procentul de armare a variat între 0,3 și 2%, la elementele armate cu bare cu profil periodic, și între 0,3 și 1,5%, la cele cu bare netede.

Grinzile s-au încercat static cu două forţe concentrate la 1/4 din deschidere, iar la plăci forţele concentrate au fost înlocuite cu cîte două forţe, distanţate la 40 cm între ele.

Treptele de încărcare au fost în general astfel alese, încît să corespundă la o creştere a efortului în oţel de 500 kg/cm^2, calculat în stadiul II cu $n = 15$.

La un efort în armătură de aproximativ 2 500 kg/cm^2 s-au aplicat 14 repetări de încărcare-descărcare, pînă la greutatea proprie a grinzii şi a dispozitivului de încărcare.

Fisurile s-au observat pe trei feţe ale elementului cu un microscop cu diviziuni de 0,025 mm.

În calculul statistic s-au considerat fisurile apărute la prima încărcare pe feţele laterale ale grinzilor în dreptul armăturilor şi în dreptul barelor de armătură de margine pe faţa întinsă a plăcilor, ca şi în cazul încercărilor efectuate la INCERC.

3.3. ÎNCERCĂRI S. SCHRÖDER

Grinzile au avut secţiunea transversală dreptunghiulară, cu dimensiunile de 20 × 44 cm sau 20 × 48 cm şi deschiderea de 3,0, 4,0 şi 6,0 m.

Procentul de armare a variat între 0,6 şi 6,3%. În total au fost alese 14 grinzi pentru calculul statistic.

Încărcarea a constat din două forţe concentrate simetrice faţă de mijlocul grinzii.

Unele grinzi au fost încărcate continuu pînă la rupere în 10 sau 12 trepte, iar altele au fost descărcate după fiecare treaptă pînă la încărcarea iniţială.

Fisurile s-au observat cu ajutorul unei lupe cu o precizie de măsurare de 1/100 mm.

3.4. ÎNCERCĂRI J. F. BORGES, J. ARGA, E. LIMA

Grinzile au fost de secţiune *T*. Cele mai mari au avut dimensiunile următoare : înălţimea 100 cm, grosimea tălpii 15 cm, lăţimea nervurii 20 cm, lăţimea tălpii 60 cm şi deschiderea 5,70 m, pe cînd celelalte au avut dimensiunile reduse la scara 1/2,5 sau 1/4. În total au fost alese 12 grinzi.

Grinzile au fost simplu armate, cu un procent de armare de 0,5%, în cazul armării cu bare cu profil periodic, şi între 0,5 şi 1,9%, în cazul armării cu bare netede.

Armătura transversală, compusă din etrieri şi bare longitudinale, nu a fost dispusă simetric pe ambele jumătăţi ale grinzii.

Grinzile s-au încercat static cu două forţe concentrate la 1/4 din deschidere cu ciclul de încărcare-descărcare, crescînd la fiecare ciclu cu 1/4 din încărcarea de exploatare.

În studiul statistic efectuat s-au introdus distanţele între fisuri şi deschiderile lor cu valorile măsurate pe grinzile *T* la scara 1/1 şi cu valorile măsurate înmulţite cu 2,5 şi 4 pentru celelalte grinzi.

3.5. ÎNCERCĂRILE G. WÄSTLUND ȘI PER OLOV JONSSON

Grinzile au avut secțiune T cu înălțimea de 33 cm, grosimea tălpii de 8 cm, grosimea nervurii de 16 cm și lățimea tălpii de 55 cm. La două grinzi, lățimea nervurii a fost dublă și la una înălțimea grinzii a fost de 62,7 cm. Deschiderea a fost de 3,00 m la toate grinzile.

Grinzile au fost simplu armate, cu ciocuri, etrieri și bare ridicate în cazul armării cu bare netede și numai cu etrieri și fără ciocuri în cazul armării cu bare cu profil periodic.

La toate cele 17 grinzi alese pentru calculul statistic pe zona de moment constant, grinzile nu au fost prevăzute cu etrieri.

Procentul de armare a fost de 1% pentru grinzile armate cu profil periodic și a variat între 0,6 și 3,5% la cele armate cu bare netede.

Grinzile s-au încercat static cu două forțe concentrate la treimea deschiderii, cu trepte de 1/24, 1/12 și 1/6 din încărcarea de rupere și cu descărcări la 1/4, 1/2 și 3/4 din încărcarea de rupere.

Fisurile s-au observat cu un microscop cu o precizie de 1/100 mm.

4. STUDIUL STATISTIC AL DISTANȚEI DINTRE FISURI

4.1. VARIAȚIA DISTANȚEI DINTRE FISURI PE FIECARE PROBĂ

În fotografia din figura 1 se poate vedea de exemplu, aspectul unei grinzi T fisurate după rupere, încercate la INCERC. La această grindă armată cu bare torsionate se observă dezvoltarea caracteristică a fisurilor :

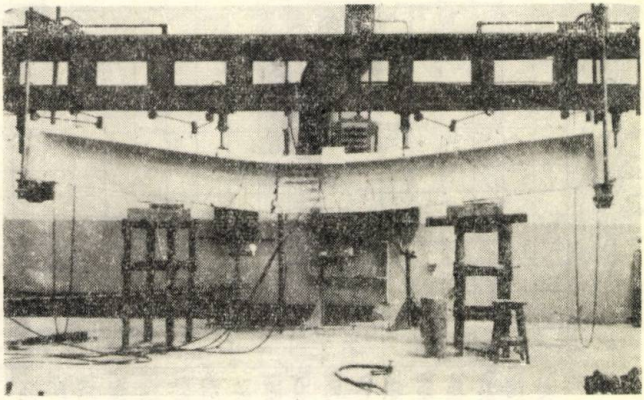


Fig. 1. — Aspectul grinzii t_2 după rupere (INCERC).

în dreptul armăturilor sînt numeroase și înspre mijlocul înălțimii nervurii sînt reunite în fisuri mai rare și mai pronunțate.

Pentru aceeași grindă, în figura 2 s-au prezentat fisurile de pe o față laterală cu marcarea lungimii fisurii și a treptei de încărcare cores-

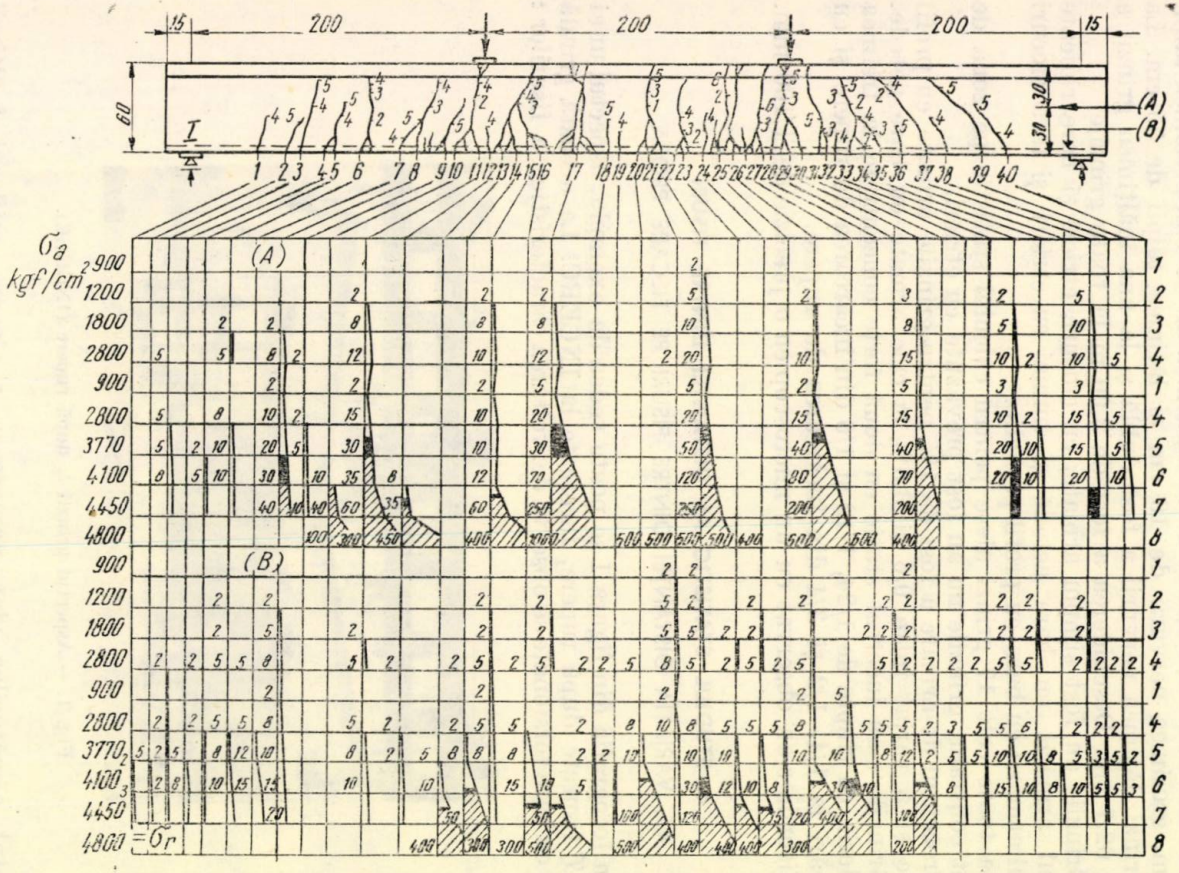


Fig. 2. — Releveul fisurilor și deschiderea lor pe fața laterală a grinzii t_2.

Deschiderea fisurilor în 1/100 mm. Dimensiunile în cm. Cifrele de lîngă fisuri și de pe ordonata din partea dreaptă reprezintă deschiderea fisurilor și respectiv treapta de încărcare. Citirea fisurilor efectuată la jumătatea înălțimii nervurii (*A*). Citirea fisurilor efectuată în dreptul armăturilor (*B*).

punzătoare. Sub fiecare fisură se poate urmări progresarea deschiderii fisurilor cu încărcarea, atît la nivelul armăturii, cît și la jumătate din înălțimea grinzii.

Eforturile în armătura la diferite trepte de încărcare s-au calculat pe baza prevederilor din normativul condiționat pentru calculul construcțiilor la stări-limită P. 8—62 [15].

În acest caz, la cedarea grinzii s-a produs și ruperea barelor torsionate, iar efortul în armătură s-a considerat egal cu rezistența la rupere a oțelului.

În figura 3 s-au reprezentat curbele de frecvență cumulate ale distanțelor dintre fisuri, măsurate pe zona de moment constant a aceleiași grinzi la două trepte de încărcare, care încadrează treapta de exploatare. Diagrama confirmă faptul cunoscut că distanțele dintre fisuri în dreptul armăturii se micșorează cu creșterea încărcării, dar numai pînă la o anumită limită. În cazul de față, această limită a fost tocmai treapta superioară pentru care s-a reprezentat frecvența relativă cumulată. La reprezentarea diagramei s-a folosit o rețea de probabilitate. Ordonatele acestei rețele sînt dispuse după o scară funcțională, astfel încît funcția de distribuție a legii normale se reprezintă printr-o dreaptă. Din diagramă rezultă că distanțele dintre fisuri la trepte de încărcare din ce în ce mai mari au o distribuție apropiată de cea normală (distribuția Gauss), punctele aliniindu-se destul de bine.

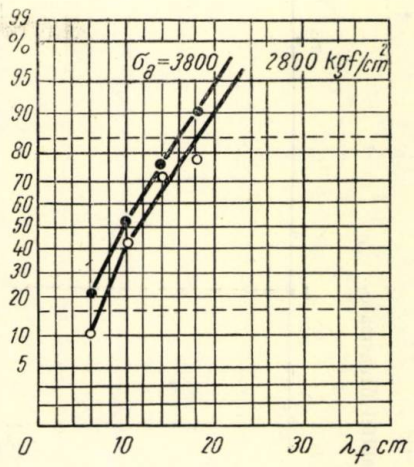


Fig. 3. — Curbele de frecvență cumulată (în %) ale distanței dintre fisuri din zona de moment constant la diferite trepte de încărcare la grinda t_2.

La exploatare, la o treaptă de încărcare corespunzătoare la 0,4—0,6 M_r, s-a admis din cele arătate mai sus că distribuțiile distanțelor dintre fisuri pe fiecare grindă sînt practic normale. În consecință, la studiul statistic al distanței dintre fisuri s-au considerat valorile medii ale acestora, stabilite pentru fiecare grindă, pe zona de moment constant, la aproximativ 0,5 M_r.

4.2. VERIFICAREA NORMALITĂȚII DISTRIBUȚIEI DISTANȚEI DINTRE FISURI PE GRUPE DE PROBE

Verificarea normalității distribuției parțiale λ_f. Analiza statistică a valorilor observate la încercări s-a efectuat cu ajutorul metodelor statistice, folosite în mod obișnuit. Aceste metode și fundamentarea teoretică sînt presupuse cunoscute și nu s-au descris în prezenta lucrare. Pentru studierea în amănunțime a metodelor aplicate în această lucrare s-a făcut referire la tratatele de statistică, ca, de exemplu, ale lui N. Rancu și L. Tövissi [10] și I. V. Dunin—Barkovski și N. V. Smirnov [11].

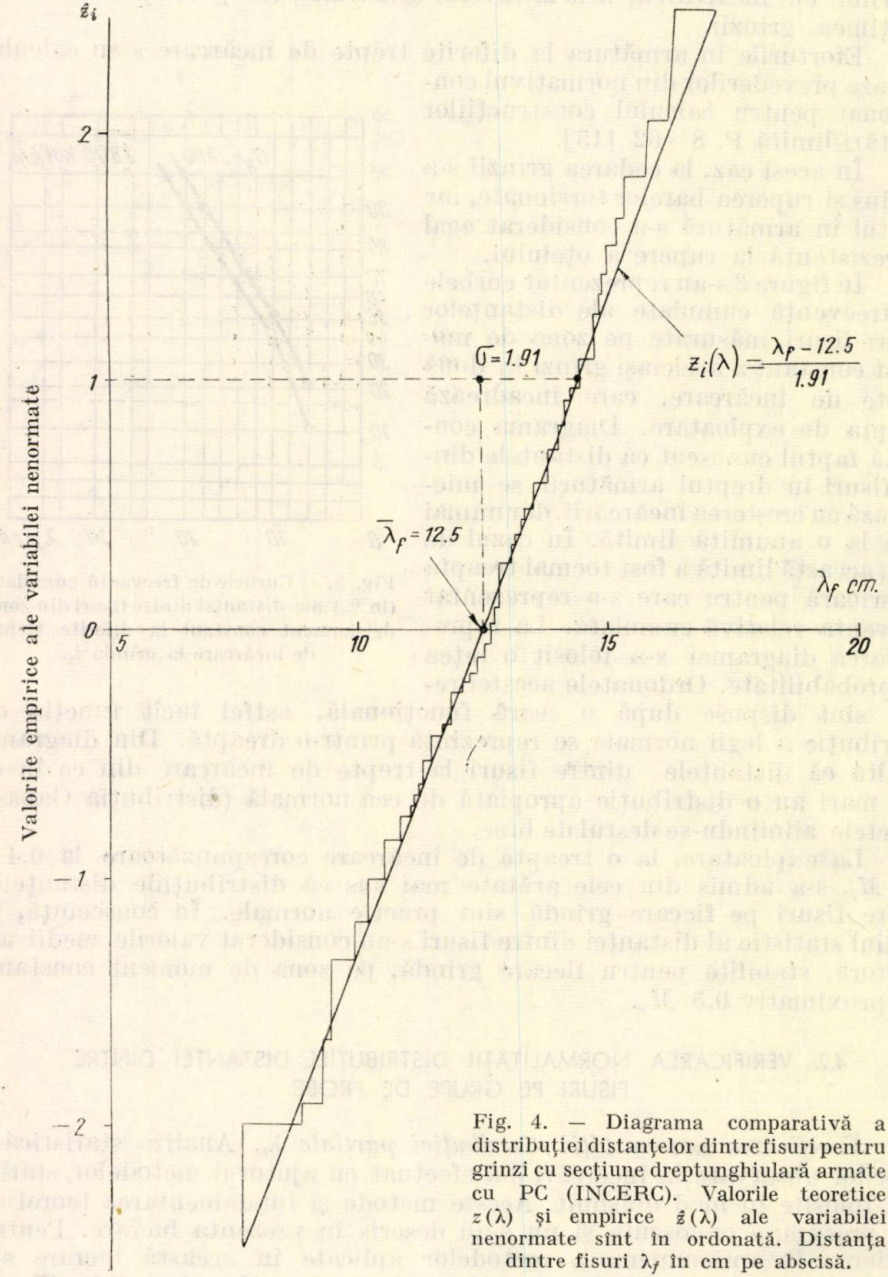


Fig. 4. — Diagrama comparativă a distribuției distanțelor dintre fisuri pentru grinzi cu secțiune dreptunghiulară armate cu PC (INCERC). Valorile teoretice $z(\lambda)$ și empirice $\hat{z}(\lambda)$ ale variabilei nenormate sînt în ordonată. Distanța dintre fisuri λ_f în cm pe abscisă.

Normalitatea distribuției valorilor distanței dintre fisuri, din zona de moment constant, pe grupe de probe, s-a verificat folosind metoda diagramelor pentru cele 5 grupe de grinzi încercate la INCERC și metoda abaterilor normate pentru toate grupele studiate [10], [11].

În figura 4 s-a reprezentat, pe baza metodei diagramelor, o linie dreaptă care corespunde distribuției valorilor teoretice normale a distanței dintre fisuri $z(\lambda)$ și o linie în trepte care corespunde valorilor empirice ale variabilei nenormate $\hat{z}(\lambda)$.

Deoarece cele două linii sînt apropiate, se poate admite că valorile distanțelor dintre fisuri se distribuie aproximativ normal la grupa considerată de grinzi de secțiune dreptunghiulară armate cu PC încercate la INCERC, dată ca exemplu.

Pentru aceleași 5 grupe de grinzi încercate la INCERC, în tabela 2 sînt date valorile $z = \frac{|z_i(\lambda) - \hat{z}_i(\lambda)|}{\sigma_{\hat{z}_i}}$, reprezentînd diferența valorilor empirice și teoretice raportată la abaterea medie pătratică, precum și valoarea $z_q = 1{,}96$, corespunzătoare unui nivel de semnificație $q = 5\%$

Tabela 2

Verificarea normalității distanței dintre fisuri (INCERC)

Secțiunea probei	Oțelul	Nr. probelor	Intervalul λ_f cm	$\bar{\lambda}_f$ cm	σ_λ cm	z	$z_{0,05}$
	PC	74	7,8—16,3	12,5	1,91	1,587	<1,96
	TOR	39	8—17,8	12,8	2,765	1,357	<1,96
	OL	46	8—20,4	14,3	3,5	1,727	<1,96
	TOR și PC	17	5,3—12,1	8,6	2,12	0,80	<1,96
	OL	8	10—19,8	13,9	3,48	1,21	<1,96

[10]. Deoarece această valoare nu este depășită de mărimea z calculată, reiese că distribuția valorilor distanței dintre fisuri este normală la toate aceste cinci grupe.

În tabela 3 sînt prezentate, pentru toate grupele de grinzi considerate în studiu, abaterile normate maxime ale distanței dintre fisuri, precum și valorile t pentru probabilitatea $P = 0{,}975$ și numărul gradelor de libertate $n - 1$ [10].

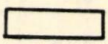
În majoritatea cazurilor, abaterile normate maxime în valoare absolută sînt mai mici decît t și rezultă că distribuția parțială a valorilor λ_f se poate considera normală. Excepție au făcut două-trei grupe, la care cîte una sau două valori, notate în paranteză, nu au îndeplinit această condiție, fiind mai mari decît t.

Verificarea normalității distribuției bidimensionale λ_f și $\frac{d}{\mu}$. Din studiile efectuate anterior [2], [7], ca și din datele din literatură, a rezultat

[7] G. Stănculescu, M. Ionescu, *Studiu privind proprietățile fizico-mecanice ale betonului armat*, INCERC, decembrie 1963.

Tabela

Verificarea normalităţii distribuţiei distanţei dintre

Autorul	Secţiunea probei	Oţelul	Nr.	Intervalul λ_f cm	$\bar{\lambda}_f$ cm	σ_λ cm
INCERC		PC	74	7,8—16,3	12,5	1,91
		TOR	39	8—17,8	12,8	2,765
		OL	46	8—20,4	14,3	3,5
		PC şi TOR	17	5,3—12,1	8,6	2,12
		OL	8	10 —19,8	13,9	3,48
INCERC + RÜSCH		TOR	20	6,0—22,4	11,7	4,62
		OL	11	6,7—23,0	11,6	5,03
RÜSCH		PC	33	6,8—19,8	11,4	2,87
		TOR	16	7,9—17,8	12,8	2,68
		OL	7	8,9—18,2	13,1	9,07
		PC şi TOR	16	6,4—10,8	8,8	1,36
		OL	13	7,6—13,6	10,3	1,56
		PC	8	10,4—14,4	11,7	1,36

3

fisuri şi deschiderii fisurilor

$\frac{\lambda-\overline{\lambda}}{\sigma_\lambda}$	$t_{(0,975;\ f)}$	Nr.	Intervalul α_f mm	$\overline{\alpha}_f$ mm	σ_α mm	$\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{\sigma_\alpha}$	$t_{(0,975;\ f)}$
1,98 (2,41) (2,46)	1,995	79	0,02—0,36	0,12	0,06	1,70 (2,89) (3,23) (4,08)	1,999
1,80	2,025	44	0,03 —0,30	0,14	0,07	1,55	2,017
1,80	2,015	37	0,02 —0,14	0,06	0,03	1,87 (2,50)	2,025
1,64	2,12	17	0,03 —0,08	0,05	0,02	1,55	2,12
1,69	2,36	9	0,014—0,05	0,037	0,014	1,64	2,31
1,71 (2,32)	2,09	20	0,045—0,18	0,099	0,039	2,08	2,09
1,61 (2,26)	2,23	12	0,03 —0,096	0,051	0,03	1,7	2,20
1,67 (2,92)	2,04	33	0,07 —0,16	0,097	0,023	1,31 (2,19) (2,62)	2,04
1,94	2,13	16	0,07 —0,17	0,12	0,03	1,65	2,13
2,22	2,31	10	0,08 —0,32	0,17	0,065	2,36	2,31
1,76	2,13	16	0,06 —0,13	0,09	0,024	1,68	2,13
2,11	2,18	13	0,07 —0,22	0,13	0,04	2,2	2,18
1,99	2,365	8	0,094—0,136	0,11	0,016		

Autorul	Secţiunea probei	Oţelul	Nr.	Intervalul λ_f cm	$\bar{\lambda}_f$ cm	σ_λ cm
SCHRÖDER		OL	13	10,1—18,5	13,7	2,56
BORGES		PC şi TOR	6	7,6—11,8	9,9	1,68
		OL	6	13,7—27,4	19,8	5,22
WÄSTLUND		PC şi TOR	6	14,5—18,2	16,68	1,38
		OL	11	11,2—42,0	23,8	8,14

că o influenţă mai evidentă asupra distanţei dintre fisuri o au nu numai profilul barelor de armătură, dar şi diametrul şi procentul de armare, redate prin raportul $\frac{d}{\mu}$.

O influenţă mai puţin evidentă au prezentat tipul de profil periodic, marca şi tipul de beton.

Intensitatea corelaţiei dintre cele două variabile considerate λ_f şi $\frac{d}{\mu}$, indicată de coeficientul de corelaţie, este justă numai dacă distribuţia bidimensională este normală.

O primă condiţie cu privire la normalitatea distribuţiei bidimensionale este ca distribuţiile parţiale ale lui λ_f sau $\frac{d}{\mu}$ să fie normale.

Distribuţia valorilor distanţelor dintre fisuri s-a arătat mai înainte că este normală. Pentru verificarea normalităţii distribuţiei valorilor $\frac{d}{\mu}$ s-a verificat dacă abaterile normate

$$\frac{\frac{d}{\mu} i - \frac{\overline{d}}{\mu}}{\sigma_{\frac{d}{\mu}}}$$

tabela 3 (continuare)

$\frac{\lambda - \bar{\lambda}}{\sigma_\lambda}$	$t_{(0,975;\, f)}$	Nr.	Intervalul α_f mm	$\bar{\alpha}_f$ mm	σ_α mm	$\frac{\alpha - \bar{\alpha}}{\sigma_\alpha}$	$t_{(0,975;\, f)}$
1,8 (4,02)	2,16	14	0,063—0,189	0,11	0,04	1,92	2,16
2,33	2,57	6	0,20 —0,30	0,25	0,045	0,05	2,57
1,46	2,57						
1,59	2,57	6	0,09 —0,14	0,11	0,017	1,51	2,57
2,24	2,28	11	0,06—0,18	0,12	0,031	1,94	2,28

sînt mai mici decît valorile $t_{(0,975;\, f)}$ din tabela distribuției Student pentru probabilitatea $P = 0,975$ și numărul gradelor de libertate $f = n-1$ [10].

La toate grupele de grinzi, abaterile normate au fost mai mici în valoare absolută decît $t_{(0,975;\, f)}$, așa încît distribuția parțială a variabilei $\frac{d}{\mu}$ s-a considerat normală. Au făcut excepție cîteva valori la :

— grinzile dreptunghiulare : dintre cele încercate la INCERC, trei armate cu PC și una cu OL ; dintre cele încercate de Schröder, una armată cu bare netede ;

— grinzile T : dintre cele încercate de Rüsch sau F. Borges, cîte una armată cu bare netede.

Pentru verificarea normalității bidimensionale s-a luat drept criteriu compararea valorii $\chi^2_{(i)}$, calculată cu valorile corespunzătoare ale distribuției teoretice pentru fiecare pereche de valori λ_f ; $\frac{d}{\mu}$ [10].

În figura 5 sînt prezentate puncte avînd în abscisă valorile empirice $\chi^2_{(i)}$ și în ordonată logaritmii estimațiilor $\frac{n - i + 0,5}{n}\ 100$ pentru grupa grinzilor dreptunghiulare armate cu PC, încercate la INCERC.

Deoarece punctele au coincis aproape cu dreapta care reprezintă funcția de distribuție teoretică a valorilor $\chi^2_{(i)}$, rezultă că distribuția bidimensională λ_f și $\frac{d}{\mu}$ este normală.

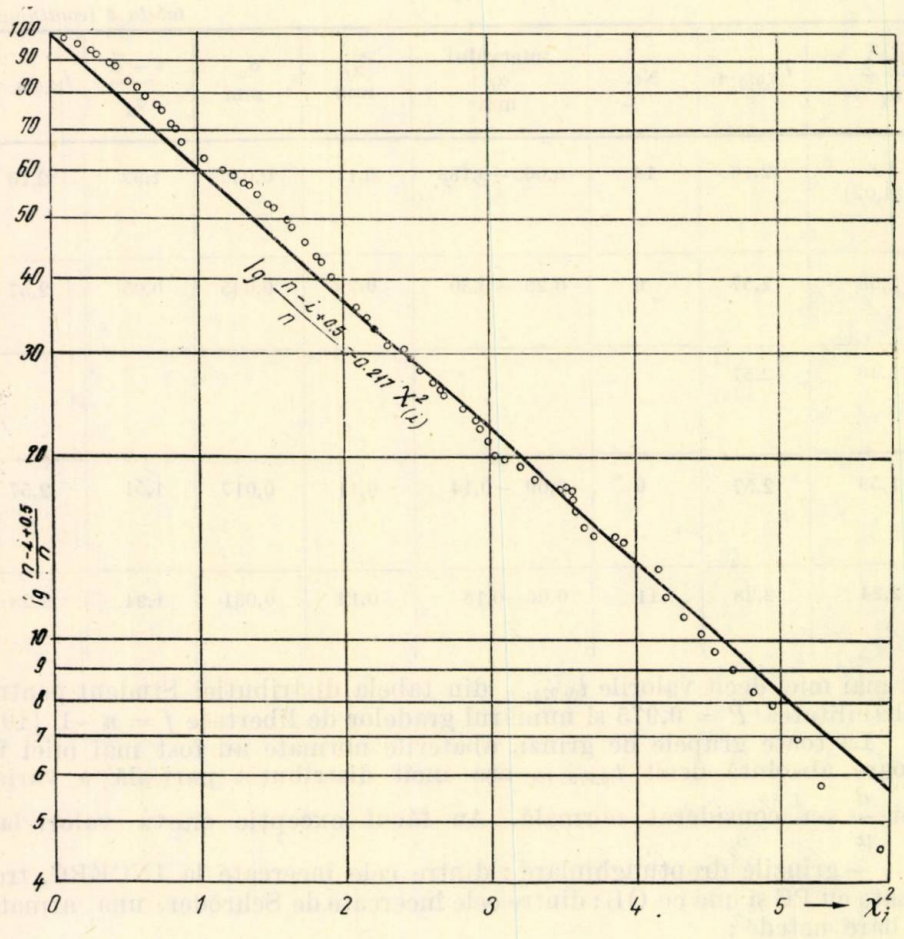


Fig. 5. — Diagrama comparativă a distanței teoretice și empirice bidimensionale λ_f § $\frac{d}{\mu}$ pentru grinzi dreptunghiulare armate cu PC (INCERC).

Abateri normate: $\frac{\lambda_{f_i} - \overline{\lambda}_f}{\sigma_{\lambda_f}}$, $\frac{\left(\frac{d}{\mu}\right) i - \left(\frac{\overline{d}}{\mu}\right)}{\sigma_{\frac{d}{\mu}}}$

$$\chi^2_{(i)} = \frac{1}{1-r^2}\left\{\frac{\left[\left(\frac{d}{\mu}\right) i - \left(\frac{\overline{d}}{\mu}\right)\right]^2}{\sigma^2_{\frac{d}{\mu}}} \frac{(\lambda_{f_i} - \overline{\lambda}_f)^2}{\sigma^2_{\lambda_f}} + 2r \frac{\left[\left(\frac{d}{\mu}\right) i - \left(\frac{\overline{d}}{\mu}\right)\right]}{\sigma_{\frac{d}{\mu}}} \cdot \frac{(\lambda_{f_i} - \overline{\lambda}_f)}{\sigma_{\lambda_f}}\right\}$$

r — coeficientul de corelație,
n — numărul probelor,
i — numărul de ordine al valorilor crescătoare χ^2_i.

Pe baza diagramelor comparative ale distribuției empirice și teoretice bidimensionale λ_f și $\frac{d}{\mu}$, distribuția bidimensională se poate considera mai sigur normală la următoarele grupe de grinzi :

— dreptunghiulare, armate cu PC ; TOR ; OL la INCERC, cu PC ; TOR la Rüsch și cu OL la Schröder ;

— în formă de T, armate cu TOR și PC la INCERC și la Rüsch.

4.3. CORELAȚIA DINTRE DISTANȚA DINTRE FISURI ȘI RAPORTUL $\frac{d}{\mu}$

Dintre factorii care influențează distanța dintre fisuri s-a verificat influența lui $\frac{d}{\mu}$ printr-un calcul de corelație, considerînd formula simpli-

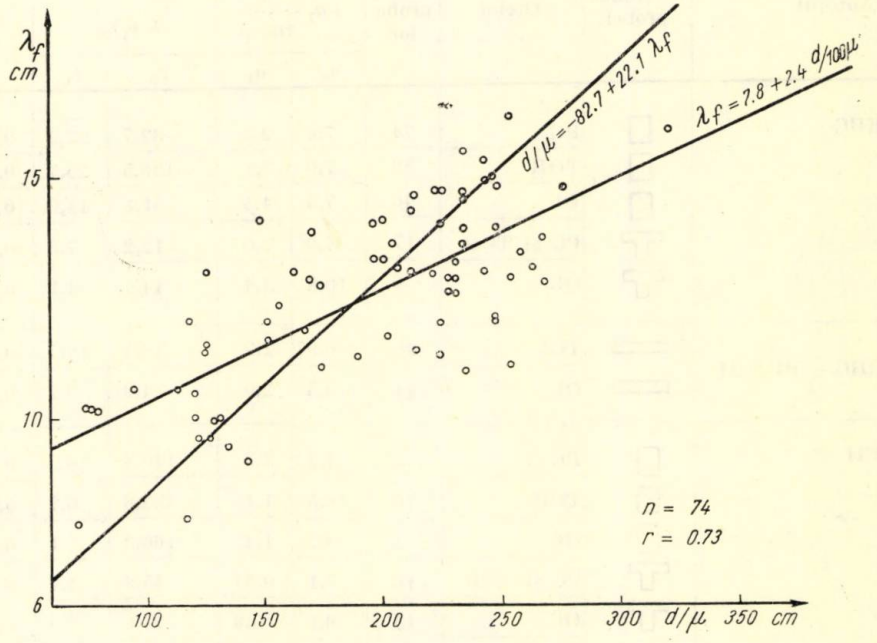


Fig. 6. — Corelația $\lambda_f = f\left(\frac{d}{\mu}\right)$ la grinzi de secțiune dreptunghiulară armate cu PC (INCERC)

ficată : $\lambda_f = a_0 + a_1 \frac{d}{\mu}$, propusă la simpozionul RILEM de la Stockholm [9] și asemănătoare cu expresia din normativul $P.8-62$ [15].

Considerînd că $\frac{d}{\mu}$ este variabila explicativă a lui λ_f, se poate determina curba care permite să se obțină λ_f în funcție de $\frac{d}{\mu}$.

În figura 6 sînt reprezentate punctele experimentale corespunzînd perechilor de variabile λ_f, $\frac{d}{\mu}$, precum și dreapta de regresie ca exemplu pentru grupa de grinzi dreptunghiulare armate cu PC, încercate la INCERC.

Tabela 4

Ecuațiile dreptelor de regresie

$$\lambda_f = f\left(\frac{d}{\mu}\right)$$

Autorul	Secțiunea probei	Oțelul	Nr. probe-lor	$\lambda_f = a_0 + a_1 \frac{d}{100\,\mu}$		$\frac{d}{\mu} = b_0 + b_1\lambda_f$		r
				a_0	a_1	b_0	b_1	
INCERC		PC	74	7,8	2,4	−82,7	22,2	0,73
		TOR	39	7,0	3,1	−138,5	25,7	0,89
		OL	46	7,3	4,5	−51,8	14,6	0,81
		PC și TOR	17	7,0	2,0	12,2	7,8	0,39
		OL	8	10,8	4,4	−14,0	4,1	0,42
INCERC + RÜSCH		TOR	20	6,97	2,2	−14,5	19,5	0,66
		OL	11	9,5	2,0	−4,9	9,7	0,44
RÜSCH		PC	33	4,2	2,2	140,3	16,9	0,60
		TOR	16	16,5	1,1	422,8	6,7	0,28
		OL	7	9,2	1,4	166,8	8,1	0,34
		PC și TOR	16	7,1	0,97	45,97	14,4	0,38
		OL	13	9,1	0,8	73,6	7,9	0,25
		PC	8	9,6	0,56	16,3	17,6	0,31
SCHRÖDER		OL	13	9,7	4,5	−28,6	9,5	0,65
BORGES		OL	6	18,6	1,6	43,3	1,4	0,15
WÄSTLUND		OL	11	9,6	7,2	−44,0	10,1	0,85

Din această reprezentare grafică a datelor experimentale și din faptul că distribuția bidimensională a fost normală, a rezultat că regresia s-a putut considera liniară.

Calcule de corelație și reprezentări grafice asemănătoare s-au întocmit pentru toate celelalte grupe de grinzi, iar ecuațiile de regresie liniară și coeficienții de corelație sînt dați în tabela 4.

Rezultatele obținute pe grupe, cuprinzînd un număr mai mic de 30 de grinzi, sînt considerate informative.

Valorile coeficienților de corelație, cuprinse între 0,6 și 0,9, indică o corelație bună, putîndu-se interpreta că influența raportului $\frac{d}{\mu}$ asupra distanței dintre fisuri este preponderentă, în timp ce aportul altor factori reprezintă numai 10—40 %.

Coeficientul de corelație $r \leqslant 0{,}4$ indică o corelație slabă.

Comparînd între ele ecuațiile de corelație ale grinzilor de secțiune dreptunghiulară încercate la INCERC, se observă o variație redusă a termenului liber și o scădere pronunțată a coeficientului raportului $\frac{d}{\mu}$, la grinzile armate cu bare cu profil periodic față de cele cu bare netede.

Prin această prelucrare statistică s-a confirmat faptul fizic cunoscut că distanțele dintre fisuri sînt mai mari în cazul barelor netede.

Pentru grinzile dreptunghiulare studiate la INCERC avînd aproape același domeniu de variație al capacității portante, creșterea cantitativă a distanței dintre fisuri la armarea cu bare netede se poate explica prin creșterea cu 50 % a coeficientului a_1. Acest procent nu a ajuns să fie anulat prin scăderea raportului $\frac{d}{\mu}$ decît cu circa 22 % și cu circa 10 %, datorită coeficientului a_0.

La grupele de grinzi dreptunghiulare, care au prezentat o corelație mai sigură (cele armate cu PC, încercate de Rüsch, și cele armate cu OL, încercate de Schröder), termenul a_1 a fost aproape același cu cel din ecuațiile obținute pe grinzile încercate la INCERC, iar a_0 a fost diferit.

4.4. COMPARAREA LINIILOR DE REGRESIE $\lambda_l = f\left(\frac{d}{\mu}\right)$

Pentru a ne apropia cît mai mult de expresia distanței dintre fisuri în funcție de raportul $\frac{d}{\mu}$, s-au considerat rezultatele obținute atît pe baza observațiilor efectuate la INCERC, cît și în străinătate.

Liniile de regresie empirice obținute în mai multe laboratoare pentru grupele de grinzi, diferind ca secțiune și tip de armătură, s-au comparat între ele pentru a se vedea dacă diferă numai întîmplător sau semnificativ, adică dacă estimează una și aceeași linie de regresie teoretică.

Tabela 5

Compararea a trei linii de regresie

$$\lambda_f = f\left(\frac{d}{\mu}\right)$$

Secţiunea probei	Oţelul	Autorul	Nr. probelor	F		t pt. coef. ungh.		t pt. media coef. ungh.		$\lambda_f = a_0 + a_1 \frac{d}{100\,\mu}$	
				Calcul	Tabel	Calcul	Tabel	Calcul	Tabel	a_0	a_1
	PC	INCERC	74								
				0,031	1,61	0,478	1,66	(8,54)	1,66	6,72	2,28
		RÜSCH	33								
	TOR	INCERC	39								
				0,246	2,27	(5,1)	1,675	(6,25)	1,676	7,72	2,19
		RÜSCH	16								
	OL	INCERC	46								
				0,128	3,76	1,48	1,67	(3,04)	1,67	7,21	4,03
		RÜSCH	7								
		INCERC	46								
				1,07	2,52	0,003	1,67	0,36	1,67	7,83	4,75
		SCHRÖDER	13								
	TOR şi PC	INCERC	17								
				2,37	2,46	0,76	1,7	1,31	1,67	6,94	1,39
		RÜSCH	16								
	OL	INCERC	8								
				4,96	3,09(5,07)	1,19	1,74	(3,36)	1,73	9,71	1,6
		RÜSCH	13								
		INCERC	8								
				0,374	6,16	0,42	1,81	2,48	1,796(2,72)	14,49	2,73
		BORGES	6								

În tabela 5 sînt date estimațiile liniilor de regresie teoretice pe baza comparării a cîte două linii de regresie empirice [10].

În tabela 5 se poate urmări dacă pentru fiecare comparație a două linii de regresie sînt satisfăcute următoarele criterii:

— F, prin care se verifică dacă cele două dispersii empirice sînt estimații ale aceleiași dispersii generale;

— t, prin care se verifică dacă nu diferă semnificativ coeficienții unghiulari ai celor două linii de regresie;

— t, prin care se verifică ipoteza că cele două linii de regresie empirice sînt estimații ale aceleiași linii de regresie teoretice.

La comparațiile pentru care toate valorile calculate pentru F și t sînt mai mici decît valorile din tabelă sînt corecte estimațiile obținute pentru liniile de regresie teoretice. Asemenea estimații s-au obținut numai la grupele de grinzi dreptunghiulare, armate cu OL, încercate de Schröder și la INCERC sau la grupele de grinzi T, armate cu TOR și PC, încercate de Rüsch și la INCERC.

Pentru grinzile de secțiune dreptunghiulară, distanțele dintre fisuri, ținînd seama de relațiile date pentru coeficientul β_f în normativul P.8—62 [15], se pot exprima după cum urmează:

$$\text{pentru bare PC } \lambda_f = 4 + 5\frac{d}{100\,\mu},$$

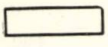
$$\text{pentru bare TOR } \lambda_f = 4 + 5{,}5\frac{d}{100\,\mu},$$

$$\text{pentru bare netede } \lambda_f = 4 + 7\frac{d}{100\,\mu},$$

iar expresiile distanțelor dintre fisuri, obținute din compararea a cîte două linii de regresie pentru grinzi de secțiune dreptunghiulară și T, se pot vedea în tabela 6.

Tabela 6

Ecuațiile liniilor de regresie pentru $\lambda_f = f\left(\frac{d}{\mu}\right)$

Secțiunea probei	Oțelul		
	PC	TOR	OL
	$6{,}72 + 2{,}28\frac{d}{100\,\mu}$	$7{,}72 + 2{,}19\frac{d}{100\,\mu}$	$7{,}83 + 4{,}75\frac{d}{100\,\mu}$
	$7 + 1{,}4\frac{d}{100\,\mu}$		$9{,}7 + 1{,}6\frac{d}{100\,\mu}$
	$9{,}6 + 0{,}6\frac{d}{100\,\mu}$	$7 + 2{,}2\frac{d}{100\,\mu}$	$9{,}5 + 2\frac{d}{100\,\mu}$

Ţinînd seama de datele experimentale, rezultă că în expresiile lui β_f în normativul P.8—62 coeficientul lui $\frac{\mu}{d}$ ar trebui luat aproximativ dublu, iar termenul liber mai mic după cum urmează :

$$\text{pentru bare PC } \beta_f = 0{,}2 + 60\frac{\mu}{d},$$

$$\text{pentru bare TOR } \beta_f = 0{,}3 + 60\frac{\mu}{d},$$

$$\text{pentru bare netede } \beta_f = 0{,}4 + 60\frac{\mu}{d}.$$

Pentru grupele de plăci armate cu TOR sau OL, în loc de a compara linii de regresie determinate la încercările efectuate fie la München, fie la INCERC, s-au stabilit corelaţiile pe grupe cu date mai numeroase (tabela 6). Aceste grupe s-au format luînd împreună rezultatele obţinute în cele două laboratoare, deoarece, pe baza reprezentărilor grafice, aceste rezultate pot fi considerate ca aparţinînd aceloraşi selecţii.

Pentru grupele de grinzi dreptunghiulare armate cu OL, s-au comparat trei linii de regresie $\lambda_f = f\left(\frac{d}{\mu}\right)$ [10], obţinute din încercările efectuate de Rüsch, Schröder şi INCERC.

Datele celor trei selecţii, liniile de regresie empirice şi linia teoretică sînt reprezentate în figura 7.

La compararea acestor trei linii de regresie se poate vedea din tabela 7 că au fost îndeplinite următoarele criterii :

— χ^2 (criteriul Bartlett), care arată că cele trei dispersii empirice sînt estimaţii ale aceleiaşi dispersii generale ;

— F, care verifică paralelismul celor trei linii de regresie empirice ;

— F, care verifică liniaritatea curbei de regresie ;

Tabelul 7

Compararea a trei linii de regresie $\lambda_f = f\left(\frac{d}{\mu}\right)$

Laboratorul	Nr. probe-lor	χ^2		F pentru regresii paralele		F pentru liniaritatea regresiei		t		$\lambda_f = a_0 + a_1\frac{d}{100\,\mu}$
		calc.	tabel	calc.	tabel	calc.	tabel	calc.	tabel	
INCERC RÜSCH SCHRÖDER	46 7 13	1,80	5,99	2,66	3,15	0,014	4,0	(6,5)	1,67	$\lambda_f = 10{,}58 + 2{,}3\frac{d}{100\,\mu}$

— t, care arată că cele trei linii de regresie empirice sînt estimații ale aceleiași linii de regresie teoretice.

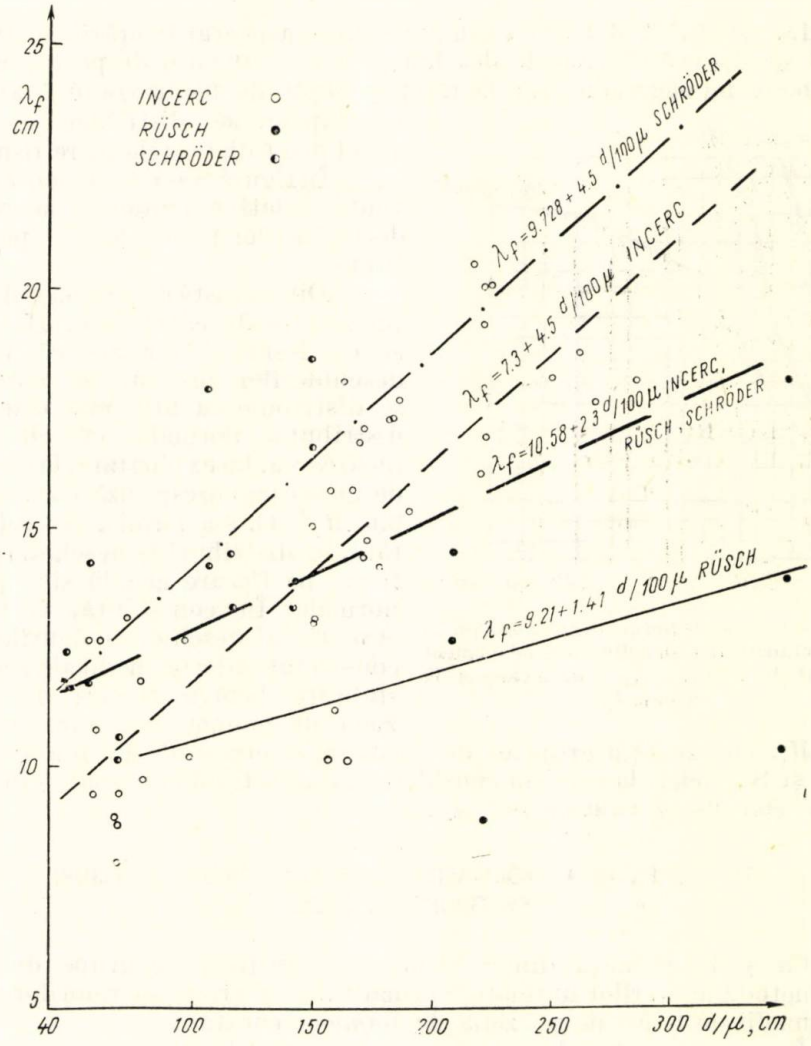


Fig. 7.— Compararea a trei linii de regresie $\lambda_f = f\left(\frac{d}{\mu}\right)$. Grinzi dreptunghiulare armate cu OL.

Deși pe baza criteriului t nu s-a putut conchide că cele trei linii de regresie empirice sînt estimații ale aceleiași linii de regresie, s-a calculat totuși în mod informativ coeficientul unghiular al dreptei de regresie teoretice, a cărei ecuație aproximativă este dată în tabela 7.

5. STUDIUL STATISTIC AL DESCHIDERII FISURILOR

5.1. VARIAŢIA DESCHIDERII FISURILOR PE FIECARE PROBĂ

La grinda T, dată ca exemplu pentru aspectul fisurării, în figurile 1 şi 2 se observă că valorile deschiderilor de fisuri din dreptul armăturii pe zona de moment constant, la diferite trepte de încărcare pînă aproape de rupere, se distribuie cu totul altfel decît distanţele între fisuri.

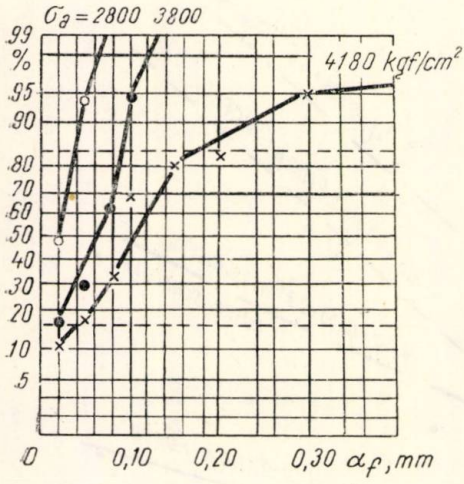


Fig. 8. — Curbele de frecvenţă cumulată (în %) ale deschiderii fisurilor din zona de moment constant la diferite trepte de încărcare la grinda t_2.

În figura 8 s-a reprezentat frecvenţa relativă cumulată a deschiderii fisurilor pe o reţea de probabilitate.

Din această diagramă şi din cele prezentate de către prof. H. Rüsch şi G. Rehm [2] reiese că valorile deschiderilor de fisuri se măresc şi se distribuie cu atît mai diferit de distribuţia normală, cu cît creşte încărcarea. La exploatare, la o treaptă de încărcare corespunzătoare la 0,4—0,6 M_r [14], s-a admis, din cele arătate, că distribuţiile deschiderilor de fisuri pe fiecare grindă sînt practic normale. În consecinţă, la studiul statistic al deschiderii fisurilor s-au considerat valorile medii ale acestora, stabilite pentru fiecare grindă pe zona de moment constant, la circa 0,50 M_r, cu excepţia grupelor de încercări efectuate de F. Borges, Wästlund şi Schröder, la care s-a considerat α_{max}, nefiind cunoscute din publicaţiile consultate valorile lui α_{med}.

5.2. VERIFICAREA NORMALITĂŢII DESCHIDERILOR DE FISURI PE GRUPE DE PROBE

Ca şi la distanţa dintre fisuri, s-a verificat pe grupe de grinzi prin metoda abaterilor normate, normalitatea distribuţiei valorilor deschiderii medii de fisuri de pe zona de moment constant.

În tabela 3 sînt date, pentru toate grupele de grinzi considerate în studiu, abaterile normate maxime ale deschiderilor de fisuri, precum şi valorile t pentru probabilitatea $P = 0{,}975$ şi numărul gradelor de libertate $n - 1$ [10].

În majoritatea cazurilor, abaterile normate maxime în valoare absolută au fost mai mici decît t, de unde rezultă că distribuţia parţială a valorilor α_f se poate considera normală. Excepţie au făcut trei grupe, la care una, două sau trei valori, notate în paranteză, nu au îndeplinit această condiţie.

5.3. CORELAȚIA DINTRE DESCHIDEREA FISURILOR ȘI CARACTERISTICILE PROBELOR

Din studii și încercări anterioare [2),7)] s-a observat că deschiderea fisurilor depinde de o serie de factori, cum ar fi efortul în armătură ($\sigma_{0,2}$), distanța dintre fisuri (λ_f), rezistența la întindere a betonului (R_t) etc.

Pentru a pune în evidență gradul și intensitatea influenței comune a acestor factori în scopul verificării grinzilor din beton armat la starea-limită de deschidere a fisurilor, s-a aplicat metoda statistică a teoriei corelației multiple [10].

Presupunînd această corelație liniară, ecuația de regresie se poate scrie

$$\alpha_f = a_0 + a_1 \lambda_f + a_2 \sigma_{0,2} + a_3 R_t,$$

în care

α_f este deschiderea medie de fisură, cu excepția grupelor de încercări efectuate de Schröder, Wästlund și F. Borges, unde s-a considerat α_{max}, nefiind cunoscut α_{med} ;

λ_f — distanța medie dintre fisuri, cu excepția grupei de încercări efectuate de Wästlund, unde s-a considerat λ_{fmax}, nefiind cunoscut λ_{fmed} ;

$\sigma_{0,2}$ — limita de curgere în cazul oțelurilor cu palier de curgere sau limita de curgere convențională în cazul oțelurilor fără palier de curgere ;

R_t — rezistența normată la întindere a betonului, interpolată pe baza normativului P.8—62 [15] pentru marca betonului din grindă.

Această ecuație de regresie poate fi folosită la determinarea valorilor aproximative ale deschiderii fisurilor pentru valori date λ_f, $\sigma_{0,2}$ și R_t în măsura în care distribuția acestora este normală și corelația dintre α_f și fiecare dintre caracteristicile factoriale λ_f, $\sigma_{0,2}$ și R_t este liniară.

Verificînd și normalitatea distribuției valorilor λ_f, $\sigma_{0,2}$ și R_t pe baza abaterilor normate, după cum s-a arătat la verificarea normalității distribuției lui $\frac{d}{\mu}$, s-a găsit că aceste abateri sînt mai mici în valoare absolută decît $t_{(0,975;\, f)}$, conform tabelei distribuției Student [10] pentru probabilitatea $P = 0{,}975$ și numărul gradelor de libertate $f = n - 1$, așa încît distribuțiile parțiale ale variabilelor sînt normale dacă nu se iau în considerație cîteva excepții : două excepții la distanța dintre fisuri, trei la deschiderea fisurilor, cinci la efortul în armătură la grinzile de secțiune dreptunghiulară armate cu PC, cîte una sau două excepții la cele armate cu bare torsionate sau netede, precum și la plăcile încercate la INCERC și cîte o excepție la efortul în armătură la grinzile dreptunghiulare armate cu PC sau TOR, încercate de către Rüsch.

În figura 9 sînt reprezentate prin puncte, ca exemplu, datele experimentale corespund perechilor de valori, în ordonată, α_f și în abscisă λ_f, $\sigma_{0,2}$ sau R_t, pentru grupa de grinzi dreptunghiulare armate cu bare netede, încercate la INCERC.

Tabela

Corelaţia multiplă dintre

Autorul	Secţiunea probei	Calitatea oţelului	Nr. probelor	Numărul caracteristicilor factoriale	$\alpha_f = a_0 + a_1 \lambda_f + a_2 \sigma_{0,2} + a_3 R_t$			
					a_0	a_1	a_2	a_3
1	2	3	4	5	6	7	8	9
INCERC		PC	79	1	−0,07	0,0143		
				2	−0,18	0,0136	0,000027	
		TOR	44	1	−0,034	0,013		
				2	−0,08	0,013	0,00001	
				3	−0,128	0,0149	0,0000042	0,00258
		OL	37	1	−0,0001	0,0042		
				2	0,026	0,0045	−0,000016	
				2	−0,0014	0,0041		0,00082
		PC şi TOR	17	1	−0,008	0,0067		
				2	−0,0048	0,0052	0,000013	
				3	−0,071	0,005	0,000011	0,0018
		OL	9	1	0,01	0,00204		
				2	−0,049	0,00176		0,0034
INCERC RÜSCH		TOR	20	1	0,047	0,0044		
				2	−0,028	0,0039	0,000017	
		OL	12	1	0,004	0,0041		
				2	0,01	0,0051	−0,000006	
RÜSCH		PC	33	1	0,033	0,0056		
				2	−0,021	0,0053	0,000012	
		TOR	16	1	0,018	0,0082		
				2	0,072	0,0073	0,00002	
				3	−0,162	0,0065	0,000037	0,00112
		OL	10	1	0,098	0,0038		
				2	−0,066	0,0028	0,000036	

8

α_f și λ_f, $\sigma_{0,2}$, R_t

σ_α $\sigma_{\alpha\cdot\lambda\sigma}$ $\sigma_{\alpha\cdot\lambda R}$ $\sigma_{\alpha\cdot\lambda\sigma R}$	Coeficienţi de corelaţie									
	simplă			parţială 1				parţială II		
	$r_{\alpha\lambda}$	$r_{\alpha\sigma}$	$r_{\alpha R}$	$r_{\lambda\alpha,\sigma}$	$r_{\alpha\sigma,\lambda}$	$r_{\lambda\alpha,R}$	$r_{\alpha R,\lambda}$	$r_{\alpha\lambda,\sigma R}$	$r_{\alpha\sigma,\lambda R}$	$r_{\alpha R,\lambda\sigma}$
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,064	0,515									
0,048	0,515	0,443		0,549	0,483					
			0,098							
0,0717	0,654									
0,05	0,654	0,138		0,650	0,117					
0,0417	0,654	0,138	0,142	0,650	0,117	0,655	0,155	0,653	−0,044	0,077
0,0329	0,516									
0,0292	0,516	0,034		0,535	−0,0133					
0,0213	0,516		0,181			0,525	0,081			
0,0202	0,705									
0,0137	0,705	0,491		0,643	0,340					
0,0132	0,705	0,491	0,470	0,644	0,340	0,644	0,299	0,605	0,282	0,241
0,0147	0,531									
0,0116	0,531		0,423			0,490	0,358			
		0,271								
0,039	0,530									
0,032	0,530	0,370	0,290	−0,475	−0,275					
0,026	0,740									
0,018	0,740	0,600	0,180	−0,565	0,147					
0,023	0,710									
0,015	0,710	0,360	0,240	0,690	0,300					
0,030	0,720									
0,020	0,720	0,460	0,390	0,650	0,20					
0,0205	0,720	0,460	0,390	0,611	0,147	0,724	0,384	0,660	0,114	0,468
0,065	0,530									
0,054	0,530	0,470	0,110	0,340	0,210					

Autorul	Secţiunea probei	Calitatea oţelului	Nr. probelor	Numărul caracteristicilor factoriale	$\alpha_f = a_0 + a_1 \lambda_f + a_2 \sigma_{0.2} + a_3 R_t$			
					a_0	a_1	a_2	a_2
1	2	3	4	5	6	7	8	9
		PC şi TOR	16	1	−0,018	0,0126		
				2	−0,133	0,0121	0,000023	
				3	0,055	0,0141	−0,000024	0,00261
		OL	13	1	0,002	0,0128		
				2	−0,053	0,0095	0,000013	
				3	−0,486	0,0097	0,000012	−0,000178
		PC	8	1	0,044	0,0058		
				2	−0,021	0,0054	0,000016	
SCHRÖDER		OL	14	1	−0,053	0,0117		
				2	−0,421	0,0074	0,00016	
BORGES		PC şi TOR	6	1	0,098	0,0153		
WÄST-LUND		PC şi TOR	6	1	0,197	−0,0050		
		OL	11	1	0,052	0,0029		
				2	0,400	0,0032	−0,000094	

Într-o analiză prealabilă, s-au determinat, după metoda arătată la calculul corelaţiei dintre distanţa dintre fisuri şi $\frac{d}{\mu}$, coeficienţii de corelaţie simplă dintre α_f şi fiecare caracteristică factorială în parte (tabela 8). Din examinarea acestor coeficienţi rezultă că la toate grupele deschiderea fisurilor a depins în cea mai mare măsură de distanţa dintre fisuri $r_{\alpha\lambda} = 0{,}515 - 0{,}72$. Ceilalţi coeficienţi de corelaţie au variat între 0,034 şi 0,491, în funcţie de tipul de oţel, forma secţiunii şi autorul încercării.

Excepţie fac grinzile T armate cu bare netede din oţel superior (Rüsch) şi grinzile T armate cu PC şi TOR (Wästlund), la care au rezultat $r_{\alpha\lambda} = 0{,}49$, respectiv 0,39 mai mic decît $r_{\alpha\sigma} = 0{,}84$, respectiv 0,69. De asemenea grinzile dreptunghiulare armate cu OL (Schröder), la care au rezultat apropiaţi $r_{\alpha\lambda} = 0{,}7$ şi $r_{\alpha\sigma} = 0{,}84$, ceea ce se poate explica prin

tabela 8 (continuare)

σ_α $\sigma_\alpha \cdot \lambda_\sigma$ $\sigma_\alpha \cdot \lambda_R$ $\sigma_\alpha \cdot \lambda_{\sigma R}$	Coeficienți de corelație									
	simplă			parțială I				parțială II		
	$r_{\alpha\lambda}$	$r_{\alpha\sigma}$	$r_{\alpha R}$	$r_{\lambda\alpha.\sigma}$	$r_{\alpha\sigma.\lambda}$	$r_{\lambda\alpha \cdot R}$	$r_{\sigma R.\lambda}$	$r_{\alpha\lambda \cdot \sigma R}$	$r_{\alpha\sigma \cdot \lambda R}$	$r_{\alpha R \cdot \lambda\sigma}$
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,024	0,720									
0,014	0,720	0,430	0,180	0,760	0,540					
0,016	0,720	0,430	0,180	0,764	0,535	0,712	0,0193	0,704	0,553	−0,249
0,041	0,490									
0,012	0,490	0,840	0,190	0,660	0,880					
0,0193	0,490	0,840	0,190	0,430	0,886	0,456	−0,0865	0,474	0,895	−0,0704
0,0160	0,500									
0,013	0,500	0,290	0,150	−0,480	−0,250					
0,042	0,710									
0,014	0,710	0,840	0,380	0,770	0,870					
0,045	0,570									
	0,570	0,060								
0,018	0,390									
	0,390	0,690	0,005							
0,031	0,750									
0,017	0,750	0,100	0,010	0,770	−0,310					

faptul că la aceste încercări, nefiind cunoscut $\alpha_{f\,med}$, s-a considerat corelația între $\alpha_{f\,max}$ și $\lambda_{f\,med}$.

Ecuațiile de regresie multiplă s-au stabilit la fiecare grupă în parte în raport cu două sau trei caracteristici factoriale, apreciind ponderea influenței fiecăruia dintre acești factori după valoarea coeficienților de corelație simplă menționați.

Coeficienții de regresie a_0, a_1, a_2 și a_3 ai ecuațiilor de regresie multiplă pentru fiecare grupă de grinzi sînt indicați în tabela 8 [10].

Acești coeficienți au fost astfel determinați, încît, introducînd cu valorile lor experimentale α_f în mm, λ_f în cm, $\sigma_{0,2}$ în kg/cm², R_t în kg/cm², să se obțină din calculul de corelație valorile deschiderilor de fisuri în mm.

La acest calcul s-a înlocuit efortul în armătură σ_a la fisurare în stadiul de exploatare normală prin limita de curgere $\sigma_{0,2}$, cunoscînd că în

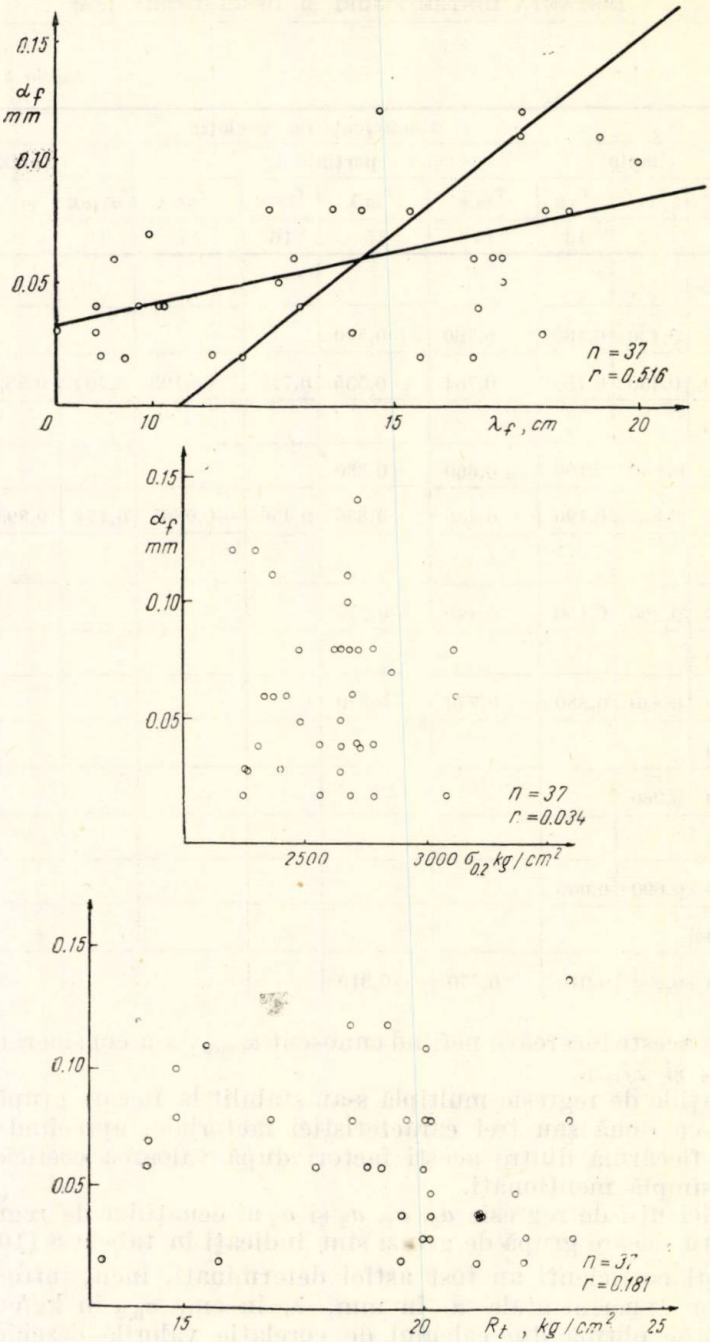


Fig. 9. — Diagrama dependenței între α_f și parametrii λ_f, $\sigma_{0.2}$ sau R_t la grinzi de secțiune dreptunghiulară armate cu OL (INCERC).

Deschiderea fisurilor α_f în mm. Distanța între fisuri λ_f în cm. Limita de curgere a armăturii $\sigma_{0.2}$ în kg/cm². Rezistența la întindere a betonului R_t în kg/cm²

calculele statistice se poate folosi oricare caracteristică factorială multiplicată cu o constantă, fără a influența mersul calculului și admițînd că există aproximativ o proporționalitate între σ_a și rezistența normată a armăturii R_a^n, corespondenta lui $\sigma_{0,2}$.

Abaterile medii pătratice σ_α ale valorilor observate α_f și abaterile medii pătratice calculate pe baza ecuației de regresie multiple $\sigma_{\alpha.\lambda\sigma R}$ [10] sînt arătate în tabela 8.

Se observă că, cu cît a fost inclusă în analiză influența mai multor factori, cu atît a fost mai mică abaterea medie pătratică din corelația multiplă, ceea ce se explică prin faptul că o parte a variației deschiderii de fisuri se datorește variației lui λ_f, $\sigma_{0,2}$ și R_t.

Tabela 9

Influența lui λ_f, $\sigma_{0,2}$ și R_t asupra lui α_f

Laboratorul	Secțiunea probei	Oțelul	$a_1 \frac{\sigma_\lambda \cdot 100}{\sigma_\alpha}$	$a_2 \frac{\sigma_\sigma \cdot 100}{\sigma_\alpha}$	$a_3 \frac{\sigma_R \cdot 100}{\sigma_\alpha}$
INCERC		PC	49	42	—
		TOR	68	6	10
		OL	51	—	7
		TOR și PC	56	22	17
		OL	47	—	31
INCERC și RÜSCH		TOR	46	24	—
		OL	92	21	—
RÜSCH		PC	66	23	—
		TOR	58	29	11
		OL	39	23	—
		PC și TOR	81	39	39
		OL	37	73	2
SCHRÖDER		OL	45	66	—
F. BORGES		PC și TOR	57	—	—
WÄSTLUND		PC și TOR	38	—	—
		OL	84	22	—

Cu ajutorul coeficienţilor de corelaţie parţială de ordinul I şi II [10], arătaţi în tabela 8, s-a putut aprecia intensitatea legăturii dintre distanţa dintre fisuri şi una dintre caracteristicile factoriale, făcînd abstracţie de influenţa celorlalte caracteristici, care s-au inclus în ecuaţia regresiei multiple.

Astfel, presupunînd că $\sigma_{0,2}$ şi R_t se menţin la un nivel constant şi că nu exercită nici o influenţă între legătura lui α_f şi λ_f, au fost confirmate cele constatate şi prin corelaţia simplă că între α_f şi λ_f există corelaţii liniare intense în general la toate grupele de grinzi, deoarece coeficienţii de corelaţie parţială de ordinul I $r_{\lambda\alpha.\sigma}$ şi $r_{\lambda\alpha.R}$ au fost aproape egali cu coeficienţii de corelaţie simplă.

Presupunînd distanţa dintre fisuri constantă, s-a observat, pe baza coeficientului de corelaţie parţială de ordinul I $r_{\alpha\sigma.\lambda}$, că între α_f şi $\sigma_{0,2}$ există o corelaţie nu prea intensă la grinzile armate cu bare cu profil periodic ($r_{\alpha\sigma.\lambda} = 0{,}47$ şi $0{,}54$) şi o corelaţie neglijabilă la grinzile dreptunghiulare armate cu bare netede ($r_{\alpha\sigma.\lambda} = 0{,}01 - 0{,}21$). Excepţie fac grupele de grinzi încercate de S. Schröder şi H. Rüsch. Pe lîngă explicaţia dată acestor excepţii la discuţia asupra coeficienţilor de corelaţie simplă, se mai poate menţiona şi faptul că la încercările lui H. Rüsch barele netede erau de o calitate mult superioară barelor netede obişnuite.

De asemenea o corelaţie slabă ca între α_f şi $\sigma_{0,2}$ s-a observat între α_f şi R_t pe grinzile de secţiune dreptunghiulară armate cu bare torsionate, coeficientul de corelaţie de ordinul I $r_{\alpha R.\lambda}$ fiind $0{,}155 - 0{,}384$.

Pentru rezultatele încercărilor de la INCERC şi de la München s-au calculat coeficienţii de corelaţie parţială de ordinul II [10], arătaţi în tabela 8.

Din examinarea coeficienţilor de corelaţie de ordinul II, în cazul corelaţiei multiple între α_f, λ_f, $\sigma_{0,2}$ şi R_t, se poate aprecia dacă deschiderea fisurilor este mai puternic influenţată de rezistenţa armăturii $r_{\alpha\sigma.\lambda R}$ sau de către rezistenţa betonului $r_{\alpha R.\lambda\sigma}$ cînd celelalte două caracteristici rămîn constante. Astfel, în cazul armării cu bare torsionate, o pondere mai mare a avut influenţa rezistenţei betonului la grinzile de secţiune dreptunghiulară, iar la grinzile T efortul în armătură.

În cazul ecuaţiilor de regresie multiplă, $\alpha_f = a_0 + a_1 \lambda_f + a_2 \sigma_{0,2} + a_3 R_t$, alese pe baza criteriilor menţionate în funcţie de factorii λ_f, $\sigma_{0,2}$ sau R_t (subliniate în tabela 8), ca reprezentînd aproximaţia cea mai bună pentru α_f, s-a determinat ponderea influenţei fiecărei caracteristici factoriale asupra deschiderii fisurilor, prin valoarea cu care a crescut abaterea medie pătratică a lui α_f, pentru creşterea fiecăruia dintre factorii λ_f, $\sigma_{0,2}$ şi R_t, cu abaterea medie pătratică a fiecăruia, ceilalţi factori rămînînd neschimbaţi.

Astfel, toate caracteristicile factoriale sînt exprimate în aceleaşi unităţi (în abaterea medie pătratică a caracteristicii), ceea ce face ca variaţiile lui α_f corespunzătoare fiecărei caracteristici să fie comparabile între ele.

În tabela 9 sînt indicate creşterile valorii medii ale lui α_f în procente din abaterea medie pătratică σ_{α_f}, care rezultă din creşterea separată a lui λ_f, $\sigma_{0,2}$ şi R_t, cu abaterile medii pătratice a fiecăruia σ_{λ_f}; $\sigma_{\sigma_{0,2}}$ şi σ_{R_t}.

Pentru o creștere a distanței dintre fisuri cu o cantitate egală cu abaterea ei medie pătratică σ_λ, creșterea deschiderii fisurilor la grupele de elemente studiate a fost de 0,36 — 0,92 σ_α, dovedindu-se astfel că λ_f este factorul cu influența cea mai mare.

Analizînd în același timp creșterile procentuale și valorile coeficienților de corelație, a rezultat că efortul în armătură a dus la creșteri de 0,06 — 0,42 σ_α la grupele de grinzi armate cu bare cu profil periodic și de 0,20 — 0,73 σ_α la celelalte grupe.

De asemenea rezistența la întindere a betonului a dus la creșteri de numai 0,02—0,39 σ_α.

6. CONCLUZII

Lucrarea prezintă o aplicare a calculului statistic pentru valorificarea rezultatelor experimentale cu privire la distanța dintre fisuri și deschiderea fisurilor, obținute la încercările efectuate în ultimii ani la INCERC și în străinătate pe grinzi din beton armat.

Printr-un calcul de corelație s-a verificat influența unor factori asupra distanței dintre fisuri și deschiderii fisurilor, observate pe grupe de grinzi, diferind după tipul de oțel, forma secțiunii și laboratorul de încercări.

Rezultatele obținute permit să se deducă unele concluzii privind expresiile de calcul aplicate la fisurare la grinzi de secțiune dreptunghiulară.

Expresiile admise pentru distanța dintre fisuri

$$\lambda_f = a_0 + a_1 \frac{d}{\mu}$$

și pentru deschiderea fisurilor

$$\alpha_f = a_0 + a_1 \lambda_f + a_2 \sigma_{0,2} + a_3 R_t$$

reprezintă suficient de bine legătura dintre acești factori, după cum a reieșit din rezultatele încercărilor.

La examinarea coeficienților din expresiile distanței dintre fisuri și ai coeficienților de corelație a rezultat că aportul factorului $\frac{d}{\mu}$ este preponderent și a variat cu tipul de armătură.

De asemenea, prin examinarea coeficienților din expresiile deschiderii medii a fisurilor, a coeficienților de corelație și a interpretării pe baza abaterilor medii pătratice, s-a stabilit că în toate cazurile factorul cu influența cea mai mare a fost distanța dintre fisuri. La grinzile dreptunghiulare armate cu bare cu profil periodic laminate la cald a fost mai importantă variația efortului în armătură decît variația rezistenței la întindere a betonului. La grinzile dreptunghiulare armate cu bare torsionate, influența efortului în armătură și a rezistenței la întindere a betonului au fost aproape la fel de importante.

Metoda folosită pentru valorificarea statistică a datelor experimentale este generală şi se poate aplica şi la alte cercetări asupra fisurării betonului armat, de la noi şi din străinătate.

Expresiile cu aproximaţia cea mai bună pentru deschiderea fisurilor se vor putea alege, pe baza criteriilor de verificare F sau Bartlett, prin compararea regresiilor multiple obţinute, ţinînd seama de rezultatele încercărilor cunoscute de la INCERC şi din străinătate.

Primită la redacţie la 2 martie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. G. Stănculescu, M. Ionescu, *Studiul statistic al fisurilor la grinzile din beton armat supuse la încovoiere*, Comunicare în cadrul Consfătuirii ştiinţifice cu tema anchete selective, organizată de Direcţia Centrală de Statistică, mai 1964, Revista de Statistică, anexă, *7* (1964).
2. H. Rüsch, G. Rehm, *Versuche mit Betonformstählen* (Teil I,II, III), Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 140, 160, 164 (1963, 1964).
3. S. Schröder, *Theorien über die Rissbildung in Stahlbetonbalken*, Dissertation T. H. Dresden, 1959.
4. J. Ferry-Borges, J. Arga E. Lima, *Crack and deformation similitude in reinforced concrete*, Bulletin RILEM, *7* (1960).
5. G. Wästlund, Per Olov Jonsson, *Undersökning rörande sprickbildning i armerade betongkonstruktioner* (*Investigation on formation of cracks in reinforced concrete structures*), Svenska forskningsinstitutet förcement och betong vid kungl. tekniska högskolan i Stockholm, Handlingar, *10* (1947).
6. А. А. Гвоздев, *Основные задачи теории железобетона на ближайшие 20 лет*, Известия Академии строительства и архитектуры, СССР, *4* (1962).
7. R. Baus, *Contribution au calcul à la rupture du béton armé*. Mémoires (nouvelle série) du Centre d'études, de recherches et d'essais scientifiques du génie civil (CERES) Liège, *2* (1961).
8. М. Тихий, М. Ворличек, *Статистический расчёт сечений из обычного и предварительно напряжённого железобетона*, Бетон и железобетон, *6* (1962).
9. Rilem, *Symposium on bond and crack formation in reinforced concrete*, Stocholm, 1957.
10. N. Rancu, L. Tövissi, *Statistica matematică cu aplicaţii în producţie*, Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1963.
11. И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов, *Теория вероятностей, математическая статистика в технике*, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1955.
12. О. Я. Берг, *О предельном состоянии железобетонных конструкций по долговечности бетона*, Бетон и железобетон, *11* (1964).
13. L. Brice, *Idées générales sur la fissuration du béton armé et du béton précontraint*, Annales de l'Institut techniques du batiment et des travaux publics, *198*, iunie (1964).
14. Н. М. Мулин, В. П. Артемьев, И. К. Белобров, Е. А. Гузеев, Г. М. Красовская, К.В. Петрова, В. В. Фигаровский, *Обоснование расчёта деформаций железобетонных конструкций по проекту новых норм*, Бетон и железобетон, *11* (1962).
15. * * * *Normativ condiţionat pentru calculul construcţiilor la stări limită. III. Calculul şi alcătuirea constructivă a elementelor de construcţii civile şi industriale din beton, beton armat şi beton precomprimat. P. 8—62*, CSCAS, Bucureşti, 1962.
16. * * * *STAS* 438—61, *Oţel—beton.*
17. T G L 11422, *Bauwerke und Fertigbauteile aus Beton und Stahlbeton*, Traglastverfahren, Berechnungsgrundlagen Ausgabe, august 1963.

CONSIDERAŢII ASUPRA UNOR PROCEDEE DE CALCUL AL CADRELOR SPAŢIALE

de D. ANASTASESCU şi I. MUNTEANU
D.S.A.P.C.—Banat, Inst. Politehnic Timişoara

539.4

Lucrarea prezintă în mod unitar unele procedee bazate pe metoda deplasărilor şi care pot fi folosite pentru calculul cadrelor spaţiale. Se arată astfel procedeele de calcul bazate pe folosirea uneia sau mai multor scheme de echilibrare, respectiv procedeele de echilibrare folosind rotirile de nod sau direct coeficienţii de repartizare spaţiali ai momentelor.
În continuare, se generalizează procedeul „nodurilor fictive" la cadrele spaţiale ortogonale operînd cu momente şi forţe de deviaţie „active".
Exemplele de calcul şi concluziile întregesc expunerea.

1. PROCEDEE GENERALE DE CALCUL

Calculul cadrelor spaţiale prin metoda deplasărilor sub forma iterativă se efectuează în două etape, prin două procedee diferite.

1.1. Utilizînd mai multe scheme de iteraţie (una pentru etapa I şi cîte una pentru fiecare deplasare liniară posibilă şi distinctă din etapa II) şi rezolvînd în continuare sistemul de ecuaţii pentru obţinerea coeficienţilor de corecţie ai deplasărilor liniare arbitrare. Expresia finală a momentului în capătul barei kl este :

$$M_{kl,a} = M^0_{kl,a} + \sum C_H \cdot M^H_{kl,a}\,, \tag{1}$$

unde

$M^0_{kl,a}$ este momentul echilibrat din etapa I în capătul k al barei kl şi după axa principală „a" a secţiunii transversale a barei ($a = 1,\ 2,\ 3$),

$M^H_{kl,a}$ — momentul echilibrat din etapa II în aceeaşi secţiune şi după aceeaşi direcţie „a" (H reprezintă indicele deplasării arbitrare, $H = \mathrm{I},\ \mathrm{II}, \ldots, N$).

Coeficienţii de corecţie C_H ai deplasărilor liniare se determină cu ajutorul metodei lucrului mecanic virtual sau al metodei forţelor de deviaţie, utilizînd ecuaţii de forma

$$\sum L_{HL} C_H + L_L^0 = 0\,; \quad (H = \text{I, II, } \ldots, N\,; \; L = \text{I, II, } \ldots, N). \tag{2}$$

În prima metodă, ecuaţia L din sistemul (2) reprezintă lucrul mecanic total în deplasarea virtuală L.

În a doua metodă, aceeaşi ecuaţie reprezintă forţa totală de deviaţie ce acţionează asupra reazemului fictiv ce se opune deplasării L. Această ecuaţie este de asemenea o expresie de lucru mecanic, însă într-o interpretare statică.

1.2. Utilizînd o singură schemă de iteraţie, în care structura este considerată succesiv în cele două etape de calcul. Se elimină astfel cele N scheme de echilibrare datorită deplasărilor liniare arbitrare, precum şi necesitatea de a rezolva sistemul de N ecuaţii de condiţie al coeficienţilor C_H.

Deoarece în acest procedeu convergenţa este în general lentă, el este preferat faţă de primul procedeu atunci cînd este suficientă obţinerea de rezultate aproximative.

2. PROCEDEE GENERALE DE ECHILIBRARE

Se consideră structura spaţială cu nodurile blocate şi fixate sub acţiunea sarcinilor exterioare (fig. 1). În etapa I de calcul, echilibrarea nodurilor se face prin relaxarea succesivă a acestora.

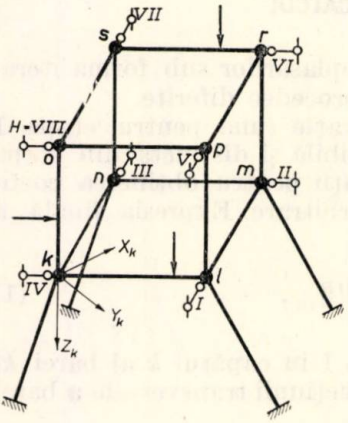


Fig. 1

Sistemul de ecuaţii de condiţie pentru nodul oarecare k are forma

$$\left.\begin{aligned} r_{X_kX_k}\cdot\theta_{X_k} + r_{X_kY_k}\cdot\theta_{Y_k} + r_{X_kZ_k}\cdot\theta_{Z_k} + R_{X_k} = 0 \\ r_{Y_kX_k}\cdot\theta_{X_k} + r_{Y_kY_k}\cdot\theta_{Y_k} + r_{Y_kZ_k}\cdot\theta_{Z_k} + R_{Y_k} = 0 \\ r_{Z_kX_k}\cdot\theta_{X_k} + r_{Z_kY_k}\cdot\theta_{Y_k} + r_{Z_kZ_k}\cdot\theta_{Z_k} + R_{Z_k} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

unde

$r_{X_kY_k}$ este momentul după axa X din acţiunea rotirii $\theta_Y = 1$,

R_{X_k} — momentul după axa X din acţiunea încărcării.

Considerînd separat efectele rotirilor $\theta_X = 1$, $\theta_Y = 1$, $\theta_Z = 1$ şi ţinînd seama de proiecţiile rigidităţilor $K_{kl,a}$ ale barei kl în capătul k faţă de axele $a = 1{,}2$ sau 3 ale secţiunii transversale a barei pe axele X, Y sau

Z ale nodului, se obține

$$r_{X_kX_k} = \sum K_{kl,a} \cdot \alpha^2_{kl,a} = \sum K\alpha^2$$

$$r_{X_kY_k} = \sum (K_{kl,1} \cdot \beta_{kl,1})\,\alpha_{kl,1} + \sum (K_{kl,2} \cdot \beta_{kl,2})\,\alpha_{kl,2} + \sum (K_{kl,3} \cdot \beta_{kl,3})\,\alpha_{kl,3} = \sum K\beta\alpha$$

$$r_{Z_kX_k} = \sum K_{kl,a} \cdot \alpha_{kl,a} \cdot \gamma_{kl,a} = \sum K\alpha\gamma,$$

respectiv sistemul caracteristic al nodului :

$$\left.\begin{aligned} \theta_X \sum K\alpha^2 + \theta_Y \sum K\beta\alpha + \theta_Z \sum K\gamma\alpha + R_X = 0 \\ \theta_X \sum K\alpha\beta + \theta_Y \sum K\beta^2 + \theta_Z \sum K\gamma\beta + R_Y = 0 \\ \theta_X \sum K\alpha\gamma + \theta_Y \sum K\beta\gamma + \theta_Z \sum K\gamma^2 + R_Z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3a)$$

unde $\alpha_{kl,a}$, $\beta_{kl,a}$, $\gamma_{kl,a}$ reprezintă cosinii directori ai axelor principale ale barei, $a = 1, 2$ sau 3, în raport cu axele X, Y, respectiv Z.

Echilibrarea nodului oarecare k rezultă din rezolvarea acestui sistem caracteristic. Operațiile de echilibrare a nodului se pot efectua prin următoarele procedee.

2.1. *Procedeul I* [4]

Rezolvînd sistemul (3), se obțin valorile rotirilor θ_X, θ_Y, θ_Z și, în funcție de acestea, momentele echilibrate din capetele barelor ce concurează în nodul k (momente repartizate) :

$$M^r_{kl,a} = K_{kl,a} \cdot \theta_{kl,a} = K_{kl,a}\,(\theta_X \cdot \alpha_{kl,a} + \theta_Y \cdot \beta_{kl,a} + \theta_Z \cdot \gamma_{kl,a}); \quad a = 1,\ 2,\ 3. \qquad (4)$$

Se transmit apoi aceste momente la capetele opuse ale barelor, obținîndu-se

$$M^t_{lk,a} = t^{Ma}_{k\to l} \cdot M^r_{kl,a}, \qquad (5)$$

și se blochează nodul k în poziția deformată. Se trece apoi la echilibrarea nodului următor l etc.

Momentele finale echilibrate vor fi date de relația

$$M_{kl,a} = \mathfrak{M}_{kl,a} + \sum M^r_{kl,a} + \sum M^t_{kl,a}. \qquad (6)$$

2.2. *Procedeul II* [9]

Se calculează coeficienții de repartizare ai momentelor în nodul k pentru fiecare capăt de bară și după fiecare axă „a" ($a = 1, 2, 3$), datorită acțiunii unor momente unitare, separat după fiecare direcție X, Y, Z.

Astfel, de exemplu, pentru $R_X = 1$, $R_Y = R_Z = 0$, rezolvînd sistemul (3), se vor obține rotirile echilibrate θ_{XX}, θ_{YX}, θ_{ZX}, respectiv momentele echilibrate în capetele barelor :

$$m_{kl,a,x} = K_{kl,a} \cdot \theta_{kl,a,x} = K_{kl,a} (\theta_{XX} \cdot \alpha_{kl,a} + \theta_{YX} \cdot \beta_{kl,a} + \theta_{ZX} \cdot \gamma_{kl,a}). \quad (7)$$

Cunoscînd R_X, R_Y, R_Z, se repartizează aceste valori succesiv capetelor de bară din nodul respectiv, după fiecare axă „a", proporțional cu coeficienții $m_{kl,a,A}$ ($A = X, Y, Z$).

Momentul repartizat capătului barei kl va fi

$$M^r_{kl,a} = \sum m_{kl,aA} \cdot R_A. \quad (8)$$

Restul operațiilor sînt similare cu cele din procedeul I.

2.3. *Procedeul III* [6], [8]

Pentru acțiunea

$$\vec{R} = \vec{R}_X + \vec{R}_Y + \vec{R}_Z = \vec{1},$$

unde

$$R_X \neq R_Y \neq R_Z,$$

se obțin coeficienții de repartizare

$$m_{kl,a} = K'_{kl,a} \sum R_A \cdot \theta_{kl,a,A} = \sum m_{kl,a,A} \cdot R_A, \quad (9)$$

respectiv momentele repartizate

$$M^r_{kl,a} = (\sum \mathfrak{M}_{kl})\, m_{kl,n}, \quad (10)$$

unde $\vec{\mathfrak{M}}_{kl} \| \vec{R}$; restul operațiilor se conduc ca și în procedeele anterioare.

2.3.1. Pentru cazul particular al nodului k aparținînd unei rețele spațiale de bare, unde sistemul de axe se alege conform (fig. 2) și pentru acțiunea $R = \mathfrak{M}_{kl,1} = 1$ (unde kl reprezintă o riglă), se obțin coeficienții de repartizare după cum urmează.

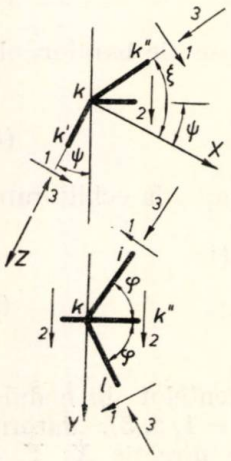


Fig. 2

2.3.1.1. Pentru cupolă ($\psi < \xi < 90°$) sau pentru un cadru de tip turn cu stîlpi neparaleli ($\xi = 90°$) și cu condiția ca $\sum K\, \alpha\gamma = 0$ (ceea ce conduce la alegerea unor secțiuni anume pentru barele rețelei),

$$m_{kl,a} = K_{kl,a} \left[\frac{1}{\sum K\alpha^2} \cdot \alpha_{kl,a} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi + \right. \quad (11)$$

$$\left. + \frac{1}{\sum K\beta^2} \cdot \beta_{kl,a} \cdot \cos\varphi - \frac{1}{\sum K\gamma^2} \gamma_{kl,a} \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi \right],$$

unde

$$\sum K\alpha^2 = [K_{kl,1} \sin^2\varphi \cdot \cos^2\psi + K_{kl,2} \sin^2\psi +$$

$$+ K_{kl,3} \cdot \cos^2\varphi \cdot \cos^2\psi]\, 2 + K_{kk',1} + K_{kk'',1} \sin^2\xi +$$

$$+ K_{kk'',3} \cdot \cos^2\xi, \text{ pentru cupolă,}$$

și

$$\sum K\alpha^2 = [K_{kl,1} \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\psi + K_{kl,2} \cdot \sin^2\psi +$$

$+ K_{kl,3} \cdot \cos^2\varphi \cdot \cos^2\psi] 2 + K_{kk',1} + K_{kk'',1}$, pentru cadrul de tip turn cu stîlpi neparaleli.

2.3.2. Pentru nodul k al unui cadru de tip turn cu stîlpi paraleli, deci verticali ($\psi = 0$, $\xi = 90°$, sau $\psi = 0$, $\xi = 0$), rezultă

$$m_{kl,a} = K_{kl,a}\left[\frac{1}{\sum K\alpha^2} \cdot \alpha_{kl,a} \cdot \sin\varphi + \frac{1}{\sum K\beta^2}\beta_{kl,a} \cdot \cos\varphi\right]. \qquad (12)$$

3. PROCEDEE PARTICULARE DE ECHILIBRARE

3.1. În cazul structurilor constituite din bare dispuse ortogonal (fig. 4), sistemul de ecuații (3) se simplifică, reducîndu-se la

$$\theta_X \sum K\alpha^2 + R_X = 0 \qquad (13)$$

$$\theta_Y \sum K\beta^2 + R_Y = 0 \qquad (14)$$

$$\theta_Z \sum K\gamma^2 + R_Z = 0, \qquad (15)$$

iar schema de echilibrare spațială se reduce la o serie de scheme de echilibrare plane legate între ele prin transmiteri de torsiuni. Rapiditatea convergenței este însă mai mică decît în cazul cadrelor plane, fiind influențată negativ de mărimea rigidităților barelor torsionate.

În general însă rigiditățile la torsiune a barelor torsionate sînt mult mai mici decît cele la încovoiere, astfel încît convergența întregului calcul rezultă suficient de rapidă.

În prezența unor plane de simetrie generale (geometrică, elastică și de încărcare), prin anularea torsiunilor schema de echilibrare se poate reduce la un ansamblu de scheme plane independente.

În cazul structurilor constituite din bare, dintre care unele sînt dispuse ortogonal pe planul format de celelalte (fig. 3), din sistemul (3) se separă θ_Z, care poate fi obținut deci similar cu (15), iar momentele echilibrate în riglele structurii după axa $a = 2$ se obțin dintr-o schemă de echilibrare plană [5].

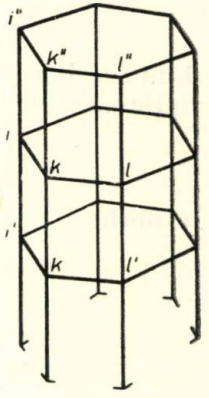


Fig. 3

3.2. Pentru a reduce schema de echilibrare spațială la scheme plane și pentru structurile de tip turn (fig. 3), s-a procedat la admiterea de aproximații în calcule prin neglijarea momentelor de torsiune din rigle [6] și stabilirea unor rapoarte între laturile secțiunii transversale ale stîlpilor [6], [5].

3.3. Din cele expuse mai sus rezultă că în cazul structurilor spațiale ortogonale (fig. 4) se pot aplica

procedeele de calcul pe scheme de echilibrare plane, ţinînd seama, desigur, de legăturile spaţiale între aceste plane.

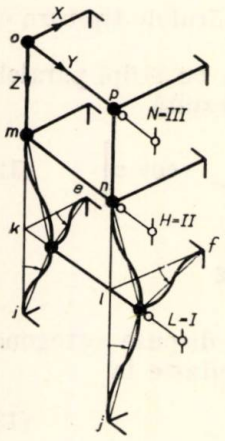


Fig. 4

Se poate aplica fie procedeul „transmiterii rotirilor", fie cel al „repartizării momentelor", luînd în calcule şi efectul momentelor de torsiune dintre planele ce se echilibrează. În cazul încărcărilor fixe, aplicarea procedeului „transmiterii momentelor active" [10] cumulează avantajele parţiale ale procedeelor ce operează cu rotiri sau momente repartizate.

Rezolvarea cadrelor spaţiale ortogonale, liniar deplasabile, se poate efectua fie pe mai multe scheme iterative, fie pe o singură schemă în cazul aplicării procedeului „nodurilor fictive" [1], operînd în calcule cu eforturi (momente şi forţe de deviaţie „active" (10] sau cu deplasări (rotiri de noduri şi bare) [1].

Generalizînd procedeul „nodurilor fictive" la calculul cadrelor spaţiale ortogonale, se obţin (fig. 4) ecuaţii de forma :

$$(\sum M)_{k,A} = 0, \quad A = X, Y, Z; \; k = 1, 2, \ldots, n \tag{16}$$

$$r_{kk,A} \cdot \theta_{k,A} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} r_{kl,A} \cdot \theta_{l.A} + \sum_{L=I}^{N} r_{kl.A} \cdot \Delta_L + R_{k,A} = 0$$

$$(\sum D)_H = 0. \qquad H = I, II, \ldots, N \tag{17}$$

$$r_{HH} \cdot \Delta_H + \sum_{l=1}^{n} r_{Hl,A} \cdot \theta_{l,A} + \sum_{\substack{L=I \\ L \neq H}}^{N} r_{HL} \cdot \Delta_L + R_H = 0$$

şi, făcînd înlocuirile în cazul cînd se operează cu momente şi forţe de deviaţie „active",

$$\theta_{k,A} = \frac{M_{k,A}}{r_{kk,A}}; \quad \theta_{l,A} = \frac{M_{l.A}}{r_{ll,A}}; \quad \Delta_L = \frac{D_L}{r_{LL}}; \quad \Delta_H = \frac{D_H}{r_{HH}},$$

se obţine

$$M_{k,A} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{r_{kl,A}}{r_{ll,A}} \cdot M_{l,A} + \sum_{L=I}^{N} \frac{r_{kL\ A}}{r_{LL}} \cdot D_L + R_{k,A} = 0 \tag{18}$$

$$D_H + \sum_{l=1}^{n} \frac{r_{Hl}}{r_{ll,A}} \cdot M_{l.A} + \sum_{\substack{L=I \\ L \neq H}}^{N} \frac{r_{HL}}{r_{LL}} \cdot D_L + R_H = 0. \tag{19}$$

Valorile inițiale ale necunoscutelor vor fi

$$M_{k,A}^{(1)} = R_{k,A}\,; \quad D_H^{(1)} = R_H\,.$$

Coeficienții de transmitere între noduri vor fi :

— între nodurile reale :

$$t_{l\to k}^{M_A} = -\frac{r_{kl,A}}{r_{ll,A}} = -\,t_{l\to k}^{M_a}\frac{\rho_{lk,a}}{\sum\limits_l \rho_{lk,a}} = -\,t_{l\to k}^{M_a}\cdot m_{lk,a}\,; \tag{20}$$

— de la nodul real la cel fictiv :

$$t_{l\to H}^{D} = -\frac{r_{Hl,A}}{r_{ll,A}} = +\,m_{ln,a}(1 + t_{l\to n}^{M_a})\frac{1}{l_{ln}}, \tag{21a}$$

respectiv

$$t_{l\to L}^{D} = +\sum_L m_{lk,a}\,(1 + t_{l\to k}^{M_a})\frac{1}{l_{kl}}\,C_{kl,a}\,, \tag{21b}$$

unde, în figura 4, „k'' $= j,\ n$; $(C_{kl,a} = \pm 1)$,

— de la nodul fictiv la cel real :

$$t_{L\to k}^{M_A} = -\frac{r_{kL,A}}{r_{LL}} = +\frac{\sum\limits_K u_{kl}\dfrac{J_{kl,a}}{l_{kl}^2}\,C_{kl,a}}{\sum\limits_L (u_{kl} + u_{lk})\dfrac{J_{kl,a}}{l_{kl}^3}}\,, \tag{22}$$

unde

$$u_{kl} = \frac{c_2 + c_3}{c_1c_2 - c_3^2}\,, \quad u_{lk} = \frac{c_1 + c_3}{c_1c_2 - c_3^2}$$

și unde coeficienții c_1, c_2, c_3 sînt dați în tabele tehnice [3].

Prin „kl'' se înțelege orice bară ce se deformează în deplasarea liniară ΔL; în figura 4, „l'' $= i,\ e,\ m$;

— între nodurile fictive :

$$t_{L\to H}^{D} = -\frac{r_{HL}}{r_{LL}} = +\frac{\sum\limits_H (u_{kl} + u_{lk})\dfrac{J_{kl,a}}{l_{kl}^3}}{\sum\limits_L (u_{kl} + u_{lk})\dfrac{J_{kl,a}}{l_{kl}^3}}\,. \tag{23}$$

Prin „kl'' se înțelege orice bară ce introduce forță de deviație după direcția legăturii liniare H, respectiv L, în deplasarea liniară după direcția L ($\sum\limits_H$ se referă la barele km, ln; $\sum\limits_L$ se referă la barele km, ki, ke, ln, lj, lf; vezi figura 4).

$J_{kl,a}$ reprezintă momentul de inerţie minim, după direcţia a, al barei kl.

La cadrele plane, în cazul unor deplasări liniare ce translatează cu aceeaşi valoare şi legăturile superioare, relaţia (22) se simplifică, iar transmiterile dintre nodurile fictive se elimină.

Valorile finale ale momentelor la capetele barelor sînt

$$M_{kl,a} = \mathfrak{M}_{kl,A} - m_{kl,A} \cdot M_{k,A} + t^{M_A}_{l\to k} \cdot M_{l,A} + t^{M_A}_{L\to k} \cdot D_L. \qquad (24)$$

Deoarece axele „A" au fost orientate după direcţiile barelor, rezultă $a \parallel A$ şi deci $M_{kl,a} = M_{kl,A}$.

În cazul rezolvării ecuaţiilor (16, 17) din sistemul general de ecuaţii pe mai multe scheme iterative, echilibrarea momentelor se face utilizînd numai relaţiile (20), iar restul calculului se conduce conform (1.1).

Dacă structura din figura 4 se reduce la un singur nivel, se poate aplica avantajos procedeul celor două şiruri de transmiteri [11], [7], operînd fie cu rotiri, fie cu momente „active".

4. CONCLUZII

4.1. Procedeul I este avantajos în cazul unui număr redus de ipoteze de încărcare, deoarece necesită rezolvarea sistemului de ecuaţii al nodului (3), de fiecare dată în parte. De asemenea, acest procedeu este avantajos în cazul sarcinilor mobile, deoarece operează cu rotiri de nod, elemente necesare determinării liniilor de influenţă.

4.2. Procedeul II este avantajos în cazul unui număr mare de ipoteze de încărcare, de fiecare dată putîndu-se opera cu aceiaşi coeficienţi de repartizare „m".

4.3. Procedeul III este preferat în cazul repetării unor ipoteze asemănătoare de încărcare (care produc momente iniţiale, de încastrare perfectă, după aceeaşi direcţie). De asemenea acest procedeu este necesar pentru determinarea coeficienţilor de repartizare în cazul unor procedee de calcul aproximative [2].

4.4. În cazul cadrelor neortogonale, pentru a mări convergenţa iteraţiei, echilibrarea momentelor se face avantajos în două etape de calcul, pe mai multe scheme iterative, rezolvate după unul dintre procedeele enumerate mai sus.

4.5. În cazul cadrelor ortogonale, echilibrarea momentelor la noduri este similară celei plane, iar cele două etape pot fi rezolvate pe una sau pe mai multe scheme iterative.

Aplicarea procedeului „nodurilor fictive", operînd preferabil fie cu deplasări (unghiulare şi liniare), fie cu eforturi (momente şi forţe de deviaţie „active"), după natura încărcării (mobile sau fixe), reduce numărul de operaţii necesare echilibrării, întregul calcul iterativ fiind inclus pe o singură schemă de echilibrare.

5. EXEMPLE DE CALCUL

5.1. Se propune cadrul din figura 5 pentru care se calculează valorile momentelor încovoietoare M, echilibrînd succesiv nodul 2 prin cele 3 procedee.

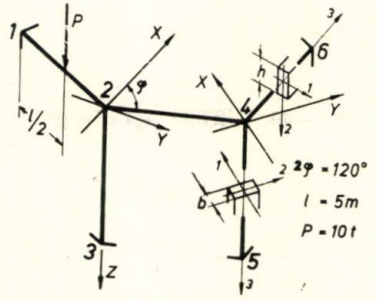


Fig. 5

Caracteristicile elastice ale barelor și cosinii directori ai axelor $a = 1, 2, 3$:

Bara	2–1; 4–2			2–3; 4–5			2–4; 4–6		
Axa	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$l \cdot h \cdot b$	500 · 60 · 30			500 · 50 · 50			500 · 60 · 30		
$\rho_{kl \cdot a}$	1,080	0,270	0,093	1,042	1,042	0,219	1,080	0,270	0,093
α	−0,866	0	−0,500	1	0	0	−0,866	0	−0,500
β	−0,500	0	0,866	0	1	0	0,500	0	−0,866
γ	0	1	0	0	0	−1	0	1	0

5.1.1. Calculul prin procedeul I.

5.1.1.1. Echilibrarea simetrică a nodului 2 în etapa I.

Bara	2–1			2–3			2–4		
Axa	1	2	3	1	2	3	1	2	3
ρ	1,080	0,270	0,093	1,042	1,042	0,219	0,540	0,135	0
α	−0,866	0	−0,500	1	0	0	−0,866	0	−0,500
β	−0,500	0	0,866	0	1	0	0,500	0	−0,866
γ	0	1	0	0	0	−1	0	1	0
$\rho\alpha$	−0,935	0	−0,047	1,042	0	0	−0,468	0	0
$\rho\beta$	−0,540	0	+0,081	0	1,042	0	0,270	0	0
$\rho\gamma$	0	0,270	0	0	0	−0,219	0	0,135	0

$\sum \rho\alpha^2 = 2{,}280$; $\sum \rho\beta^2 = 1{,}517$; $\sum \rho\gamma^2 = 0{,}624$; $\sum \rho\alpha\beta = 0{,}193$,

$\mathfrak{M}_{21,1} = \mathfrak{M}_{12,1} = P\,l/8 = 10 \cdot 5/8 = 6\,250$ kgm

$R_X = 6\,250 \cdot \cos 30° = 5\,410$ kgm; $R_Y = 3\,125$ kgm; $R_Z = 0$.

Rezolvînd sistemul de ecuații (3), rezultă

$$\theta_X = -2\,225\,; \quad \theta_Y = -1776\,; \quad \theta_Z = 0.$$

Apoi cu relațiile (4), (5) și (6) rezultă $M^{\circ}_{kl,\,a\ (\text{sim.})}$:

$M^{r}_{kl,\,a}$	2 080	0	105	−2 320	0	0	1 040	0	0
	960	0	−145	0	−1 850	0	−480	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	+3 040	0	−40	−2 320	−1 850	0	+560	0	0
$\mathfrak{M}_{kl,\,a}$	−6 250	0	0	0	0	0	0	0	0
$M^{\circ}_{kl,\,a}$	−3 210	0	−40	−2 320	−1 850	0	+560	0	0

5.1.1.2. Din echilibrarea antisimetrică a nodului 2 în etapa I rezultă momentele $M^{\circ}_{kl,a\ (\text{antisim.})}$:

— la capetele barelor ce concurează în nodul 2 :

	2−1			2−3			2−4		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$M^{\circ}_{kl,a}$	−3 555	0	−60	−1 915	−1 885	0	+1 115	0	+460

— la celelalte capete ale barelor :

	1−2			3−2			4−2		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$M^{\circ}_{kl,\,a}$	+7 600	0	−60	−958	−943	0	+1 115	0	+460

5.1.1.3. Din deplasarea liniară $\Delta = 1$, dată arbitrar în etapa a II-a, rezultă momentele echilibrate $M^{H}_{kl,a}$;

— la capetele barelor din nodul 2 :

	2−1			2−3			2−4		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$M^{H}_{kl,\,a}$	−0,1610	−0,3742	+0,0600	+0,5231	−0,5944	0	+0,7788	+0,3742	−0,0836

— la celelalte capete ale barelor :

	1−2			3−2			4−2		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$M^{H}_{kl,\,a}$	−0,0805	−0,3742	+0,0600	+0,6229	−0,9224	0	+0,7788	+0,3742	−0,0836

5.1.1.4. Corectarea deplasării din etapa a II-a:

$$L_1^\circ = -\left[(-1915-958)\frac{0{,}578}{5}2+(-1885-943)\left(-\frac{1}{5}\right)2\right] = -467$$

$$L_{11} = -\left[(+0{,}5231+0{,}6229)\cdot\frac{0{,}578}{5}2+(-0{,}5944-0{,}9224)\left(-\frac{1{,}000}{5}\right)2+\right.$$

$$\left.=(-0{,}3742)\,6\left(-\frac{1{,}155}{5}\right)\right] = -1{,}3905$$

și deci $C = -336{,}5$.

5.1.1.5. Prin suprapunerea efectelor se obțin momentele echilibrate (fig. 6):

$$M_{kl,a} = M^\circ_{kl,a\,(\text{sim.})} + M^\circ_{kl,a\,(\text{antisim.})} + C\cdot M^H_{kl,a}\,.$$

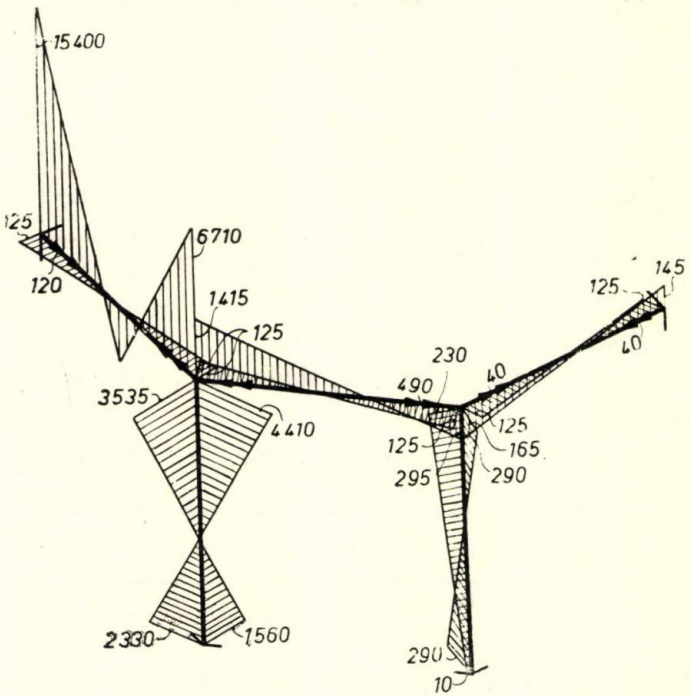


Fig. 6

5.1.2. Calculul prin procedeul II:

Bara	2—1			2—3			2—4		
Axa	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$\rho\alpha$	−0,935	0	−0,047	1,042	0	0	−0,468	0	0
$\rho\beta$	−0,540	0	+0,081	0	1,042	0	0,270	0	0
$\rho\gamma$	0	+0,270	0	0	0	−0,219	0	0,135	0

Din acţiunile $R_A = +1$ simetrice, în nodul 2, prin echilibrări succesive, se obţin coeficienţii $m_{kl,a,A}$, $(A = X, Y, Z)$:

$m_{kl,a,X}$	0,385	0	0,025	−0,462	+0,059	0	−0,223		0
$m_{kl,a,Y}$	0,307	0	−0,057	+0,059	−0,695	0	−0,207	0	0
$m_{kl,a,Z}$	0	−0,432	0	0	0	+0,351	0	−0,216	0

Din încărcarea P simetrică, după cele trei axe $A = X, Y, Z$ apar momentele de încastrare perfectă:

$$R_X = +5\,410 \text{ kgm}, \quad R_Y = +3\,125 \text{ kgm}, \quad R_Z = 0.$$

Prin suprapunerea efectelor se obţin momentele de încastrare elastică:

$$M_{kl,a} = \mathfrak{M}_{kl,a} + \sum R_A \cdot m_{kl,a,A}$$

$\mathfrak{M}_{kl,a}$	−6 250	—	—	—	—	—	—	—	—
$M_{kl,a,X}$	+2 080	0	+137	−2 500	− 320	0	+1 205	0	0
$M_{kl,a,Y}$	+ 960	0	−177	+ 180	−2 170	0	− 645	0	0
$M_{kl,a,Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$M_{kl,a}$	−3 210	0	−40	−2 320	−1 850	0	+ 560	0	0

5.1.3. Calculul prin procedeul III.

Din acţiunea $R = \mathfrak{M}_{21,1} = +1$, unde $\mathfrak{M}_{21,1} = 1 \cdot \sin \varphi + 1 \cdot \cos \varphi$, rezultă coeficientul

$$m_{kl,a} = m_{kl,a,X} \cdot \sin \varphi + m_{kl,a,Y} \cdot \cos \varphi$$

Bara	2−1			2−3			2−4		
Axa	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$m_{kl,a}$	0,487	—	−0,006	−0,371	−0,297	0	+0,090	0	0

şi deci din încărcarea P simetrică prin echilibrare se obţin (relaţiile 8,6)

$\mathfrak{M}_{kl,a}$	−6 250	—	—	—	—	—	—	—	—
M^r	+3 040	—	−40	−2 320	−1 850	0	+560	0	0
$M_{kl,a}$	−3 210	0	−40	−2 320	−1 850	0	+560	0	0

Se constată identitatea valorilor obţinute prin cele trei procedee (5.1.1.1, 5.1.2. şi 5.1.3).

5.2. Se propune cadrul din beton armat din figura 7 pentru care se calculează valorile momentelor M prin procedeul nodurilor fictive (3.3).

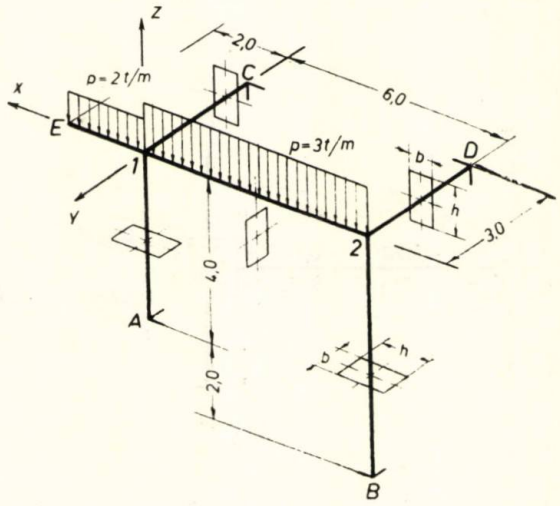


Fig. 7

Caracteristicile elastice ale barelor

Bara	$h \cdot b$ dm²	l m	$\rho_{kl,Y}$	$\rho_{kl,Z}$	$m_{kl,Y}$ (12)	$m_{kl,Z}$ (12)	$t^{MY}_{k\to 1}$ (20)	$t^{MZ}_{k\to 1}$ (20)	$t^{D}_{k\to H}$ (21)	$t^{MA}_{L\to k}$ (22)
1—A	3.4	4	0,400	0,051	0,286	0,078	−0,143	(+0,078)	0,0107	4,317
1—C	3.5	3	0,100	0,375	0,071	0,576	(+0,071)	−0,288	−0,0288	−5,397
1—2	3.6	6	0,900	0,225	0,643	0,346	−0,322	−0,173	—	—
1—E	3.4	2	—	—	—	—	—	—	—	—
2—1	3.6	6	0,900	0,225	0,710	0,355	−0,355	−0,178	—	—
2—B	3.4	6	0,267	0,034	0,211	0,054	−0,106	(+0,054)	0,0053	1,921
2—D	3.5	3	0,100	0,375	0,079	0,591	(+0,079)	−0,296	−0,0296	−5,397

unde

$$\rho_{kl,a} = \frac{I_{kl,a}}{l_{kl}},\ (a = 1,2);\quad \rho_{kl,3} = \frac{0,425}{4}\,\frac{I_{kl,3}}{l_{kl}};$$

$$I_{kl,3} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{0,62}{\dfrac{h}{b}}\right) b^3 h.$$

5.2.1. Echilibrarea nodurilor reale (1 și 2) și a celui fictiv (I, deplasarea liniară după X) se face cu ajutorul relațiilor (18), (19) în schema din figura 8, iar momentele finale calculate cu relația (24) sînt date în figura 9.

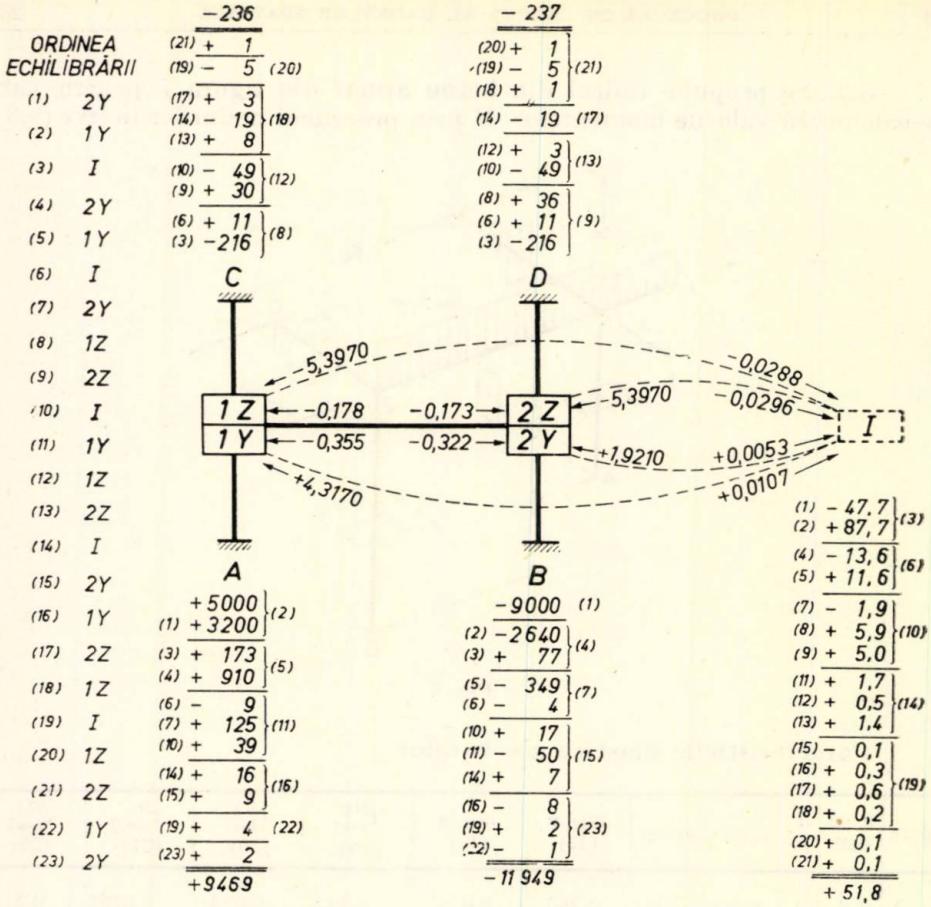

ORDINEA ECHILIBRĂRII
(1) 2Y
(2) 1Y
(3) I
(4) 2Y
(5) 1Y
(6) I
(7) 2Y
(8) 1Z
(9) 2Z
(10) I
(11) 1Y
(12) 1Z
(13) 2Z
(14) I
(15) 2Y
(16) 1Y
(17) 2Z
(18) 1Z
(19) I
(20) 1Z
(21) 2Z
(22) 1Y
(23) 2Y
−236
(21) + 1
(19) − 5 (20)
(17) + 3
(14) − 19 (18)
(13) + 8
(10) − 49 (12)
(9) + 30
(6) + 11
(3) −216 (8)
− 237
(20) + 1
(19) − 5 (21)
(18) + 1
(14) − 19 (17)
(12) + 3
(10) − 49 (13)
(8) + 36
(6) + 11 (9)
(3) −216
C
D
1 Z
1 Y
2 Z
2 Y
I
5,3970
−0,178
−0,173
−0,355
−0,322
5,3970
−0,0288
−0,0296
+1,9210
+0,0053
+0,0107
+4,3170
A
B
+5000
(1) +3200 (2)
(3) + 173
(4) + 910 (5)
(6) − 9
(7) + 125 (11)
(10) + 39
(14) + 16
(15) + 9 (16)
(19) + 4 (22)
(23) + 2
+9469
−9000 (1)
(2) −2640 (4)
(3) + 77
(5) − 349 (7)
(6) − 4
(10) + 17
(11) − 50 (15)
(14) + 7
(16) − 8
(19) + 2 (23)
(22) − 1
−11 949
(1) − 47,7
(2) + 87,7 (3)
(4) − 13,6
(5) + 11,6 (6)
(7) − 1,9
(8) + 5,9 (10)
(9) + 5,0
(11) + 1,7
(12) + 0,5 (14)
(13) + 1,4
(15) − 0,1
(16) + 0,3
(17) + 0,6 (19)
(18) + 0,2
(20) + 0,1
(21) + 0,1
+ 51,8

Fig. 8

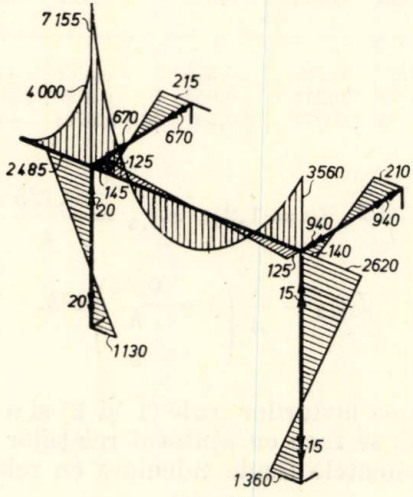

7155
4000
215
670
670
2485
125
145
20
3560
210
940
940
140
125
2620
15
20
1130
15
1360

Fig. 9

5.2.2. Verificări finale:

$$\sum M_{1,Y} = +7\,155 - 4\,000 - 670 - 2\,485 = 0$$

$$\sum M_{1,Z} = 20 + 125 - 145 = 0$$

$$\sum M_{2,Y} = -3\,560 + 2\,620 + 940 = 0$$

$$\sum M_{2,Z} = 125 + 15 - 140 = 0$$

$$\sum D = \frac{2\,485 + 1\,130}{4} - \frac{2\,620 + 1\,360}{6} - \frac{-145-215-140-210}{3} \cong 0.$$

Primită la redacție la 20 martie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. R. Agent, G. Aznavorian, *Metode iterative pentru calculul cadrelor cu noduri deplasabile.* Ind. constr. și a mat. constr., București, **3**, *12* (1955).
2. D. Anastasescu, I. Munteanu, *Le calcul simplifié des structures spatiales du type „tour" sous charges horizontales.* Rev. méc. appl., **VII**, *4* (1962).
3. C. Avram, *La généralisation de la méthode Cross.* Timișoara, 1949.
4. C. Cassado, Y. Fernandez, *Calcul des grandes ossatures réticulaires.* Paris, Edit. Dunod, 1954.
5. C. Cătuneanu, D. Anastasescu, I. Munteanu, *Generalizarea metodei repartizării momentelor la calculul cadrelor spațiale.* Bul. Inst. polit. Timișoara, **3**, *17* (1958).
6. M. D. Kupferschmidt, *Ebene und räumliche Rahmentragwerke.* Viena, Springer-Verlag, 1952.
7. P. Mazilu, *Statica construcțiilor*, vol. II, București, Edit. tehnică, 1959.
8. I. Munteanu, *Cadre spațiale simetrice radial cu stîlpi neparaleli.* St. cerc. Acad. R.P.R., Timișoara, **X**, *1* (1963).
9. L. Palotas, *Keretek elmelete és számitása.* Budapesta, 1951.
10. A. Seșan, N. Orlovschi, *Variante și simplificări ale metodei distribuției momentelor.* Teoria și practica constr., Iași, *1* (1953).
11. П. М. Сосис, *Расчет рам.* Киев, 1956.

ASUPRA STABILITĂȚII DINAMICE A RACHETELOR

de AL. MARINESCU
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

531.1 : 629.136.3

În lucrare se studiază problema generală a stabilității dinamice a rachetelor neconduse în regim de zbor supersonic.
Pornind de la ecuațiile generale ale mișcării neperturbate, se stabilesc ecuațiile mișcării perturbate, arătîndu-se pentru configurația studiată modul de separare al mișcării longitudinale și laterale. Atît pentru mișcarea longitudinală, cît și pentru cea laterală, pe baza ecuațiilor de mișcare se deduc criteriile de stabilitate cu care se analizează stabilitatea rachetei.

NOTAȚII

$O\,X\,Y\,Z$	— sistem de axe fix în spațiu;
$O\,x\,y\,z$	— sistem de axe legat de rachetă;
λ	— lungime caracteristică;
V_0	— viteza în zbor de regim a rachetei;
$V_x,\ V_y,\ V_z$	— componentele vitezei de translație a rachetei în direcția axelor $x,\ y,\ z$;
$\Omega_x,\ \Omega_y,\ \Omega_z$	— componentele vitezei de rotație a rachetei în direcția axelor $x,\ y,\ z$;
G	— greutatea totală a rachetei;
$F_{ex},\ F_{ey},\ F_{ez}$	— componentele rezultantei forțelor exterioare care acționează asupra rachetei în direcția axelor $x,\ y,\ z$;
$F_{rx},\ F_{ry},\ F_{rz}$	— componentele rezultantei forțelor reactive de-a lungul axelor $x,\ y,\ z$;
$M_{ex},\ M_{ey},\ M_{ez}$	— componentele momentului forțelor exterioare de-a lungul axelor $x,\ y,\ z$;

ST. CERC. MEC. APL. TOM 21 NR. 1 P. 271–289 BUCUREȘTI 1966

M_{rx}, M_{ry}, M_{rz} — componentele momentului forţelor reactive de-a lungul axelor x, y, z;
φ, θ, ψ — unghiuri ale axelor mobile legate de corp faţă de sistemul fix;
I_x, I_y, I_z — momente de inerţie ale rachetei faţă de axele x, y, z;
M — masa rachetei;
ρ — densitatea aerului;
S_R — suprafaţă caracteristică;
C_x, C_y, C_z — coeficienţi ai forţelor aerodinamice;
C_{mx}, C_{my}, C_{mz} — coeficienţi ai momentelor forţelor aerodinamice;
C_{xr} — coeficientul de rezistenţă al rachetei.

Problema stabilităţii dinamice a rachetelor este, fără îndoială, în centrul atenţiei cercetării actualmente, făcînd obiectul a numeroase lucrări. În ceea ce priveşte rachetele neconduse, de care ne vom ocupa în articolul de faţă, se pot cita unele lucrări care abordează problema simplificată a stabilităţii dinamice [1], [2], [3].

Ne propunem în lucrarea de faţă să tratăm problema generală a stabilităţii dinamice a rachetelor neconduse în regim de zbor supersonic.

Considerăm racheta ca un corp de masă variabilă de care, cu originea în centrul de greutate, presupunem legat sistemul de axe $Oxyz$ (fig. 1)

Fie $\overline{V}$ (V_x, V_y, V_z) viteza pe traectorie şi $\overline{\Omega}$ (Ω_x, Ω_y, Ω_z) rotaţia instantanee a rachetei. Fie de asemenea $\overline{F}_e$ (F_{ex}, F_{ey}, F_{ez}) rezultanta for-

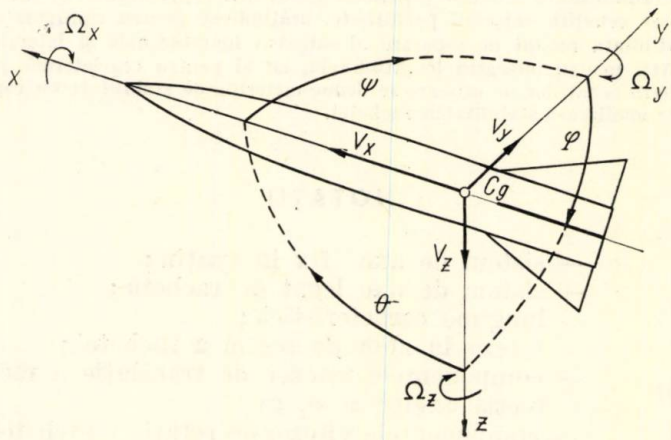


Fig. 1

ţelor exterioare care acţionează asupra rachetei şi $\overline{F}_r$ (F_{rx}, F_{ry}, F_{rz}) rezultanta forţelor reactive, $\overline{M}_e$ (M_{ex}, M_{ey}, M_{ez}) momentul forţelor exterioare, iar $\overline{M}$ (M_{rx}, M_{ry}, M_{rz}) momentul forţelor reactive. Componentele tuturor mărimilor vectoriale care intervin vor fi înţelese deci de-a lungul axelor legate de rachetă. Deoarece originea sistemului de axe legat de rachetă coincide cu centrul de greutate, atunci ecuaţiile miş-

cării neperturbate ale centrului de greutate respectiv în jurul centrului de greutate după cele trei axe sînt,

$$\frac{dV_x}{dt} + \Omega_y V_z - \Omega_z V_y = \frac{F_{ex}}{M} + \frac{F_{rx}}{M},$$

$$\frac{dV_y}{dt} + \Omega_z V_x - \Omega_x V_z = \frac{F_{ey}}{M} + \frac{F_{ry}}{M},$$

$$\frac{dV_z}{dt} + \Omega_x V_y - \Omega_y V_x = \frac{F_{ez}}{M} + \frac{F_{rz}}{M} \tag{1}$$

și

$$\frac{d\Omega_x}{dt} + \frac{I_z - I_y}{I_x}\Omega_y\Omega_z = \frac{M_{ex}}{I_x} + \frac{M_{rx}}{I_x},$$

$$\frac{d\Omega_y}{dt} + \frac{I_x - I_z}{I_y}\Omega_z\Omega_x = \frac{M_{ey}}{I_y} + \frac{M_{ry}}{I_y}, \tag{2}$$

$$\frac{d\Omega_z}{dt} + \frac{I_y - I_x}{I_z}\Omega_x\Omega_y = \frac{M_{ez}}{I_z} + \frac{M_{rz}}{I_z}.$$

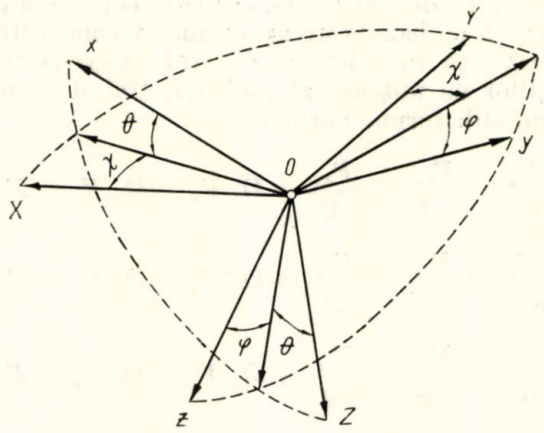


Fig. 2

În ce privește poziția rachetei, cu alte cuvinte a sistemului legat față de un sistem fix $OXYZ$, cosinușii directori ai axelor legate sînt, conform figurii 2, dați de tabela de mai jos, astfel încît unghiurile definind

Axele legate de rachetă	Axele fixe		
	OX	OY	OZ
Ox	$\cos\theta\cos\psi$	$\cos\theta\sin\psi$	$-\sin\theta$
Oy	$-\cos\varphi\sin\psi+$ $+\sin\varphi\sin\theta\cos\psi$	$\cos\varphi\sin\psi+$ $+\sin\psi\sin\theta\sin\psi$	$\sin\varphi\cos\theta$
Oz	$\sin\varphi\sin\psi$ $+\cos\varphi\sin\theta\cos\psi$	$-\sin\varphi\cos\psi$ $+\cos\varphi\sin\theta\sin\psi$	$\cos\varphi\cos\theta$

poziţia axelor legate faţă de sistemul fix (unghiurile lui Euler) se găsesc în următoarele relaţii cu vitezele unghiulare :

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\sin\theta,\\ \Omega_y &= \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta\sin\varphi,\\ \Omega_z &= -\frac{d\theta}{dt}\sin\varphi + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta\cos\varphi.\end{aligned} \tag{3}$$

Pentru intervale scurte de timp se poate considera aproape riguros că $M \approx$ const. şi deci racheta în această situaţie se comportă ca un corp de masă invariabilă. Pe de altă parte, se poate considera că viteza în zbor de regim (în mişcarea de bază) este aproximativ constantă, această aproximaţie fiind acceptată în calculele de stabilitate la rachete. Sistemul complet al ecuaţiilor de mişcare al rachetei, ţinînd seama de (1), (2) şi (3), se poate scrie sub forma normală

$$\begin{aligned}\frac{dV_x}{dt} &= \frac{F_{ex}}{M} + \frac{F_{rx}}{M} + \Omega_z V_y - \Omega_y V_z = F_1,\\ \frac{dV_y}{dt} &= \frac{F_{ey}}{M} + \frac{F_{ry}}{M} + \Omega_x V_z - \Omega_z V_x = F_2,\\ \frac{dV_z}{dt} &= \frac{F_{ez}}{M} + \frac{F_{rz}}{M} + \Omega_y V_x - \Omega_x V_y = F_3,\\ \frac{d\Omega_x}{dt} &= \frac{M_{ex}}{I_x} + \frac{M_{rx}}{I_x} + \frac{I_y - I_z}{I_x}\Omega_y\Omega_z = F_4,\\ \frac{d\Omega_y}{dt} &= \frac{M_{ey}}{I_y} + \frac{M_{ry}}{I_y} + \frac{I_z - I_x}{I_y}\Omega_z\Omega_x = F_5,\end{aligned} \tag{4}$$

$$\frac{d\Omega_z}{dt} = \frac{M_{ez}}{I_z} + \frac{M_{rz}}{I_z} + \frac{I_x - I_y}{I_z}\Omega_x \Omega_y = F_6,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega_x + \operatorname{tg}\theta\,(\Omega_y \sin\varphi + \Omega_z \cos\varphi) = F_7,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega_y \cos\varphi - \Omega_z \sin\varphi = F_8,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos\theta}(\Omega_y \sin\varphi + \Omega_z \cos\varphi) = F_9.$$

Funcțiile $F_1, F_2, \ldots, F_9$ depind de componentele vitezelor V_x, V_y, V_z, Ω_x, Ω_y, Ω_z, de derivatele lor $\frac{dV_x}{dt}$, $\frac{dV_y}{dt}$, $\frac{dV_z}{dt}$, $\frac{d\Omega_x}{dt}$, $\frac{d\Omega_y}{dt}$, $\frac{d\Omega_z}{dt}$ și de unghiurile φ, θ, ψ. Deci ecuațiile mișcării perturbate se vor scrie sub forma

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta V_x}{dt} &= \frac{\partial F_1}{\partial V_x}\Delta V_x + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial \frac{d\Delta V_x}{dt}}\frac{d\Delta V_x}{dt} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial \psi}\Delta\psi, \\
\frac{d\Delta V_y}{dt} &= \frac{\partial F_2}{\partial V_x}\Delta V_x + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial \frac{d\Delta V_x}{dt}}\frac{d\Delta V_x}{dt} + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial \psi}\Delta\psi, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{d\Delta\psi}{dt} &= \frac{\partial F_9}{\partial V_x}\Delta V_x + \ldots + \frac{\partial F_9}{\partial \frac{d\Delta V_x}{dt}}\frac{d\Delta V_x}{dt} + \ldots + \frac{\partial F_9}{\partial \psi}\Delta\psi.
\end{aligned} \tag{5}$$

Alegem următorul sistem de mărimi adimensionale :

$$V_x^* = \frac{V_x}{V_0};\quad V_y^* = \frac{V_y}{V_0};\quad V_z^* = \frac{V_z}{V_0},$$

$$\Omega_x^* = \frac{\Omega_x \lambda}{2V_0};\quad \Omega_y^* = \frac{\Omega_y \lambda}{2V_0};\quad \Omega_z^* = \frac{\Omega_z \lambda}{2V_0},$$

$$t^* = \frac{2V_0}{\lambda}t;\quad I_x^* = \frac{g I_x}{G\lambda^2};\quad I_y^* = \frac{g I_y}{G\lambda^2};\quad I_z^* = \frac{g I_z}{G\lambda^2},$$

$$\frac{dV_x^*}{dt^*} = \frac{d\frac{V_x}{V_0}}{dt}\frac{\lambda}{2V_0};\quad \frac{dV_y^*}{dt^*} = \frac{d\frac{V_y}{V_0}}{dt}\frac{\lambda}{2V_0},$$

$$\frac{dV_z^*}{dt^*} = \frac{d\frac{V_z}{V_0}}{dt} \frac{\lambda}{2V_0},$$

$$\frac{d\Omega_x^*}{dt^*} = \frac{d\Omega_x}{dt} \frac{\lambda^2}{4V_0^2}; \quad \frac{d\Omega_y^*}{dt^*} = \frac{d\Omega_y}{dt} \frac{\lambda^2}{4V_0^2},$$

$$\frac{d\Omega_z^*}{dt^*} = \frac{d\Omega_z}{dt} \frac{\lambda^2}{4V_0^2}$$

sau, notînd cu $\omega = \frac{2V_0}{\lambda}$ şi $\frac{\lambda}{2V_0} = \frac{1}{\omega}$,

$$t^* = \omega t; \quad \frac{dV_x^*}{dt^*} = \frac{dV_x}{dt} \frac{1}{V_0\omega}; \quad \frac{dV_y^*}{dt^*} = \frac{dV_y}{dt} \frac{1}{V_0\omega},$$

$$\frac{dV_z^*}{dt^*} = \frac{dV_z}{dt} \frac{1}{V_0\omega}; \quad \frac{d\Omega_x^*}{dt^*} = \frac{d\Omega_x}{dt} \frac{1}{\omega^2},$$

$$\frac{d\Omega_y^*}{dt^*} = \frac{d\Omega_y}{dt} \frac{1}{\omega^2},$$

$$\frac{d\Omega_z^*}{dt^*} = \frac{d\Omega_z}{dt} \frac{1}{\omega^2},$$

şi sistemul de ecuaţii al mişcării perturbate se scrie în forma adimensională

$$\frac{d\Delta V_x^*}{dt^*} = \frac{\partial F_1^*}{\partial V_x^*}\Delta V_x^* + \ldots + \frac{\partial F_1^*}{\partial \frac{d\Delta V_x^*}{dt^*}} \frac{d\Delta V_x^*}{dt^*} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial \psi}\Delta\psi$$

$$\frac{d\Delta V_y^*}{dt^*} = \frac{\partial F_2^*}{\partial V_x^*}\Delta V_x^* + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial \frac{d\Delta V_x^*}{dt^*}} \frac{d\Delta V_x^*}{dt^*} + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial \psi}\Delta\psi \qquad (6)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d\Delta\psi}{dt^*} = \frac{\partial F_9}{\partial V_x^*}\Delta V_x^* + \ldots + \frac{\partial F_9}{\partial \frac{d\Delta V_x^*}{dt^*}} \frac{d\Delta V_x^*}{dt^*} + \ldots + \frac{\partial F_9^*}{\partial \psi}\Delta\psi.$$

Considerînd pentru simplificare că direcţia tracţiunii este pe direcţia axei de simetrie a rachetei, vom avea $\frac{F_{rx}}{M} = \frac{T}{M}$, $\frac{F_{ry}}{M} = \frac{F_{rz}}{M} = 0$, $M_{rx} = 0$,

și M_{ry}, M_{rz} fiind momentele forțelor Coriolis ale jetului motorului, diferite de zero. Vom pune deci

$$F_{ex} = F_{xa} + F_{xg} = \frac{\rho}{2} V^2 S_R C_x - M g \sin\theta,$$

$$F_{ey} = F_{ya} + F_{yg} = \frac{\rho}{2} V^2 S_R C_y + M g \cos\theta \sin\varphi,$$

$$F_{ez} = F_{za} + F_{zg} = \frac{\rho}{2} V^2 S_R C_z + M g \cos\theta \cos\varphi, \tag{7}$$

$$M_{ex} = M_x = \frac{\rho}{2} V^2 S_R C_{mx},$$

$$M_{ey} = M_y = \frac{\rho}{2} V^2 S_R C_{my},$$

$$M_{ez} = M_z = \frac{\rho}{2} V^2 S_R C_{mz}$$

și

$$F_1^* = \frac{\rho}{2 M \omega V_0} V^2 S_R C_x + \frac{T}{M V_0 \omega} - \frac{g \sin\theta}{V_0 \omega} + \frac{1}{V_0 \omega}\{\Omega_z V_y - \Omega_y V_z\},$$

$$F_2^* = \frac{\rho}{2 M \omega V_0} V^2 S_R C_y + \frac{g \cos\theta \sin\varphi}{V_0 \omega} + \frac{1}{V_0 \omega}\{\Omega_x V_z - \Omega_z V_x\},$$

$$F_3^* = \frac{\rho}{2 M \omega V_0} V^2 S_R C_z + \frac{g \cos\theta \cos\varphi}{V_0 \omega} + \frac{1}{V_0 \omega}\{\Omega_y V_x - \Omega_x V_y\},$$

$$F_4^* = \frac{\rho}{8} S_R \lambda \frac{V^2}{V_0^2} \frac{g}{G I_x^*} C_{mx},$$

$$F_5^* = \frac{\rho}{8} S_R \lambda \frac{V^2}{V_0^2} \frac{g}{G I_y^*} C_{my} - \frac{g}{4 G I_y^* V_0^2} M_{ry}, \tag{8}$$

$$F_6^* = \frac{\rho}{8} S_R \lambda \frac{V^2}{V_0^2} \frac{g}{G I_z^*} C_{mz} - \frac{g}{4 G I_z^* V_0^2} M_{rz},$$

$$F_7^* = \frac{d\Delta\varphi}{dt^*} = \Delta\Omega_x^*,$$

$$F_8^* = \frac{d\Delta\theta}{dt^*} = \Delta\Omega_y^*,$$

$$F_9^* = \frac{d\Delta\psi}{dt^*} = \Delta\Omega_z^*.$$

Ecuaţiile mişcării perturbate pentru zborul de regim în urcare, definit de

$$V_x \approx V_0\,;\quad V_y = 0\,;\quad V_z = V_{z0}\,,$$
$$\Omega_x = 0\,;\quad \Omega_y = 0\,;\quad \Omega_z = 0\,, \tag{9}$$
$$\varphi = 0\,;\quad \theta = \theta_0\,;\quad \psi = 0\,,$$

sînt

$$\frac{\mathrm{d}\,\Delta V_x^*}{\mathrm{d}t^*} = \frac{\rho}{2M\omega} V_0 S_R \left[\frac{\partial C_x}{\partial V_x^*}\Delta V_x^* + \frac{\partial C_x}{\partial V_y^*}\Delta V_y^* + \frac{\partial C_x}{\partial V_z^*}\Delta V_z^* + \right.$$

$$+ \frac{\partial C_x}{\partial \frac{\mathrm{d}V_x^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta V_x^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\partial C_x}{\partial \frac{\mathrm{d}V_y^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta V_y^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\partial C_x}{\partial \frac{\mathrm{d}V_z^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta V_z^*}{\mathrm{d}t^*} +$$

$$+ \frac{\partial C_x}{\partial \Omega_x^*}\Delta\Omega_x^* + \frac{\partial C_x}{\partial \Omega_y^*}\Delta\Omega_y^* + \frac{\partial C_x}{\partial \Omega_z^*}\Delta\Omega_z^* + \frac{\partial C_x}{\partial \frac{\mathrm{d}\Omega_x^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta\Omega_x^*}{\mathrm{d}t^*} +$$

$$\left. + \frac{\partial C_x}{\partial \frac{\mathrm{d}\Omega_y^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta\Omega_y^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\partial C_x}{\partial \frac{\mathrm{d}\Omega_z^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta\Omega_z^*}{\mathrm{d}t^*} \right] + \frac{1}{MV_0\omega} \frac{\partial T}{\partial V_x^*}\Delta V_x^* -$$

$$- \frac{\rho}{2M\omega} V_0 S_R C_x - V_{z0}^*\Delta\Omega_y^* - \frac{g\cos\theta_0}{V\omega}\Delta\theta\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\Delta V_y^*}{\mathrm{d}t^*} = \frac{\rho}{2M\omega} V_0 S_R \left[\frac{\partial C_y}{\partial V_x^*}\Delta V_x^* + \frac{\partial C_y}{\partial V_y^*}\Delta V_y^* + \frac{\partial C_y}{\partial V_z^*}\Delta V_z^* + \right.$$

$$+ \frac{\partial C_y}{\partial \frac{\mathrm{d}V_x^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta V_x^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\partial C_y}{\partial \frac{\mathrm{d}V_y^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta V_y^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\partial C_y}{\partial \frac{\mathrm{d}V_z^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta V_z^*}{\mathrm{d}t^*} +$$

$$+ \frac{\partial C_y}{\partial \Omega_x^*}\Delta\Omega_x^* + \frac{\partial C_y}{\partial \Omega_y^*}\Delta\Omega_y^* + \frac{\partial C_y}{\partial \Omega_z^*}\Delta\Omega_z^* + \frac{\partial C_y}{\partial \frac{\mathrm{d}\Omega_x^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta\Omega_x^*}{\mathrm{d}t^*} + \tag{10}$$

$$\left. + \frac{\partial C_y}{\partial \frac{\mathrm{d}\Omega_y^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta\Omega_y^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\partial C_y}{\partial \frac{\mathrm{d}\Omega_z^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta\Omega_z^*}{\mathrm{d}t^*} \right] + \frac{g\cos\theta_0}{V_0\omega}\Delta\varphi +$$

$$+ \Omega_x^* V_{z0}^* - \Omega_z^* V_{x0}^*\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\Delta V_z^*}{\mathrm{d}t^*} = \frac{\rho}{2\,M\omega} V_0 S_R \left[\frac{\partial C_z}{\partial V_x^*}\,\Delta V_x^* + \frac{\partial C_z}{\partial V_y^*}\,\Delta V_y^* + \frac{\partial C_z}{\partial V_z^*}\,\Delta V_z^* + \right.$$

$$+ \frac{\partial C_z}{\partial \dfrac{\mathrm{d}V_x^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta V_x^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\partial C_z}{\partial \dfrac{\mathrm{d}V_y^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta V_y^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\partial C_z}{\partial \dfrac{\mathrm{d}V_z^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta V_z^*}{\mathrm{d}t^*} +$$

$$+ \frac{\partial C_z}{\partial \Omega_x^*}\,\Delta\Omega_x^* + \frac{\partial C_z}{\partial \Omega_y^*}\,\Delta\Omega_y^* + \frac{\partial C_z}{\partial \Omega_z^*}\,\Delta\Omega_z^* + \frac{\partial C_z}{\partial \dfrac{\mathrm{d}\Omega_x^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta\Omega_x^*}{\mathrm{d}t^*} +$$

$$\left. + \frac{\partial C_z}{\partial \dfrac{\mathrm{d}\Omega_y^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta\Omega_y^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\partial C_z}{\partial \dfrac{\mathrm{d}\Omega_z^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\,\Delta\Omega_z^*}{\mathrm{d}t^*} \right] - \frac{g \sin\theta_0}{V_0\,\omega}\,\Delta\theta +$$

$$+ V_{x0}^*\,\Delta\,\Omega_y^*,$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\Omega_x^*}{\mathrm{d}t^*} = \frac{\rho}{8} S_R \lambda \frac{g}{GI_x^*} \left[\frac{\partial C_{mx}}{\partial V_x^*}\,\Delta V_x^* + \frac{\partial C_{mx}}{\partial V_y^*}\,\Delta V_y^* + \right.$$

$$+ \frac{\partial C_{mx}}{\partial V_z^*}\,\Delta V_z^* + \frac{\partial C_{mx}}{\partial \dfrac{\mathrm{d}V_x^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\Delta V_x^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\partial C_{mx}}{\partial \dfrac{\mathrm{d}V_y^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\Delta V_y^*}{\mathrm{d}t^*} +$$

$$+ \frac{\partial C_{mx}}{\partial \dfrac{\mathrm{d}V_z^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}V_z^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\partial C_{mx}}{\partial \Omega_x^*}\,\Delta\Omega_x^* + \frac{\partial C_{mx}}{\partial \Omega_y^*}\,\Delta\Omega_y^* + \frac{\partial C_{mx}}{\partial \Omega_z^*}\,\Delta\Omega_z^* +$$

$$\left. + \frac{\partial C_{mx}}{\partial \dfrac{\mathrm{d}\Omega_x^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\Delta\Omega_x^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\partial C_{mx}}{\partial \dfrac{\mathrm{d}\Omega_y^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\Delta\Omega_y^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\partial C_{mx}}{\partial \dfrac{\mathrm{d}\Omega_z^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\Delta\Omega_z^*}{\mathrm{d}t} \right],$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\Omega_y^*}{\mathrm{d}t^*} = \frac{\rho}{8} S_R \lambda \frac{g}{GI_y^*} \left[\frac{\partial C_{my}}{\partial V_x^*}\,\Delta V_x^* + \frac{\partial C_{my}}{\partial V_y^*}\,\Delta V_y^* + \frac{\partial C_{my}}{\partial V_z^*}\,\Delta V_z^* + \right.$$

$$+ \frac{\partial C_{my}}{\partial \dfrac{\mathrm{d}V_x^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\Delta V_x^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\partial C_{my}}{\partial \dfrac{\mathrm{d}V_y^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\Delta V_y^*}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial C_{my}}{\partial \dfrac{\mathrm{d}V_z^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\Delta V_z^*}{\mathrm{d}t^*} +$$

$$+ \frac{\partial C_{my}}{\partial \Omega^*}\,\Delta\Omega_x^* + \frac{\partial C_{my}}{\partial \Omega_y^*}\,\Delta\Omega_y^* + \frac{\partial C_{my}}{\partial \Omega_z^*}\,\Delta\Omega_z^* + \frac{\partial C_{my}}{\partial \dfrac{\mathrm{d}\Omega_x^*}{\mathrm{d}t^*}} \frac{\mathrm{d}\Delta\Omega_x^*}{\mathrm{d}t^*} +$$

$$+\frac{\partial C_{my}}{\partial\dfrac{d\Omega_y^*}{dt^*}}\frac{d\Delta\Omega_y^*}{dt^*}+\frac{\partial C_{my}}{\partial\dfrac{d\Omega_z^*}{dt^*}}\frac{d\Delta\Omega_z^*}{dt^*}\Bigg]-\frac{g}{4GI_y^*V_0^2}\frac{\partial M_{ry}}{\partial\Delta\Omega_y^*},$$

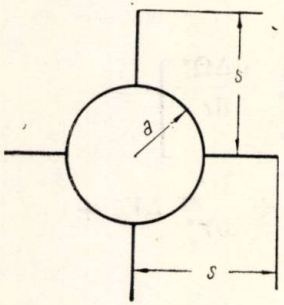
$$\frac{d\Delta\Omega_z^*}{dt^*}=\frac{\rho}{8}S_R\lambda\frac{g}{GI_y^*}\Bigg[\frac{\partial C_{mz}}{\partial V_x^*}\Delta V_x^*+\frac{\partial C_{mz}}{\partial V_y^*}\Delta V_y^*+$$

$$+\frac{\partial C_{mz}}{\partial V_z^*}\Delta V_z^*+\frac{\partial C_{mz}}{\partial\dfrac{dV_x^*}{dt^*}}\frac{d\Delta V_x^*}{dt^*}+\frac{\partial C_{mz}}{\partial\dfrac{dV_y^*}{dt^*}}\frac{d\Delta V_y^*}{dt^*}+$$

$$+\frac{\partial C_{mz}}{\partial\dfrac{dV_z^*}{dt^*}}\frac{d\Delta V_z^*}{dt^*}+\frac{\partial C_{mz}}{\partial\Omega_x^*}\Delta\Omega_x^*+\frac{\partial C_{mz}}{\partial\Omega_y^*}\Delta\Omega_y^*+$$

$$+\frac{\partial C_{mz}}{\partial\Omega_z^*}\Delta\Omega_z^*+\frac{\partial C_{mz}}{\partial\dfrac{d\Omega_x^*}{dt^*}}\frac{d\Delta\Omega_x^*}{dt^*}+\frac{\partial C_{mz}}{\partial\dfrac{d\Omega_y^*}{dt^*}}\frac{d\Delta\Omega_y^*}{dt^*}+$$

$$+\frac{\partial C_{my}}{\partial\dfrac{d\Omega_z^*}{dt^*}}\frac{d\Delta\Omega_z^*}{dt^*}\Bigg]-\frac{g}{4GI_y^*V_0^2}\frac{dM_{ry}}{\partial\Omega_z^*},$$



$$\frac{d\Delta\varphi}{dt^*}=\Delta\Omega_x^*,$$

$$\frac{d\Delta\theta}{dt^*}=\Delta\Omega_y^*,$$

$$\frac{d\Delta\psi}{dt^*}=\Delta\Omega_z^*.$$

Fig. 3

Pentru a da într-o formă explicită ecuaţiile mişcării perturbate, va trebui să dăm expresiile derivatelor aerodinamice. Pentru regimul supersonic de care ne ocupăm, o parte din derivate pot fi uşor calculate cu ajutorul potenţialului scurgerii transversale (metoda coeficienţilor inerţiali sau a maselor asociate), iar cealaltă parte prin alte metode [4]. Fără a mai intra în detalii pentru o rachetă obişnuită cu configuraţia din figura 3 (ampenaj cruci-

form), derivatele gata calculate după cele amintite mai sus sînt $\left(\text{deoarece am presupus} \frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}t} = 0\right)$:

$$\frac{\partial C_x}{\partial V_x^*} = -V_0 \frac{\partial C_{xr}}{\partial M_0} \frac{\partial M_0}{\partial V_0},$$

$$\frac{\partial C_x}{\partial V_x^*} \approx C_z + \frac{\partial C_z}{\partial V_z^*},$$

$$\frac{\partial C_x}{\partial V_y^*} = \frac{\partial C_y}{\partial V_x^*} = \ldots \frac{\partial C_x}{\partial \frac{\mathrm{d}V_z^*}{\mathrm{d}t^*}} = \ldots \frac{\partial C_x}{\partial \frac{\mathrm{d}\Omega_z^*}{\mathrm{d}t^*}} = 0,$$

$$\frac{\partial C_y}{\partial V_x^*} = 0,$$

$$\frac{\partial C_y}{\partial V_y^*} = -2K_{11}^b,$$

$$\frac{\partial C_y}{\partial \Omega_x^*} = -4K_{13}^b + 4\frac{V_{z0}}{V_0}\beta_{22}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial C_y}{\partial \Omega_y^*} = 4K_{12}^b x^{*b}; \frac{\partial C_z}{\partial V_y^*} = -2K_{12}^b,$$

$$\frac{\partial C_y}{\partial \Omega_z^*} = -4K_{11}^b x^{*b}; \frac{\partial C_z}{\partial V_z^*} = -2K_{22}^b,$$

$$\frac{\partial C_z}{\partial \Omega_x^*} = -4K_{23}^b - 4\frac{V_{z0}}{V_0}\beta_{12},$$

$$\frac{\partial C_z}{\partial \Omega_y^*} = 4K_{22}^b x^{*b},$$

$$\frac{\partial C_z}{\partial \Omega_z^*} = -4K_{12}^b x^{*b},$$

$$\frac{\partial C_{mx}}{\partial V_y^*} = -2K_{13}^b + 2\frac{V_{z0}}{V_0}(\beta_{11} - \beta_{22}),$$

$$\frac{\partial C_{mx}}{\partial V_z^*} = -2K_{23}^b + 4\frac{V_{z0}}{V_0}\beta_{12},$$

$$\frac{\partial C_{mx}}{\partial \Omega_x^*} = -4K_{33}^b + 4\frac{V_{z0}}{V_0}\beta_{13},$$

$$\frac{\partial C_{mx}}{\partial \Omega_y^*} = 4\, K_{23}^b\, x^{*b} - 8\, \frac{V_{z0}}{V_0}\, \gamma_{12},$$

$$\frac{\partial C_{mx}}{\partial \Omega_z^*} = -\, 4\, K_{13}^b\, x^{*b} + 4\, \frac{V_{z0}}{V_0}\, (\gamma_{11} - \gamma_{22}),$$

$$\frac{\partial C_{my}}{\partial V_y^*} = 2\, (\beta_{12} + K_{12}^b\, x^{*b}),$$

$$\frac{\partial C_{my}}{\partial V_z^*} = 2\, (\beta_{22} + K_{22}^b\, x^{*b}),$$

$$\frac{\partial C_{my}}{\mathrm{d}\Omega_x^*} = 4\, (\beta_{23} + K_{23}^b\, x^{*b}) + 4\, \frac{V_{z0}}{V_0}\, \gamma_{12},$$

$$\frac{\partial C_{my}}{\mathrm{d}\Omega_y^*} = -\, 4\, [K_{22}^b\, (x^{*b})^2 + \gamma_{22}],$$

$$\frac{\partial C_{my}}{\mathrm{d}\Omega_z^*} = 4\, [K_{12}^b\, (x^{*b})^2 + \gamma_{12}],$$

$$\frac{\partial C_{mz}}{\partial V_y^*} = -\, 2\, (\beta_{11} + K_{11}^b\, x^{*b}), \tag{11}$$

$$\frac{\partial C_{mz}}{\partial V_z^*} = -\, 2\, (\beta_{12} + K_{12}^b\, x^{*b}),$$

$$\frac{\partial C_{mz}}{\partial \Omega_x^*} = -\, 4\, (\beta_{13} + K_{11}^b\, x^{*b}) + 4\, \frac{V_{z0}}{V_0}\, \gamma_{22},$$

$$\frac{\partial C_{mz}}{\partial \Omega_y^*} = 4\, [K_{12}^b\, (x^{*b})^2 + \gamma_{12}],$$

$$\frac{\partial C_{mz}}{\partial \Omega_z^*} = -\, 4 [K_{11}^b\, (x^{*b})^2 + \gamma_{11}],$$

$$\frac{\partial C_y}{\partial \dfrac{\mathrm{d}V_x^*}{\mathrm{d}t^*}} = -\, 4\, \frac{V_{z0}}{V_0}\, \beta_{12}; \qquad \frac{\partial C_y}{\partial \dfrac{\mathrm{d}V_y^*}{\mathrm{d}t^*}} = -\, 4\, \beta_{11},$$

$$\frac{\partial C_y}{\partial \dfrac{\mathrm{d}V_z^*}{\mathrm{d}t^*}} = -\, 4\beta_{12}; \qquad \frac{\partial C_y}{\partial \dfrac{\mathrm{d}\Omega_x^*}{\mathrm{d}t^*}} = -\, 4\beta_{13},$$

$$\frac{\partial C_y}{\partial \frac{d\Omega_y^*}{dt^*}} = 4\gamma_{12}; \qquad \frac{\partial C_y}{\partial \frac{d\Omega_z^*}{dt^*}} = -4\gamma_{11},$$

$$\frac{\partial C_z}{\partial \frac{dV_x^*}{dt^*}} = -4\frac{V_{z0}}{V_0}\beta_{22}; \qquad \frac{\partial C_z}{\partial \frac{dV_z^*}{dt^*}} = -4\beta_{22},$$

$$\frac{\partial C_z}{\partial \frac{dV_y^*}{dt^*}} = -4\beta_{12}; \qquad \frac{\partial C_z}{\partial \frac{d\Omega_x^*}{dt^*}} = -4\beta_{23},$$

$$\frac{\partial C_z}{\partial \frac{d\Omega_y^*}{dt^*}} = 4\gamma_{22}; \qquad \frac{\partial C_z}{\partial \frac{d\Omega_z^*}{dt^*}} = -4\gamma_{12},$$

$$\frac{\partial C_{mx}}{\partial \frac{dV_x^*}{dt^*}} = -4\frac{V_{z0}}{V_0}\beta_{23}; \qquad \frac{\partial C_{mx}}{\partial \frac{dV_z^*}{dt^*}} = -4\beta_{23},$$

$$\frac{\partial C_{mx}}{\partial \frac{dV_y^*}{dt^*}} = -4\beta_{13}; \qquad \frac{\partial C_{mx}}{\partial \frac{d\Omega_x^*}{dt^*}} = -4\beta_{33}, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial C_{mz}}{\partial \frac{d\Omega_y^*}{dt^*}} = 4\gamma_{23}; \qquad \frac{\partial C_{mz}}{\partial \frac{d\Omega_z^*}{dt^*}} = -4\gamma_{13},$$

$$\frac{\partial C_{my}}{\partial \frac{dV_x^*}{dt^*}} = 4\frac{V_{z0}}{V_0}\gamma_{22}; \qquad \frac{\partial C_{my}}{\partial \frac{dV_z^*}{dt^*}} = 4\gamma_{22},$$

$$\frac{\partial C_{my}}{\partial \frac{dV_y^*}{dt^*}} = 4\gamma_{12}; \qquad \frac{\partial C_{my}}{\partial \frac{d\Omega_x^*}{dt^*}} = 4\gamma_{23},$$

$$\frac{\partial C_{my}}{\partial \frac{d\Omega_y^*}{dt^*}} = -4\delta_{22}; \qquad \frac{\partial C_{my}}{\partial \frac{d\Omega_z^*}{dt^*}} = 4\delta_{12},$$

$$\frac{\partial C_{mz}}{\partial \frac{dV_x^*}{dt^*}} = -4\frac{V_{z0}}{V_0}\gamma_{12}; \qquad \frac{\partial C_{mz}}{\partial \frac{dV_z^*}{dt^*}} = -4\gamma_{12},$$

$$\frac{\partial C_{mx}}{\partial \frac{\mathrm{d}V_y^*}{\mathrm{d}t^*}} = -4\gamma_{11}; \qquad \frac{\partial C_{mz}}{\partial \frac{\mathrm{d}\Omega_x^*}{\mathrm{d}t^*}} = -4\gamma_{13},$$

$$\frac{\partial C_{mz}}{\partial \frac{\mathrm{d}\Omega_y^*}{\mathrm{d}t^*}} = 4\delta_{12}; \qquad \frac{\partial C_{mz}}{\partial \frac{\mathrm{d}\Omega_z^*}{\mathrm{d}t^*}} = -4\delta_{11}.$$

În expresiile de mai sus avem

$$\beta_{ij} = \int_{x^{*b}}^{x^{*v}} K_{ij}\,\mathrm{d}x^*,$$

$$\gamma_{ij} = \int_{x^{*b}}^{x^{*v}} K_{ij}\,x^*\,\mathrm{d}x^*, \tag{12}$$

$$\delta_{ij} = \int_{x^{*b}}^{x^{*v}} K_{ij}\,x^{*2}\,\mathrm{d}x^*.$$

K_{ij}^b este valoarea mărimii K_{ij} la baza rachetei, iar limitele x^{*v}, x^{*b} sînt valorile mărimii $x^* = \frac{x}{\lambda}$ respectiv la vîrful şi la baza rachetei.

Pentru configuraţia deja menţionată a rachetei din studiul de faţă, mărimile K_{ij} au expresiile

$$K_{11} = \frac{\mu_{11}}{\rho S_R}; \quad K_{12} = K_{21} = \frac{\mu_{12}}{\rho S_R},$$

$$K_{22} = \frac{\mu_{22}}{\rho S_R}; \quad K_{13} = K_{31} = \frac{\mu_{13}}{\rho\lambda S_R}, \tag{13}$$

$$K_{23} = K_{32} = \frac{\mu_{23}}{\rho\lambda S_R}; \quad K_{33} = \frac{\mu_{33}}{\rho\lambda^2 S_R},$$

unde

$$\mu_{11} = \pi\rho s^2\left(1 - \frac{a^2}{s^2} + \frac{a^4}{s^4}\right),$$

$$\mu_{12} = 0,$$

$$\mu_{13} = 0,$$

$$\mu_{22} = \pi\rho s^2\left(1 - \frac{a^2}{s^2} + \frac{a^4}{s^4}\right),$$

$$\mu_{23} = 0,$$

$$\mu_{33} = \frac{2\rho s^4}{\pi} \text{ dacă } a = 0,$$

μ_{33} ca în figura 4, pentru $a \neq 0$. Ținînd seama de relațiile (11) pentru configurația sus-amintită și de relațiile

$$\frac{d\Delta\varphi}{dt^*} = \Delta\Omega_x^*,$$
$$\frac{d\Delta\theta}{dt^*} = \Delta\Omega_y^*, \qquad (14)$$
$$\frac{d\Delta\psi}{dt^*} = \Delta\Omega_z^*,$$

ecuațiile (10) ale mișcării perturbate devin

$$\frac{d\Delta V_x^*}{dt^*} = \alpha_1 \Delta V_x^* + \alpha_2 \Delta V_z^* + \alpha_3 \frac{d\Delta\theta}{dt^*} + \alpha_4 \Delta\theta,$$
$$\frac{d\Delta V_y^*}{dt^*} = \beta_1 \Delta V_y^* + \beta_2 \frac{d\Delta V_y^*}{dt^*} + \beta_3 \frac{d\Delta\varphi}{dt^*} + \beta_4 \frac{d\Delta\psi}{dt^*} +$$
$$+ \beta_5 \frac{d^2\Delta\psi}{dt^{*2}} + \beta_6 \Delta\varphi,$$

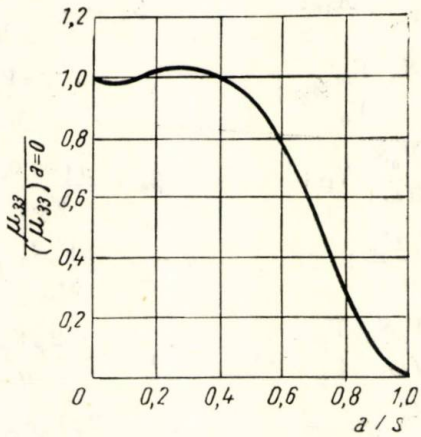


Fig. 4

$$\frac{d\Delta V_z^*}{dt^*} = \gamma_1 \Delta V_x^* + \gamma_2 \Delta V_z^* + \gamma_3 \frac{d\Delta V_x^*}{dt^*} + \gamma_4 \frac{d\Delta V_z^*}{dt^*} +$$
$$+ \gamma_5 \frac{d\Delta\theta}{dt^*} + \gamma_6 \frac{d^2\Delta\theta}{dt^{*2}} + \gamma_7 \Delta\theta, \qquad (15)$$
$$\frac{d^2\Delta\varphi}{dt^{*2}} = \delta_1 \frac{d\Delta\varphi}{dt^*} + \delta_2 \frac{d^2\Delta\varphi}{dt^{*2}},$$

$$\frac{d^2\Delta\theta}{dt^{*2}} = \varepsilon_1 \Delta V_z^* + \varepsilon_2 \frac{d\Delta V_x^*}{dt^*} + \varepsilon_3 \frac{d\Delta V_z^*}{dt^*} + \varepsilon_4 \frac{d\Delta\theta}{dt^*} + \varepsilon_5 \frac{d^2\Delta\theta}{dt^{*2}},$$

$$\frac{d^2\Delta\psi}{dt^{*2}} = \mu_1 \Delta V_y^* + \mu_2 \frac{d\Delta V_y^*}{dt^*} + \mu_3 \frac{d\Delta\varphi}{dt^*} + \mu_4 \frac{d\Delta\psi}{dt^*} + \mu_5 \frac{d^2\Delta\psi}{dt^{*2}},$$

unde

$$\alpha_1 = \frac{\rho V_0 S_R}{2M\omega}\left[-V_0 \frac{\partial C_{xr}}{\partial M_0}\frac{\partial M_0}{\partial V_0} - C_{xr}\right] + \frac{1}{MV_0\omega}\frac{\partial T}{\partial V_x^*},$$

$$\alpha_2 \approx \frac{\rho V_0 S_R}{2M\omega}\left[C_{z0} + \frac{\partial C_z}{\partial V_z^*}\right], \qquad (16)$$

$$\alpha_3 = -\frac{\rho V_0 S_R}{2M\omega}\frac{\partial C_x}{\partial \dfrac{d\Delta\theta}{dt^*}} - V_{z0}^*,$$

$$\alpha_4 = -\frac{g\cos\theta_0}{V_0\omega},$$

$$\beta_1 = -\frac{\rho V_0 S_R}{M\omega} K_{11}^b; \qquad \beta_2 = -\frac{2\rho V_0 S_R}{M\omega}\beta_{11},$$

$$\beta_3 = \frac{2\rho V_0 S_R}{M\omega}\frac{V_{z0}}{V_0}\beta_{22}; \qquad \beta_4 = -\frac{2\rho V_0 S_R}{M\omega} K_{11}^b x^{*b},$$

$$\beta_5 = -\frac{2\rho V_0 S_R}{M\omega}\gamma_{11}; \qquad \beta_6 = \frac{g\cos\theta_0}{V_0\omega},$$

$$\gamma_1 = \frac{\rho V_0 S_R C_{z0}}{M\omega}; \qquad \gamma_2 = \frac{\rho V_0 S_R}{M\omega} K_{22}^b,$$

$$\gamma_3 = -\frac{2\rho V_0 S_R}{M\omega}\frac{V_{z0}}{V_0}\beta_{22}; \qquad \gamma_4 = -\frac{2\rho V_0 S_R}{M\omega}\beta_{22},$$

$$\gamma_5 = \frac{2\rho V_0 S_R}{M\omega} K_{22}^b x^{*b}; \qquad \gamma_6 = \frac{2\rho V_0 S_R}{M\omega}\gamma_{22},$$

$$\gamma_7 = -\frac{g\sin\theta_0}{V_0\omega}, \qquad (16)$$

$$\delta_1 = -\frac{1}{2}\rho S_R \lambda \frac{g}{I_x^* G} K_{33}^b - \frac{\partial M_{ry}}{\partial \Omega_y^*}\frac{g}{4GI_y^* V_0^2},$$

$$\delta_2 = -\frac{1}{2}\rho S_R \lambda \frac{g}{I_x^* G}\beta_{33},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4}\rho S_R \lambda \frac{g}{I_y^* G}(\beta_{22} + K_{22}^b x^{*b}),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\rho S_R \lambda \frac{g}{I_y^* G}\frac{V_{z0}}{V_0}\gamma_{22},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2}\rho S_R \lambda \frac{g}{I_y^* G}\gamma_{22},$$

$$\varepsilon_4 = -\frac{1}{2}\rho S_R \lambda \frac{g}{I_y^* G}[K_{22}^b (x^{*b})^2 + \gamma_{22}],$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{1}{2}\rho S_R \lambda \frac{g}{I_y^* G}\delta_{22},$$

$$\mu_1 = -\frac{1}{4}\rho S_R \lambda \frac{g}{I_z^* G}(\beta_{11} + K_{11}^b x^{*b}), \tag{16}$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{2}\rho S_R \lambda \frac{g}{I_z^* G}\gamma_{11},$$

$$\mu_3 = \frac{1}{2}\rho S_R \lambda \frac{g}{I_z^* G}\frac{V_{z0}}{V_0}\gamma_{22},$$

$$\mu_4 = -\frac{1}{2}\rho S_R \lambda \frac{g}{I_z^* G}[K_{11}^b (x^{*b})^2 + \gamma_{11}] - \frac{\partial M_{rz}}{\partial \Omega_z^*}\frac{g}{4\, G I_z^* V_0^2},$$

$$\mu_5 = -\frac{1}{2}\rho S_R \lambda \frac{g}{I_z^* G}\delta_{11}.$$

Este vizibil că sistemul (15) se poate separa în două sisteme, și anume sistemul mișcării longitudinale în variabilele ΔV_x^*, ΔV_z^*, $\Delta\theta$ și sistemul mișcării laterale în variabilele ΔV_y^*, $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$. Cu substituțiile

$$\Delta V_x^* = \Delta V_{x0}^* \, e^{\wedge t^*}; \quad \Delta V_z^* = \Delta V_{z0}^* \, e^{\wedge t^*}; \quad \Delta\theta = \Delta\theta_0 \, e^{\wedge t^*},$$

ecuațiile mișcării perturbate longitudinale conduc la sistemul algebric

$$\begin{gathered}(\Lambda - \alpha_1)\,\Delta V_{x0}^* - \alpha_2 \Delta V_{z0}^* - (\alpha_3\Lambda + \alpha_2)\,\Delta\theta_0 = 0 \\ -(\gamma_1 + \gamma_3\Lambda)\,\Delta V_x^* + (\Lambda - \gamma_2 - \gamma_4\Lambda)\Delta V_{z0}^* - (\gamma_5\Lambda + \gamma_6\Lambda^2 + \gamma_7)\Delta\theta_0 = 0 \\ -\varepsilon_2\Lambda\,\Delta V_{x0}^* - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3\Lambda)\Delta V_{z0}^* + (\Lambda^2 - \varepsilon_4\Lambda - \varepsilon_5\Lambda^2)\Delta\theta_0 = 0.\end{gathered} \tag{17}$$

Condiția ca sistemul algebric (17) să nu aibă soluții toate nule conduce la ecuația caracteristică

$$\Lambda^4 + A_1\Lambda^3 + A_2\Lambda^2 + A_3\Lambda + A_4 = 0, \tag{18}$$

unde

$$A_1 = \frac{a_1}{a_0};\ A_2 = \frac{a_2}{a_0};\ A_3 = \frac{a_3}{a_0};\ A_4 = \frac{a_4}{a_0}$$

şi

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 - \varepsilon_5 - \gamma_4 + \gamma_4\varepsilon_5 - \varepsilon_3\gamma_6,\\
a_1 &= -\varepsilon_4 - \gamma_2 + \gamma_2\varepsilon_5 + \gamma_4\varepsilon_4 - \varepsilon_1\gamma_6 - \varepsilon_3\gamma_5 - \alpha_1 + \alpha_1\varepsilon_5 +\\
&\quad + \alpha_1\gamma_4 - \alpha_1\gamma_4\varepsilon_5 + \alpha_1\varepsilon_3\gamma_6 + \alpha_2\gamma_3\varepsilon_5 - \alpha_2\gamma_3 +\\
&\quad + \alpha_2\varepsilon_2\gamma_6 - \alpha_3\gamma_3\varepsilon_3 + \alpha_3\varepsilon_2 - \alpha_3\varepsilon_2\gamma_4,\\
a_2 &= \gamma_2\varepsilon_4 - \varepsilon_1\gamma_5 - \varepsilon_3\gamma_7 + \alpha_1\varepsilon_4 + \alpha_1\gamma_2 - \alpha_1\gamma_2\varepsilon_5 - \alpha_1\gamma_4\varepsilon_4 +\\
&\quad + \alpha_1\varepsilon_1\gamma_6 + \alpha_1\varepsilon_5\gamma_5 + \alpha_2\gamma_3\varepsilon_4 + \alpha_2\gamma_1\varepsilon_5 - \alpha_2\gamma_1 + \alpha_2\varepsilon_2\gamma_5 -\\
&\quad - \alpha_3\gamma_1\varepsilon_3 - \alpha_3\varepsilon_1\gamma_3 - \alpha_3\varepsilon_2\gamma_2 - \alpha_4\gamma_3\varepsilon_3 + \alpha_4\varepsilon_2 - \alpha_4\varepsilon_2\gamma_4,\\
a_3 &= -\gamma_7\varepsilon_1 - \alpha_1\gamma_2\varepsilon_4 + \alpha_1\varepsilon_1\gamma_5 + \alpha_1\varepsilon_3\gamma_7 + \alpha_2\gamma_1\varepsilon_4 + \alpha_2\varepsilon_2\gamma_7 -\\
&\quad - \alpha_3\gamma_1\varepsilon_1 - \alpha_4\gamma_1\varepsilon_1 - \alpha_4\varepsilon_1\gamma_3 - \alpha_4\varepsilon_2\gamma_2,\\
a_4 &= \alpha_1\varepsilon_1\gamma_7 - \alpha_4\gamma_1\varepsilon_1.
\end{aligned}$$

Cu substituţiile

$$\Delta V_y^* = \Delta V_{y0}^*\, e^{\wedge t^*};\ \Delta\varphi = \Delta\varphi_0\, e^{\wedge t^*};\ \Delta\psi = \Delta\psi_0\, e^{\wedge t^*},$$

ecuaţiile mişcării perturbate laterale conduc la sistemul algebric

$$\begin{aligned}
&(\Lambda - \beta_1 - \beta_2\Lambda)\,\Delta V_{y0}^* - \beta_3\Lambda\,\Delta\varphi_0 - (\beta_4\Lambda + \beta_5\Lambda^2)\,\Delta\psi_0 = 0\\
&(\Lambda^2 - \delta_1\Lambda - \delta_2\Lambda^2)\,\Delta\varphi_0 = 0\\
&-(\mu_1 + \mu_2\Lambda)\,\Delta V_{y0}^* - \mu_3\Lambda\,\Delta\varphi_0 + (\Lambda^2 - \mu_4\Lambda - \mu_5\Lambda^2)\,\Delta\psi_0 = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Ca şi în cazul precedent, condiţia ca sistemul algebric (19) să nu aibă soluţii toate nule conduce la ecuaţia caracteristică

$$\Lambda^3 + A_1\Lambda^2 + A_2\Lambda + A_3 = 0, \tag{20}$$

unde

$$A_1 = \frac{a_1}{a_0};\ A_2 = \frac{a_2}{a_0};\ A_3 = \frac{a_3}{a_0}$$

şi

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 - \mu_5 - \delta_2 - \beta_2 + \delta_2\mu_5 + \beta_2\mu_5 + \beta_2\delta_2 - \beta_2\delta_2\mu_5 -\\
&\quad - \mu_2\beta_5 + \mu_2\beta_5\delta_2,\\
a_1 &= \delta_1\mu_5 - \mu_4 - \delta_1 + \delta_2\mu_4 - \beta_1 + \beta_1\mu_5 + \beta_1\delta_2 - \beta_1\delta_2\mu_5 +\\
&\quad + \beta_2\mu_4 + \beta_2\delta_1 - \beta_2\delta_1\mu_5 - \beta_2\delta_2\mu_4 - \mu_2\beta_4 + \mu_2\beta_4\delta_2 -\\
&\quad - \mu_1\beta_5 + \mu_1\beta_5\delta_2 + \mu_2\beta_5\delta_1,
\end{aligned}$$

$$a_2 = \delta_1 \mu_4 + \beta_1 \mu_4 + \beta_1 \delta_1 - \beta_1 \delta_1 \mu_5 - \beta_1 \delta_2 \mu_4 - \beta_2 \delta_1 \mu_4 - \mu_1 \beta_4 +$$
$$+ \mu_1 \beta_4 \delta_2 + \mu_2 \beta_4 \delta_1 + \mu_1 \beta_5 \delta_1,$$
$$a_3 = \mu_1 \beta_4 \delta_1 - \beta_1 \delta_1 \mu_4.$$

Condițiile de stabilitate pentru ecuația caracteristică (18), cu alte cuvinte pentru mișcarea longitudinală, sînt

$$A_1 > 0; \quad A_2 > 0; \quad A_3 > 0; \quad A_4 > 0,$$
$$A_1 A_2 A_3 - A_3^2 - A_1^2 A_4 > 0.$$

Ținînd seama de mărimile (16), se poate constata că în general aceste criterii sînt satisfăcute, lucru confirmat de experiență datorită deplasării centrului de presiune către în spate de către ampenaje.

Pentru un studiu mai amănunțit al mișcării perturbate, ecuația caracteristică (18) are toate elementele necesare. În ce privește mișcarea laterală, pentru care avem ecuația (20), criteriile de stabilitate sînt

$$A_1 > 0; \quad A_2 > 0; \quad A_3 > 0$$
$$A_1 A_2 - A_3 > 0.$$

Este vizibil, ținînd seama de (16), că condițiile $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ sînt îndeplinite. Dacă $A_3 > 0$, atunci și $A_1 A_2 - A_3 > 0$. Trebuie deci ca

$$\mu_1 \beta_4 > \beta_1 \mu_4$$

sau, sub o formă definitivă,

$$x^* \beta_{11} > \gamma_{11} + \frac{\partial M_{rz}}{\partial \Omega_z^*} \cdot \frac{1}{2 \rho S_R \lambda V_0^2}.$$

Parametrii constructivi fiind aleși astfel încît această inegalitate să fie asigurată, racheta este dinamic stabilă lateral.

Primită la redacție la 17 iulie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Bolz R. E., *Dynamic Stability of a Missile in Rolling Flight*, J.A.S., 1952.
2. Charters A. C., *The Linearized Equations of Motion Underlying the Dynamic Stability of Aircraft, Spinning Projectiles and Symetrical Missiles*, NACA TN 3350, 1955.
3. Еткин Б., *Динамика полета*, Изд. Машиностроение, Москва, 1964.
4. Ниелсен Ж., *Аэродинамика управляемых снарядов*, Оборонгиз, Москва, 1962.

RECENZII

A. PFLÜGER, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik* (Probleme de stabilitate ale elastostaticii), ed. a 2-a, refăcută, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, VIII+472 p.

Problemele stabilității elastice au făcut obiectul multor studii în ultimul timp, așa încît a doua ediție a lucrării lui A. Pflüger (care urmează după prima, din 1950) a trebuit să fie completată în multe direcții. Pe lîngă interesul teoretic, problemele tratate au un caracter practic pregnant, ceea ce rezultă și din modul în care autorul prezintă diferitele rezultate.

Noile direcții de cercetare în acest capitol al mecanicii sînt abordate de autor, care se ocupă și de stabilitatea în domeniul postcritic, de stabilitatea dinamică, de flambajul în domeniul plastic etc. De asemenea s-a avut în vedere corectitudinea calculelor din punct de vedere matematic, s-au tratat probleme de convergență a rezultatelor etc.

Lucrarea cuprinde opt capitole, fiecare dintre acestea fiind împărțit în puncte și subpuncte. Urmează o anexă foarte dezvoltată (129 p.), împărțită în trei părți (flambajul barelor drepte, voalarea plăcilor plane, stabilitatea plăcilor curbe subțiri), în care se dau cele mai importante formule privind obținerea sarcinilor critice, precum și diagrame de calcul pentru coeficienți critici, în special pentru plăcile plane și curbe subțiri. Această anexă este deosebit de utilă pentru practica de calcul. Bibliografia este de asemenea împărțită pe cele trei elemente de construcție principale, menționate mai sus, și cuprinde 97+83+22=202 titluri. Observăm că fiecare capitol este însoțit de un scurt rezumat.

În capitolul I, după o scurtă introducere privind obiectul lucrării prezentate, se dau cele mai simple exemple de flambaj ale barei drepte pentru a introduce pe cititor în temă și pentru a distinge între diferitele probleme ce se pun. În felul acesta se introduc și cîteva metode simple de calcul a sarcinilor critice. Metodele generale de obținere a soluției exacte a problemelor de stabilitate sînt date în capitolul al II-lea. După o trecere în revistă cu caracter general, autorul se oprește la metodele energetice și folosește în special principiul deplasărilor virtuale. De asemenea se ia în considerare efectul variațiilor de temperatură.

Capitolul al III-lea este consacrat stabilirii criteriilor după care echilibrul este stabil, labil sau indiferent, atît în cadrul metodei echilibrului elastic, cît și în cadrul metodelor energetice de calcul. Se mai arată că în cazul în care sarcinile exterioare nu sînt conservative problema este mult mai dificilă. În capitolul al IV-lea se consideră starea de tensiune și starea de deformație bidimensionale în cazul unor mari deformații; rezultatele obținute sînt extinse la cazul tridimensional. Efectul variației de temperatură este de asemenea introdus.

În capitolul al V-lea se dau aproximațiile de calcul clasice și metodele obișnuite de calcul pentru diferite probleme privind barele drepte și plăcile plane și curbe subțiri. În toate cazurile se folosește atît metoda echilibrului, cît și metoda energetică de calcul. Menționăm luarea în considerare și a grinzilor continue, pe reazeme rigide sau elastice, a unor cadre simple etc. Se studiază în special plăcile plane dreptunghiulare. Plăcile cilindrice subțiri considerate sînt

supuse la presiune axială sau normală la suprafața mediană ; de asemenea autorul introduce și acțiunea unor momente de răsucire.

Metodele aproximative pentru determinarea valorilor proprii (în special metodele Ritz și Galerkin) sînt tratate în capitolul al VI-lea. Menționăm, de asemenea, metode numerice de integrare, în special pentru flambajul barei drepte de secțiune variabilă, metode iterative etc. Se prezintă și cercetările lui Southwell și Dunkerley pentru obținerea valorilor critice ale sistemelor compuse din elemente de construcție simple pentru care aceste valori sînt cunoscute. Posibilitatea aplicării principiului suprapunerii efectelor este discutată în legătură cu utilizarea mașinilor electronice de calcul.

Limitele de aplicabilitate ale rezultatelor obținute sînt discutate în capitolul al VII-lea. Menționăm astfel flambajul lateral al barei drepte, în care apar fenomene suplimentare, voalarea din răsucire a plăcii plane etc. În capitolul al VIII-lea se trece dincolo de limitele impuse de titlul lucrării, considerîndu-se influențe dinamice, nevalabilitatea legii lui Hooke, excentricități, deformații inițiale, neîndeplinirea corectă a condițiilor la limită etc. Toate aceste cauze pot conduce la mari schimbări în expresia sarcinii critice de flambaj și sînt, în general, greu de luat în considerare.

Lucrarea lui A. Pflüger este scrisă foarte clar și sistematic și cuprinde principalele probleme ce se pun în această direcție. Prin cuprinsul ei, cartea este utilă atît pentru proiectarea inginerească în diferite ramuri, cît și pentru cercetătorul din domeniul mecanicii solidelor deformabile.

P. P. Teodorescu

LUCRĂRI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

* * * *Voprosî teorii i regulirovaia elektriceskih maşin*, vol. 1, Polit. Inst. Lvov, 1963.

V. G. Pokrovski, *Nekotorie voprosî postroenia mnogokanalnîh bîstrodeistvuiuscih teleizmeritelonîh sistem povişenia tocinosti*, Lvov, 1958.

A. I. Morozov, *Avtomatizaţia vertikalnosverlilnîh stankov s pomoşciiu pnevmoghidravliki*, Lvov, 1957.

V. T. Bardacevski şi a., *Avtomatizirovanii electroprivod*, Lvov, 1964.

Vladimir Afanasievici Obrucev, 1965.

Ministry of Aviation-Aeronautical, *Research Council Reports and Memoranda*, 3365, 3387, 3390, 3393, 3394, 3396, 3400, 3401, 3391, 3402, 3403, 3404, 3407, 3408, 3409, 3412 (1965).

Disertaţii de la Institutul Politehnic din Aachen :

E. A. Becker, *Kräfte und Kreisformfehler beim Spitzenlosen-Einstechschleifen*, 1965.

— H. Sanfleber, *Untersuchung über die Suvnmierbarkeit von Elementazeiten*, 1965.

— W. Ernst, *Erhöhte Schnittgeschwindigkeit beim Aussenund-Einstach shleifen und ihr Einfluss auf das Schleifergebnis und die Wirtschaftlichkeit*, 1965.

— J. Derichs, *Untersuchungen an Schrittömotoren*, 1965.

— H. Quentin, *Untersuchung über das dynamische verhalten einer drehzahlgengelten Anlage mit elektronischen Reglern im Hinblick auf das Ausregelvermögen von Schwingungen bei Fördermaschinen und Walzenzugmaschinen*, 1964.

— D. Mlynski, *Der Wirkungsgrad experimenteller Optimierungs-Strategiar*, 1964.

— Bernd John, *Wirtschaftliche Pläne für messende Prüfung bei Kenntnis der Analitätszahlverteilung*, 1964.

— W. Martin, *Beitrag zur Untersuchung von Überspannungsableiten mit rechteckförmigen Stossströmen*, 1964.

— W. Haas, *Über die Anwendung Offener elektromagnetischer Resonatoren in Mikrowellenbandfilter*, 1965.

— Tschol-Hi-Kang, *Untersuchungen über das Feinholigen von Stahl mit Hartmetallwerkzeugen*, 1964.

— H. Galland, *Entwicklung einer Werkstückbeschreibenden Systemordnung zur Kostensenkung in der Kleinserien — und Einziefertigung*, 1964.

— Hans Gerd Dohnen, *Zerspanungs untersuchungen beim Drhen mit periodischen bewegten Scheidwerkzeug*, 1964.

Disertaţii de la Institutul Politehnic din Delft

— G. J. Hauptfleisch, *Quasi-group extensions of Abelian groups*, 1965.

— W. H. Lewin, *Determinations of nuclear decay engins and conversion coefficients using coincidence Techniques*, 1965.

— *A Rotating Plasma Equipment*, 1965.

— P. J. Holewijn, *Contributions to the theory of asymptotic distribution modulo*, I, 1965.

— C. F. Lerk, *Eukele aspecten van de ontijzering van grondwater*, 1965.

2557 R F 2557

2
TOMUL 21
1 9 6 6

BUCUREȘTI MUZEUL TEHNIC 1966 AUG 26

STUDII ȘI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. **E. CARAFOLI** — *redactor responsabil,*
Acad. **D. DUMITRESCU** — *redactor responsabil adjunct,*
Prof. **I. ANTON,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CONSTANTIN AVRAM,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. **ȘTEFAN BĂLAN,**
Prof. **GH. MANEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CR. MATEESCU,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. **N. PATRAULEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **N. TIPEI,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU VOINEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Conf. **RADU C. BOGDAN** — *secretar de redacție.*

În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134–135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei.

EA

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Redacția : **București,**

str. Const. Mille 15, tel. 14.89.07

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 21, nr. 2 1966

SUMAR

STUDII

Pag.

A. A. BELEŞ şi M. SOARE, Deformaţiile mari ale paraboloidului hiperbolic în şa datorite variaţiilor de temperatură 297
P. P. TEODORESCU, Asupra unei probleme plane clasice a teoriei elasticităţii 323
D. ANASTASESCU şi I. MUNTEANU, Grindă dublă în consolă 339
LIVIU LIBRESCU, Problema termoelastică a învelitorilor şi plăcilor abordată prin eliminarea ipotezei Love-Kirchhoff 351
TOMA PANĂ, Efectul împiedicării deplanării asupra pulsaţiilor proprii de răsucire la barele cu pereţi subţiri avînd profilul închis 367
T. CRAIFALEANU, Vibraţii transversale ale barelor în rotaţie solicitate la efort axial şi la răsucire 377
E. BUGAJEWSKI, Asupra trenurilor diferenţiale şi a folosirii lor în legătură cu variatoarele de viteză 395
N. BOICU, Influenţa asimetriei flancului asupra contactului elastic al roţilor dinţate . . 417
N. TIPEI şi AL. NICA, Cîmpul de temperaturi în stratul lubrifiant al lagărelor cu alunecare 427
V. N. CONSTANTINESCU şi S. GĂLETUŞE, Studiul lubrificaţiei turbulente folosind ipoteza lungimii de amestec cu o variaţie parabolică după normală la stratul de lubrifiant 445
OLGA BIŢĂ şi I. DINCĂ, Asupra influenţei viscozităţii în lubrificaţia la sarcini ridicate 467
H. PASCAL, Curgerea unui fluid bifazic printr-un mediu poros în regim tranzitoriu . . 485
V. GHEORGHIU şi T. NICOARĂ, Contribuţii teoretice şi experimentale la dimensionarea hidraulică a golirilor Venturi pentru baraje 509
N. CĂMĂRĂŞESCU, Vizualizarea jeturilor fluide laterale 521
T. HACKER, Unele probleme neclasice ale stabilităţii zborului 531
J. POLÁŠEK, Profil de aripă în scurgere neomogenă 549
AUREL P. STOICESCU, În legătură cu influenţa „rezervei de stabilitate statică" asupra stabilităţii automobilului frînat 597

NOTE

I. N. CONSTANTINESCU şi A. V. DARABONT, Eforturile dinamice în cablurile instalaţiilor de extracţie cu roata motoare în regim tranzitoriu **615**

St. cerc. mec. apl. Tom. 21 Nr. 2 p. 295—641, Bucureşti 1966

Pag.

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

AL. NICA, Asupra bazelor fizice ale proceselor de frecare şi ungere. I. Frecarea uscată 619

DIN ISTORIA ŞTIINŢEI ŞI TEHNICII ROMÂNEŞTI

VICTOR VÂLCOVICI, Spiru Haret — profesor 631

RECENZII 637

DEFORMAȚIILE MARI ALE PARABOLOIDULUI HIPERBOLIC ÎN ȘA DATORITE VARIAȚIILOR DE TEMPERATURĂ [1)]

de acad. A. A. BELEȘ și M. SOARE
Institutul de cercetări în construcții
și economia construcțiilor

539.3

Se studiază deformațiile mari ale unei plăci curbe subțiri în formă de paraboloid hiperbolic în șa, datorite variației de temperatură uniforme.
Ținînd seama de deformațiile mari ale plăcii, se stabilește un sistem de două ecuații de bază, cu derivate parțiale de ordinul al patrulea, neliniare.
Soluția este căutată sub formă variațională, alegîndu-se inițial forma suprafeței medii deformate. Curba de variație $(T, w_0/\delta)$ este o cubică denumită „tridentul lui Newton".
Studiul se încheie prin observații critice și concluzii privind valabilitatea teoriei liniare și neliniare, a teoriei încovoierii și de membrană, precum și influența diferiților parametri asupra valorii temperaturii critice.

INTRODUCERE

Efectul variației de temperatură asupra structurilor este încă o problemă deschisă cercetătorilor, datorită complexității fenomenului studiat și, de asemenea, interesului practic pe care aceasta îl prezintă.

În cursul activității lor, autorii au întîlnit asemenea situații în cazul plăcilor curbe subțiri de beton armat de deschidere mare.

La rezolvarea acestei probleme, principala dificultate constă în aceea că, la structurile din plăci curbe subțiri, variațiile de temperatură produc deformații mari și voalarea plăcii, ceea ce conduce la fisurarea puternică a betonului și deci imposibilitatea unei exploatări normale a construcției.

Din punct de vedere matematic, aceste dificultăți înseamnă imposibilitatea de a aplica teoria liniară a încovoierii și cu atît mai puțin a teoriei de membrană, a cărei aplicare, de altfel, este discutabilă în cazul paraboloizilor hiperbolici.

[1)] Comunicare prezentată la Simpozionul I.A.S.S. privind probleme neclasice de plăci curbe subțiri, ținut la Varșovia, 2—5 septembrie 1963.

Problema deformațiilor mari a fost abordată de multă vreme în literatura de specialitate, dar numai pentru cazuri de încărcare și forme de suprafețe simple. Ecuațiile neliniare astfel obținute au fost rezolvate doar aproximativ, prin aplicarea metodelor variaționale.

După cunoștința autorilor, problema deformațiilor mari a plăcilor curbe subțiri în formă de paraboloid hiperbolic în șa nu a fost încă studiată în literatura de specialitate.

Lucrarea de față se bazează pe ipotezele obișnuite ale teoriei plăcilor curbe subțiri pleoștite.

În scopul deducerii ecuațiilor de echilibru în stare deformată a fost aplicat un procedeu mai simplu decît acelea obișnuite din literatură și care oferă posibilitatea scrierii imediate a sistemului de ecuații.

Soluția a fost obținută prin metoda variațională, alegîndu-se de la început ecuația suprafeței mediane deformate.

1. ECUAȚIILE GENERALE ALE PLĂCILOR CURBE SUBȚIRI CU DEFORMAȚII MARI

Ecuațiile generale ale plăcilor curbe subțiri cu deformații mari au fost studiate de diferiți cercetători [2], [4], [5], [7], [8], care au luat în considerare încărcări oarecare și variația de temperatură în cazul grosimii de placă constantă sau variabilă.

Pentru studiul problemei pot fi scrise trei grupe de relații, și anume : ecuații de echilibru, ecuații de deformații și relații de elasticitate.

Fie

$$z = f(x, y), \tag{1.1}$$

ecuația suprafeței mediane considerate, și

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg}\varphi, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg}\psi, \tag{1.2a}$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \tag{1.2b}$$

notațiile lui Monge pentru derivatele de ordinul întîi, respectiv al doilea ale funcției z.

În cazul plăcilor curbe subțiri pleoștite de care ne ocupăm, se poate considera că

$$1 + p^2 \approx 1 \text{ și } 1 + q^2 \approx 1.$$

În planul de referință xOy vom defini două secțiuni $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ perpendiculare una pe cealaltă. În suprafața mediană vor corespunde două curbe care se intersectează sub un unghi θ, dat de relația

$$\cos\theta = \frac{pq}{\sqrt{(1 + p^2)(1 + q^2)}}.$$

În cazul plăcilor subțiri pleoștite se poate considera că $\theta \approx \pi/2$ [1], [7].

Fie N_x, N_{xy}, Q_x, M_x, M_{xy}, respectiv N_y, N_{yx}, Q_y, M_y, M_{yx} eforturile și momentele reale care apar în placă în secțiunile considerate (fig. 1).

Ca și în cazul deformațiilor mici [6], ecuațiile de echilibru pot fi scrise într-un mod simplu dacă, în locul eforturilor și momentelor *reale*, lucrăm cu eforturile și momentele *proiectate*, raportate la elementul $dx \cdot dy$ în planul de referință (fig. 1).

Pentru *problema liniară*, relațiile dintre eforturile și momentele reale și proiectate se scriu sub forma

$$\left.\begin{aligned}
N_x^* &= N_x \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} + Q_x \sin\varphi,\\
N_{xy}^* &= N_{xy} + Q_x \operatorname{tg}\psi,\\
Q_x^* &= N_x \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\operatorname{tg}\varphi +\\
&\quad + N_{xy}\operatorname{tg}\psi + Q_x \frac{\cos\varphi}{\sin\theta},\\
M_x^* &= M_x,\\
M_{xy}^* &= M_{xy}\frac{\cos\varphi}{\cos\psi},
\end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

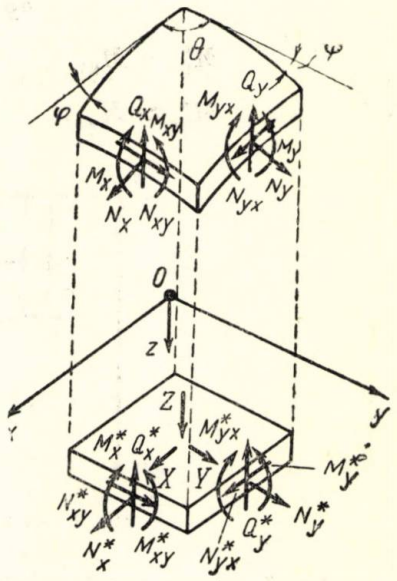


Fig. 1. — Eforturile reale și proiectate acționînd asupra unui element de placă.

precum și un grup similar de relații, obținut prin permutarea lui x și y, respectiv φ și ψ, între ei.

Cînd *deformațiile sînt mari*, echilibrul trebuie să fie scris în stare deformată. Limitîndu-ne la plăci subțiri pleoștite, deformațiile preponderente pentru starea de încovoiere sînt săgețile w. Ținînd seamă că, după deformație, ordonata z a unui punct curent devine $(z + w)$, relațiile (1.3) se scriu după cum urmează (fig. 2):

$$\left.\begin{aligned}
N_x^* &\approx N_x,\\
N_{xy}^* &\approx N_{xy},\\
Q_x^* &\approx N_x \frac{\partial(z+w)}{\partial x} + N_{xy}\frac{\partial(z+w)}{\partial y} + Q_x,\\
M_x^* &= M_x,\\
M_{xy}^* &\approx M_{xy};
\end{aligned}\right\} \qquad (1.4a)$$

$$\left.\begin{aligned} N_y^* &\approx N_y, \\ N_{yx}^* &\approx N_{yx}, \\ Q_y^* &\approx N_y \frac{\partial (z+w)}{\partial y} + N_{yx} \frac{\partial (z+w)}{\partial x} + Q_y, \\ M_y^* &= M_y, \\ M_{yx}^* &\approx M_{yx}. \end{aligned}\right\} \tag{1.4b}$$

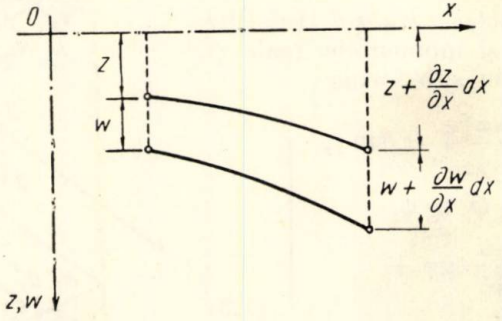


Fig. 2. — Elementul de placă deformat.

După toate simplificările, ecuațiile de echilibru ale elementului deformat vor fi :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + X = 0, \tag{1.5a}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + Y = 0, \tag{1.5b}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[Q_x + N_x \frac{\partial (z+w)}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial (z+w)}{\partial y}\right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left[Q_y + N_y \frac{\partial (z+w)}{\partial y} + N_{yx} \frac{\partial (z+w)}{\partial x}\right] + Z = 0, \end{aligned} \tag{1.5c}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0, \tag{1.5d}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0. \tag{1.5e}$$

A șasea ecuație de echilibru nu a mai fost scrisă, deoarece, în ipoteza lui Love-Kirchhoff, ea este o identitate.

Cînd încărcarea exterioară lipsește ($X = Y = Z = 0$), ecuațiile diferențiale de echilibru sînt omogene.

Ecuațiile (1.5a) și (1.5b) sînt identic verificate prin introducerea unei funcții F din care derivă eforturile

$$\left.\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ N_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ N_{xy} = N_{yx} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Ducînd expresiile (1.6) în (1.5c), eliminînd forțele tăietoare Q_x și Q_y cu ajutorul ecuațiilor de echilibru (1.5d) și (1.5e) și ținînd seama de notațiile (1.2b), se obține ecuația

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial M_y^2}{\partial y^2} + t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2s\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + r\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Ecuațiile de deformații sînt scrise în forma clasică. Deplasările u, v, w în direcțiile axelor de coordonate x, y, z sînt considerate pozitive cînd cresc în sensul pozitiv al coordonatelor.

De aceea vom avea

$$\varepsilon_x \approx \frac{\partial u}{\partial x} - rw + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \tag{1.8a}$$

$$\varepsilon_y \approx \frac{\partial v}{\partial y} - tw + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \tag{1.8b}$$

$$\gamma_{xy} \approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2sw + \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{1.8c}$$

Eliminînd deplasările tangențiale u și v, rezultă *ecuația de compatibilitate*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y} = -\left(t\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2s\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + r\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Relațiile de elasticitate exprimă legătura între deformațiile specifice și eforturile unitare (sau funcția de eforturi) pe de o parte, și între mo-

mentele încovoietoare și de răsucire și săgeți, pe de altă parte [1], [2], [6], [7], [8]; expresiile alungirilor specifice conțin și termenul constant $\alpha_t T$ (în care T reprezintă variația de temperatură, uniformă pe toată placa, iar α_t este coeficientul de dilatare termică liniară) :

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{N_x - \mu N_y}{E\delta} + \alpha_t T = \frac{1}{E\delta}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + \alpha_t T,\\
\varepsilon_y &= \frac{N_y - \mu N_x}{E\delta} + \alpha_t T = \frac{1}{E\delta}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + \alpha_t T,\\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)N_{xy}}{E\delta} = -\frac{2(1+\mu)}{E\delta}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y};
\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

$$\left.\begin{aligned}
M_x &= -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\
M_y &= -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\
M_{xy} &= M_{yx} = -K(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y};
\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

$K = \dfrac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ — rigiditatea la încovoiere a plăcii.

Introducînd expresiile (1.10) și (1.11) în (1.7) și (1.9) și cu notațiile simplificatoare

$$\Delta(\ldots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\ldots)$$

pentru operatorul lui Laplace
și

$$\Delta_1(\ldots) = \left(t\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2s\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + r\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\ldots)$$

pentru operatorul mixt de ordinul al doilea,
vor rezulta *cele două ecuații de bază ale problemei* :

$$-K\Delta\Delta w + \Delta_1 F + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{1.12}$$

$$\frac{1}{E\delta}\Delta\Delta F + \Delta_1 w - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{1.13}$$

Dacă se ține seama de absența încărcării exterioare, de sensul pozitiv adoptat pentru coordonate și necunoscute, cele două ecuații de bază concordă cu rezultatele cunoscute în literatură [2], [4], [5], [7], [8].

Pentru calculele ce urmează, expresiile deplasărilor tangențiale u și v pot fi obținute din (1.8a) și (1.8b) sub forma

$$u = -\frac{\mu}{E\delta}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{E\delta}\int\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,dx + r\int w\,dx - \\ -\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx + \alpha_t T x + f_1(y), \tag{1.14a}$$

$$v = -\frac{\mu}{E\delta}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{E\delta}\int\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,dy + t\int w\,dy - \\ -\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dy + \alpha_t T y + f_2(x), \tag{1.14b}$$

în care $f_1(y)$ și $f_2(x)$ sînt funcții de integrare, alese astfel încît să verifice ecuația de compatibilitate (1.9).

Ecuațiile de bază ale teoriei liniare pot fi obținute prin particularizarea ecuațiilor (1.12), (1.13) prin îndepărtarea termenilor neliniari:

$$-K\Delta\Delta w + \Delta_1 F = 0, \tag{1.15a}$$

$$\frac{1}{E\delta}\Delta\Delta F + \Delta_1 w = 0. \tag{1.15b}$$

Analog, ecuațiile teoriei de membrană se obțin dacă se consideră $K \to 0$.

2. GEOMETRIA PARABOLOIDULUI HIPERBOLIC ÎN ȘA

Vom presupune că suprafața mediană a plăcii curbe subțiri este un paraboloid hiperbolic în șa, acoperind în plan o suprafață dreptunghiulară $2a\cdot 2b$, săgețile timpanelor fiind f_1, respectiv f_2 (fig. 3).

Dacă se alege centrul plăcii ca origine a axelor de coordonate, ecuația suprafeței mediane va fi

$$z = f_1\frac{x^2}{a^2} - f_2\frac{y^2}{b^2}; \tag{2.1}$$

dacă $f_1/a^2 = f_2/b^2$, ecuația (2.1) se simplifică, devenind

$$z = \frac{f_1}{a^2}(x^2 - y^2)$$

și reprezintă un paraboloid hiperbolic echilater.

Prin diferenţieri succesive, din relaţia (2.1) se obţine

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2f_1}{a^2} = \text{const.}, \\ s &= \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \equiv 0, \\ t &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2f_2}{b^2} = \text{const.} \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

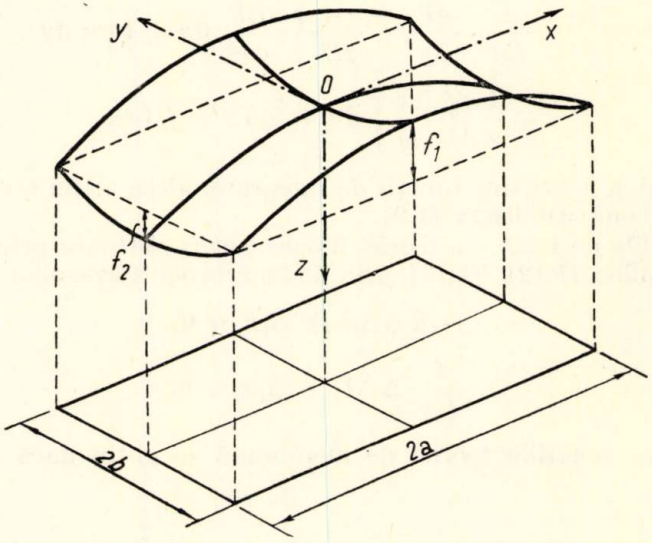


Fig. 3. — Paraboloidul hiperbolic în şa pe contur dreptunghiular.

Existenţa pe suprafaţă a două familii de generatoare rectilinii este caracteristică pentru această cvadrică. Unghiul $\omega/2$ dintre axa Ox şi proiecţiile generatoarelor pe planul xOy este dat de relaţia

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{f_1}{f_2}}. \tag{2.3}$$

Referitor la acest tip de suprafaţă trebuie subliniată următoarea particularitate a generatoarelor [1]. Fie Γ proiecţia în planul xOy a conturului suprafeţei. Două generatoare se întîlnesc pe contur într-un punct P_1. Să urmăm una dintre aceste generatoare pînă ce întîlneşte a doua oară conturul în punctul P_2. Dacă acum urmăm generatoarea din a doua familie, vom întîlni din nou conturul în punctul P_3 şi aşa mai departe.

În cazul conturului dreptunghiular, condiția ca după un număr finit de zigzaguri să revenim în punctul P_1 de pe contur este (fig. 4)

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{mb}{na} \quad (m,\ n \text{ întregi})$$

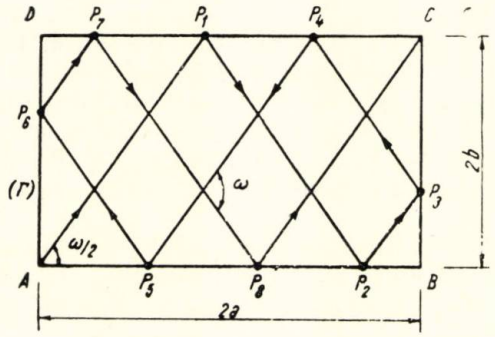


Fig. 4. — Traseul închis al generatoarelor rectilinii.

sau, ținînd seama de relația (2.3),

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{m^2}{n^2} \quad (m,\ n \text{ întregi}), \tag{2.4}$$

care depinde numai de *raportul săgeților*.

3. INTEGRAREA APROXIMATIVĂ A ECUAȚIILOR DE BAZĂ

Forma suprafeței mediane intervine în ecuațiile de bază (1.12) și (1.13) prin operatorul $\Delta_1(\ldots)$. Ținînd seama de relațiile (2.2), aceste ecuații devin

$$X \equiv -K\Delta\Delta w - \frac{2f_2}{b^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{2f_1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \\ + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{E\delta}\Delta\Delta F = -\frac{2f_2}{b^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2f_1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{3.2}$$

Vom presupune că, în cîmpurile succesive, plăcile curbe subțiri se descarcă pe arce puternice care împiedică deplasările tangențiale ale suprafeței mediane, rezemarea putînd însă fi considerată ca articulată pe contur.

Din punct de vedere analitic, condițiile precedente pot fi scrise după cum urmează :

$$\left.\begin{aligned} &- \text{pe laturile } x = \pm a \quad u = v = w = 0, \quad M_x = 0, \\ &- \text{pe laturile } y = \pm b \quad u = v = w = 0, \quad M_y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

O soluție a sistemului de ecuații neliniare (3.1), (3.2) care să satisfacă riguros condițiile marginale (3.3) nu este cunoscută. De aceea vom căuta să obținem o soluție aproximativă, folosind metoda variațională.

În acest scop vom considera inițial o suprafață mediană deformată $w(x, y)$ aproximativă, depinzînd de unul sau de mai mulți parametri. Introducînd expresia deformatei în membrul al doilea al relației (3.2), vom obține o ecuație *liniară* de tip biarmonic, care determină funcția de eforturi.

Funcția F astfel determinată împreună cu funcția w aleasă nu vor satisface riguros ecuația (3.1). Vom determina parametrii din expresia lui $w(x, y)$ astfel încît ecuația să fie satisfăcută cît mai bine.

Condiția variațională corespunzătoare este

$$\int_0^a \int_0^b Xw \, dx \, dy = 0. \tag{3.4}$$

Integrala dublă extinsă la tot domeniul Γ reprezintă relația căutată între săgeți și temperaturi.

Ca ecuație a săgeților, vom considera într-o primă aproximație

$$w(x, y) = w_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}, \tag{3.5}$$

care satisface condițiile marginale

$$- \text{pentru } x = \pm a \quad w = 0 \quad \text{și} \quad M_x = 0,$$

$$- \text{pentru } y = \pm b \quad w = 0 \quad \text{și} \quad M_y = 0.$$

În relația (3.5), w_0 reprezintă săgeata maximă (la centru) și joacă, mai departe, rolul unui parametru pe care urmează să-l determinăm din condiția variațională (3.4).

Efectuînd toate operațiile din membrul stîng al ecuației (3.2), obținem

$$\frac{1}{E\delta} \Delta\Delta F = \frac{\pi^2 (f_1 - f_2)}{2a^2 b^2} w_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} -$$

$$- \frac{\pi^4}{32 a^2 b^2} w_0^2 \left(\cos \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi y}{b} \right).$$

Soluția generală a acestei ecuații poate fi căutată sub aceeași formă; după efectuarea tuturor operațiilor avem

$$\frac{1}{E\delta}F = \frac{8a^2b^2(f_1-f_2)}{\pi^2(a^2+b^2)^2}w_0\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b} +$$
$$+\left(-\frac{a^2}{32b^2}w_0^2 + A_1\operatorname{ch}\frac{\pi y}{a} + A_2\frac{\pi y}{a}\operatorname{sh}\frac{\pi y}{a}\right)\cos\frac{\pi x}{a} +$$
$$+\left(-\frac{b^2}{32a^2}w_0^2 + B_1\operatorname{ch}\frac{\pi x}{b} + B_2\frac{\pi x}{b}\operatorname{sh}\frac{\pi x}{b}\right)\cos\frac{\pi y}{b} +$$
$$+\frac{1}{2}(a_{20}x^2 + a_{02}y^2). \tag{3.6}$$

La scrierea soluției (3.6) au fost reținuți doar termenii satisfăcînd condițiile de simetrie în raport cu axele de coordonate.

A_1, A_2, B_1, B_2, a_{20}, a_{02} reprezintă constante de integrare ce urmează să fie determinate din condițiile de rezemare privind deplasările tangențiale.

Trecînd peste operațiile intermediare și introducînd pe F și w în (1.14), obținem următoarele expresii pentru u și v:

$$u = -\left[\frac{4a(a^2-\mu b^2)(f_1-f_2)}{\pi(a^2+b^2)^2} - \frac{4f_1}{\pi a}\right]w_0\sin\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b} +$$
$$+\frac{\pi}{a}\left[-\frac{\mu a^2}{32b^2}w_0^2 + (A_1+\mu A_1+2A_2)\operatorname{ch}\frac{\pi y}{a} +\right.$$
$$\left.+(1+\mu)A_2\frac{\pi y}{a}\operatorname{sh}\frac{\pi y}{a}\right]\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{\pi}{b}\left\{\frac{b^2}{32a^2}w_0^2\frac{\pi x}{b} -\right.$$
$$\left.-[B_1(1+\mu) - B_2(1-\mu)]\operatorname{sh}\frac{\pi x}{b} - (1+\mu)B_2\frac{\pi x}{b}\operatorname{ch}\frac{\pi x}{b}\right\}\cos\frac{\pi y}{b} -$$
$$-\frac{\pi}{16a}w_0^2\cos^2\frac{\pi y}{2b}\left(\frac{\pi x}{a} - \sin\frac{\pi x}{a}\right) + (a_{02}-\mu a_{20})x + \alpha_t Tx + f_1(y), \tag{3.7a}$$

$$v = -\left[\frac{4b(b^2-\mu a^2)(f_1-f_2)}{\pi(a^2+b^2)^2} + \frac{4f_2}{\pi b}\right]w_0\cos\frac{\pi x}{2a}\sin\frac{\pi y}{2b} +$$
$$+\frac{\pi}{b}\left[-\frac{\mu b^2}{32a^2}w_0^2 + (B_1+\mu B_1+2B_2)\operatorname{ch}\frac{\pi x}{b} +\right.$$
$$\left.+(1+\mu)B_2\frac{\pi x}{b}\operatorname{sh}\frac{\pi x}{b}\right]\sin\frac{\pi y}{b} + \frac{\pi}{a}\left\{\frac{a^2}{32b^2}w_0^2\frac{\pi y}{a} -\right.$$

$$-[(1+\mu)A_1-(1-\mu)A_2]\operatorname{sh}\frac{\pi y}{a}-(1+\mu)A_2\frac{\pi y}{a}\operatorname{ch}\frac{\pi y}{a}\Big\}\cos\frac{\pi x}{a}-$$

$$-\frac{\pi}{16b}w_0^2\cos\frac{\pi x}{2a}\left(\frac{\pi y}{b}-\sin\frac{\pi y}{b}\right)+(a_{20}-\mu a_{02})\,y+\alpha_t Ty+f_1(x). \tag{3.7b}$$

Din condiţiile de simetrie şi antisimetrie în raport cu axele de coordonate rezultă că $f_1(y)=f_2(x)=0$.

Făcînd $x=\pm a$ şi $y=\pm b$ în (3.7), rezultă că condiţiile marginale (3.3) pentru deplasările tangenţiale u, v nu pot fi satisfăcute riguros; de aceea, vom căuta să determinăm cele şase constante din condiţiile ca deplasările medii să fie zero şi ca abaterile lor să fie minime.

Să calculăm mai întîi valorile lui u şi v pe contur:

$$(u)_{x=a}=-\frac{4w_0}{\pi a}\left[\frac{a^2(a^2-\mu b^2)(f_1-f_2)}{(a^2+b^2)^2}-f_1\right]\cos\frac{\pi y}{2b}-$$

$$-\frac{\pi(1+\mu)}{b}\left[\left(B_1-\frac{1-\mu}{1+\mu}B_2\right)\operatorname{sh}\frac{\pi a}{b}-B_2\frac{\pi a}{b}\operatorname{ch}\frac{\pi a}{b}\right]\cos\frac{\pi y}{b}+$$

$$+a(a_{02}-\mu a_{20})-\frac{\pi^2 w_0^2}{32a}+\alpha_t Ta,$$

$$(v)_{y=b}=-\frac{4w_0}{\pi b}\left[\frac{b^2(b^2-\mu a^2)(f_1-f_2)}{(a^2+b^2)^2}+f_2\right]\cos\frac{\pi x}{2a}-$$

$$-\frac{\pi(1+\mu)}{a}\left[\left(A_1-\frac{1-\mu}{1+\mu}A_2\right)\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}-A_2\frac{\pi b}{a}\operatorname{ch}\frac{\pi b}{a}\right]\cos\frac{\pi x}{a}+$$

$$+b(a_{20}-\mu a_{02})-\frac{\pi^2 w_0^3}{32b}+\alpha_t Tb,$$

$$(u)_{y=b}=\frac{\pi}{a}\left\{-\frac{\mu a^2}{32b^2}w_0^2+[(1+\mu)A_1+2A_2]\operatorname{ch}\frac{\pi b}{a}+\right.$$

$$\left.+(1+\mu)A_2\frac{\pi b}{a}\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}\right\}\sin\frac{\pi x}{a}-\frac{\pi}{b}\left\{\frac{b^2}{32a^2}\cdot\frac{\pi x}{b}w_0^2-\right.$$

$$\left.-[(1+\mu)B_1-(1-\mu)B_2]\operatorname{sh}\frac{\pi x}{b}-(1+\mu)B_2\frac{\pi x}{b}\operatorname{ch}\frac{\pi x}{b}\right\}+$$

$$+(a_{02}-\mu a_{20})\,x+\alpha_t Tx,$$

$$(v)_{x=a} = \frac{\pi}{b}\left\{-\frac{\mu b^2}{32a^2}w_0^2 + [(1+\mu)B_1 + 2B_2)]\operatorname{ch}\frac{\pi a}{b} + \right.$$

$$\left. + (1+\mu)B_2 \cdot \frac{\pi a}{b}\operatorname{sh}\frac{\pi a}{b}\right\}\sin\frac{\pi y}{b} - \frac{\pi}{a}\left\{\frac{a^2}{32b^2}\cdot\frac{\pi y}{a}w_0^2 - \right.$$

$$\left. - [(1+\mu)A_1 - (1-\mu)A_2]\operatorname{sh}\frac{\pi y}{a} - (1+\mu)A_2\frac{\pi y}{a}\operatorname{ch}\frac{\pi y}{a}\right\} +$$

$$+ (a_{20} - \mu a_{02})\,y + \alpha_t T y.$$

Condițiile

$$\int_0^b (u)_{x=a}\cdot \mathrm{d}y = 0 \text{ și } \int_0^a (v)_{y=b}\cdot \mathrm{d}x = 0$$

conduc la sistemul

$$\left.\begin{aligned} a_{20} - \mu a_{02} &= \frac{\pi^2 w_0^2}{32b^2} + \frac{8}{\pi^2}\left[\frac{(b^2-\mu a^2)(f_1-f_2)}{(a^2+b^2)^2} + \frac{f_2}{b^2}\right]w_0 - \alpha_t T, \\ a_{02} - \mu a_{20} &= \frac{\pi^2 w_0^2}{32a^2} + \frac{8}{\pi^2}\left[\frac{(a^2-\mu b^2)(f_1-f_2)}{(a^2+b^2)^2} - \frac{f_1}{a^2}\right]w_0 - \alpha_t T, \end{aligned}\right\}$$

din care se deduc expresiile constantelor

$$\left.\begin{aligned} a_{20} &= \frac{\pi^2(a^2+\mu b^2)}{32(1-\mu^2)a^2b^2}w_0^2 + \frac{8}{\pi^2}\left[\frac{(f_1-f_2)b^2}{(a^2+b^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1-\mu^2}\left(\frac{f_2}{b^2} - \mu\frac{f_1}{a^2}\right)\right]w_0 - \frac{\alpha_t T}{1-\mu} \\ a_{02} &= \frac{\pi^2(b^2+\mu a^2)}{32(1-\mu^2)a^2b^2}w_0^2 + \frac{8}{\pi^2}\left[\frac{(f_1-f_2)a^2}{(a^2+b^2)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1-\mu^2}\left(\frac{f_1}{a^2} - \mu\frac{f_2}{b^2}\right)\right]w_0 - \frac{\alpha_t T}{1-\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Celelalte două condiții, și anume

$$\int_0^a (u)_{y=b}\cdot \mathrm{d}x = 0 \text{ și } \int_0^b (v)_{x=a}\cdot \mathrm{d}y = 0,$$

conduc la relații care sînt omogene în raport cu celelalte patru constante, astfel încît putem lua

$$A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0. \tag{3.9}$$

Funcția de eforturi definită de relația (3.6) capătă atunci forma mai simplă

$$\frac{F}{E\delta} = \frac{8\,a^2\,b^2\,(f_1 - f_2)}{\pi^2\,(a^2 + b^2)^2}\,w_0 \cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b} - \frac{a^2}{32b^2}\,w_0^2\cos\frac{\pi x}{a} - \\ - \frac{b^2}{32a^2}\,w_0^2\cos\frac{\pi y}{b} + \frac{1}{2}\,(a_{20}\,x^2 + a_{02}\,y^2), \tag{3.10}$$

în care a_{20} și a_{02} sînt dați de (3.8).

Din (3.10) rezultă, prin diferențieri de două ori,

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{2a^2\,(f_1 - f_2)}{(a^2 + b^2)^2}\,E\delta\,w_0\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b} + \\ + \frac{\pi^2}{32a^2}\,E\delta\,w_0^2\cos\frac{\pi y}{b} + E\delta a_{02},$$

$$N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{2b^2\,(f_1 - f_2)}{(a^2 + b^2)^2}\,E\delta\,w_0\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b} + \\ + \frac{\pi^2}{32b^2}\,E\delta\,w_0^2\cos\frac{\pi x}{a} + E\delta a_{20},$$

$$N_{xy} = N_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2ab\,(f_1 - f_2)}{(a^2 + b^2)^2}\,E\delta w_0 \sin\frac{\pi x}{2a}\sin\frac{\pi y}{2b}. \tag{3.11}$$

Termenul X din condiția variațională (3.4) va fi evaluat cu ajutorul relației (3.1); după efectuarea operațiilor intermediare se obține

$$\frac{X}{E\delta} = -\left[\frac{4\,(f_1 - f_2)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{\pi^4\delta^2\,(a^2 + b^2)^2}{192\,(1 - \mu^2)\,a^4\,b^4}\right] w_0\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b} + \\ + \frac{\pi^2\,(f_1 - f_2)}{(a^2 + b^2)^2}\,w_0^2\left(\cos^2\frac{\pi x}{2a}\cos^2\frac{\pi y}{2b} - \sin^2\frac{\pi x}{2a}\sin^2\frac{\pi y}{2b}\right) + \\ + \frac{\pi^2 f_1}{16a^4}\,w_0^2\cos\frac{\pi y}{b} - \frac{\pi^2 f_2}{16b^4}\,w_0^2\cos\frac{\pi x}{a} - \frac{\pi^4}{128a^4}\,w_0^3\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}\cos\frac{\pi y}{b} - \\ + \frac{\pi^4}{128b^4}\,w_0^3\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}\cos\frac{\pi x}{a} - a_{20}\frac{\pi^2}{4b^2}\,w_0\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b} - \\ - a_{02}\frac{\pi^2}{4a^2}\,w_0\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b} + \frac{2f_1}{a^2}\,a_{02} - \frac{2f_2}{b^2}\,a_{20}.$$

Multiplicînd expresia precedentă cu $\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}$ (din expresia deplasării virtuale w), ținînd seama că

$$\int_0^a\int_0^b \cos^2\frac{\pi x}{2a}\cos^2\frac{\pi y}{2b}\,dx\,dy = \frac{ab}{4},$$

$$\int_0^a\int_0^b\left(\cos^2\frac{\pi x}{2a}\cos^2\frac{\pi y}{2b} - \sin^2\frac{\pi x}{2a}\sin^2\frac{\pi y}{2b}\right)\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^a\int_0^b \cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}\cos\frac{\pi x}{a}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^a\int_0^b \cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}\cos\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy = \frac{4ab}{3\pi^2},$$

$$\int_0^a\int_0^b \cos^2\frac{\pi x}{2a}\cos^2\frac{\pi y}{2b}\cos\frac{\pi x}{a}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^a\int_0^b \cos^2\frac{\pi x}{2a}\cos^2\frac{\pi y}{2b}\cos\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy = \frac{ab}{8},$$

$$\int_0^a\int_0^b \cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}\,dx\,dy = \frac{4ab}{\pi^2}$$

și înlocuind expresiile lui a_{20} și a_{02} date de (3.8), vom obține final o expresie de forma [2])

$$A\left(\frac{w_0}{\delta}\right)^3 + B\left(\frac{w_0}{\delta}\right)^2 + C\left(\frac{w_0}{\delta}\right)T + D\frac{w_0}{\delta} - ET = 0, \qquad (3.12)$$

în care constantele A, B, C, D și E au următoarele expresii :

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{\pi^4}{1024\,(1-\mu^2)}\left[(3-\mu^2)\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)+4\mu\right],\\
B &= -\beta\left\{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{12\,(1-\mu^2)}\left[\frac{10-\mu^2}{\alpha^2}+9\mu-\frac{(10\mu-\mu^2)\,\alpha^2+9\mu}{\lambda}\right]\right\},\\
C &= -\frac{\pi^2\beta^2}{16\,(1-\mu)\,\gamma^2}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)\alpha_t,
\end{aligned}\right\} \qquad (3.13a)$$

[2] Simbolul E care intervine în relația (3.12) și următoarele reprezintă o valoare constantă, diferită de modulul de elasticitate. Este interesant de subliniat faptul că fenomenul de care ne ocupăm este independent de valoarea modulului de elasticitate. Aceasta din urmă intervine doar la evaluarea eforturilor și momentelor.

$$D = \beta^2 \left[\frac{\pi^4}{768(1-\mu^2)} \cdot \frac{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2}{\beta^2} + \right.$$
$$+ \left(1 - \frac{64}{\pi^4}\right)\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2} +$$
$$\left. + \frac{64}{\pi^4(1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2\mu}{\lambda} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2}\right) \right],$$
$$E = -\frac{8}{\pi^2(1-\mu)} \cdot \frac{\beta^3}{\gamma^2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\lambda}\right)\alpha_t, \qquad (3.13a)$$

iar

$$\alpha = a/b, \quad \beta = f_1/\delta, \quad \gamma = f_1/a, \quad \lambda = f_1/f_2. \qquad (3.13\text{ b})$$

În cazul problemei liniare, plecînd de la ecuaţiile (1.15), se ajunge la relaţia

$$D\frac{w_0}{\delta} - ET = 0, \qquad (3.14)$$

în care D şi E sînt daţi de relaţiile (3.13a), (3.13 b).

4. DISCUŢIA REZULTATELOR

Vom începe discuţia alegînd în prealabil unele valori numerice. Fie

α	$= a/b = 4$	raportul laturilor,
δ/f_1	$= 0{,}005$	svelteţea plăcii ($\beta = 200$),
γ	$= f_1/a = 1/3{,}1$	dublul pleoştirii (în direcţia deschiderii mari),
λ	$= f_1/f_2 = 8$	raportul săgeţilor timpanelor,
μ	$= 1/6$	coeficientul lui Poisson (pentru beton armat),
α_t	$= 0{,}00001$	coeficientul de dilatare termică liniară.

Cu aceste valori, coeficienţii A, B, C, D şi E iau următoarele valori :

$$A = 4{,}73643$$
$$B = 305{,}49070$$
$$C = -3{,}02325 \qquad (4.1)$$
$$D = 2{,}35641 + 7902{,}63020 = 7904{,}98661$$
$$E = 46{,}73744.$$

Ecuația (3.12) se scrie atunci

$$4{,}73643\left(\frac{w_0}{\delta}\right)^3 + 305{,}49070\left(\frac{w_0}{\delta}\right)^2 - 3{,}02325\left(\frac{w_0}{\delta}\right) T +$$

$$+ 7904{,}98661\frac{w_0}{\delta} - 46{,}73744\ T = 0$$

sau încă

$$\left(\frac{w_0}{\delta}\right)^3 + 64{,}49809\left(\frac{w_0}{\delta}\right)^2 - 0{,}63830\left(\frac{w_0}{\delta}\right) T +$$

$$+ 1668{,}97571\left(\frac{w_0}{\delta}\right) - 9{,}86765\ T = 0. \tag{4.2a}$$

În ecuația precedentă, variația de temperatură T poate fi explicitată

$$T = \frac{(w_0/\delta)^3 + 64{,}49809\,(w_0/\delta)^2 + 1668{,}97571\,(w_0/\delta)}{9{,}86765 + 0{,}63830\,(w_0/\delta)}. \tag{4.2b}$$

Curba reprezentativă a funcției $T = f(w_0/\delta)$, dată de (4.2b), este o cubică denumită „tridentul lui Newton".

Ecuația tangentei în origine este

$$T = \frac{1668{,}97571\,(w_0/\delta)}{9{,}86765} = + 169{,}13606\left(\frac{w_0}{\delta}\right) \tag{4.3}$$

și reprezintă soluția problemei liniare (3.14).

În vecinătatea originii, relația (4.2b) poate fi dezvoltată în următoarea serie de puteri :

$$T = + 169{,}13606\left(\frac{w_0}{\delta}\right) - 4{,}40437\left(\frac{w_0}{\delta}\right)^2 + 0{,}38624\left(\frac{w_0}{\delta}\right)^3 -$$

$$- 0{,}02498\left(\frac{w_0}{\delta}\right)^4 + 0{,}00162\left(\frac{w_0}{\delta}\right)^5 + \ldots$$

$$(\text{pentru } -1 < w_0/\delta < +1).$$

Valorile lui T pentru diferite rapoarte w_0/δ conform teoriei neliniare și liniare au fost trecute în tabela 1.

Tabela 1

w_0/δ	T°C conform		
	teoriei neliniare	teoriei liniare	teoriei elementare
1	2	3	4
−1,0	−165,09	−169,14	−139,64
−0,9	−148,92	−152,22	−125,68
−0,8	−132,68	−135,31	−111,71
−0,7	−116,36	−118,40	− 97,75
−0,6	− 99,98	−101,48	− 83,78
−0,5	− 83,51	− 84,57	− 69,82
−0,4	− 66,97	− 67,65	− 55,86
−0,3	− 50,35	− 50,74	− 41,89
−0,2	− 33,65	− 33,83	− 27,93
−0,1	− 16,87	− 16,91	− 13,96
0	0	0	0
+0,1	+ 16,96	+ 16,91	+ 13,96
0,2	34,01	33,83	27,93
0,3	51,15	50,74	41,89
0,4	68,38	67,65	55,86
0,5	85,72	84,57	69,82
0,6	103,15	101,48	83,78
0,7	120,69	118,40	97,75
0,8	138,34	135,31	111,71
0,9	156,09	152,22	125,68
1,0	173,95	169,14	139,64

Pentru controlul rezultatelor astfel obţinute au fost căutate şi soluţii elementare, bazate pe stabilirea relaţiei $T = f(w_0/\delta)$ în următoarele ipoteze :

a) placa curbă subţire este înlocuită cu două arce independente, care se intersectează la centru, şi cu deplasările neîmpiedicate ;

b) idem, arcele fiind dublu articulate ;

c) interacţiunea a două arce dublu articulate.

Deducerea relaţiilor corespunzătoare este redată în anexa 1. Valorile rezultate din cazul (c), singurul mai apropiat de cazul real, au fost trecute în ultima coloană a tabelei 1.

În sfîrşit, vom evalua ordinul de mărime al momentelor şi al eforturilor în această situaţie (luînd $E = 340\,000$ kg/cm^2 şi $\delta = 4$ cm).

Momentele sînt maxime la centru şi au valorile

$$M_x = \frac{\pi^2}{48(1-\mu^2)} \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2}(1+\mu\alpha^2) E\delta^2 \frac{w_0}{\delta} = 10{,}97438 \frac{w_0}{\delta} \text{ (kgcm/cm)},$$

$$M_y = \frac{\pi^2}{48(1-\mu^2)} \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2}(\alpha^2+\mu) E\delta^2 \frac{w_0}{\delta} = 48{,}38703 \frac{w_0}{\delta} \text{ (kgcm/cm)}.$$

Eforturile unitare, calculate ca pentru un material omogen, sînt

$$\sigma_x = \pm \frac{\pi^2}{8(1-\mu^2)} \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2}(1+\mu\alpha^2) E \frac{w_0}{\delta} = \pm 4{,}11539 \frac{w_0}{\delta} \text{ (kg/cm}^2\text{)},$$

$$\sigma_y = \pm \frac{\pi^2}{8(1-\mu^2)} \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2}(\alpha^2+\mu) E \frac{w_0}{\delta} = \pm 18{,}14514 \frac{w_0}{\delta} \text{ (kg/cm}^2\text{)}.$$

Eforturile normale sînt de asemenea maxime la centru; din aplicarea relațiilor (3.11) și (3.8) rezultă

$$N_x = -\frac{E\delta\alpha_t T}{1-\mu} + \left[\left(2 - \frac{8}{\pi^2}\right)\frac{(1-1/\lambda)}{(1+1/\alpha)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{8}{\pi^2(1-\mu^2)}\left(1 - \mu\frac{\alpha^2}{\lambda}\right)\right]\frac{\gamma^2}{\beta} E\delta \frac{w_0}{\delta} -$$

$$- \frac{\pi^2}{32(1-\mu^2)}(2 - \mu^2 + \mu\alpha^2)\frac{\gamma^2}{\beta^2} E\delta \left(\frac{w_0}{\delta}\right)^2 =$$

$$= -16{,}32\ T + 1045{,}63664 \frac{w_0}{\delta} - 5{,}02078 \left(\frac{w_0}{\delta}\right)^2 \text{ (kg/cm)},$$

$$N_y = -\frac{E\delta\alpha_t T}{1-\mu} - \left[-\left(2 - \frac{8}{\pi^2}\right)\frac{(1-1/\lambda)}{(\alpha+1/\alpha)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{8}{\pi^2(1-\mu^2)}\left(\frac{\alpha^2}{\lambda} - \mu\right)\right]\frac{\gamma^2}{\beta^2} E\delta \frac{w_0}{\delta} -$$

$$- \frac{\pi^2}{32(1-\mu^2)}\left(2 - \mu^2 + \frac{\mu}{\alpha^2}\right)\frac{\gamma^2}{\beta^2} E\delta \left(\frac{w_0}{\delta}\right)^2 =$$

$$= -16{,}32\ T - 1040{,}79125 \frac{w_0}{\delta} - 2{,}22527 \left(\frac{w_0}{\delta}\right)^2 \text{ (kg/cm)},$$

$$\sigma_x = \frac{N_x}{\delta} = -4{,}08\ T + 261{,}40916 \frac{w_0}{\delta} - 1{,}25520 \left(\frac{w_0}{\delta}\right)^2 \text{ (kg/cm}^2\text{)},$$

$$\sigma_y = \frac{N_y}{\delta} = -4{,}08\ T - 260{,}19781 \frac{w_0}{\delta} - 0{,}55632 \left(\frac{w_0}{\delta}\right)^2 \text{ (kg/cm}^2\text{)}.$$

Să considerăm acum o creștere de temperatură de circa 51°C. Din tabela 1 obținem $w_0/\delta \approx 0{,}3$ și, mai departe,

$M_x = 3{,}3$ kgcm/cm, $M_y = 14{,}5$ kgcm/cm,
$\sigma_x = \pm 1{,}2$ kg/cm², $\sigma_y = \pm 5{,}4$ kg/cm²,
$N_x = -834{,}77 + 313{,}69 - 0{,}45 = -521{,}53$ kg/cm,
$N_y = -834{,}77 - 312{,}24 - 0{,}20 = -1147{,}21$ kg/cm,
$\sigma_x = -130{,}4$ kg/cm², $\sigma_y = -286{,}8$ kg/cm².

Influența termenilor neliniari este neglijabilă la calcularea eforturilor și a eforturilor liniare.

Eforturile unitare produse de variația de temperatură ating valori aproape de rezistența de rupere a betonului, ceea ce atrage fisurarea, așa cum s-a observat în unele cazuri practice, și care explică importantele deformații măsurate cu aceste ocazii.

5. OBSERVAȚII CRITICE ȘI CONCLUZII

a) Am studiat deformațiile mari ale unui paraboloid hiperbolic în șa supus acțiunii unei variații de temperatură uniformă, cu ajutorul teoriei de ordinul al doilea, în ipoteza că deformațiile sînt mari și că echilibrul este exprimat în starea deformată.

Soluția a fost studiată în *teoria încovoierii* de placă subțire pleoștită. Această teorie este caracterizată de prezența termenului $K\Delta\Delta w$ în ecuația (1.12) a teoriei neliniare, respectiv (1.15a) a teoriei liniare.

Cînd acest termen dispare din ecuațiile sus-menționate, adică atunci cînd considerăm că rigiditatea la încovoiere a plăcii se anulează ($K \to 0$), sistemele (1.12), (1.13), respectiv (1.15 a), (1.15 b) caracterizează *comportarea de membrană* în teoria neliniară, respectiv liniară.

Influența termenului $K\Delta\Delta w$ nu apare decît numai în expresia coeficientului D, din (3.13a); ea este reprezentată de primul termen

$$\frac{\pi^4}{768\,(1-\mu^2)}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2$$

și este neglijabilă în raport cu ceilalți doi termeni (în exemplul numeric considerat 2,35641 față de 7902, 63020).

Aceasta înseamnă că, cel puțin în cazul de față (cînd s-a considerat armonica de rangul cel mai mic), atît teoria încovoierii neliniară, cît și teoria de membrană neliniară conduc la *rezultate practic* identice.

b) Mai important decît aceasta este faptul că, pentru temperaturi care depășesc cu mult valorile uzuale, diferențele dintre teoria neliniară și cea liniară sînt foarte reduse. De aceea, folosirea teoriei liniare chiar în ipoteza de membrană, va duce la rezultate satisfăcătoare.

c) Influența diferiților parametri — definiți de relațiile (3.13b) — poate fi studiată ușor. Să examinăm, de exemplu, influența pleoștirii $f_1/2a$.

Examinarea coeficienților (3.13a) arată că A, B și D sînt independenți de raportul $\gamma = f_1/a$, în timp ce C și E conțin pe γ^2 în factor; ecuațiile (4.2b) și (4.3) se scriu în acest caz

$$T = +\gamma^2 \cdot \frac{(w_0/\delta)^3 + 64{,}49809\,(w_0/\delta)^2 + 1668{,}97571\,(w_0/\delta)}{4{,}86342 + 0{,}31459\,(w_0/\delta)}, \qquad (5.1a)$$

$$T = +\gamma^2 \cdot 17{,}6\,\frac{w_0}{\delta}. \qquad (5.1\,b)$$

Se vede deci că cu cît placa curbă subțire este mai pleoștită, cu atît temperatura critică este mai mică; aceeași concluzie rezultă și în soluția elementară (vezi anexa 1, cazul c).

Influența rapoartelor $\alpha = a/b$ și $\lambda = f_1/f_2$ este mai complexă.

d) O nouă remarcă privește analiza calitativă a fenomenului. Pierderea stabilității sub acțiunea unei sarcini uniforme a fost studiată de diferiți autori [8] în cazul cupolei sferice. Curba de variație a săgeților relative w_0/δ în funcție de încărcarea p este o parabolă cubică. Pierderea

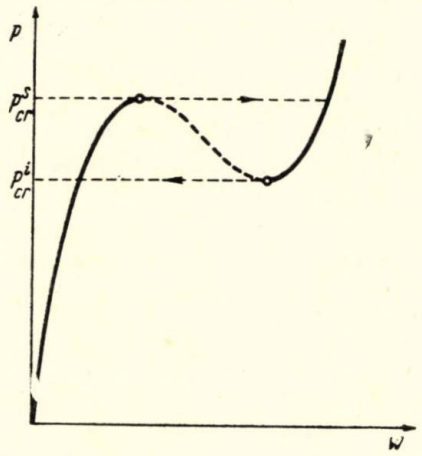


Fig. 5. — Pierderea stabilității prin salt.

stabilității locale este caracterizată la încărcare de o sarcină critică superioară p^s_{cr}, iar la descărcare de o sarcină critică inferioară p^i_{cr} (fig. 5).

În cazul variației de temperatură, curba reprezentativă $T = f(w_0/\delta)$ este *aproape liniară* pentru cîmpul de variație practică a lui T.

e) Sensul săgeților rezultate (în sus sau în jos) depinde de semnul coeficientului E, în speță de semnul expresiei $(\lambda - \alpha^2)$:

$$- \text{ pentru } \lambda - \alpha^2 < 0 \quad \left(\frac{f_1}{a^2} < \frac{f_2}{b^2}\right) \quad \textit{săgeți în jos},$$

$$- \text{ pentru } \lambda - \alpha^2 > 0 \quad \left(\frac{f_1}{a^2} > \frac{f_2}{b^2}\right) \quad \textit{săgeți în sus}.$$

În cazul paraboloidului hiperbolic echilateral, cînd curburile sînt egale ($f_1/a^2 = f_2/b^2$), coeficientul E din (3.13a) se anulează și relația între T și w_0/δ devine

$$T = \frac{A}{C}\left(\frac{w_0}{\delta}\right)^2 + \frac{B}{C}\left(\frac{w_0}{\delta}\right) + \frac{D}{C},$$

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA BUDAPEST 1845

în care

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\pi^4}{1024(1-\mu^2)}\left[(3-\mu^2)\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)+4\mu\right], \\ B &= \frac{\beta}{3}(\alpha^2-1)\left[\frac{10+\mu}{4(1+\mu)\alpha^2}-\frac{1}{(\alpha^2+1)^2}\right], \\ C &= -\frac{\pi^2\beta^2}{16(1-\mu)\gamma^2}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)\alpha_t, \\ D &\approx \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left[\left(1-\frac{64}{\pi^4}\right)\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}\right)^2+\frac{128}{\pi^4(1+\mu)}\right]. \end{aligned}\right\}$$

Teoria liniară ar conduce la rezultatul $w_0 = 0$ independent de T (în teoria elementară este necesar ca pleoștirile celor două arce să fie egale, adică $\alpha = 1/\lambda$).

f) Cînd condiția (2.4) este satisfăcută, coeficienți B, D și E iau o formă mai simplă; în cazul soluției (3.5) considerată anterior, avem $m = n = 1$ (deci $f_1 = f_2$) și coeficienții devin

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{10-\mu^2}{12(1-\mu^2)}\cdot\frac{\beta(\alpha^4-1)}{\alpha^2}, \\ D &\approx \frac{64}{\pi^4(1-\mu^2)}\beta^2\left(\frac{1}{\alpha^2}-2\mu+\alpha^2\right), \\ E &= \frac{8}{\pi^2(1-\mu)}\cdot\frac{\beta^3}{\gamma^2}\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)\alpha_t. \end{aligned}\right\}$$

g) La o construcție executată avînd elementele geometrice menționate la §4 și dimensiunile

$$2a = 49{,}6\text{ m};\quad 2b = 12{,}4\text{ m};\quad f_1 = 8\text{m},\quad f_2 = 1\text{ m},\quad \delta = 4\text{ cm}$$

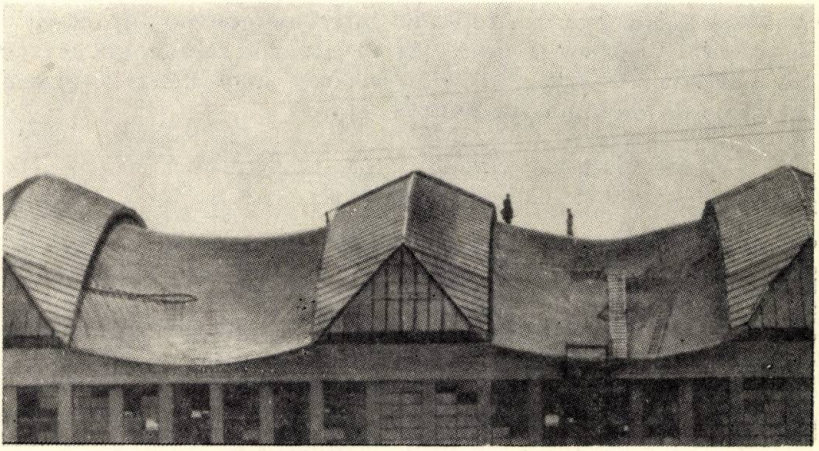
s-au observat deformații mari; săgețile maxime măsurate erau de ordinul 15 cm, adică mult mai mari decît cele rezultate din teoria dezvoltată în studiul de față. Suprafața deformată, diferită de cea admisă de noi, este reprezentată în figura 6.

h) Ne vom opri acum la tipul de soluție admisă în calculele noastre. Ecuațiile cu derivate parțiale (1.12) și (1.13) nu pot fi integrate *exact*; de aceea am aplicat metoda variațională, admițînd pentru săgeți expresia simplă

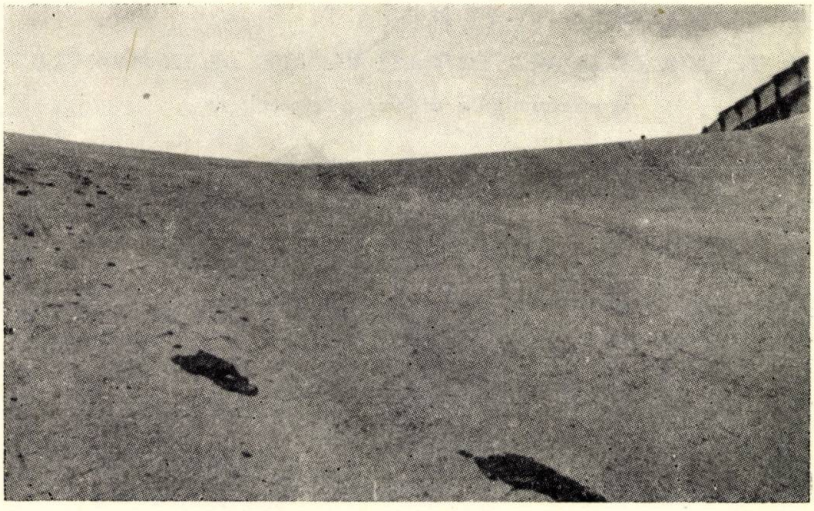
$$w(x,\ y) = w_0\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}. \tag{3.5}$$

O soluție mai apropiată poate fi obținută considerînd următoarea serie dublă

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n w_{m,n} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (m, n = 1, 3, 5, \ldots). \quad (5.2)$$



a



b

Fig. 6. — Deformațiile mari ale unei plăci curbe subțiri datorite variațiilor de temperatură.

Aplicînd procedura indicată în studiul de față, se ajunge la un sistem de ecuații algebrice de gradul al treilea, cu necunoscutele $w_{m,n}$. Deducerea acestor ecuații devine însă inextricabilă pentru calculele practice.

R. Kodnár [3] a sugerat relativ recent aplicarea calculatoarelor electronice la aceste probleme.

Autorii sînt de părere că în viitor ar putea fi aplicată cu succes o altă soluție cu caracter numeric.

Pe baza unor date experimentale, suprafața deformată ar putea fi reprezentată grafic printr-o rețea cu intervale convenabil alese.

Cu ajutorul valorilor w cunoscute în nodurile rețelei, pot fi calculate derivatele parțiale $\partial^2 w/\partial x^2$, $\partial^2 w/\partial y^2$, $\partial^2 w/\partial x \partial y$ care intervin în ecuațiile (1.12) și (1.13); de exemplu, în punctul i, j,

$$\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial x^2} \approx \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}.$$

Ecuația (1.13) poate fi astfel integrată numeric în raport cu necunoscuta F. Valorile $F_{i,j}$ pe contur vor fi determinate din condițiile de deplasări tangențiale u și v nule.

Condiția variațională (3.4) se reduce la evaluarea numerică a unei integrale duble, care, la rîndul ei, determină temperatura critică.

Ținînd seama de considerațiile precedente, autorii consideră că au făcut doar un prim pas în rezolvarea problemei tehnice care este cunoașterea acțiunii temperaturii asupra comportării structurilor.

ANEXĂ

SĂGEȚILE A DOUĂ ARCE DATORITE VARIAȚIEI DE TEMPERATURĂ

A. Deformațiile arcelor neîmpiedicate

Lungimea unui arc parabolic pleoștit, de deschidere $2a$ și săgeată f_1, înainte de deformație este

$$l_1 \approx 2a\left(1 + \frac{2f_1^2}{3a^2}\right).$$

Fie w' săgeata neîmpiedicată a creștetului, produsă de o variație de temperatură T; avem, după simplificarea cu $2a$,

$$1 + \frac{2(f_1 + w')^2}{3a^2} = (1 + \alpha_t T)\left(1 + \frac{2f_1^2}{3a^2}\right),$$

din care rezultă

$$w' = f_1\left[-1 + \sqrt{1 + \alpha_t T\left(1 + \frac{3a^2}{2f_1^2}\right)}\right] \approx \frac{1}{2} f_1 \alpha_t T\left(1 + \frac{3}{2}\frac{a^2}{f_1^2}\right).$$

Această săgeată se produce *în sus*.

Analog se obține pentru al doilea arc de deschidere $2b$

$$w'' \approx \frac{1}{2} f_2 \alpha_t T\left(1 + \frac{3}{2}\frac{b^2}{f_2^2}\right),$$

dirijată *în jos*.

Deplasarea creștetului, considerată pozitivă în jos, va fi

$$w_0 = w'' - w' = -\frac{1}{2}\,\alpha_t T\left(f_1 - f_2 + \frac{3a^2}{2f_1^2} - \frac{3b^2}{2f_2^2}\right)$$

sau

$$\frac{w_0}{\delta} = -\frac{1}{2}\,\alpha_t\, T\,\beta\left(1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{3}{2\gamma^2} - \frac{3\lambda}{2\alpha^2\gamma^2}\right) = -\,0{,}0080825\;T. \tag{a}$$

B. Deformațiile a două arce dublu articulate

Ecuațiile de echilibru ale unui arc parabolic pleoștit ($z = f_1\,x^2/a^2$) sînt

$$\frac{\mathrm{d}N_x}{\mathrm{d}x} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Q_x + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\,N_x\right) = 0, \quad Q_x = \frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x},$$

din care rezultă

$$N_x = N_0 = \text{const.},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 M_x}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2f_1}{a^2}\,N_0 = 0. \tag{b}$$

Ecuațiile de deformații se scriu

$$M_x = -\,K\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}, \tag{c}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{2f_1}{a^2}\,w = \frac{N_0}{E\delta} + \alpha_t\, T. \tag{d}$$

Din ecuațiile (b), (c) și (d) obținem

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = \frac{2f_1}{Ka^2}\,N_0,$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2f_1}{a^2}\,w + \frac{N_0}{E\delta} + \alpha_t\, T.$$

Cu următoarele condiții limită

$$-\text{ pentru } x = \pm a \to u = w = 0 \text{ și } -\frac{M_x}{K} = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = 0,$$

deducem

$$w' = -\,\frac{5f_1 a^2}{E\delta^3}\cdot\frac{E\delta\alpha_t\, T}{1 + \dfrac{32}{5}\dfrac{f_1^2}{\delta^2}} \approx -\,\frac{25}{32}\,\alpha_t T\frac{a^2}{f_1}$$

și similar

$$w'' = -\,\frac{25}{32}\,\alpha_t\, T\,\frac{b^2}{f_2}.$$

Săgeata creştetului va fi diferenţa

$$w_0 = w' - w'' = -\frac{25}{32}\alpha_t T\left(\frac{a^2}{f_1^2} - \frac{b^2}{f_2^2}\right)$$

sau încă

$$\frac{w_0}{\delta} = -\frac{25}{32}\alpha_t T\frac{\beta}{\gamma^2}\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha^2}\right) = -0{,}0075078\ T. \tag{e}$$

C. Interacţiunea celor două arce

Deoarece săgeţile celor două arce trebuie să fie egale la creştet, interacţiunea lor este echivalentă cu acţiunea asupra fiecărui arc a două forţe P egale şi de semn contrar.

După efectuarea tuturor calculelor rezultă

$$w' = w'' = \frac{25}{32}\alpha_t T\left(-\frac{a^2}{f_1}\cdot\frac{b^3}{a^3+b^3} + \frac{b^2}{f_2}\cdot\frac{a^3}{a^3+b^3}\right)$$

sau, final,

$$\frac{w_0}{\delta} = \frac{25}{32}\alpha_t T\cdot\frac{\beta}{\gamma^2}\cdot\frac{\lambda\alpha - 1}{\alpha^3 + 1} = +0{,}0071613\ T. \tag{f}$$

Semnul + indică săgeţi *în jos*. Formula (*f*) este tabulată în tabela 1.

Se observă că controlul unor rezultate bazate pe o teorie complexă prin formule elementare poate fi periculos dacă simplificările sînt prea drastice.

Primită la redacţie la 12 octombrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. Beleş, M. Soare, *Paraboloidul eliptic şi hiperbolic în construcţii*. Bucureşti, Edit. Acad. R.P.R., 1964.
2. M. Herzog, *Die Grundgleichungen der flachen, dünnen, elastischen Schale mit veränderlicher Wanddicke und endlichen Formänderungen unter beliebiger Belastung und Temperaturänderung*. Die Bautechnik, **37**, *1*, 27—29 (1960).
3. R. Kodnár, *Folosirea calculatoarelor electronice digitale pentru soluţionarea unor probleme de cercetare fundamentală în construcţii* (l. cehă). Stavebnícky časopis, **11**, *1—2*, 85—96 (1963).
4. M. Mişonov, *Asupra ecuaţiilor cu derivate parţiale ale plăcilor subţiri pleoştite*. Comptes rendus de l'Académie Bulgare des Sciences, Sofia, **14**, *7*, 715—718, (1961).
5. K. Marguerre, *Zur Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung*. Jahrbuch 1939 der deutschen Luftfahrtforschung, Berlin, S. I., 413—I, 418 (1939).
6. M. Soare, *Application des équations aux différences finites au calcul des coques*. Paris, Eyrolles, 1962.
7. W. S. Wlassow, *Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik*. Berlin, Akademie-Verlag, 1958.
8. A. S. Wolmir, *Biegsame Platten und Schalen*. Berlin, VEB — Verlag für Bauwesen, 1962.

ASUPRA UNEI PROBLEME PLANE CLASICE A TEORIEI ELASTICITĂȚII[1)]

de P. P. TEODORESCU
Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România

539.3

Se reia problema grinzii plane circulare de secțiune dreptunghiulară constantă, supusă la o stare de tensiune plană, pentru care se folosește în mod obișnuit soluția, devenită clasică, a lui J. H. Michell [6], arătîndu-se că aceasta nu are un caracter general. Într-adevăr, această soluție se referă la cazul particular al unui inel circular, caz în care — datorită condițiilor globale de echilibru — se poate utiliza o funcție de tensiune de o formă mai simplă.
Făcîndu-se completările necesare, se rezolvă problema în coordonate polare pentru un caz general de încărcare și pentru diferite cazuri de rezemare, punîndu-se condiții globale la limită pe secțiunile de capăt.

1. În cele ce urmează ne vom ocupa de grinda plană circulară de secțiune transversală dreptunghiulară constantă [2)], supusă la o stare de tensiune plană. Primele rezultate în această direcție, care se numără printre primele obținute în problema plană a teoriei elasticității, nefiind suficient de bine cunoscute la vremea respectivă, au fost date de H. Golovin [4] în 1881. Problema a fost studiată apoi în mod independent și mai complet de M. C. Ribière [10], [11].

Rezultatele obținute prezintă interes pentru studiul a diferite elemente de construcție, atît în cazul construcțiilor civile, cît și în cazul organelor de mașini. În această ordine de idei este interesant să citățm și teoriile aproximative dezvoltate de H. Résal [9] și E. Winkler [14], [15]; dezvoltările ulterioare se datoresc lui F. Grashof [5] și K. Pearson [7]. Este interesant de cercetat în această direcție și tratatul lui A. Föppl [3].

[1)] Publicată în Rev. roum. sci. techn. — „Mécanique Appliquée", **11**, *2* (1966) (în limba franceză).

[2)] În calcul, lățimea secțiunii transversale se va considera egală cu unitatea.

O metodă generală de tratare a problemei se datorește lui J. H. Michell [2]. Unele rezultate interesante în această direcție a dat A. Timpe [13]. V. Billevicz [1] a studiat amănunțit distribuția tensiunilor pe secțiunea transversală în unele cazuri de încărcare. De asemenea, R. Prișcu și M. Constantinescu [8] au întreprins recent un studiu al arcelor plane

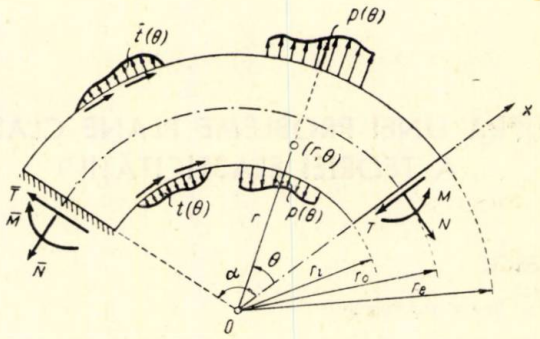


Fig. 1

circulare supuse la presiuni cu variație cosinusoidală, cu aplicație la calculul barajelor.

Trebuie să remarcăm însă că soluția lui J. H. Michell [6], devenită clasică și reprodusă în toate tratatele de specialitate (de exemplu [2], [12]) nu are un caracter general; într-adevăr, această soluție se referă la cazul particular al unui inel circular, caz în care — datorită condițiilor globale de echilibru — se poate utiliza o funcție de tensiune de o formă mai simplă. Noi vom face completările necesare la această soluție, rezolvînd problema în coordonate polare pentru un caz general de încărcare și pentru diferite cazuri de rezemare.

2. Putem studia grinda circulară în diferite condiții de rezemare pe secțiunile de capăt, pe care se pun condiții globale la limită. Pentru fixarea ideilor vom considera o grindă circulară în consolă, intradosul fiind un arc de cerc de rază r_i, iar extradosul un arc de cerc de rază r_e (fig. 1); axa grinzii va fi un arc de cerc de rază

$$r_0 = \frac{1}{2}(r_i + r_e) \tag{1}$$

și unghi la centru α. Alegem ca origine a unghiurilor secțiunea de la capătul liber.

Pe extradosul grinzii vor acționa sarcinile normală și, respectiv, tangențială $\bar{p}(\theta)$, $\bar{t}(\theta)$, care se pot reprezenta cu ajutorul seriilor Fourier sub forma

$$\begin{aligned} \bar{p}(\theta) &= \bar{p}_0 + \sum_n \bar{p}'_n \sin n\theta + \sum_n \bar{p}''_n \cos n\theta, \\ \bar{t}(\theta) &= \bar{t}_0 + \sum_n \bar{t}'_n \sin n\theta + \sum_n \bar{t}''_n \cos n\theta; \end{aligned} \tag{2}$$

pe intradosul grinzii vor acționa de asemenea sarcinile normală și, respectiv, tangențială

$$p(\theta) = p_0 + \sum_n p'_n \sin n\theta + \sum_n p''_n \cos n\theta,$$
$$t(\theta) = t_0 + \sum_n t'_n \sin n\theta + \sum_n t''_n \cos n\theta. \tag{2'}$$

Pe secțiunea liberă de capăt vom considera sarcinile exterioare reduse la o forță rezultantă și la un moment rezultant (o forță normală la secțiune N, o forță tangențială T și un moment M) (fig. 1), corespunzînd la forța axială, forța tăietoare și momentul încovoietor. Din condițiile de echilibru global se calculează reacțiunile în secțiunea de încastrare $\theta = \alpha$ sub forma [3])

$$\overline{N} = N\cos\alpha - T\sin\alpha + r_e\int_0^\alpha \overline{p}(\theta)\sin(\alpha-\theta)\,d\theta - r_i\int_0^\alpha p(\theta)\sin(\alpha-\theta)\,d\theta + \\ + r_e\int_0^\alpha \overline{t}(\theta)\cos(\alpha-\theta)\,d\theta + r_i\int_0^\alpha t(\theta)\cos(\alpha-\theta)\,d\theta, \tag{3}$$

$$\overline{T} = N\sin\alpha + T\cos\alpha - r_e\int_0^\alpha \overline{p}(\theta)\cos(\alpha-\theta)\,d\theta + r_i\int_0^\alpha p(\theta)\cos(\alpha-\theta)\,d\theta + \\ + r_e\int_0^\alpha \overline{t}(\theta)\sin(\alpha-\theta)\,d\theta + r_i\int_0^\alpha t(\theta)\sin(\alpha-\theta)\,d\theta, \tag{3'}$$

$$\overline{M} = -Nr_0(1-\cos\alpha) - Tr_0\sin\alpha + r_0r_e\int_0^\alpha \overline{p}(\theta)\sin(\alpha-\theta)\,d\theta - \\ - r_0r_i\int_0^\alpha p(\theta)\sin(\alpha-\theta)\,d\theta - r_e\int_0^\alpha \overline{t}(\theta)[r_e - r_0\cos(\alpha-\theta)]\,d\theta - \\ - r_i\int_0^\alpha t(\theta)[r_i - r_0\cos(\alpha-\theta)]\,d\theta. \tag{3''}$$

3. În coordonate polare (r, θ) se va putea reprezenta starea de tensiune sub forma

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r},$$
$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \tag{4}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right), \tag{4'}$$

[3]) Dacă se face calculul, ținînd seama de (2) și (2'), nu se obțin rezultate remarcabile.

starea de deformație fiind dată de

$$E(u_r - u_r^0) = \int \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial F}{\partial r}\right) dr - \mu \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{df_1(\theta)}{d\theta},$$

$$E[u_\theta - (\omega_0 r + u_\theta^0)] = \int r \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} d\theta - \int d\theta \int \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial F}{\partial r}\right) dr - \tag{5}$$

$$- \frac{\mu}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} + f_2(r) - f_1(\theta).$$

S-a notat cu E modulul de elasticitate al lui Young și cu μ coeficientul de contracție transversală al lui Poisson; u_r^0, u_θ^0 și ω_0 sînt deplasările, respectiv rotirea de corp rigid.

Funcția de tensiune $F = F(r, \theta)$ este biarmonică:

$$\Delta\Delta F = 0, \tag{6}$$

operatorul lui Laplace scriindu-se în coordonate polare sub forma

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \tag{7}$$

iar funcțiile de cîte o singură variabilă $f_1(\theta)$ și $f_2(r)$ sînt integrale particulare ale ecuației diferențiale cu variabile separate:

$$\frac{d^2 f_1(\theta)}{d\theta^2} + f_1(\theta) + r\frac{df_2(r)}{dr} - f_2(r) =$$

$$= \frac{3}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial \theta} - \int \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial F}{\partial r}\right) dr - \tag{8}$$

$$- \int\left(r^2\frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{\partial F}{\partial r}\right) d\theta - \int d\theta \int \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial F}{\partial r}\right) dr.$$

4. Pentru rezolvarea problemei folosim o funcție de tensiune de forma

$$\begin{aligned} F(r, \theta) = {} & B_0 r^2 + \ln r (C_0 + D_0 r^2) + \theta [A + A' r^2 + \ln r (A'' + A''' r^2)] + \\ & + r\theta [B \sin\theta + B' \cos\theta + \ln r (C \sin\theta + C' \cos\theta)] + \\ & + r^3 [D (\theta \sin\theta - \ln r \cos\theta) + D' (\theta \cos\theta + \ln r \sin\theta)] + \\ & + \frac{1}{r}[E (\theta \sin\theta + \ln r \cos\theta) + E' (\theta \cos\theta - \ln r \sin\theta)] + \\ & + \left(B_1 r^3 + \frac{C_1}{r} + D_1 r \ln r\right) \cos\theta + \\ & + \left(B_1' r^3 + \frac{C_1'}{r} + D_1' r \ln r\right) \sin\theta + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} [r^n (A_n + B_n r^2) + r^{-n} (C_n + D_n r^2)] \cos n\theta + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} [r^n (A_n' + B_n' r^2) + r^{-n} (C_n' + D_n' r^2)] \cos n\theta. \end{aligned} \tag{9}$$

Cei mai importanți termeni ai acestei funcții au fost introduși pentru prima dată de J. H. Michell [6]; noi am completat această funcție cu unii termeni a căror importanță va fi pusă în evidență la punctul 6 al acestei lucrări.

Starea de tensiune va rezulta sub forma

$$\sigma_r = 2B_0 + \frac{C_0}{r^2} + D_0(1 + 2\ln r) + \theta\left[2A' + \frac{A''}{r^2} + A'''(1 + 2\ln r)\right] +$$

$$+\left[(2B_1 + D)\, r - (2C_1 - 3E)\frac{1}{r^3} + (D_1 + 2B)\frac{1}{r} + \right.$$

$$\left. + 2\ln r\left(\frac{C}{r} - Dr - \frac{E}{r^3}\right)\right]\cos\theta + \left[(2B_1' - D')\, r - (2C_1' + 3E')\frac{1}{r^3} + \right.$$

$$\left. + (D_1' - 2B')\frac{1}{r} - 2\ln r\left(\frac{C'}{r} - D'r - \frac{E'}{r^3}\right)\right]\sin\theta +$$

$$+ \theta\left[\left(\frac{C}{r} + 2Dr - 2\frac{E}{r^3}\right)\sin\theta + \left(\frac{C'}{r} + 2D'r - 2\frac{E'}{r^3}\right)\cos\theta\right] -$$

$$- \sum_n r^{n-2}[n(n-1)\, A_n + (n+1)(n-2)B_n r^2]\cos n\theta -$$

$$- \sum_n r^{-(n+2)}[n(n+1)\, C_n + (n-1)(n+2)\, D_n r^2]\cos n\theta -$$

$$- \sum_n r^{n-2}[n(n-1)\, A_n' + (n+1)(n-2)\, B_n' r^2]\sin n\theta -$$

$$- \sum_n r^{-(n+2)}[n(n+1)\, C_n' + (n-1)(n+2)\, D_n' r^2]\sin n\theta, \tag{10}$$

$$\sigma_\theta = 2B_0 - \frac{C_0}{r^2} + D_0(3 + 2\ln r) + \theta\left[2A' - \frac{A''}{r^2} + A'''(3 + 2\ln r)\right] +$$

$$+\left[(6B_1 - 5D)\, r + (2C_1 - 3E)\frac{1}{r^3} + \frac{D_1}{r} - 2\ln r\left(3Dr - \frac{E}{r^3}\right)\right]\cos\theta +$$

$$+\left[(6B_1' + 5D')\, r + (2C_1' + 3E')\frac{1}{r^3} + \frac{D_1'}{r} + 2\ln r\left(3D'r - \frac{E'}{r^3}\right)\right]\sin\theta +$$

$$+ \theta\left[\left(\frac{C}{r} + 6Dr + 2\frac{E}{r^3}\right)\sin\theta + \left(\frac{C'}{r} + 6D'r + 2\frac{E'}{r^3}\right)\cos\theta\right] +$$

$$+ \sum_n r^{n-2}[n(n-1)\, A_n + (n+2)(n+1)\, B_n r^2]\cos n\theta +$$

$$+ \sum_n r^{-(n+2)}[n(n+1)\, C_n + (n-2)(n-1)\, D_n r^2]\cos n\theta +$$

$$+ \sum_n r^{n-2}[n(n-1)\, A_n' + (n+2)(n+1)\, B_n' r^2]\sin n\theta +$$

$$+ \sum_n r^{-(n+2)}[n(n+1)\, C_n' + (n-2)(n-1)\, D_n' r^2]\sin n\theta,$$

$$\tau_{r\theta} = (A - A'')\frac{1}{r^2} - (A' + A''') + \ln r\left(\frac{A''}{r^2} - A'''\right) +$$
$$+ \left[(2B_1 - 3D)\,r - (2C_1 - 3E)\,\frac{1}{r^3} + (D_1 - C)\,\frac{1}{r} - 2\ln r\left(Dr + \frac{E}{r^3}\right)\right]\sin\theta -$$
$$- \left[(2B_1' + 3D')\,r - (2C_1' + 3E')\,\frac{1}{r^3} + (D_1' + C')\,\frac{1}{r} + 2\ln r\left(D'r + \frac{E'}{r^3}\right)\right]\cos\theta -$$
$$- \theta\left[\left(\frac{C}{r} + 2Dr - 2\frac{E}{r^3}\right)\cos\theta - \left(\frac{C'}{r} + 2D'r - 2\frac{E'}{r^3}\right)\sin\theta\right] +$$
$$+ \sum_n nr^{n-2}\left[(n-1)\,A_n + (n+1)\,B_n r^2\right]\sin n\theta -$$
$$- \sum_n nr^{-(n+2)}\left[(n+1)\,C_n + (n-1)\,D_n r^2\right]\sin n\theta -$$
$$- \sum_n nr^{n-2}\left[(n-1)\,A_n' + (n+1)\,B_n' r^2\right]\cos n\theta +$$
$$+ \sum_n nr^{-(n+2)}\left[(n+1)\,C_n' + (n-1)\,D_n' r^2\right]\cos n\theta, \qquad (10')$$

iar starea de deformație se va exprima prin

$$E\,(u_r - u_r^0) = 2\,(1-\mu)\,B_0 r - (1+\mu)\frac{C_0}{r} - D_0 r\,[1 + \mu - 2\,(1-\mu)\,\ln r] +$$
$$+ \theta\left\{[2\,(1-\mu)\,A' - (1+\mu)\,A''']\,r - (1+\mu)\frac{A''}{r} + 2\,(1-\mu)\,A'''\,r\ln r\right\} +$$
$$+ \left\{(1+\mu)\,(C_1 - E)\,\frac{1}{r^2} - (1-\mu)\,(B+C) + [(1+\mu)\,D + (1-3\mu)\,B_1]\,r^2 +\right.$$
$$\left. + \ln r\left[(1+\mu)\frac{E}{r^2} + 2B + (1-\mu)\,D_1 - (1-3\mu)\,Dr^2 + C\ln r\right]\right\}\cos\theta +$$
$$+ \left\{(1+\mu)\,(C_1' + E')\,\frac{1}{r^2} + (1-\mu)\,(B' + C') - [(1+\mu)\,D' - (1-3\mu)\,B_1']\,r^2 -\right.$$
$$\left. - \ln r\left[(1+\mu)\frac{E'}{r^2} + 2B' - (1-\mu)\,D_1' - (1-3\mu)\,D'r^2 + C'\ln r\right]\right\}\sin\theta +$$
$$+ \theta\left\{\left[(1+\mu)\frac{E}{r^2} + (1-\mu)\,B - (1+\mu)\,C + 2D_1 + (1-3\mu)\,Dr^2 +\right.\right.$$
$$\left. + (1-\mu)\,C\ln r + C'\theta\right]\sin\theta + \left[(1+\mu)\frac{E'}{r^2} + (1-\mu)\,B' - (1+\mu)\,C' -\right.$$
$$\left.\left. - 2D_1' + (1-3\mu)\,D'r^2 + (1-\mu)\,C'\ln r - C\theta\right]\cos\theta\right\} -$$
$$- (1+\mu)\sum_n r^{n-1}\left\{nA_n + \left[n - \frac{2\,(1-\mu)}{1+\mu}\right]B_n r^2\right\}\cos n\theta +$$

$$+(1+\mu)\sum_n r^{-(n+1)}\left\{nC_n+\left[n+\frac{2(1-\mu)}{1+\mu}\right]D_n r^2\right\}\cos n\theta -$$

$$-(1+\mu)\sum_n r^{n-1}\left\{nA'_n+\left[n-\frac{2(1-\mu)}{1+\mu}\right]B'_n r^2\right\}\sin n\theta +$$

$$+(1+\mu)\sum_n r^{-(n+1)}\left\{nC'_n+\left[n+\frac{2(1-\mu)}{1+\mu}\right]D'_n r^2\right\}\sin n\theta, \tag{11}$$

$$E(u_\theta-(\omega_0 r+u_\theta^0)]=4D_0 r\theta-(1+\mu)\frac{A}{r}-[4A'+(1+\mu)A''']r\ln r+$$

$$+2A''' r\theta^2+\frac{1}{9}(1+\mu)\frac{A''}{r^2}(1-6\ln r)-4A''' r\ln^2 r+$$

$$+\left\{(1+\mu)(C_1-E)\frac{1}{r^2}-2\mu B+(1-\mu)C-(1+\mu)D_1+\right.$$

$$+[(5+\mu)B_1-(1+\mu)D]r^2+\ln r\left[(1+\mu)\frac{E}{r^2}-2B-(1+\mu)C-\right.$$

$$\left.\left.-(1-\mu)D_1-(5+\mu)Dr^2-C\ln r\right]\right\}\sin\theta-\left\{(1+\mu)(C'_1+E')\frac{1}{r^2}+2\mu B'-\right.$$

$$-(1-\mu)C'-(1+\mu)D'_1+[(5+\mu)B'_1+(1+\mu)D']r^2-$$

$$-\ln r\left[(1+\mu)\frac{E'}{r^2}-2B'-(1+\mu)C'+(1-\mu)D'_1-(5+\mu)D'r^2-\right.$$

$$\left.\left.-C'\ln r\right]\right\}\cos\theta+\theta\left\{\left[-(1+\mu)\frac{E}{r^2}+(1-\mu)B+2D_1-(5+\mu)Dr^2+\right.\right.$$

$$\left.+(1-\mu)C\ln r+C'\theta\right]\cos\theta+\left[(1+\mu)\frac{E'}{r^2}-(1-\mu)B'+\right.$$

$$\left.\left.+2D'_1+(5+\mu)D'r^2-(1-\mu)C'\ln r+C\theta\right]\sin\theta\right\}+$$

$$+(1+\mu)\sum_n r^{n-1}\left[nA_n+\left(n+\frac{4}{1+\mu}\right)B_n r^2\right]\sin n\theta+$$

$$+(1+\mu)\sum_n r^{-(n+1)}\left[nC_n+\left(n-\frac{4}{1+\mu}\right)D_n r^2\right]\sin n\theta-$$

$$-(1+\mu)\sum_n r^{n-1}\left[nA'_n+\left(n+\frac{4}{1+\mu}\right)B'_n r^2\right]\cos n\theta-$$

$$-(1+\mu)\sum_n r^{-(n+1)}\left[nC'_n+\left(n-\frac{4}{1+\mu}\right)D'_n r^2\right]\cos n\theta.$$

5. Pe intradosul și pe extradosul grinzii circulare vom pune condițiile la limită

$$r = r_i : \sigma_r = p(\theta), \quad \tau_{r\theta} = t(\theta), \tag{12}$$

$$r = r_e : \sigma_r = \bar{p}(\theta), \quad \tau_{r\theta} = \bar{t}(\theta). \tag{12'}$$

Observînd, de asemenea, că termenii în care apare factorul θ trebuie să se anuleze, rezultă pentru coeficienții de determinat ecuațiile

$$2B_0 + \frac{C_0}{r_i^2} + D_0(1 + 2\ln r_i) = p_0,$$

$$2B_0 + \frac{C_0}{r_e^2} + D_0(1 + 2\ln r_e) = \bar{p}_0, \tag{13}$$

$$2A' + \frac{A''}{r_i^2} + A'''(1 + 2\ln r_i) = 0,$$

$$2A' + \frac{A''}{r_e^2} + A'''(1 + 2\ln r_e) = 0, \tag{14}$$

$$\frac{A}{r_i^2} - A' - \frac{A''}{r_i^2}(1 - \ln r_i) - A'''(1 + \ln r_i) = t_0,$$

$$\frac{A}{r_e^2} - A' - \frac{A''}{r_e^2}(1 - \ln r_e) - A'''(1 + \ln r_e) = \bar{t}_0, \tag{14'}$$

$$\frac{C}{r_i} + 2Dr_i - 2\frac{E}{r_i^3} = 0,$$

$$\frac{C}{r_e} + 2Dr_e - 2\frac{E}{r_e^3} = 0, \tag{15}$$

$$2B_1 r_i - 2\frac{C_1}{r_i^3} + (D_1 + 2B)\frac{1}{r_i} + 2C\frac{\ln r_i}{r_i} + Dr_i(1 - 2\ln r_i) + \frac{E}{r_i^3}(3 - 2\ln r_i) = p_1'',$$

$$2B_1 r_e - 2\frac{C_1}{r_e^3} + (D_1 + 2B)\frac{1}{r_e} + 2C\frac{\ln r_e}{r_e} + Dr_e(1 - 2\ln r_e) + \frac{E}{r_e^3}(3 - 2\ln r_e) = \bar{p}_1'', \tag{15'}$$

$$2B_1 r_i - 2\frac{C_1}{r_i^3} + (D_1 - C)\frac{1}{r_i} - Dr_i(3 + 2\ln r_i) + \frac{E}{r_i^3}(3 - 2\ln r_i) = t_1',$$

$$B_1 r_e - 2\frac{C_1}{r_e^3} + (D_1 - C)\frac{1}{r_e} - Dr_e(3 + 2\ln r_e) + \frac{E}{r_e^3}(3 - 2\ln r_e) = \bar{t}_1', \tag{15''}$$

$$\frac{C'}{r_i} + 2D' r_i - 2\frac{E'}{r_i^3} = 0,$$
$$\frac{C'}{r_e} + 2D' r_e - 2\frac{E'}{r_e^3} = 0, \tag{16}$$

$$2B_1' r_i - 2\frac{C_1'}{r_i^3} + (D_1' - 2B')\frac{1}{r_i} - 2C'\frac{\ln r_i}{r_i} - D' r_i(1 - 2\ln r_i) -$$
$$- \frac{E'}{r_i^3}(3 - 2\ln r_i) = p_1',$$
$$2B_1' r_e - 2\frac{C_1'}{r_e^3} + (D_1' - 2B')\frac{1}{r_e} - 2C'\frac{\ln r_e}{r_e} - D' r_e(1 - 2\ln r_e) - \tag{16'}$$
$$- \frac{E'}{r_e^3}(3 - 2\ln r_e) = \bar{p}_1',$$

$$2B_1' r_i - 2\frac{C_1'}{r_i^3} + (D_1' + C')\frac{1}{r_i} + D' r_i(3 + 2\ln r_i) - \frac{E'}{r_i^3}(3 - 2\ln r_i) = t_1'',$$
$$2B_1' r_e - 2\frac{C_1'}{r_e^3} + (D_1' + C')\frac{1}{r_e} + D' r_e(3 + 2\ln r_e) - \frac{E'}{r_e^3}(3 - 2\ln r_e) = \bar{t}_1'', \tag{16''}$$

$$- r_i^{n-2}[n(n-1)A_n + (n+1)(n-2)B_n r_i^2] -$$
$$- r_i^{-(n+2)}[n(n+1)C_n + (n-1)(n+2)D_n r_i^2] = p_n'',$$
$$- r_e^{n-2}[n(n-1)A_n + (n+1)(n-2)B_n r_e^2] - \tag{17}$$
$$- r_e^{-(n+2)}[n(n+1)C_n + (n-1)(n+2)D_n r_e^2] = \bar{p}_n'',$$

$$r_i^{n-2}[(n-1)A_n + (n+1)B_n r_i^2] - r_i^{-(n+2)}[(n+1)C_n + (n-1)D_n r_i^2] = \frac{t_n'}{n}, \tag{17'}$$

$$r_e^{n-2}[(n-1)A_n + (n+1)B_n r_e^2] - r_e^{-(n+2)}[(n+1)C_n + (n-1)D_n r_e^2] = \frac{\bar{t}_n'}{n},$$

$$- r_i^{n-2}[n(n-1)A_n' + (n+1)(n-2)B_n' r_i^2] -$$
$$- r_i^{-(n+2)}[n(n+1)C_n' + (n-1)(n+2)D_n' r_i^2] = p_n',$$
$$- r_e^{n-2}[n(n-1)A_n' + (n+1)(n-2)B_n' r_e^2] - \tag{18}$$
$$- r_e^{-(n+2)}[n(n+1)C_n' + (n-1)(n+2)D_n' r_e^2] = \bar{p}_n',$$

$$
\begin{aligned}
&- r_i^{n-2}\,[(n-1)\,A'_n + (n+1)\,B'_n r_i^2\,] + \\
&+ r_i^{-(n+2)}\,[\,(n+1)\,C'_n + (n-1)D'_n\,r_i^2] = \frac{t''_n}{n}, \\
&- r_e^{n-2}\,[(n-1)\,A'_n + (n+1)\,B'_n r_e^2] + \\
&+ r_e^{-(n+2)}\,[(n+1)\,C'_n + (n-1)\,D'_n r_e^2] = \frac{\bar{t}''_n}{n}.
\end{aligned}
\tag{18'}
$$

Pentru determinarea coeficienţilor B_0, C_0, D_0 nu este suficient sistemul (13), fiind necesară o ecuaţie suplimentară.

Eliminînd pe A' între ecuaţiile corespunzătoare (14) şi (14'), obţinem

$$
\begin{aligned}
&2\frac{A}{r_i^2} - \frac{A''}{r_i^2}(1 - 2\ln r_i) - A''' = 2t_0, \\
&2\frac{A}{r_e^2} - \frac{A''}{r_e^2}(1 - 2\ln r_e) - A''' = 2\bar{t}_0;
\end{aligned}
\tag{14''}
$$

de asemenea, eliminînd pe A' între ecuaţiile (14) şi pe A între ecuaţiile (14''), găsim

$$
\begin{aligned}
&A''\left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_e^2}\right) + 2A''' \ln\frac{r_i}{r_e} = 0, \\
&2A'' \ln\frac{r_i}{r_e} + A'''(r_e^2 - r_i^2) = 2\,(t_0\,r_i^2 - \bar{t}_0\,r_e^2).
\end{aligned}
\tag{14'''}
$$

Cei patru coeficienţi A, A', A'' şi A''' sînt astfel univoc determinaţi şi obţinem

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{N'}\left\{\left[r_e^2 - r_i^2 + 2r_i^2(3 - 2\ln r_i)\ln\frac{r_e}{r_i}\right]t_0 - \right. \\
&\quad \left. - \left[r_e^2 - r_i^2 + 2r_e^2(1 - 2\ln r_i)\ln\frac{r_e}{r_i}\right]\bar{t}_0\right\}, \\
A' &= \frac{1}{N'}\,[r_e^{-2}(1 + 2\ln r_i) - r_i^{-2}(1 + 2\ln r_e)]\,(t_0\,r_i^2 - \bar{t}_0\,r_e^2), \qquad (19) \\
A'' &= \frac{4}{N'}\,(t_0\,r_i^2 - \bar{t}_0\,r_e^2)\ln\frac{r_e}{r_i}, \\
A''' &= \frac{2}{N'}\,(t_0\,r_i^2 - \bar{t}_0\,r_e^2)\,(r_i^{-2} - r_e^{-2}),
\end{aligned}
$$

unde am introdus numitorul

$$
N' = \left(\frac{r_e}{r_i} - \frac{r_i}{r_e}\right)^2 + 4\ln\frac{r_e}{r_i}. \qquad (20)
$$

Scăzînd ecuațiile corespunzătoare din sistemele (15′) și (15″), putem scrie

$$\begin{aligned} &\frac{2B}{r_i} + \frac{C}{r_i}(1 + 2\ln r_i) + 4\,Dr_i = p_1'' - t_1', \\ &\frac{2B}{r_e} + \frac{C}{r_e}(1 + 2\ln r_e) + 4\,Dr_e = \overline{p}_1'' - \overline{t}_1'; \end{aligned} \tag{15‴}$$

se observă acum că sistemul (15), (15‴) determină în mod univoc coeficienții B, C, D și E. Obținem astfel

$$\begin{aligned} B = \frac{1}{N''}\Big\{ &[r_i^{-2}(1 - 2\ln r_i) - r_e^{-2}(1 + 2\ln r_i)]\,(p_1'' - t_1')\,r_i + \\ &+ [r_i^{-2}(1 + 2\ln r_e) - r_e^{-2}(1 - 2\ln r_e)]\,(\overline{p}_1'' - \overline{t}_1')\,r_e\Big\}, \\ C = \frac{2}{N''}&[(p_1'' - t_1')\,r_i - (\overline{p}_1'' - \overline{t}_1')\,r_e]\,(r_i^{-2} + r_e^{-2}), \\ D = -\frac{1}{N''}&[(p_1'' - t_1')\,r_i - (\overline{p}_1'' - \overline{t}_1')\,r_e]\,r_i^{-2} r_e^{-2}, \\ E = \frac{1}{N''}&[(p_1'' - t_1')\,r_i - (\overline{p}_1'' - \overline{t}_1')\,r_e], \end{aligned} \tag{21}$$

cu numitorul

$$N'' = 4\left[r_i^{-2} - r_e^{-2} + (r_i^{-2} + r_e^{-2})\ln\frac{r_e}{r_i}\right]. \tag{22}$$

Odată calculați acești coeficienți, se poate trece la determinarea coeficienților B_1, C_1, D_1 prin înlocuirea primilor în sistemul (15′) sau în sistemul (15″); obținem astfel sistemul

$$\begin{aligned} 2B_1 r_i^2 - 2\frac{C_1}{r_i^2} + D_1 &= r_i t_1' - \frac{1}{N''}[r_i^{-2}(1 - 2\ln r_i) + \\ &+ r_e^{-2}(1 + 2\ln r_i)]\,[(p_1'' - t_1')\,r_i - (\overline{p}_1'' - \overline{t}_1')\,r_e], \\ 2B_1 r_e^2 - 2\frac{C_1}{r_e^2} + D_1 &= r_e \overline{t}_1' - \frac{1}{N''}[r_i^{-2}(1 + 2\ln r_e) + \\ &+ r_e^{-2}(1 - 2\ln r_e)]\,[(p_1'' - t_1')\,r_i - (\overline{p}_1'' - \overline{t}_1')\,r_e]. \end{aligned} \tag{23}$$

Observăm însă că pentru cei trei coeficienți avem la dispoziție numai două ecuații, mai fiind necesară încă o condiție.

De asemenea, coeficienții B', C', D' și E' vor fi univoc determinați de sistemul (16), (16'), (16''), calculul fiind analog; putem scrie

$$B' = \frac{1}{N''}\{[r_e^{-2}(1+2\ln r_i) - r_i^{-2}(1-2\ln r_i)](p_1' - t_1'')r_i +$$
$$+ [r_e^{-2}(1-2\ln r_e) - r_i^{-2}(1+2\ln r_e)](\bar{p}_1' - \bar{t}_1'')r_e\},$$
$$C' = -\frac{2}{N''}[(p_1' - t_1'')r_i - (\bar{p}_1' - \bar{t}_1'')r_e](r_i^{-2} + r_e^{-2}), \tag{24}$$
$$D' = \frac{1}{N''}[(p_1' - t_1'')r_i - (\bar{p}_1' - \bar{t}_1'')r_e]r_i^{-2}r_e^{-2},$$
$$E' = -\frac{1}{N''}[(p_1' - t_1'')r_i - (\bar{p}_1' - \bar{t}_1'')r_e].$$

Coeficienții B_1', C_1' și D_1' vor fi dați de ecuațiile

$$2B_1'r_i^2 - 2\frac{C_1'}{r_i^2} + D_1' = r_i t_1'' + \frac{1}{N''}[r_i^{-2}(1-2\ln r_i) +$$
$$+ r_e^{-2}(1+2\ln r_i)][(p_1' - t_1'')r_i - (\bar{p}_1' - \bar{t}_1'')r_e],$$
$$2B_1'r_e^2 - 2\frac{C_1'}{r_e^2} + D_1' = r_e\bar{t}_1'' + \frac{1}{N''}[r_i^{-2}(1+2\ln r_e) + \tag{25}$$
$$+ r_e^{-2}(1-2\ln r_e)][(p_1' - t_1'')r_i - (\bar{p}_1' - \bar{t}_1'')r_e],$$

fiind necesară și în acest caz o condiție suplimentară.

Șirurile de coeficienți A_n, B_n, C_n, D_n și A_n', B_n', C_n', D_n' vor fi determinate de sistemul (17), (17'), respectiv (18), (18'); obținem astfel

$$A_n = -\frac{1}{n(n-1)N_n}\{n r_i^{-n+2}(r_i^{2n}r_e^{-2n} - n r_i^{-2}r_e^2 + n - 1)p_n'' +$$
$$+ r_i^{-n+2}[(n-2)r_i^{2n}r_e^{-2n} + n^2 r_i^{-2}r_e^2 - (n+2)(n-1)]t_n' +$$
$$+ n r_e^{-n+2}(r_i^{-2n}r_e^{2n} - n r_i^2 r_e^{-2} + n - 1)\bar{p}_n'' +$$
$$+ r_e^{-n+2}[(n-2)r_i^{-2n}r_e^{2n} + n^2 r_i^2 r_e^{-2} - (n+2)(n-1)]\bar{t}_n'\}, \tag{26}$$
$$B_n = \frac{1}{(n+1)N_n}\{r_i^{-n}[r_i^{2n}r_e^{-2n} + n r_i^2 r_e^{-2} - (n+1)]p_n'' +$$
$$+ r_i^{-n}[r_i^{2n}r_e^{-2n} - (n+2)r_i^2 r_e^{-2} + n + 1]t_n' +$$
$$+ r_e^{-n}[r_i^{-2n}r_e^{2n} + n r_i^{-2}r_e^2 - (n+1)]\bar{p}_n'' +$$
$$+ r_e^{-n}[r_i^{-2n}r_e^{2n} - (n+2)r_i^{-2}r_e^2 + n + 1]\bar{t}_n'\},$$

$$C_n = \frac{1}{n(n+1)N_n}\{n r_i^{n+2}[r_i^{-2n} r_e^{2n} + n r^{-2} r_e^2 - (n+1)]p_n'' -$$
$$- r_i^{n+2}[(n+2) r_i^{-2n} r_e^{2n} - n^2 r_i^{-2} r_e^2 + (n-2)(n+1)]t_n' +$$
$$+ n r_e^{n+2}[r_i^{2n} r_e^{-2n} + n r_i^2 r_e^{-2} - (n+1)]\bar{p}_n'' -$$
$$- r_e^{n+2}[(n+2) r_i^{2n} r_e^{-2n} - n^2 r_i^2 r_e^{-2} + (n-2)(n+1)]\bar{t}_n'\}, \qquad (26')$$

$$D_n = -\frac{1}{(n-1)N_n}\{r_i^n(r_i^{-2n} r_e^{2n} - n r_i^2 r_e^{-2} + n - 1)p_n'' -$$
$$- r_i^n[r_i^{-2n} r_e^{2n} + (n-2) r_i^2 r_e^{-2} - (n-1)]t_n' +$$
$$+ r_e^n(r_i^{2n} r_e^{-2n} - n r_i^{-2} r_e^2 + n - 1)\bar{p}_n'' -$$
$$- r_e^n[r_i^{2n} r_e^{-2n} + (n-2) r_i^{-2} r_e^2 - (n-1)]\bar{t}_n'\}$$

și

$$A_n' = -\frac{1}{n(n-1)N_n}\{n r_i^{-n+2}(r_i^{2n} r_e^{-2n} - n r_i^{-2} r_e^2 + n - 1)p_n' -$$
$$- r_i^{-n+2}[(n-2) r_i^{2n} r_e^{-2n} + n^2 r_i^{-2} r_e^2 - (n+2)(n-1)]t_n'' +$$
$$+ n r_e^{-n+2}(r_i^{-2n} r_e^{2n} - n r_i^2 r_e^{-2} + n - 1)\bar{p}_n' -$$
$$- r_e^{-n+2}[(n-2) r_i^{-2n} r_e^{2n} + n^2 r_i^2 r_e^{-2} - (n+2)(n-1)]\bar{t}_n''\}, \qquad (27)$$

$$B_n' = \frac{1}{(n+1)N_n}\{r_i^{-n}[r_i^{2n} r_e^{-2n} + n r_i^2 r_e^{-2} - (n+1)]p_n' -$$
$$- r_i^{-n}[r_i^{2n} r_e^{-2n} - (n+2) r_i^2 r_e^{-2} + n + 1]t_n'' +$$
$$+ r_e^{-n}[r_i^{-2n} r_e^{2n} + n r_i^{-2} r_e^2 - (n+1)]\bar{p}_n' -$$
$$- r_e^{-n}[r_i^{-2n} r_e^{2n} - (n+2) r_i^{-2} r_e^2 + n + 1]\bar{t}_n''\},$$

$$C_n' = \frac{1}{n(n+1)N_n}\{n r_i^{n+2}[r_i^{-2n} r_e^{2n} + n r_i^{-2} r_e^2 - (n+1)]p_n' +$$
$$+ r_i^{n+2}[(n+2) r_i^{-2n} r_e^{2n} - n^2 r_i^{-2} r_e^2 + (n-2)(n+1)]t_n'' +$$
$$+ n r_e^{n+2}[r_i^{2n} r_e^{-2n} + n r_i^2 r_e^{-2} - (n+1)]\bar{p}_n' +$$
$$+ r_e^{n+2}[(n+2) r_i^{2n} r_e^{-2n} - n^2 r_i^2 r_e^{-2} + (n-2)(n+1)]\bar{t}_n''\}, \qquad (27')$$

$$D_n' = -\frac{1}{(n-1)N_n}\{r_i^n(r_i^{-2n} r_e^{2n} - n r_i^2 r_e^{-2} + n - 1)p_n' +$$
$$+ r_i^n[r_i^{-2n} r_e^{2n} + (n-2) r_i^2 r_e^{-2} - (n-1)]t_n'' +$$
$$+ r_e^n(r_i^{2n} r_e^{-2n} - n r_i^{-2} r_e^2 + n - 1)\bar{p}_n' +$$
$$+ r_e^n[r_i^{2n} r_e^{-2n} + (n-2) r_i^{-2} r_e^2 - (n-1)]\bar{t}_n''\},$$

cu numitorul

$$N_n = 2[r_i^{-2n} r_e^{2n} + r_i^{2n} r_e^{-2n} - n^2 (r_i^{-2} r_e^2 + r_i^2 r_e^{-2}) + 2(n^2 - 1)]. \quad (28)$$

Cele trei ecuații suplimentare a căror necesitate a fost observată mai sus se obțin punînd condiții globale de echilibru pe secțiunea liberă de capăt, eforturile pe secțiune fiind date de

$$\int_{r_i}^{r_e} \sigma_\theta (r, 0)\, dr = N,$$

$$\int_{r_i}^{r_e} \tau_{\theta r} (r, 0)\, dr = T, \quad (29)$$

$$\int_{r_i}^{r_e} \sigma_\theta (r, 0)(r - r_0)\, dr = -M. \quad (29')$$

Condițiile globale de echilibru pe secțiunea de încastrare $\theta = \alpha$ se verifică automat dacă ținem seama de relațiile

$$\int_{r_i}^{r_e} \sigma_\theta (r, \alpha)\, dr = \overline{N},$$

$$\int_{r_i}^{r_e} \tau_{\theta r} (r, \alpha)\, dr = \overline{T}, \quad (30)$$

$$\int_{r_i}^{r_e} \sigma_\theta (r, \alpha)(r - r_0)\, dr = -\overline{M}, \quad (30')$$

care ne dau eforturile corespunzătoare.

Odată determinați coeficienții necunoscuți, se pot calcula cu ușurință starea de tensiune și starea de deformație.

6. Remarcăm că introducerea funcțiilor de tensiune corespunzătoare constantelor A'' și A''' este esențială; altminteri, din (14), (14′) ar rezulta o relație obligatorie între t_0 și $\bar{t}_0$. Aceste funcții lipsesc din soluția clasică a problemei.

De asemenea este necesară introducerea funcțiilor corespunzătoare constantelor C, D și E; în caz contrar, din (15‴) rezultă o condiție obligatorie pentru sarcina exterioară. Se poate face o afirmație analogă pentru funcțiile corespunzătoare constantelor C', D' și E'.

7. Alte cazuri de rezemare ale grinzii plane circulare se pot considera analog, trebuind să ținem seama de condițiile globale de echilibru pentru a putea pune condiții globale la limită pe secțiunile de capăt.

Primită la redacție la 1 noiembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Billevicz V., *Doctor Thesis*. Univ. of Michigan, 1931.
2. Butty E., *Tratado de elasticidad teorico-tecnica (elastotecnica)*. Vol. I, Buenos Aires, 1957.
3. Föppl A., *Vorlesungen über technische Mechanik. V. Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie*. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1907.
4. Головин Х., *Одна из задач статики упругого тела*. Петербург. полит. инст., 1881.
5. Grashof F., *Elastizität und Festigkeit*. 1878.
6. Michell J. H., *On the Direct Determination of Stress in an Elastic Solid, With Applications to the Theory of Plates*. Proc. London Math. Soc., *31*, 100 (1899).
7. Pearson, K., *History of the Theory of Elasticity*, **2**, 1893.
8. Prișcu R., Constantinescu, M., *Calculul elastic al arcelor circulare solicitate de presiuni variabile*. St. cerc. de mec. apl., **19**, *4*, 863 (1965).
9. Resal H., Ann. mines, 617 (1862).
10. Ribière M. C., *Sur l'équilibre d'élasticité des voûtes en arc de cercle*. C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., **108**, 561 (1889).
11. — *Sur les voûtes en arc de cercle encastrées aux naissances*. C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., **132**, 315 (1901).
12. Timoshenko S. P., Goodier J. N., *Theory of Elasticity*. IInd edition, New York-Toronto-London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1951.
13. Timpe A., *Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion*. Zeitschr. für Math. und Physik, **52**, 348 (1905).
14. Winkler, E., *Formänderung und Festigkeit gekrümmter Körper, insbesondere der Ringe*. Zivilingenieur **4**, 232 (1858).
15. — *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*. Prag, 1867.

GRINDĂ DUBLĂ ÎN CONSOLĂ[1)]

D. ANASTASESCU şi I. MUNTEANU
D.S.A.P.C. — Banat
Institutul politehnic Timişoara

539.3

În acest studiu se prezintă cazul general a două console legate reciproc, avînd un unghi oarecare între ele, fiind elastic sau perfect încastrate şi avînd secţiune variabilă. Acest caz apare în general cînd stîlpii la colţurile construcţiilor lipsesc din motive arhitecturale, tehnologice sau economice. Se utilizează coeficienţii de repartizare spaţiali, precum şi avantajele calculului, considerînd ansamblul ca o singură bară. Concluziile practice arată avantajele metodei deplasărilor în rezolvarea statică a acestui tip de construcţie.

1. INTRODUCERE

Structura spaţială de tipul grinzilor duble în consolă apare în cazul construcţiilor civile, industriale etc., cînd stîlpii din colţurile clădirilor sînt eliminaţi din motive arhitectonice, de flux tehnologic sau economice.

Acest tip de structură este inclus în general în ansamblul unei structuri spaţiale sau, mai rar, se poate prezenta şi izolat, perfect încastrat la extremităţi.

În literatura tehnică de specialitate se prezintă rezolvarea exactă doar a cazului structurii izolate şi, în general [11], [10], prin metoda eforturilor.

În acest studiu, unde se vor rezolva ambele cazuri de rezemare la capete, se va utiliza metoda deplasărilor, cunoscînd principalele ei avantaje faţă de metoda eforturilor :

— coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi din sistemul general de ecuaţii se determină mai uşor ;

— aplicarea condiţiilor de echilibru static este suficientă pentru verificarea finală a rezultatelor obţinute ;

[1)] Publicată şi în „Rev. roum. sci. techn. — Mécanique Appliquée", **11**, *1* (1966) în limba engleză.

— în cazul grinzilor duble în consolă încastrate elastic într-o structură spațială, metoda deplasărilor conduce la un sistem de ecuații cu un număr mult mai redus de necunoscute, sistem ce poate fi ușor rezolvat prin iterație;

— în cazul rezolvării prin iterație a sistemului general de ecuații, în metoda eforturilor convergența este în general mai dificil de urmărit decît în metoda deplasărilor.

2. CAZUL CONSOLEI DUBLE PERFECT ÎNCASTRATA

Se consideră structura formată din consolele AB și BC (fig. 1), de secțiune variabilă și lungime l_{AB} și l_{BC}, legate reciproc rigid în nodul B. Barele AB și BC sînt cuprinse în planul XOY și formează între ele unghiul Ψ. Sarcinile considerate sînt P, p.

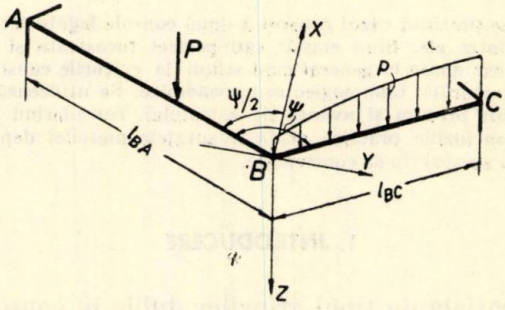


Fig. 1

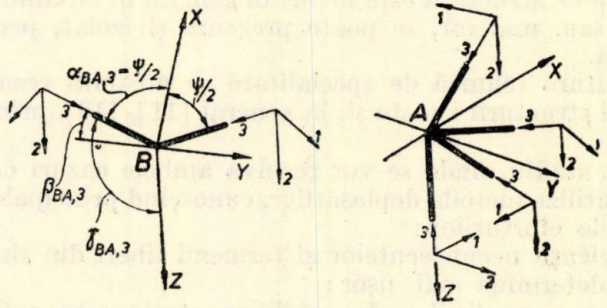


Fig. 2

Se utilizează sistemul de axe din figura 2, unde pentru orientarea secțiunii transversale a barei se dau axele $a = 1, 2, 3$, iar pentru poziția în spațiu a nodului (B respectiv A) axele X, Y, Z.

Considerînd structura de bază din figura 3, sistemul de ecuaţii de condiţie în metoda deplasărilor este

$$\begin{aligned} m_{XX}\,\theta_X + m_{XY}\,\theta_Y + m_{XZ}\,\Delta_Z + \mathfrak{M}_{X,P} &= 0,\\ m_{YX}\,\theta_X + m_{YY}\,\theta_Y + m_{YZ}\,\Delta_Z + \mathfrak{M}_{Y,P} &= 0,\\ r_{ZX}\,\theta_X + r_{ZY}\,\theta_Y + r_{ZZ}\,\Delta_Z + R_{Z,P} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

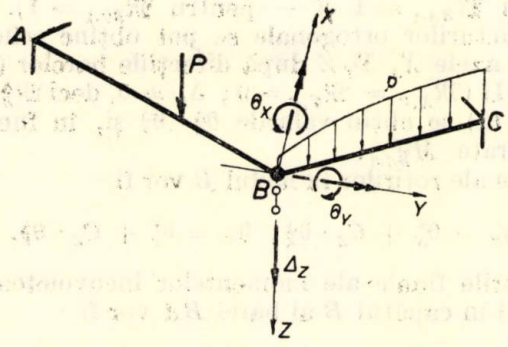


Fig. 3

unde

$$m_{XX} = K_{BA,a}\cdot\alpha^2_{BA,a} + K_{BC,a}\cdot\alpha^2_{BC,a} = \sum_B K\cdot\alpha^2,$$

$$m_{XY} = m_{YX} = K_{BA,a}\cdot\beta_{BA,a}\cdot\alpha_{BA,a} + K_{BC,a}\cdot\beta_{BC,a}\cdot\alpha_{BC,a} = \sum_B K\beta\alpha \;(a=1,\,3),$$

$$\mathfrak{M}_{X,P} = \mathfrak{M}_{BA,a}\cdot\alpha_{BA,a} + \mathfrak{M}_{BC,a}\cdot\alpha_{BC,a} = \sum_B \mathfrak{M}\cdot\alpha,$$

unde

$\alpha_{BA,a}$, $\beta_{BA,a}$, $\gamma_{BA,a}$ reprezintă cosinii directori ai axelor $a = 1, 2, 3$ pentru secţiunea transversală a capătului B al barei BA în raport cu axele X, Y, Z,

$K_{BA,a}$ — rigiditatea barei BA în capătul B şi în raport cu axa a a secţiunii transversale din acest capăt.

Sistemul de ecuaţii (1) poate fi rezolvat integral (în mod clasic) sau în două trepte (etape) :

2.1. Treapta I ($\Delta_Z = 0$). Din primele două ecuaţii (1) se obţin valorile θ^*_X, θ^*_Y şi, în funcţie de acestea, momentele repartizate şi transmise :

$$M^r_{BA,a} = K_{BA,a}\,(\theta^*_X\,\alpha_{BA,a} + \theta^*_Y\,\beta_{BA,a});\quad M^t_{AB,a} = t_{B\to A,a}\cdot M^r_{BA,a}.$$

Momentele echilibrate în capătul B al barei AB din treapta I de calcul vor fi

$$M^*_{BA,a} = \mathfrak{M}_{BA,a} + M^r_{BA,a};\quad M^*_{AB,a} = \mathfrak{M}_{AB,a} + M^t_{AB,a}.$$

2.1.1. În cazul structurilor simetrice față de planul XOZ, dacă în nodul B se consideră separat acțiunea momentelor $\mathfrak{M}_{BA,1} = 1$ și $\mathfrak{M}_{BC,1} = 1$, se pot determina coeficienții de repartizare $m_{BA,a}$ corespunzători acestor momente :

$$m_{BA,a} = K_{BA,a}\left(\frac{1}{\sum K\alpha^2} \cdot \alpha_{BA,a} \cdot \sin\frac{\psi}{2} \pm \frac{1}{\sum K\beta^2}\beta_{BA,a} \cdot \cos\frac{\psi}{2}\right) \qquad (2)$$

(semnul + pentru $\mathfrak{M}_{BA,1} = 1$ și − pentru $\mathfrak{M}_{BC,1} = 1$).

În cazul structurilor ortogonale se pot obține scheme mai simple dacă se orientează axele X, Y, Z după direcțiile barelor ($\Psi = 90°$).

2.2. Treapta II ($\mathfrak{M}_{X,P} = \mathfrak{M}_{Y,P} = 0$; $\Delta_Z \neq 0$, deci $\mathfrak{M}^{\Delta}_{BA,1} \neq 0$). Din primele două ecuații (1) se obțin valorile $\theta^{\Delta}_X \cdot \theta^{\Delta}_Y$ și, în funcție de acestea, momentele echilibrate $M^{\Delta}_{BA,a}$.

Valorile finale ale rotirilor în nodul B vor fi

$$\theta_X = \theta^*_X + C_Z \cdot \theta^{\Delta}_X ; \quad \theta_Y = \theta^*_Y + C_Z \cdot \theta^{\Delta}_Y. \qquad (3)$$

Similar, valorile finale ale momentelor încovoietoare ($a = 1, 2$) și de torsiune ($a = 3$) în capătul B al barei BA vor fi

$$M_{BA,a} = M^*_{BA,a} + C_Z \cdot M^{\Delta}_{BA,a}. \qquad (4)$$

Înlocuind valorile (3) sau (4) în ultima ecuație ($R_Z = 0$) a sistemului 1), se obține valoarea coeficientului de corecție C_Z a deplasării liniare arbitrare.

Se știe că ecuațiile de condiție reprezintă expresii de lucru mecanic virtual (pe baza principiului deplasărilor virtuale), de aceea ecuația $R_Z = 0$ reprezintă și lucrul mecanic virtual în deplasarea virtuală arbitrar dată $\Delta_Z = 1$.

Valorile momentelor $\mathfrak{M}_{BA,a}$, $\mathfrak{M}^{\Delta}_{BA,a}$, a rigidităților $K_{BA,a}$ și a coeficienților de transmitere a momentelor $t_{B\to A,a}$ se obțin din tabele tehnice [2], [1], [7], [4].

Cele două trepte de calcul pot fi rezolvate în două scheme de echilibrare separate, cînd este necesară determinarea coeficientului C_Z, sau, în caz contrar, numai într-o singură schemă, prin echilibrarea succesivă a momentelor și a forței de deviație.

3. CAZUL CONSOLEI DUBLE ÎNCASTRATĂ ELASTIC ÎN REAZEME

Se consideră consola dublă ABC încastrată elastic în nodurile A și C ale structurii spațiale din figura 4 *a*.

Considerînd structura de bază din figura 4 *b*, obținută prin blocarea completă (unghiulară și liniară) a nodurilor structurii inițiale (fig. 4 *a*), se poate scrie un sistem de 20 de ecuații ($5\times3 + 5$), similar sistemului de ecuații (1). Necunoscutele vor fi : deplasările unghiulare θ_X, θ_Y, θ_Z ale fiecărui nod și deplasările liniare Δ_H (H = I, II, ..., V) ale nodurilor structurii.

3.1. Treapta I. Pentru echilibrarea unui nod oarecare, utilizînd un sistem de axe X, Y, Z cu o orientare arbitrară, se deblochează nodul şi, rezolvînd „sistemul caracteristic" al acestuia

$$\left.\begin{aligned} \theta_X \sum K\alpha^2 + \theta_Y \sum K\beta\alpha + \theta_Z \sum K\gamma\alpha + \mathfrak{M}_{X,P} &= 0,\\ \theta_X \sum K\alpha\beta + \theta_Y \sum K\beta^2 + \theta_Z \sum K\gamma\beta + \mathfrak{M}_{Y,P} &= 0,\\ \theta_X \sum K\alpha\gamma + \theta_Y \sum K\beta\gamma + \theta_Z \sum K\gamma^2 + \mathfrak{M}_{Z,P} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

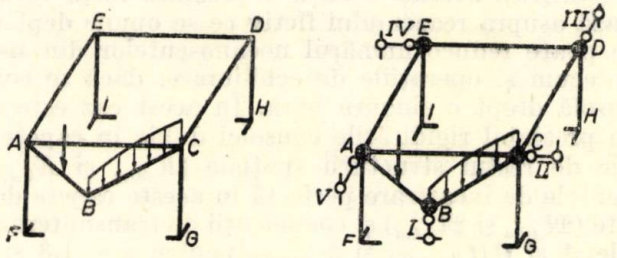


Fig. 4

se obţin valorile θ_X, θ_Y, θ_Z ale rotirilor nodului respectiv în echilibrarea considerată.

În cazul nodului A şi a sistemului de axe respectiv (fig. 2 *b*), sistemul (5) se simplifică la (5′), deoarece stîlpii sînt perpendiculari pe planul riglelor (cazul întîlnit curent) :

$$\left.\begin{aligned} \theta_X \sum_A K\alpha^2 + \theta_Y \sum_A K\beta\alpha + \mathfrak{M}_{X,P} &= 0,\\ \theta_X \sum_A K\alpha\beta + \theta_Y \sum_A K\beta^2 + \mathfrak{M}_{Y,P} &= 0,\\ \theta_Z \sum_A K\gamma^2 + \mathfrak{M}_{Z,P} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5′}$$

În funcţie de rotirile θ_X, θ_Y, θ_Z se vor obţine momentele distribuite

$$M^r_{AJ,a} = K_{AJ,a}(\theta_X \cdot \alpha_{AJ,a} + \theta_Y \cdot \beta_{AJ,a} + \theta_Z \cdot \gamma_{AJ,a}) \tag{6}$$

şi apoi momentele transmise $M^t_{JB,a}$ ($J = B, C, E, F$).

La sfîrşitul operaţiilor de deblocare succesivă a nodurilor se vor obţine momentele echilibrate

$$M^*_{AJ,a} = \mathfrak{M}_{AJ,a} + M^r_{AJ,a} + M^t_{AJ,a}. \tag{7}$$

3.2. Treapta II. Se dau pe rînd deplasările arbitrare după direcţiile legăturilor liniare $H = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, \mathrm{V}$ şi după echilibrarea nodurilor se vor obţine rotirile $\theta^{\Delta H}_X$, $\theta^{\Delta H}_Y$, $\theta^{\Delta H}_Z$ şi deci momentele echilibrate $M^{\Delta H}_{AJ,a}$.

Valorile finale ale momentelor vor fi

$$M_{AJ,a} = M^*_{AJ,a} + \sum_{H=\mathrm{I}}^{\mathrm{V}} C_H \cdot M^{\Delta H}_{AJ,a} \quad (J = B, C, E, F), \tag{8}$$

unde coeficienții de corecție C_H ai deplasărilor liniare arbitrare se vor obține din ecuații de lucru mecanic virtual sau de echilibru a forțelor de deviație de forma

$$L_L = \sum_{H=I}^{V} (L_{LH} \cdot C_H) + L_{L,P} = 0, \ (L = I, II, \ldots, V). \tag{9}$$

În prima interpretare (energetică), ecuația $L_L = 0$ din sistemul (9) reprezintă lucrul mecanic total în deplasarea virtuală $\Delta_L = 1$. În a doua interpretare (statică), aceeași ecuație reprezintă forța totală de deviație care acționează asupra reazemului fictiv ce se opune deplasării Δ_L.

3.3. Se poate reduce numărul necunoscutelor din sistemul general de ecuații, precum și operațiile de echilibrare, dacă se consideră grinda dublă în consolă drept o singură bară. În acest caz este necesar să se determine în prealabil rigiditățile consolei duble în capetele în care este prinsă elastic de restul structurii spațiale ($K_{AC,a}$ și $K_{CA,a}$ pe conturul ABC), momentele de încastrare perfectă în aceste capete datorită sarcinii direct aplicate ($\mathfrak{M}_{AC,a}$ și $\mathfrak{M}_{CA,a}$) și coeficienții de transmitere ai momentelor între nodurile A și C ($t_{A,a\to C,a}$ și $t_{C,a\to A,a}$ pentru $a = 1,3$ și $t_{A\to C,a}$ pentru $a = 2$, $t_{A,a\to C,a}$ reprezentînd coeficientul de transmitere al momentului din capătul A, axa a, spre capătul C, axa a). Se observă că în acest caz se determină cîte doi coeficienții de transmitere pentru fiecare moment ce apare într-un capăt al barei ($a = 1, 3$).

Sistemul de ecuații (5′) devine în acest caz

$$\left.\begin{aligned} \theta_X \Big(\sum_A K\alpha^2 + m'_{XX}\Big) + \theta_Y \Big(\sum_A K\beta\alpha + m'_{XY}\Big) + \mathfrak{M}_{X,P} = 0, \\ \theta_X \Big(\sum_A K\alpha\beta + m'_{YX}\Big) + \theta_Y \Big(\sum_A K\beta^2 + m'_{YY}\Big) + \mathfrak{M}_{Y,P} = 0, \\ \theta_Z \sum_A K\gamma^2 + \mathfrak{M}_{Z,P} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

unde

$$\begin{aligned} m'_{XX} &= m_{AC,3,1} \cdot \alpha_{AC,1} \cdot \alpha_{AC,3} + m_{AC,1,3} \cdot \alpha_{AC,3} \cdot \alpha_{AC,1}, \\ m'_{XY} &= m_{AC,3,1} \cdot \beta_{AC,1} \cdot \alpha_{AC,3} + m_{AC,1,3} \cdot \beta_{AC,3} \cdot \alpha_{AC,1}, \\ m'_{YX} &= m_{AC,3,1} \cdot \alpha_{AC,1} \cdot \beta_{AC,3} + m_{AC,1,3} \cdot \alpha_{AC,3} \cdot \beta_{AC,1}, \\ m'_{YY} &= m_{AC,3,1} \cdot \beta_{AC,1} \cdot \beta_{AC,3} + m_{AC,1,3} \cdot \beta_{AC,3} \cdot \beta_{AC,1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Considerînd teorema reciprocității, relațiile (11) devin

$$\begin{aligned} m'_{XX} &= 2 \cdot m_{AC,3,1} \cdot \alpha_{AC,1} \cdot \alpha_{AC,3}, \\ m'_{XY} &= m'_{YX} = m_{AC,3,1} \ (\alpha_{AC,3} \cdot \beta_{AC,1} + \alpha_{AC,1} \cdot \beta_{AC,3}), \\ m'_{YY} &= 2 \cdot m_{AC,3,1} \cdot \beta_{AC,1} \cdot \beta_{AC,3}, \end{aligned} \tag{12}$$

unde

$m_{AC,3,1}$ reprezintă momentul în capătul A al barei AC după direcția $a = 3$ datorită acțiunii $\theta_{AC,1} = 1$,

$m_{AC,1,3}$ — momentul în capătul A al barei AC după direcția $a = 1$ datorită acțiunii $\theta_{AC,3} = 1$.

Termenii (11) din sistemul de ecuaţii (10) sînt specifici grinzii duble în consolă, considerată ca o singură bară, datorită faptului că în urma acţiunii $\theta_{AC,a} = 1$ ($a = 1, 3$) apar în acelaşi capăt de bară (A) două momente : $K_{AC,a}$ şi $m_{AC,a,a}$ ($a = 1, 3$) şi în mod similar pentru $\theta_{CA,a} = 1$ în capătul de bară C.

Înlocuind termenii $K_{AC,a}$, $m_{AC,a,a}$, $\mathfrak{M}_{AC,a}$ în sistemul (10) şi rezolvîndu-l, se echilibrează nodul A ; utilizînd apoi coeficienţii de transmitere $t_{A,a \to C,a}$ se procedează similar cu nodul C.

Restul calculului se continuă similar cu cazul general, ştiind că $H =$ $=$ II, III, IV, V (fig. 4 *b*).

La sfîrşitul echilibrării, cunoscînd $M_{AC,a}$ şi $M_{CA,a}$, se pot determina uşor eforturile în orice secţiune a consolei duble.

4. EXEMPLU DE CALCUL

4.1. Pentru structura din figura 5 se cere diagrama de momente.

4.1.1. Caracteristicile elastice ale barelor BA şi BC. Momentele de inerţie :

$$I_{BA,1} = I_{BC,1} = 16 \text{ dm}^4 = I_0 ; \; I_{AB,1} = I_{CB,1} = 54 \text{ dm}^4 = I_r ;$$

$$\frac{I_0}{I_r} = 0{,}296.$$

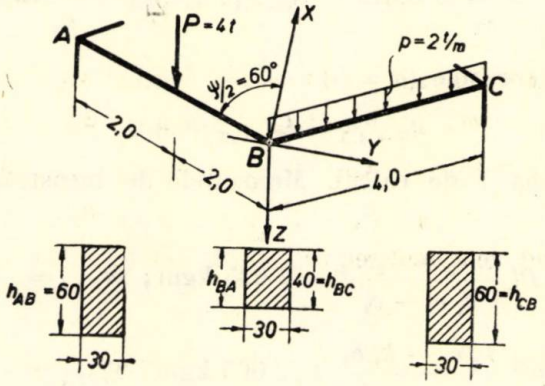


Fig. 5

Coeficienţii de influenţă pentru rigidităţi c şi pentru încărcări k au fost extraşi din [2] ; ei pot fi găsiţi în mod corespunzător în [1], [4], [5] etc.

Rigiditatea practică la încovoiere (axa $a = 1$) este

$$\rho_{BA,1} = \frac{K_{BA,1}}{4E} = \frac{c_1}{(c_1\, c_2 - c_3^2)\, l_{AB}} \frac{I_0}{4} = 544 \text{ cm}^3.$$

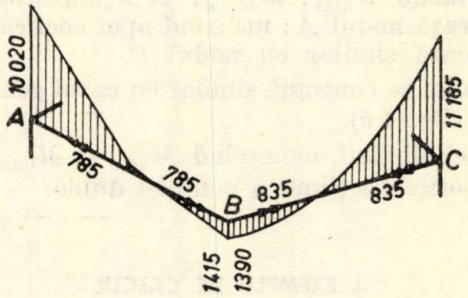


Fig. 6

Rigiditatea practică la torsiune ($a = 3$) se determină din [7]:

$$\rho_{BA,3} = \frac{K_{BA,3}}{4E} = \frac{G}{E} \frac{\beta_{BA} \cdot b^4}{4\, l_{BA}} = 71{,}72 \text{ cm}^3 \cong 72 \text{ cm}^3.$$

Coeficienţii de transmitere pentru momente:
— pentru încovoiere (axa $a = 1$):

$$t_{B \to A,1} = \frac{c_3}{c_1} = 0{,}675 = t_{B \to C,1};\ t_{A \to B,1} = \frac{c_3}{c_2} = 0{,}366;$$

— pentru torsiune ($a = 3$):

$$t_{B \to A,3} = t_{B \to C,3} = +1.$$

4.1.2. Etapa I de calcul. Momentele de încastrare perfectă din încărcări

$$\mathfrak{M}_{AB,1} = Pl \frac{k_1\, c_2 - k_2\, c_3}{c_1\, c_2 - c_3^2} = 2\,625 \text{ kgm};\ \mathfrak{M}_{BA,1} = -1\,375 \text{ kgm},$$

$$\mathfrak{M}_{BC,1} = pl^2 \frac{k_2\, c_1 - k_1\, c_3}{c_1\, c_2 - c_3^2} = 2\,065 \text{ kgm};\ \mathfrak{M}_{CB,1} = -3\,335 \text{ kgm}.$$

Echilibrarea nodului B. Sistemul de ecuaţii se reduce la forma

$$\theta_X^* \sum \rho\alpha^2 + \mathfrak{M}_{X,P} = 0,$$

$$\theta_Y^* \sum \rho\beta^2 + \mathfrak{M}_{Y,P} = 0.$$

4.1.2.1. Echilibrarea se face în tabela următoare :

Bara	$B-A$		$B-C$	
Axa	1	3	1	3
ρ	544	72	544	72
α	−0,866	−0,500	−0,866	−0,500
β	−0,500	+0,866	+0,500	−0,866
$\rho\alpha$	−471	− 36	−471	− 36
$\rho\beta$	−272	+ 62	+272	− 62
$\rho\alpha^2$	408	18	408	18
$\rho\beta^2$	136	54	136	54
$\Sigma\ \rho\alpha^2 = 852$;		$\Sigma\ \rho\beta^2 = 380$		
$\mathfrak{M}$	−1 375	−	+ 2065 v	−
$\mathfrak{M}_{X,P} = -600$; $\mathfrak{M}_{Y,P} = +1\,720$; $\theta^*_{X,P} = 0{,}705$; $\theta^*_{Y,P} = -4{,}525$				
M^r	− 332 + 1 230	− 25 −280	− 332 −1 230	− 25 +280
	+ 898	−305	−1 562	+255
M^*	− 477	−305	+ 503	+255

4.1.2.2. La același rezultat se poate ajunge dacă se operează cu două scheme de echilibrare, oglindite (fig. 7) conform (2.1.1) separat pentru încărcarea P, respectiv $\mathfrak{M}_{BA,1} = -1\,375$ kgm, și apoi pentru încărcarea p, respectiv pentru $\mathfrak{M}_{BC,1} = 2\,065$ kgm, și însumînd apoi rezultatele parțiale obținute.

Coeficienții de repartizare spațială $\overline{m}_{BA,a}$ pentru acțiunea $\mathfrak{M}_{BA\,1} = 1$ calculați cu (2) sînt înscriși în schema de echilibrare din figura 7.

4.1.3. Etapa II de calcul. Momentele de încastrare perfectă din acțiunea $\Delta_Z = 1$ în nodul B :

$$\mathfrak{M}^{\Delta}_{AB,1} = -\mathfrak{M}^{\Delta}_{CB,1} = \frac{c_2 + c_3}{c_1 c_2 - c_3^2}\,\frac{EI_0}{l^2_{AB}} = 24\,650 \text{ kgm},$$

$$\mathfrak{M}^{\Delta}_{BA,1} = 16\,400 \text{ kgm}.$$

4.1.3.1. Echilibrarea nodului B :

Bara	$B-A$		$B-C$	
Axa	1	3	1	3
$\mathfrak{M}^{\Delta}$	+ 16 400	−	−16 400	−
$\mathfrak{M}^{\Delta}_X = 0$; $\mathfrak{M}^{\Delta}_Y = -16\,400$; $\theta^{\Delta}_X = 0$; $\theta^{\Delta}_Y = +43{,}158$.				
M^r	−11 740	+2 675	+11 740	−2 675
M^{Δ}	+ 4 660	+2 675	−4 660	−2 675

4.1.3.2. Coeficientul de corecție al deplasării :

$$C_Z = \left(2\,000 - \frac{3\,230 - 477}{4} + 4\,000 - \frac{4\,390 - 503}{4}\right) \Big/ 2\,\frac{4\,660 + 16\,720}{4} =$$

$$= 0{,}406.$$

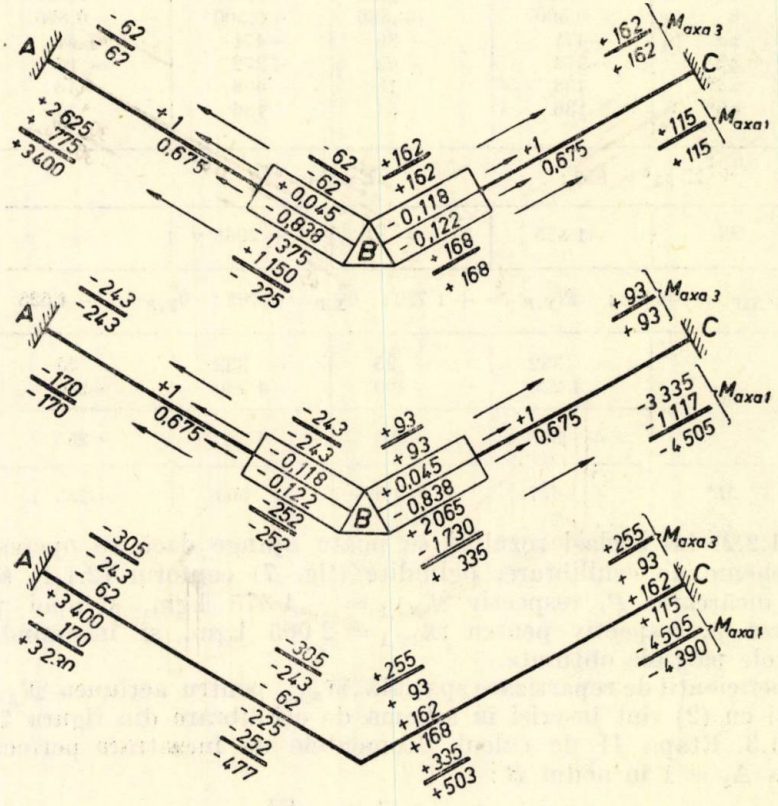


Fig. 7

4.1.4. Momentele finale date în figura 6 sînt obținute cu relația (4).

4.1.5. Verificări finale :

$$(\Sigma M)_X = -1\,415 \cdot 0{,}866 + 1\,390 \cdot 0{,}866 - 785 \cdot 0{,}500 + 835 \cdot 0{,}500 = 0,$$

$$(\Sigma M)_Y = -1\,415 \cdot 0{,}500 - 1\,390 \cdot 0{,}500 + 785 \cdot 0{,}866 + 835 \cdot 0{,}866 = 0,$$

$$(\Sigma R)_Z = 2\,000 - \frac{10\,020 + 1\,415}{4} + 4\,000 - \frac{11\,185 + 1\,390}{4} = 0.$$

4.2. Se consideră aceeași structură drept o singură bară și se cere să se determine rigiditatea la încovoiere în capătul A după direcția $a = 1$, ($\rho_{AC,1}$), precum și coeficienții de transmitere ai momentului $t_{A,1 \to C,a}$. ($a = 1, 3$).

4.2.1. Treapta I de calcul. Se introduce în capătul A al barei frînte AC rotirea $\theta_{AC,1} = -1$ şi se echilibrează momentele conform 3.3. (fig. 8):

$$\rho_{AB,1} = \frac{K_{AB,1}}{4E} = 1\,002.$$

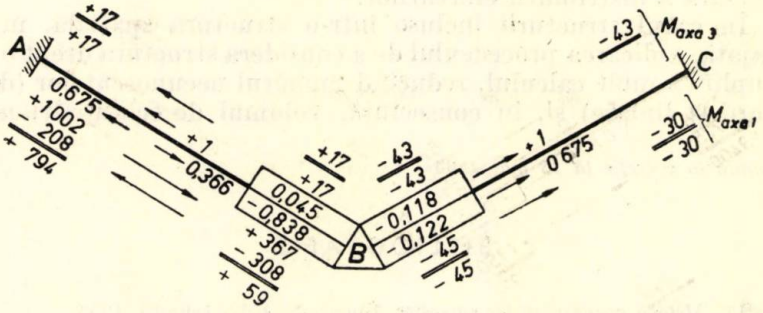


Fig. 8

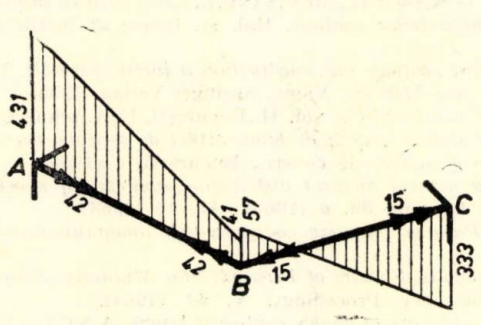


Fig. 9

4.2.2. Treapta II. Coeficientul de corecţie al deplasării după direcţia Z:

$$C_Z = -\frac{794+59+45+30}{4} \Big/ 2\frac{4\,660+16\,720}{4} = -0{,}02170.$$

4.2.3. Rigiditatea ($\rho_{AC,1} = +431$) şi momentele căutate sînt conform (4) şi figurii 9 şi deci coeficienţii de transmitere sînt

$$t_{A,1\to C,1} = \frac{333}{431} = 0{,}773\,;\quad t_{A,1\to C,3} = \frac{15}{431} = 0{,}035.$$

Pentru structura considerată cu nodurile A şi C elastic încastrate (fig. 9), aceşti coeficienţi se folosesc la echilibrarea directă a momentelor ce acţionează asupra nodurilor A şi C ale structurii ABC, considerată ca o singură bară.

5. *Concluzii*

— Expunerea teoretică şi exemplele de calcul prezentate demonstrează avantajele aplicării metodei deplasărilor la rezolvarea structurii studiate.

— În cazul structurii izolate, simetrică faţă de planul OXZ, aplicarea schemelor de echilibrare oglindite simplifică calculul, oferind totodată o imagine clară a distribuirii eforturilor.

— În cazul structurii incluse într-o structură spaţială, în special multietajată, aplicarea procedeului de a considera structura drept o singură bară simplifică mult calculul, reducînd numărul necunoscutelor (deplasări unghiulare şi liniare) şi, în consecinţă, volumul de echilibrări necesare.

Primită la redacţie la 18 mai 1965

BIBLIOGRAFIE

1. AGENT R., *Metoda aproximaţiilor succesive*. Bucureşti, Edit. tehnică, 1955.
2. AVRAM C. N., *Grinzi continue*. Bucureşti, Edit. tehnică, 1959.
3. CĂTUNEANU C., ANASTASESCU D., MUNTEANU I., *Generalizarea metodei repartizării momentelor la calculul cadrelor spaţiale*. Bul. şt. tehnic al Instit. politehnic Timişoara, **17** (1958).
4. CHARON P., *Le calcul pratique des construction a inertie variable*. Paris, Ed. Eyrolles, 1961.
5. GULDAN R., *Die Cross-Methode*, Viena, Springer-Verlag, 1955.
6. MAZILU P., *Statica construcţiilor*, vol. II. Bucureşti, Edit. tehnică, 1959.
7. PETCU V., *Asupra staticii grinzii de beton armat de secţiune variabilă la torsiune*. Revista constr. şi a mater. de constr., Bucureşti, *4* (1958).
8. RAWLINGS B., *The general moment distribution analysis of space frames*. The Structural Engineer London, **38**, *6* (1960); **41**, *12* (1963).
9. СНИТКО Н. К., *Расчет рамных сооружений итерационными методами*. Москва, 1962.
10. STYROPOULOS, *Panayotis, Flexure of Perpendicular Mutually Supported Cantilevers*. Journal A.C.I., February Procedings, **V**, *61* (1964).
11. WOLOSEWICK F. E., *Flexure of double cantilever beams*, A.S.C.E., Proceedings, **V**, *78* (1952).

PROBLEMA TERMOELASTICĂ A ÎNVELITORILOR ŞI PLĂCILOR ABORDATĂ PRIN ELIMINAREA IPOTEZEI LOVE-KIRCHHOFF[1)]

de LIVIU LIBRESCU

Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

539.3

Se stabilesc bazele teoretice pentru rezolvarea problemei termoelastice a învelitorilor şi plăcilor în cadrul unei teorii în care este eliminată ipoteza Love-Kirchhoff. Componentele e_{i3} ($i = 1, 2, 3$) ale tensorului deformaţie şi componentele τ^{i3} ale tensorului tensiune sînt considerate nenule.
Condiţiile la limită pe suprafeţele de mărginire exterioară sînt satisfăcute riguros. Nu se face nici un fel de restricţie în ceea ce priveşte grosimea învelitorii. Cîmpul de temperatură neuniform $T = T(x^\alpha, x^3)$ se presupune a fi dat. Această lucrare reprezintă continuarea lucrării [2].

1. INTRODUCERE

Problema termoelastică a învelitorilor abordată în cadrul ipotezei Love-Kirchhoff a constituit obiectul a numeroase cercetări (vezi de exemplu, [3] — [12]). În cele ce urmează, problema termoelastică a învelitorilor va fi abordată prin eliminarea sus-amintitei ipoteze[2)]. Cu aceasta, contradicţiile pe care această ipoteză le implicau vor fi eliminate. De asemenea nu se face nici o restricţie privind grosimea învelitorii, ceea ce permite abordarea problemei termoelastice a învelitorilor groase.

[1)] Se bazează pe lucrarea [1] susţinută la Simpozionul I.A.S.S., Varşovia, 2—5 septembrie 1963, şi apărută în *Non-Classical Shell Problems*, Amsterdam, Nort-Holland Publishing Company, 1964.

[2)] Problemei termoelastice a învelitorilor anizotrope abordată fără ipoteza Love-Kirchhoff i-au fost dedicate lucrări datorite lui S.A. Ambarţumian şi S. M. Durgarian [13], L. M. Habip şi I. K. Ebcioglu [14] şi L. M. Habip [15]. În ultimele două lucrări se ţine seama şi de neliniarităţile geometrice provenind din considerarea deplasărilor mari.

2. RELAȚII GEOMETRICE

Considerăm o învelitoare de grosime constantă h. Poziția unui punct din mediul tridimensional al învelitorii este dată de

$$\overline{R}(x^i) = \overline{r} + x^3\overline{n}, \tag{1}$$

unde

$$\overline{r} = \overline{r}(x^\alpha) \tag{2}$$

reprezintă ecuația suprafeței sale mediane, x^μ ($\mu = 1,2$)[3] coordonatele gaussiene ale punctelor suprafeței mediane, $\overline{n}$ vectorul unitar al normalei la suprafața mediană, iar $x^3 = z \left(-\frac{1}{2}h \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}h\right)$ distanța punctului respectiv la suprafața mediană. Suprafețele exterioare ale învelitorii sînt definite de $z = \pm \frac{h}{2}$.

Componentele covariante și contravariante ale tensorului metric corespunzînd suprafeței mediane și mediului tridimensional al învelitorii sînt notate prin $a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$ și, respectiv, prin $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$. Ținînd seama de faptul că direcția care corespunde coordonatei $x^3 = z$ este normală la suprafața mediană, avem

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2zb_{\alpha\beta} + z^2c_{\alpha\beta}, \; g_{\alpha 3} = 0, \; g_{33} = 1, \tag{3}$$

unde $b_{\alpha\beta}$ și $c_{\alpha\beta} = b^\lambda_\alpha b_{\lambda\beta}$ reprezintă respectiv cea de-a doua și a treia formă fundamentală a suprafeței mediane.

Componentele $g^{\alpha\beta}$ pot fi exprimate sub forma seriei

$$g^{\alpha\beta} = \overset{(0)}{g}{}^{\alpha\beta} + z\overset{(1)}{g}{}^{\alpha\beta} + z^2\overset{(2)}{g}{}^{\alpha\beta} + \cdots + z^n\overset{(n)}{g}{}^{\alpha\beta} + \cdots, \tag{4}[4]$$

unde

$$\overset{(0)}{g}{}^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}, \; \overset{(1)}{g}{}^{\alpha\beta} = 2b_{\alpha\beta}, \; \overset{(2)}{g}{}^{\alpha\beta} = 3c^{\alpha\beta}, \ldots, \tag{5}$$
$$\overset{(n)}{g}{}^{\alpha\beta} = (n+1)\,(b^n)^{\alpha\beta},$$

iar $(b^n)^{\alpha\beta}$ sînt definite de [16]:

$$(b^0)^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}, \; (b^1)^{\alpha\beta} = b^{\alpha\beta},$$
$$(b^n)^{\alpha\beta} = b^{\lambda\beta}\,(b^{(n-1)})^\alpha_\lambda = b^{\lambda\alpha}\,(b^{(n-1)})^\beta_\lambda. \tag{6}$$

Notînd $g = \det(g_{ij})$ și $a = \det(a_{\alpha\beta})$, avem

$$m = \sqrt{\frac{g}{a}} = \overset{(0)}{m} + z\overset{(1)}{m} + z^2\overset{(2)}{m},$$
$$M = \frac{1}{m} = \overset{(0)}{M} + z\overset{(1)}{M} + z^2\overset{(2)}{M} + \cdots z^n\overset{(n)}{M} + \cdots, \tag{7}$$

[3]) Peste tot în lucrare, indicii greceşti iau valorile 1, 2, iar indicii latini valorile 1, 2, 3.

[4]) Toate dezvoltările în serie de puteri întregi și pozitive ale variabilei $x^3 = z$ se presupun a fi absolut și uniform convergente în intervalul $\left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$.

unde

$$\overset{(0)}{m} = 1, \quad \overset{(1)}{m} = -2H, \quad \overset{(2)}{m} = K \tag{8}$$

şi

$$\overset{(0)}{M} = 1, \quad \overset{(1)}{M} = 2H, \quad \overset{(2)}{M} = 4H^2 - K, \quad \overset{(3)}{M} = 4H(2H^2 - K), \ldots$$

Prin

$$H = \frac{1}{2} a^{\pi\sigma} b_{\pi\sigma}$$

şi

$$K = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2$$

se notează curbura medie, respectiv curbura gaussiană a suprafeţei mediane nedeformate. Derivata parţială a unui scalar vector sau tensor în raport cu coordonata x^j va fi indicată printr-un indice j precedat de o virgulă (de ex. $w_{,j}$). Derivata covariantă în spaţiu (relativă la metrica mediului tridimensional) va fi indicată printr-o dublă linie verticală (de ex. $V_{h\|j}$) şi derivata covariantă de suprafaţă a unui tensor de suprafaţă (sau a unui vector de suprafaţă) printr-un indice grec precedat de o singură linie verticală (de ex. $A_{\rho\lambda\mu}$). Simbolii lui Christtoffel de speţa a doua sînt daţi de următoarele expresii [2]:

$$\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta} = \overset{0}{\Gamma}{}^{\omega}_{\alpha\beta} - z b^{\omega}_{\beta|\alpha} - z^2 b^{\omega}_{\delta} b^{\delta}_{\alpha\beta} + \cdots + z^n [\overset{(n)}{g}{}^{\omega\pi} \xi \overset{0}{\Gamma}{}_{\alpha\beta,\pi} - \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\pi} (b_{\beta\pi|\alpha} + \tag{9}^{5}$$

$$+ 2\overset{0}{\Gamma}{}^{\tau}_{\alpha\beta} b_{\tau\pi}) + \overset{(n-2)}{g}{}^{\omega\pi} (b_{\rho\pi} b^{\rho}_{\alpha|\beta} + \overset{0}{\Gamma}{}^{\rho}_{\alpha\beta} c_{\rho\pi})] + \cdots,$$

$$\Gamma^{3}_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - z c_{\alpha\beta},$$

$$\Gamma^{\omega}_{\mu 3} = -b^{\omega}_{\alpha} - z c^{\omega}_{\alpha} - z^2 b^{\lambda}_{\alpha} c^{\omega}_{\lambda} - \cdots - z^n (\overset{(n)}{g}{}^{\omega\lambda} b_{\alpha\lambda} - \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\lambda} c_{\alpha\lambda}) + \ldots, \tag{10}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{33} = \Gamma^{3}_{\alpha 3} = \Gamma^{3}_{33} = 0.$$

În aceste relaţii, $\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}(x^{\mu}, 0)$ reprezintă simbolii lui Christoffel de speţa a doua, care corespund metricei suprafeţei mediane. Folosind expresiile (9) şi (10), derivatele spaţiale ale unui vector spaţial pot fi exprimate cu ajutorul derivatelor de suprafaţă astfel [2]:

$$V_{\alpha\|\beta} = V_{\alpha|\beta} - V_3 b_{\alpha\beta} + z(V_3 c_{\alpha\beta} + V_{\omega} b^{\omega}_{\alpha|\beta}) + z^2 V_{\omega} b^{\omega}_{\delta} b^{\delta}_{\alpha|\beta} + \cdots$$

$$- z^n V_{\omega} [\overset{(n)}{g}{}^{\omega\pi} \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\alpha\beta,\pi} - \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\pi} (b_{\beta\pi|\alpha} + 2\overset{0}{\Gamma}{}^{\tau}_{\alpha\beta} b_{\tau\pi}) +$$

$$+ \overset{(n-2)}{g}{}^{\omega\pi} (b_{\rho\pi} b^{\rho}_{\alpha|\beta} + \overset{0}{\Gamma}{}^{\rho}_{\alpha\beta} c_{\rho\pi})] + \cdots, \tag{11}$$

$$V_{\alpha\|3} = V_{\alpha,3} + V_{\omega} [b^{\omega}_{\alpha} + z c^{\omega}_{\alpha} + z^2 b^{\gamma}_{\alpha} c^{\omega}_{\gamma} + \cdots + z^n (\overset{(n)}{g}{}^{\omega\lambda} b_{\alpha\lambda} - \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\lambda} c_{\alpha\lambda}) + \cdots],$$

$$V_{3\|\alpha} = V_{3,\alpha} + V_{\omega} [b^{\omega}_{\alpha} + z c^{\omega}_{\alpha} + z^2 b^{\gamma}_{\alpha} c^{\omega}_{\gamma} + \cdots + z^n (\overset{(n)}{g}{}^{\omega\lambda} b_{\alpha\lambda} - \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\lambda} c_{\alpha\lambda}) + \cdots].$$

[5] Mărimile afectate de un număr de ordin $(n-i)$ negativ vor fi considerate egale cu zero.

3. ECUAȚIILE DE ECHILIBRU

În absența forțelor masice, ecuațiile de echilibru pentru un volum elementar decupat din învelitoare sînt date de [2]:

$$L^{\omega\rho}_{(0)|\omega} - b^{\rho}_{\omega} N^{\omega}_{(0)} + s^{\rho}_{(0)} - b^{\rho}_{\alpha} s^{\alpha}_{(1)} = 0,$$

$$N^{\alpha}_{(0)|\alpha} + b_{\rho\alpha} L^{\alpha\rho}_{(0)} + p_{(0)} = 0, \tag{12}$$

$$L^{\omega\rho}_{(1)|\omega} - N^{\rho}_{(0)} + s^{\rho}_{(1)} - \frac{h^2}{4} b^{\rho}_{\alpha} s^{\alpha}_{(0)} = 0, \tag{*}$$

$$N^{\alpha}_{(1)|\alpha} - Q^{3}_{(0)} + b_{\rho\alpha} L^{\alpha\rho}_{(1)} + p_{(1)} = 0, \ldots$$

. . . . . .

$$L^{\omega\rho}_{(n)|\omega} + (n-1) b^{\rho}_{\omega} N^{\omega}_{(n)} - n N^{\rho}_{(n-1)} + s^{\rho}_{(n)} - b^{\rho}_{\alpha} s^{\alpha}_{(n+1)} = 0,$$

$$N^{\alpha}_{(n)|\alpha} - n Q^{3}_{(n-1)} + b_{\rho\alpha} L^{\alpha\rho}_{(n)} + p_{(n)} = 0, \ldots \tag{*}$$

. . . . . .

unde

$$L^{\omega\pi}_{(n)} = \int_{-h/2}^{h/2} m m^{\pi}_{\lambda} \tau^{\omega\lambda} z^{n} \, dz, \; N^{\omega}_{(n)} = \int_{-h/2}^{h/2} m \tau^{\omega 3} z^{n} \, dz, \tag{13}$$

$$Q^{3}_{(n)} = \int_{-h/2}^{h/2} m \tau^{33} z^{n} dz$$

definesc componentele momentelor de ordinul n,

$$m^{\pi}_{\lambda} = \delta^{\pi}_{\lambda} - z b^{\pi}_{\lambda}, \tag{14}$$

iar

$$s^{\rho}_{(n)} = [m z^{n} \tau^{\rho 3}]^{h/2}_{-h/2}, \; p_{(n)} = [m z^{n} \tau^{33}]^{h/2}_{-h/2}. \tag{15}$$

Pentru $n = 2t + 1$ $(t = 0, 1, \ldots)$ avem

$$s^{\rho}_{(2t+1)} = \left(\frac{h}{2}\right)^{2t} s^{\rho}_{(1)}, \; p_{(2t+1)} = \left(\frac{h}{2}\right)^{2t} p_{(1)},$$

iar pentru $n = 2t$ $(t = 0, 1, \ldots)$

$$s^{\rho}_{(2t)} = \left(\frac{h}{2}\right)^{2t} s^{\rho}_{(0)}, \; p_{(2t)} = \left(\frac{h}{2}\right)^{2t} p_{(0)}. \tag{16}$$

Relațiile (15), (16) dau legătura dintre condițiile la limită pe suprafețele de mărginire exterioare și forțele exterioare reduse la suprafața mediană a învelitorii.

4. ECUAȚIILE FIZICE

Legea lui Hooke-Duhamel-Neumann, scrisă pentru un mediu omogen și izotrop (elastic și termic), este dată de

$$\tau^{ij} = E^{ijlr} e_{er} + g^{ij} \beta T \tag{17}$$

sau, reciproc,

$$e_{ij} = F_{ijlm} \tau^{lm} + g_{ij} \alpha T,$$

unde $T(x^\alpha, x^3)$ reprezintă excesul de temperatură în raport cu temperatura de referință T_r, iar α este coeficientul de dilatare liniară (care se consideră independent de temperatură),

$$\beta = -\frac{E\alpha}{1-2\nu}. \tag{18}$$

F_{rslm} și E^{ijlr} — componentele tensorilor modulilor de elasticitate determinate în cazul deformațiilor izoterme ($T = 0$). În cazul corpului omogen și izotrop,

$$E^{ijlr}{}_{|lt} = 0, \qquad F_{rsmn|t} = 0, \tag{19}$$

unde

$$\begin{aligned} E^{ijlr} &= \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}(g^{il}g^{jr} + g^{ir}g^{jl}) + \frac{\nu}{1-2\nu} g^{ij} g^{lr}\right], \\ F_{rslm} &= \frac{1+\nu}{E}\left[\frac{1}{2}(g_{rl}g_{sm} + g_{rm}g_{ls}) - \frac{\nu}{1+\nu} g_{rs}g_{lm}\right], \end{aligned} \tag{20}$$

E și ν fiind modulul lui Young, respectiv constanta lui Poisson.

Ecuațiile tensiuni-deformații-temperatură (17) sub forma dezvoltată se scriu :

$$\begin{aligned} \tau^{\omega\pi} &= E^{\omega\pi\sigma\rho} e_{\sigma\rho} + E^{\omega\pi 33} e_{33} + g^{\omega\pi} \beta T, \\ \tau^{\omega 3} &= 2E^{\omega 3\lambda 3} e_{\lambda 3} \end{aligned} \tag{21}$$

și reciproc

$$\begin{aligned} e_{\lambda 3} &= 2F_{\lambda 3\omega 3} \tau^{\omega 3} \\ \tau^{33} &= E^{33\sigma\rho} e_{\sigma\rho} + E^{3333} e_{33} + \beta T. \end{aligned}$$

Introducînd în ecuația $(21)_1$ expresia lui e_{33} dedusă din relația $(21)_4$

$$e_{33} = \frac{1}{E^{3333}}(\tau^{33} - E^{33\sigma\rho} e_{\sigma\rho} - \beta T), \tag{22}$$

se obține pentru $\tau^{\omega\pi}$ expresia

$$\begin{aligned} \tau^{\omega\pi} &= \left(E^{\omega\pi\sigma\rho} - \frac{E^{\omega\pi 33} E^{\sigma\rho 33}}{E^{3333}}\right) e_{\sigma\rho} + \\ &+ \frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}} \tau^{33} - \left(\frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}} - g^{\omega\pi}\right) \beta T. \end{aligned} \tag{23}$$

În cele ce urmează, componentele $m\tau^{i3}$ vor fi reprezentate printr-o dezvoltare pe grosime sub forma [2]

$$m\tau^{\rho 3} = \frac{s^{\rho}_{(1)}}{h} + s^{\rho}_{(0)}\frac{z}{h} + \overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \overset{(3)}{\varphi}{}^{\rho}z\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \\ + \overset{(2n)}{\varphi}{}^{\rho}\left(z^{2n} - \frac{h^{2n}}{2^n}\right) + \overset{(2n+1)}{\varphi}{}^{\rho}z\left(z^{2n} - \frac{h^{2n}}{h^{2n}}\right) + \cdots \tag{24}$$

$$m\tau^{33} = \frac{p_{(1)}}{h} + p_{(0)}\frac{z}{h} + \overset{(2)}{\psi}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \overset{(3)}{\psi}z\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \\ + \cdots \overset{(2n)}{\psi}\left(z^{2n} - \frac{h^{2n}}{2^{2n}}\right) + \overset{(2n+1)}{\psi}z\left(z^{2n} - \frac{h^{2n}}{2^{2n}}\right) + \cdots$$

Se observă ușor că aceste expresii satisfac identic condițiile la limită pe suprafețele $z = \pm\frac{h}{2}$ ale învelitorii, date prin relațiile (15). Funcțiile $\overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}(x^{\mu})$, $\overset{(2)}{\psi}(x^{\mu})$, ..., $\overset{(n)}{\varphi}{}^{\rho}(x^{\mu})$, $\overset{(n)}{\psi}(x^{\mu})$, ... care intervin în relațiile (24) sînt funcții necunoscute. Ținînd seama de relațiile (20), (4), componentele tensorilor E^{ijlr} și F_{ijmn} pot fi reprezentate prin dezvoltările date de

$$\begin{aligned} E^{\omega\pi\lambda\rho} &= \overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} + z\overset{(1)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} + z^2\overset{(2)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} + \cdots + z^n\overset{(n)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} + \cdots, \\ E^{33\omega\pi} &= \overset{(0)}{E}{}^{33\omega\pi} + z\overset{(1)}{E}{}^{33\omega\pi} + z^2\overset{(2)}{E}{}^{33\omega\pi} + \cdots + z^n\overset{(n)}{E}{}^{33\omega\pi} + \cdots, \\ E^{3333} &= \overset{(0)}{E}{}^{3333}, \\ F_{\omega 3\lambda 3} &= \overset{(0)}{F}_{\omega 3\lambda 3} + z\overset{(1)}{F}_{\omega 3\lambda 3} + z^2\overset{(2)}{F}_{\omega 3\lambda 3}, \end{aligned} \tag{25}$$

unde

$$\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}a^{\omega\pi}a^{\lambda\rho} + \frac{1}{2}(a^{\omega\lambda}a^{\pi\rho} + a^{\omega\rho}a^{\pi\lambda})\right],$$

$$\overset{(1)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} = \frac{2E}{1+\nu}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}(b^{\omega\pi}a^{\lambda\rho} + a^{\omega\pi}b^{\lambda\rho}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(a^{\omega\lambda}b^{\pi\rho} + b^{\omega\lambda}a^{\pi\rho} + a^{\omega\rho}b^{\pi\lambda} + b^{\omega\rho}a^{\pi\lambda})\right], \tag{26}$$

$$\overset{(2)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}(3c^{\omega\pi}a^{\lambda\rho} + 3a^{\omega\pi}c^{\lambda\rho} + 4b^{\omega\pi}b^{\lambda\rho}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(3c^{\omega\lambda}c^{\pi\rho} + 3c^{\omega\lambda}a^{\pi\rho} + 8b^{\omega\lambda}b^{\pi\rho} + 3a^{\omega\rho}c^{\pi\lambda} + 3c^{\omega\rho}a^{\pi\lambda})\right], \ldots$$

$$\overset{(n)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}(\overset{(0)}{g}{}^{\omega\pi}\overset{(n)}{g}{}^{\lambda\rho} + \overset{(1)}{g}{}^{\omega\pi}\overset{(n-1)}{g}{}^{\lambda\rho} + \cdots + \right.$$

$$+ \overset{(n)}{g}{}^{\omega\pi}\overset{(0)}{g}{}^{\lambda\rho}) + \frac{1}{2}(\overset{(0)}{g}{}^{\omega\lambda}\overset{(n)}{g}{}^{\pi\rho} + \overset{(1)}{g}{}^{\omega\lambda}\overset{(n-1)}{g}{}^{\pi\rho} + \cdots + \overset{(n)}{g}{}^{\omega\lambda}\overset{(0)}{g}{}^{\pi\rho} +$$

$$\left. + \overset{(0)}{g}{}^{\omega\rho}\overset{(n)}{g}{}^{\pi\lambda} + \overset{(1)}{g}{}^{\omega\rho}\overset{(n-1)}{g}{}^{\pi\lambda} + \cdots + \overset{(n)}{g}{}^{\omega\rho}\overset{(0)}{g}{}^{\pi\lambda})\right],$$

$$\overset{(0)}{E}{}^{33\lambda\rho} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}a^{\lambda\rho},\ \overset{(1)}{E}{}^{33\lambda\rho} = \frac{2E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}b^{\lambda\rho}, \tag{26}$$

$$\overset{(3)}{E}{}^{33\lambda\rho} = \frac{3E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}c^{\lambda\rho},\ \ldots\ \overset{(n)}{E}{}^{33\lambda\rho} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\overset{(n)}{g}{}^{\lambda\rho},$$

$$\overset{(1)}{F}_{\omega 3\lambda 3} = \frac{1+\nu}{2E}a_{\omega\lambda},\ \overset{(1)}{F}_{\omega 3\lambda 3} = -\frac{1+\nu}{E}b_{\omega\lambda},$$

$$\overset{(2)}{F}_{\omega 3\lambda 3} = \frac{1+\nu}{2E}c_{\omega\lambda},\ \ldots\ \overset{(n)}{F}_{\omega 3\lambda 3} = 0 \qquad (n \geqslant 3).$$

Este de notat că dezvoltările (25) şi (26) pot rezulta folosind relaţiile generale care exprimă componentele spaţiale prin componentele de suprafaţă ale unui tensor. Aceste relaţii sînt date de [16]

$$E^{\omega\beta\gamma\delta} = (m^{-1})^{\alpha}_{\nu}(m^{-1})^{\beta}_{\rho}(m^{-1})^{\gamma}_{\omega}(m^{-1})^{\delta}_{\eta}\overset{(0)}{E}{}^{\nu\rho\omega\eta},$$

$$E^{\alpha\beta 33} = (m^{-1})^{\alpha}_{\nu}(m^{-1})^{\beta}_{\rho}\overset{(0)}{E}{}^{\nu\rho 33} \tag{27}$$

$$F_{\alpha 3\omega 3} = m^{\nu}_{\alpha}m^{\gamma}_{\omega}\overset{(0)}{F}_{\nu 3\gamma 3},$$

unde

$$(m^{-1})^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} + zb^{\alpha}_{\beta} + z^2c^{\alpha}_{\beta} + \cdots + z^n(b^n)^{\alpha}_{\beta} + \cdots \tag{28}$$

reprezintă inversul lui m^{α}_{β}.

5. EXPRESIA COMPONENTELOR TENSORULUI DEFORMAŢIE

Notînd prin V_i componentele covariante ale vectorului deplasare a punctelor mediului tridimensional al învelitorii, avem în cazul micilor deplasări următoarea relaţie între componentele tensorului deformaţie şi componentele vectorului deplasare :

$$e_{ik} = \frac{1}{2}(V_{i||k} + V_{k||i}) \tag{29}$$

sau, sub formă dezvoltată,

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(V_{\alpha||\beta} + V_{\beta||\alpha}),$$

$$e_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(V_{\alpha||3} + V_{3||\alpha}), \tag{30}$$

$$e_{33} = V_{3||3} = V_{3,3}.$$

Ţinînd seama de relaţiile dintre derivatele spaţiale şi cele de suprafaţă $(11)_2$ şi $(11)_3$, precum şi de ecuaţiile fizice $(21)_3$ şi (22), din ecuaţiile $(30)_2$ şi $(30)_3$ se deduc respectiv ecuaţiile

$$V_{\alpha,3} = 4F_{\alpha 3\lambda 3}\tau^{\lambda 3} - V_{3,\alpha} - 2V_\omega[b^\omega_\alpha + zc^\omega_\alpha + \\ + z^2 b^\gamma_\alpha c^\omega_\gamma + \cdots + z^n(\overset{(n)}{g}{}^{\omega\lambda} b_{\alpha\lambda} - \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\lambda} c_{\alpha\lambda}) + \cdots], \tag{31}$$

$$V_{3,3} = \frac{1}{E^{3333}}(\tau^{33} - E^{33\sigma\rho}e_{\sigma\rho} - \beta T),$$

pe baza cărora vor fi determinate componentele $V_i(x^\alpha, x^3)$ ale vectorului deplasare. Considerînd componentele vectorului $V_i(x^\alpha, x^3)$ şi temperatura $T(x^\alpha, x^3)$ dezvoltate în serie de puteri întregi şi pozitive ale variabilei $x^3 = z$

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{(n)}{V}_i z^n, \qquad T = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{(n)}{T} z^n \tag{32}$$

unde

$$\overset{(n)}{V}_i = \overset{(n)}{V}_i(x^\alpha), \quad \overset{(n)}{T} = \overset{(n)}{T}(x^\alpha),$$

din ecuaţiile (31) se deduce

$$\overset{(1)}{V}_\alpha = 4\overset{(0)}{F}_{\alpha 3\rho 3}\overset{(0)}{M}(m\overset{(0)}{\tau}{}^{\rho 3}) - \overset{(0)}{V}_{3,\alpha} - 2\overset{(0)}{V}_\omega b^\omega_\alpha,$$

$$2\overset{(2)}{V}_\alpha = 4(\overset{(0)}{F}_{\alpha 3\rho 3}\overset{(1)}{M} + \overset{(1)}{F}_{\alpha 3\rho 3}\overset{(0)}{M})(m\overset{(0)}{\tau}{}^{\rho 3}) + 4\overset{(0)}{F}_{\alpha 3\rho 3}\overset{(0)}{M}(m\overset{(1)}{\tau}{}^{\rho 3}) - \\ - \overset{(1)}{V}_{3,\alpha} - 2\overset{(1)}{V}_\omega b^\omega_\alpha - 2\overset{(0)}{V}_\omega c^\omega_\alpha, \ldots$$

$$n\overset{(n)}{V}_\alpha = 4(\overset{(n-1)}{F}_{\alpha 3\rho 3}\overset{(0)}{M} + \overset{(n-2)}{F}_{\alpha 3\rho 3}\overset{(1)}{M} + \cdots + \overset{(0)}{F}_{\alpha 3\rho 3}\overset{(n-1)}{M})(m\overset{(0)}{\tau}{}^{\rho 3}) + \\ + 4(\overset{(n-2)}{F}_{\alpha 3\rho 3}\overset{(0)}{M} + \overset{(n-3)}{F}_{\alpha 3\rho 3}\overset{(1)}{M} + \cdots + \overset{(0)}{F}_{\alpha 3\rho 3}\overset{(n-2)}{M})(m\overset{(1)}{\tau}{}^{\rho 3}) + \cdots \\ + 4\overset{(0)}{F}_{\alpha 3\rho 3}\overset{(0)}{M}(m\overset{(n-1)}{\tau}{}^{\rho 3}) - \overset{(n-1)}{V}_{3,\alpha} - 2\overset{(0)}{V}_\omega(\overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\lambda} b_{\alpha\lambda} - \\ - \overset{(n-2)}{g}{}^{\omega\lambda} c_{\alpha\lambda}) - 2\overset{(1)}{V}_\omega(\overset{(n-2)}{g}{}^{\omega\lambda} b_{\alpha\lambda} - \overset{(n-3)}{g}{}^{\omega\lambda} c_{\alpha\lambda}) - \cdots - 2\overset{(n-1)}{V}_\omega b^\omega_\alpha, \tag{33}$$

$$\overset{(1)}{V}_3 = \frac{1}{E^{3333}}\left[\overset{(0)}{M}(m\overset{(0)}{\tau}{}^{33}) - \overset{(0)}{E}{}^{33\alpha\beta}\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} - \beta\overset{(0)}{T}\right], \ldots$$

$$\begin{aligned} {}^{(n)}V_3 = \frac{1}{E^{3333}}\Big[&\overset{(n-1)}{M}(m\overset{(0)}{\tau}{}^{33}) + \overset{(n-2)}{M}(m\overset{(1)}{\tau}{}^{33}) + \cdots \overset{(0)}{M}(m\overset{(n-1)}{\tau}{}^{33}) - \\ &- \overset{(0)}{E}{}^{33\alpha\beta}\overset{(n-1)}{e}_{\alpha\beta} - \overset{(1)}{E}{}^{33\alpha\beta}\overset{(n-2)}{e}_{\alpha\beta} - \overset{(2)}{E}{}^{33\alpha\beta}\overset{(n-3)}{e}_{\alpha\beta} - \cdots \\ &- \overset{(n-1)}{E}{}^{33\alpha\beta}\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} - \beta\overset{(n-1)}{T}\Big], \ldots, \end{aligned} \tag{33}$$

unde $\overset{(i)}{e}_{\alpha\beta}$ reprezintă componentele dezvoltării după z a lui $e_{\alpha\beta}$,

$$e_{\alpha\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \overset{(n)}{e}_{\alpha\beta}. \tag{34}$$

Folosind relaţiile (29) şi $(11)_1$, obţinem pentru $\overset{(i)}{e}_{\alpha\beta}$ următoarele expresii:

$$\begin{aligned} \overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\overset{(0)}{V}_{\alpha|\beta} + \overset{(0)}{V}_{\beta|\alpha} - 2b_{\alpha\beta}\overset{(0)}{V}_3), \\ \overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\overset{(1)}{V}_{\alpha|\beta} + \overset{(1)}{V}_{\beta|\alpha} - 2\overset{(1)}{V}_3 b_{\alpha\beta} + 2\overset{(0)}{V}_3 c_{\alpha\beta} + 2\overset{(0)}{V}_\omega b^\omega_{\alpha|\beta}), \\ \overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\overset{(2)}{V}_{\alpha|\beta} + \overset{(2)}{V}_{\beta|\alpha} - 2\overset{(2)}{V}_3 b_{\alpha\beta} + 2\overset{(1)}{V}_3 c_{\alpha\beta} + 2\overset{(1)}{V}_\omega b^\omega_{\alpha|\beta} + \\ &\quad + 2\overset{(0)}{V}_\omega b^\omega_\delta b^\delta_{\alpha|\beta}), \ldots \\ \overset{(n)}{e}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\Big\{\overset{(n)}{V}_{\alpha|\beta} + \overset{(n)}{V}_{\beta|\alpha} - 2\overset{(n)}{V}_3 b_{\alpha\beta} + 2\overset{(n-1)}{V}_3 c_{\alpha\beta} + \\ &\quad + 2\overset{(n-1)}{V}_\omega b^\omega_{\alpha|\beta} + 2\overset{(n-2)}{V}_\omega b^\omega_\delta b^\delta_{\alpha|\beta} + \cdots - 2\overset{(1)}{V}_\omega [\overset{(n-1}{g}{}^{\omega\pi}\overset{0}{\Gamma}_{\alpha\beta,\pi} - \\ &\quad - \overset{(n-2)}{g}{}^{\omega\pi}(b_{\pi\beta|\alpha} + 2\overset{0}{\Gamma}{}^\tau_{\alpha\beta} b_{\tau\pi}) + \overset{(n-3)}{g}{}^{\omega\pi}(b_{\rho\pi} b^\rho_{\alpha|\beta} + c_{\rho\pi}\overset{0}{\Gamma}{}^\rho_{\alpha\beta})] - \\ &\quad - 2\overset{(0)}{V}_\omega [\overset{(n)}{g}{}^{\omega\pi}\overset{0}{\Gamma}_{\alpha\beta,\pi} - \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\pi}(b_{\beta\pi|\alpha} + 2\overset{0}{\Gamma}{}^\tau_{\alpha\beta} b_{\tau\pi}) + \\ &\quad + \overset{(n-2)}{g}{}^{\omega\pi}(b_{\rho\pi} b^\rho_{\alpha|\beta} + \overset{0}{\Gamma}{}^\rho_{\alpha\beta} c_{\rho\pi})]\Big\}, \ldots \end{aligned} \tag{35}$$

Ţinînd seama de (32), (34) în ecuaţiile fizice (23), acestea se transcriu sub forma

$$\begin{aligned} \tau^{\omega\pi} &= \overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(0)}{e} + z(\overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} + \overset{(1)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta}) + \\ &\quad + \cdots + z^n(\overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(n)}{e}_{\alpha\beta} + \overset{(1)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(n-1)}{e}_{\alpha\beta} + \cdots + \overset{(n)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta}) + \end{aligned} \tag{36}$$

$$+\frac{1}{E^{3333}}\Big\{\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(0)}{M}(m\overset{(0)}{\tau}{}^{33})+z\,[\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(1)}{M}(m\overset{(0)}{\tau}{}^{33})+$$

$$+\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(0)}{M}(m\overset{(1)}{\tau}{}^{33})+\overset{(1)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(0)}{M}(m\overset{(0)}{\tau}{}^{33})+\cdots$$

$$+z^{n}<\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}[\overset{(n)}{M}(m\overset{(0)}{\tau}{}^{33})+\overset{(n-1)}{M}(m\overset{(1)}{\tau}{}^{33})+\cdots$$

$$+\overset{(0)}{M}(m\overset{(n)}{\tau}{}^{33})]+\overset{(1)}{E}{}^{\omega\pi 33}\,[\overset{(n-1)}{M}(m\overset{(0)}{\tau}{}^{33})+\overset{(n-2)}{M}(m\overset{(1)}{\tau}{}^{33})+\cdots \tag{36}$$

$$+\overset{(0)}{M}(m\overset{(n-1)}{\tau}{}^{33})]+\cdots+\overset{(n)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(0)}{M}(m\overset{(0)}{\tau}{}^{33})>+$$

$$+\left(\overset{(0)}{g}{}^{\omega\pi}-\frac{\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\right)\overset{(0)}{\beta T}+z\left[\left(\overset{(1)}{g}{}^{\omega\pi}-\frac{\overset{(1)}{E}{}^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\right)\overset{(0)}{\beta T}+\right.$$

$$\left.+\left(\overset{(0)}{g}{}^{\omega\pi}-\frac{\overset{(1)}{E}{}^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\right)\overset{(1)}{\beta T}\right]+\cdots$$

$$+z^{n}\left[\left(\overset{(n)}{g}{}^{\omega\pi}-\frac{\overset{(n)}{E}{}^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\right)\overset{(0)}{\beta T}+\cdots+\left(\overset{(0)}{g}{}^{\omega\pi}-\frac{\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\right)\overset{(n)}{\beta T}\right]+\cdots,$$

unde

$$\widetilde{\overset{(0)}{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}=\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi\alpha\beta}-\frac{\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(0)}{E}{}^{33\alpha\beta}}{E^{3333}}, \tag{37}$$

$$\widetilde{\overset{(1)}{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}=\overset{(1)}{E}{}^{\omega\pi\alpha\beta}-\frac{\overset{(1)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(0)}{E}{}^{33\alpha\beta}+\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(1)}{E}{}^{33\alpha\beta}}{E^{3333}},\ \ldots$$

$$\widetilde{\overset{(n)}{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}=\overset{(n)}{E}{}^{\omega\pi\alpha\beta}-\frac{\overset{(n)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(0)}{E}{}^{33\alpha\beta}+\overset{(n-1)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(1)}{E}{}^{33\alpha\beta}+\cdots+\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(n)}{E}{}^{33\alpha\beta}}{E^{3333}}.$$

Relaţiile (36), (24) şi (13) permit să se exprime momentele de ordin n prin intermediul funcţiilor $\overset{(0)}{V}_{\alpha}$, $\overset{(0)}{V}_{3}$, $\overset{(2)}{\varphi}{}^{\alpha}$, $\overset{(2)}{\psi}$, ..., $\overset{(n)}{\varphi}{}^{\alpha}$, $\overset{(n)}{\psi}$, ... În cazul aproximaţiei de ordin N a dezvoltărilor (24) ($N=2,3,\ldots$), înlocuind expresia momentelor de ordin n ($n=0,1,\ldots,(N-1)$ în ecuaţiile de echilibru (12), se obţine un sistem de $3N$ ecuaţii cu derivate parţiale pentru cele $3N$ necunoscute ale problemei $\overset{(0)}{V}_{\alpha}$, $\overset{(0)}{V}_{3}$, $\overset{(2)}{\varphi}{}^{\alpha}$, $\overset{(2)}{\psi}$, ..., $\overset{(N)}{\varphi}{}^{\alpha}$, $\overset{N}{\psi}$.

În membrul drept al acestor ecuaţii, pe lîngă componentele sarcinii exterioare intervin şi anumite funcţii de temperatură, care prin analogie cu primele pot fi numite „sarcini termice".

6. POSIBILITĂȚI DE REDUCERE A NUMĂRULUI DE NECUNOSCUTE

În anumite cazuri particulare, numărul necunoscutelor și, respectiv, al ecuațiilor poate fi redus, exprimînd funcțiile $\overset{(2)}{\psi}, \ldots, \overset{(n+1)}{\psi}, \ldots$ cu ajutorul celorlalte funcții $\overset{(0)}{V}_\alpha, \overset{(0)}{V}_3, \overset{(2)}{\varphi}{}^\alpha, \ldots, \overset{(n)}{\varphi}{}^\alpha$. Sistemul de ecuații care permite obținerea lui $\overset{(2)}{\psi}, \ldots, \overset{(n+1)}{\psi}$ prin celelalte necunoscute menționate mai sus a fost dedus în [2] și este dat de

$$
\begin{aligned}
2\overset{(2)}{\psi} &= -(m\overset{(1)}{\tau}{}^{\alpha 3})_{|\alpha} - (m\overset{(1)}{\tau}{}^{\alpha\varphi})\, b_{\alpha\varphi} + (m\overset{(0)}{\tau}{}^{\alpha\varphi})\, c_{\alpha\varphi}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
2n\overset{(2n)}{\psi} &= -(m\overset{(2n-1)}{\tau}{}^{\alpha 3})_{|\alpha} - (m\overset{(2n-1)}{\tau}{}^{\alpha\varphi})\, b_{\alpha\varphi} + (m\overset{(2n-2)}{\tau}{}^{\alpha\varphi})\, c_{\alpha\varphi}, \qquad (38) \\
(2n+1)\overset{(2n+1)}{\psi} &= -(m\overset{(2n)}{\tau}{}^{\alpha 3})_{|\alpha} - (m\overset{(2n)}{\tau}{}^{\alpha\varphi})\, b_{\alpha\varphi} + (m\overset{(2n-1)}{\tau}{}^{\alpha\varphi})\, c_{\alpha\varphi}, \ldots
\end{aligned}
$$

În cazul plăcii plane (sau în cazul introducerii unor ipoteze suplimentare), acest sistem de ecuații cu derivate parțiale devine un sistem de ecuații algebric. În acest caz, considerînd aproximația de ordinul N a dezvoltărilor (24), ($N = 2, 3, \ldots$), pe baza sistemului de ecuații (38), funcțiile $\overset{(2)}{\psi}(x^\alpha), \ldots, \overset{(N+1)}{\psi}(x^\alpha)$ pot fi determinate prin intermediul funcțiilor $\overset{(0)}{V}_\delta, \overset{(0)}{V}_3$, $\overset{(2)}{\varphi}{}^\rho(x^\alpha), \ldots, \overset{(N)}{\varphi}{}^\rho(x^\alpha)$, care constituie necunoscutele de bază ale problemei. Tot în acest caz, datorită modului prin care s-a determinat sistemul de ecuații (38) (vezi lucrarea [2]), ecuațiile de echilibru (12), indicate cu un asterisc sînt identic satisfăcute. În acest caz numărul ecuațiilor $(2N + 1)$ este în acord cu cele $(2N + 1)$ necunoscute indicate mai sus.

Este de notat că toate dezvoltările anterioare au fost făcute neaducîndu-se nici o restricție în ceea ce privește grosimea învelitorii, ceea ce dă posibilitatea rezolvării problemei termoelastice a învelitorilor și plăcilor groase.

7. CAZUL PLĂCII PLANE DE GROSIME MEDIE

Dezvoltările anterioare vor fi ilustrate pentru cazul plăcii plane de grosime medie. Abordarea cazului plăcii plane conduce la anumite simplificări[6]). Pe de altă parte, abordarea cazului plăcii de grosime medie dă posibilitatea considerării aproximației de ordinul trei a dezvoltării (24), precum și a considerării variației liniare a cîmpului termic pe grosimea plăcii. Avem astfel :

$$
\tau^{\rho 3} = \frac{\overset{(1)}{s}{}^\rho}{h} + \overset{(0)}{s}{}^\rho \frac{z}{h} + \overset{2}{\varphi}{}^\rho \left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \overset{(3)}{\varphi}{}^\rho z \left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)
$$

[6]) Cînd suprafața mediană dată de ecuația (2) este un plan, avem $b_{\alpha\beta} = 0$, $F_{ijkl} = \overset{(0)}{F}_{ijkl}$, $E^{ijmn} = \overset{(0)}{E}{}^{ijmn}$.

şi

$$T(x^\alpha, x^3) = \overset{(0)}{T}(x^\alpha) + z\overset{(1)}{T}(x^\alpha), \tag{39}$$

unde

$$\overset{(0)}{T} = \frac{1}{2}\left[(T)_{z=\frac{h}{2}} + (T)_{z=-\frac{h}{2}}\right], \quad \overset{(0)}{T} = \frac{1}{h}\left[(T)_{z=\frac{h}{2}} - (T)_{z=-\frac{h}{2}}\right],$$

$(T)_{z=\pm\frac{h}{2}}$ fiind temperaturile date pe planele de mărginire a plăcii.

Din sistemul (38), ţinînd seama de (39), se obţin pentru τ^{33}

$$\tau^{33} = \overset{(0)}{\tau}{}^{33} + z\overset{(1)}{\tau}{}^{33} + z^2\overset{(2)}{\tau}{}^{33} + z^3\overset{(3)}{\tau}{}^{33} + z^4\overset{(4)}{\tau}{}^{33}, \tag{40}$$

unde

$$\begin{aligned}
\overset{(0)}{\tau}{}^{33} &= \frac{s^\rho_{(1)}}{h} + \frac{h}{8}s^\rho_{(0)|\rho} - \frac{h^4}{64}\overset{(3)}{\varphi}{}^\rho_{|\rho}, \\
\overset{(1)}{\tau}{}^{33} &= \frac{p_{(0)}}{h} + \frac{h^2}{12}\overset{(2)}{\varphi}{}^\rho_{|\rho}, \\
\overset{(2)}{\tau}{}^{33} &= -\frac{1}{2h}s^\rho_{(0)|\rho} + \frac{h^2}{8}\overset{(3)}{\varphi}{}^\rho_{|\rho}, \\
\overset{(3)}{\tau}{}^{33} &= -\frac{1}{3}\overset{(2)}{\varphi}{}^\rho_{|\rho}, \quad \overset{(4)}{\tau}{}^{33} = -\frac{1}{4}\overset{(3)}{\varphi}{}^\rho_{|\rho}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Vom face următoarea observaţie relativ la expresiile (41). Pentru aceasta vom porni de la ecuaţia de echilibru punctuală

$$\tau^{3\alpha}{}_{|\alpha} + \tau^{33}{}_{,3} = 0. \tag{42}$$

Integrînd această ecuaţie în raport cu z pe segmentul $[0, z]$ şi punînd în mod corespunzător condiţiile pe planele de mărginire ale plăcii, se obţine pentru τ^{33} o expresie identică cu cea dată prin relaţia (40), deşi expresia lui $\overset{(1)}{\tau}{}^{33}$ ce se obţine în acest ultim caz, dată de

$$\overset{(1)}{\tau}{}^{33} = -\frac{s^\rho_{(1)|\rho}}{h} + \frac{h^2}{4}\overset{(2)}{\varphi}{}^\rho_{|\rho},$$

diferă de cea dată prin (41). Se poate vedea imediat că diferenţa $D = p_{(0)} + s^\rho_{(1)|\rho} - \frac{1}{6}h^3\overset{(2)}{\varphi}{}^\rho_{|\rho}$ dintre cele două expresii ale lui $\overset{(1)}{\tau}{}^{33}$ este identic nulă în virtutea ecuaţiei de echilibru $N^\alpha_{(0)|\alpha} + p_{(0)} = 0$ şi a relaţiei (39).

Pornind de la relaţiile (33), (35), obţinem următoarele expresii pentru componentele vectorului deplasare şi ale tensorului deformaţie :

$$\overset{(1)}{V}_\alpha = \frac{4}{h}s^\rho_{(1)}F_{\alpha 3\rho 3} - h^2F_{\alpha 3\rho 3}\overset{(2)}{\varphi}{}^\rho - \overset{(0)}{V}_{3,\alpha},$$

$$\overset{(2)}{V}_{\alpha} = 2\frac{s^{\rho}_{(0)}}{h} F_{\alpha 3\rho 3} - \frac{h^2}{2}\overset{(3)}{\varphi^{\rho}} F_{\alpha 3\rho 3} - \frac{1}{2}\overset{(1)}{V}_{3,\alpha},$$

$$\overset{(3)}{V}_{\alpha} = \frac{1}{3}[4F_{\alpha 3\rho 3}\overset{(2)}{\varphi^{\rho}} - \overset{(2)}{V}_{3,\alpha}], \quad \overset{(4)}{V}_{\alpha} = \overset{(3)}{\varphi^{\rho}} F_{\alpha 3\rho 3} - \frac{1}{4}\overset{(3)}{V}_{3,\alpha},$$

$$\overset{(1)}{V}_{3} = \frac{1}{E^{3333}}(\overset{(0)}{\tau^{33}} - E^{33\alpha\beta}\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} - \beta\overset{(0)}{T}),$$

$$\overset{(2)}{V}_{3} = \frac{1}{2E^{3333}}(\overset{(1)}{\tau^{33}} - E^{33\alpha\beta}\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} - \beta\overset{(1)}{T}),$$

$$\overset{(3)}{V}_{3} = \frac{1}{3E^{3333}}(\overset{(2)}{\tau^{33}} - E^{33\alpha\beta}\overset{(2)}{e}_{\alpha\beta}),$$

$$\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\overset{(0)}{V}_{\alpha|\beta} + \overset{(0)}{V}_{\beta|\alpha}), \quad \overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} = -\overset{(0)}{V}_{3|\alpha\beta} + \frac{2}{h}(F_{\alpha 3\rho 3}s^{\rho}_{(1)|\beta} + \tag{43}$$

$$+ F_{\beta 3\rho 3}s^{\rho}_{(1)|\alpha}) - \frac{h^2}{2}(F_{\alpha 3\rho 3}\overset{(2)}{\varphi^{\rho}}_{|\beta} + F_{\beta 3\rho 3}\overset{(2)}{\varphi^{\rho}}_{|\alpha}),$$

$$\overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\overset{(1)}{V}_{3|\alpha\beta} + \frac{1}{h}(s^{\rho}_{(0)|\beta}F_{\alpha 3\rho 3} + s^{\rho}_{(0)|\alpha}F_{\beta 3\rho 3}) -$$

$$- \frac{h^2}{4}(F_{\alpha 3\rho 3}\overset{(3)}{\varphi^{\rho}}_{|\beta} + F_{\beta 3\rho 3}\overset{(3)}{\varphi^{\rho}}_{|\alpha}),$$

$$\overset{(3)}{e}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{3}\overset{(2)}{V}_{3|\alpha\beta} + \frac{2}{3}(F_{\alpha 3\rho 3}\overset{(2)}{\varphi^{\rho}}_{|\beta} + F_{\beta 3\rho 3}\overset{(2)}{\varphi^{\rho}}_{|\alpha}),$$

$$\overset{(4)}{e}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\overset{(3)}{V}_{3|\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\overset{(3)}{\varphi^{\rho}}_{|\beta}F_{\alpha 3\rho 3} + \overset{(3)}{\varphi^{\rho}}_{|\alpha}F_{\beta 3\rho 3}).$$

În baza ecuaţiilor fizice date de

$$\tau^{\omega\pi} = \widetilde{E}^{\omega\pi\alpha\beta}(\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} + z\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} + z^2\overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} + z^3\overset{(3)}{e}_{\alpha\beta} + z^4\overset{(4)}{e}_{\alpha\beta}) +$$

$$+ \frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}(\overset{(0)}{\tau^{33}} + z\overset{(1)}{\tau^{33}} + z^2\overset{(2)}{\tau^{33}} + z^3\overset{(3)}{\tau^{33}} + z^4\overset{(4)}{\tau^{33}}) + \tag{44}$$

$$+ \beta\left(\overset{(0)}{g}^{\omega\pi} - \frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\right)(\overset{(0)}{T} + z\overset{(1)}{T})$$

se obţin următoarele ecuaţii fizice :

$$L^{\omega\pi}_{(0)} = \widetilde{E}^{\omega\pi\alpha\beta}\left(h\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} + \frac{h^3}{12}\overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} + \frac{h^5}{80}\overset{(4)}{e}_{\alpha\beta}\right) +$$

$$+\frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\left(h\overset{(0)}{\tau}{}^{33}+\frac{h^3}{12}\overset{(2)}{\tau}{}^{33}+\frac{h^5}{80}\overset{(4)}{\tau}{}^{33}\right)+\left(\overset{(0)}{g}{}^{\omega\pi}-\frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\right)\beta h\overset{(0)}{T},$$

$$L^{\omega\pi}_{(1)}=\widetilde{E}^{\omega\pi\alpha\beta}\left(\frac{h^3}{12}\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta}+\frac{h^5}{80}\overset{(3)}{e}_{\alpha\beta}\right)+\frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\left(\frac{h^3}{12}\overset{(1)}{\tau}{}^{33}+\frac{h^5}{80}\overset{(3)}{\tau}{}^{33}\right)+$$

$$+\frac{h^3}{12}\left(\overset{(0)}{g}{}^{\omega\pi}-\frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\right)\beta\overset{(1)}{T},$$

$$L^{\omega\pi}_{(2)}=\widetilde{E}^{\omega\pi\alpha\beta}\left(\frac{h^3}{12}\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta}+\frac{h^5}{80}\overset{(2)}{e}_{\alpha\beta}+\frac{h^7}{448}\overset{(4)}{e}_{\alpha\beta}\right)+ \tag{45}$$

$$+\frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\left(\frac{h^3}{12}\overset{(0)}{\tau}{}^{33}+\frac{h^5}{80}\overset{(2)}{\tau}{}^{33}+\frac{h^7}{448}\overset{(4)}{\tau}{}^{33}\right)+\frac{h^3}{12}\left(\overset{(0)}{g}{}^{\omega\pi}-\frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\right)\beta\overset{(0)}{T},$$

$$N^{\rho}_{(0)}=s^{\rho}_{(1)}-\frac{h^3}{6}\overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho},$$

$$N^{\rho}_{(1)}=\frac{h^2}{12}s^{\rho}_{(0)}-\frac{h^5}{120}\overset{(3)}{\varphi}{}^{\rho}.$$

Ţinîne seama în ecuaţiile de echilibru

$$L^{\omega\rho}_{(0)|\omega}+s^{\rho}_{(0)}=0,$$

$$L^{\omega\rho}_{(2)|\omega}-2N^{\rho}_{(1)}+\frac{h^2}{4}s^{\rho}_{(0)}=0 \tag{46}$$

de relaţiile $(45)_1$, $(45)_3$, $(45)_5$ şi (43), se obţine un sistem de patru ecuaţii cu derivate parţiale în $\overset{(0)}{V}_{\alpha}$ şi $\overset{(3)}{\varphi}{}^{\rho}$, sistem care defineşte starea de tensiune plană generalizate, iar pe baza sistemului de ecuaţii

$$L^{\omega\rho}_{(1)|\omega}-N^{\rho}_{(0)}+s^{\rho}_{(1)}=0 \tag{47}$$

$$N^{\rho}_{(0)|\rho}+p_{(0)}=0$$

şi a relaţiilor $(45)_2$, $(45)_4$ şi (43) se obţine, un sistem de trei ecuaţii cu derivate parţiale în necunoscutele $\overset{(0)}{V}_3$, $\overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}$, sistem care defineşte starea de încovoiere a plăcii.

Este de notat că în cazul stării de tensiune plane generalizate intervine numai temperatura din planul median al plăcii $\overset{(0)}{T}(x^{\alpha})$, iar în cazul stării de tensiune care corespunde încovoierii, gradientul de temperatură pe grosime $\overset{(1)}{T}(x^{\alpha})$.

Funcţiile de temperatură care intervin în membrii drepţi ai acestor ecuaţii, prin analogie cu sarcinile exterioare, pot fi asimilate cu anumite „sarcini termice".

Avem astfel la îndemînă toate relaţiile necesare care permit determinarea stării de tensiune a plăcilor plane de grosime medie sub influenţa sarcinilor mecanice şi termice.

Primită la redacţie la 8 noiembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. L. Librescu, *On the thermoeleastic problem of shells treated by eliminating the Love-Kirchhoff hypotesis.* Non-classical Shell Problems. North-Holland Publishing Company Amsterdam, P.W.N., Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1964.
2. Л. Либреску, *К теории анизотропных упругих оболочек и пластинок.* Инженерный журнал, *3*, **IV**, Москва (1964) (tradusă în St. cerc. mec. apl., **18**, *1*, 117—133 (1965)).
3. А. Л. Голденвеизер, *Температурные напряжения в тонких оболочках.* Труды ТАГИ, 618 (1947).
4. H. Parcus, *Wärmespannungen in Rotationsschalen bei drehsymetrischer Temperaturverteilung.* Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss., Abt. 2 a, **160**, *1* (1951).
5. С. А. Амбарсумиан, *Температурные напряжения в слоистных анизотропных оболочкак.* Изв. АН Арм. ССР, Сер. Физ. — Мат. и Техн. наук, *5*, 6 (1952).
6. Е. Л. Акселрад, *О температурных деформациях неоднородных оболочек.* Изв. АН СССР, ОТН, *8* (1958).
7. L. Librescu, *Asupra problemei termoelastice a învelitorilor subţiri de formă arbitrară.* Comunicările Acad. R.P.R., **VIII**, *8* (1958).
8. — Elastische Mehrschichtenschalen. Rev. méc. appl., Edit. Acad. R.P.R., **V**, *5* (1960).
9. Л. Либреску, *К теории тонкостенных конструкций симметрично построенных из ортотропных слоев.* Rev. méc. appl., Edit. Acad. R.P.R., **V**, *3* (1960).
10. Е. Ф. Бурмистров, *Симметричная деформация конструктивно-ортотропных оболочек вращения.* Издат. Саратов. университета, 1962.
11. W. Nowacki, *Thermoelasticity.* Londra, Pergamon Press Ltd, 1962.
12. K. Apeland, *Bending of Orthogonally Anisotropic and Asymmetrically Rib-reinforced, Shallow Shells, Subjected to Temperature Charges and Surface Loads.* Non-classical Shell Problems. North-Holland Publishing Company Amsterdam, P. W. N., Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1964.
13. S. A. Ambartsumian, S. M. Durgarian, *Some Thermoelastic Problems of Anisotropic Shells and Plates.* Non-Classical Shell Problems. North-Holland Publishing Company Amsterdam, P.W.N., Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1964.
14. L. M. Habip, I. K. Ebcioglu, *On the Equations of Motion of Shells in the Reference State.* Ingenieur. Archiv., **34**, *1* (1965).
15. L. M. Habip, *Theory of Elastic Shells in the Reference State.* Ingenieur-Archiv, **34**, *4* (1965).
16. P. M. Naghdi, *Foundations of Elastic Shell Theory.* Progress in Solid Mechanics, **IV**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1963.

EFECTUL ÎMPIEDICĂRII DEPLANĂRII ASUPRA PULSAȚIILOR PROPRII DE RĂSUCIRE LA BARELE CU PEREȚI SUBȚIRI AVÎND PROFILUL ÎNCHIS

de TOMA PANĂ

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

534.4 : 534

În timpul vibrației de răsucire, în barele cu pereți subțiri avînd secțiuni împiedicate să se deplaneze liber apar eforturi unitare normale.
Dacă împiedicarea deplanării secțiunii transversale este realizată chiar de reazemele barei, efectul acestor eforturi asupra pulsațiilor proprii este luat în considerație prin intermediul condițiilor la limite. Ecuațiile pulsațiilor proprii obținute prin procedeul obișnuit de punere a condițiilor la limite nu țin seama însă și de restrîngerile de deplanare care pot apărea în secțiunile dintre reazeme. În general, în aceste secțiuni împiedicarea deplanării apare atunci cînd bara este prevăzută cu diafragme rigide. Pornind de la constatarea că efectul diafragmei este echivalent cu acela al unui bimoment concentrat aplicat din exterior, în lucrare se stabilesc ecuațiile pulsațiilor proprii de răsucire pentru barele cu o singură diafragmă de rigidizare.
Aceste ecuații sînt apoi rezolvate în cazul particular al barei de secțiune dreptunghiulară cu pereții de grosime constantă, determinîndu-se valorile pulsațiilor proprii pentru diferite poziții ale diafragmei de rigidizare.

Se consideră o bară cu pereți subțiri de secțiune constantă, liberă de sarcini exterioare și rezemată la capete în mod arbitrar. Într-o secțiune oarecare de abscisă θ_{imp}, bara are o diafragmă rigidă de masă neglijabilă, care oprește complet deplanarea în timpul vibrației de răsucire.

Din studiul răsucirii la barele cu pereți subțiri se cunoaște că, atunci cînd o secțiune este obligată să rămînă plană, în acea secțiune apar eforturi unitare normale a căror rezultantă este bimomentul de încovoiere-răsucire.

În consecință, efectul diafragmei este identic cu acela al unui bimoment exterior, avînd o astfel de valoare și semn încît să anuleze deplanarea cese produce în secțiunea respectivă. Acest bimoment nu include și bimomentul care apare în secțiunea barei fără diafragmă ca urmare a restrîngerilor de deplanare provenite din modul de rezemare.

Deoarece în mişcarea vibratorie deplanarea secţiunii variază armonic în timp, şi bimomentul introdus pentru anularea acestei deplanări va trebui să aibă aceeaşi lege de variaţie. Prin urmare, înlocuind diafragma din secţiunea θ_{imp} cu un bimoment de amplitudine $B_{\hat{\omega}_{imp}}$, care variază armonic în timp astfel încît totdeauna deplanarea secţiunii transversale să fie zero, studiul vibraţiei libere a barei cu diafragmă se transformă de fapt în studiul vibraţiei forţate a aceleiaşi bare fără diafragmă, aflată sub acţiunea unui bimoment exterior.

Ecuaţia diferenţială a vibraţiei forţate de răsucire, scrisă pentru cazul particular al secţiunii cu două axe de simetrie, este [3]

$$\frac{EI_{\hat{\omega}}}{\nu}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} - GI_t\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\gamma I_{\hat{\omega}}}{\nu g}\left(1+\frac{EI_0}{GI_t}\right)\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial t^2} + \\ + \frac{\gamma^2 I_{\hat{\omega}} I_0}{g^2\nu GI_t}\frac{\partial^4\varphi}{\partial t^4} + \frac{\gamma I_0}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = m. \tag{1}$$

Notaţiile utilizate în această ecuaţie corespund următoarelor mărimi :

E — modulul de elasticitate longitudinal ;
G — modulul de elasticitate transversal ;
γ — greutatea specifică a materialului ;
g — acceleraţia gravitaţiei ;
$I_0 = I_y + I_z$ — momentul de inerţie polar al secţiunii ;
I_y şi I_z — momentele de inerţie axiale principale ale secţiunii ;
I_t — momentul de inerţie polar convenţional ;
I_f — momentul de inerţie dirijat al secţiunii raportat la centrul de forfecare pură :
$I_{\hat{\omega}}$ — momentul de inerţie sectorial generalizat ;
$\nu = 1 - \frac{I_t}{I_f}$ — coeficientul de deformaţie al secţiunii ;
$\varphi = \varphi(x, t)$ — unghiul de răsucire al barei ;
$m = m(x, t)$ — legea de variaţie a momentului de răsucire pe lungimea barei şi în timp.

Dacă momentul de răsucire m variază în timp după legea

$$m = m(x)\cdot e^{ipt}, \tag{2}$$

unde $m(x)$ este amplitudinea momentul de răsucire, iar p pulsaţia vibraţiei de răsucire, soluţia ecuaţiei (1) este de forma

$$\varphi(x, t) = \varphi(x)\, e^{ipt}, \tag{3}$$

în care $\varphi(x)$ reprezintă amplitudinea unghiului de răsucire.

Înlocuind relaţiile (2) şi (3) în ecuaţia (1) şi trecînd la variabila adimensională

$$\theta = \frac{x}{l}, \tag{4}$$

unde l este lungimea barei, rezultă

$$\varphi_\theta^{IV} + (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\overset{\wedge}{\omega}}^2)\,\varphi_\theta'' - \varkappa(a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4 - \varkappa a_f^2)\,\varphi_\theta = \overline{m}\,(\theta). \tag{5}$$

În această ecuație au fost utilizate notațiile

$$\begin{aligned}
\varkappa &= \frac{\gamma p^2 l^2}{Eg}, \\
a_f^2 &= \frac{EI_0}{GI_t}, \\
c_{\overset{\wedge}{\omega}}^2 &= \frac{GI_t}{EI_{\overset{\wedge}{\omega}}}\nu l^2, \\
a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4 &= \frac{I_0}{I_{\overset{\wedge}{\omega}}}\nu l^2, \\
\overline{m}(\theta) &= m(x)\frac{\nu l^4}{EI_{\overset{\wedge}{\omega}}}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Soluția ecuației (5) este de forma

$$\varphi_\theta = \varphi_\theta^* + \overline{\varphi}_\theta, \tag{7}$$

unde φ_θ^* reprezintă soluția generală a ecuației omogene, iar $\overline{\varphi}_\theta$ este soluția particulară a ecuației cu membrul drept.

Soluția generală a ecuației omogene poate fi exprimată cu ajutorul parametrilor inițiali, ajungîndu-se astfel la relația

$$\varphi_\theta^*(\theta) = \varphi_0\,[F_1'(\theta) + \varkappa a_f^2 F_2'(\theta)] + \nu\beta_0 l\,[F_1(\theta) + (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\overset{\wedge}{\omega}}^2)F_2(\theta)] +$$

$$+ \frac{\nu B_{\overset{\wedge}{\omega_0}} l^2}{EI_{\overset{\wedge}{\omega}}} F_2'(\theta) + \frac{M_{tf_0} l}{GI_t}\left[F_1(\theta) + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu}c_{\overset{\wedge}{\omega}}^2\right)F_2(\theta)\right], \tag{8}$$

în care $\varphi_0, \beta_0, B_{\overset{\wedge}{\omega_0}}$ și M_{tf_0} sînt, respectiv, unghiul, deplanarea, bimomentul și momentul de răsucire față de centrul de forfecare pură din secțiunea inițială $\theta = 0$.

Funcțiile $F_1(\theta)$ și $F_2(\theta)$ au expresiile

$$\begin{aligned}
F_1(\theta) &= \frac{s_2^2}{s_1(s_2^2 - s_1^2)}\operatorname{sh} s_1\theta - \frac{s_1^2}{s_2(s_2^2 - s_1^2)}\operatorname{sh} s_2\theta \\
\text{și} \qquad & \qquad (9) \\
F_2(\theta) &= \frac{1}{s_1(s_2^2 - s_1^2)}\operatorname{sh} s_1\theta - \frac{1}{s_2(s_2^2 - s_1^2)}\operatorname{sh} s_2\theta,
\end{aligned}$$

în componența cărora intră soluțiile s_1 și s_2 ale ecuației caracteristice

$$s^4 + s^2(\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\overset{\wedge}{\omega}}^2) - \varkappa(a_{\overset{\wedge}{\omega}}^4 - \varkappa a_f^2) = 0. \tag{10}$$

Aceste soluţii sînt

$$s_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[-(\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_\omega^2) \pm \sqrt{(\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_\omega^2)^2 + 4\varkappa(a_\omega^4 - \varkappa a_f^2)}\right]}. \quad (11)$$

În baza metodei generale Cauchy-Krîlov, soluţia particulară a ecuaţiei (5) este dată de relaţia

$$\overline{\varphi}_\theta(\theta) = -\int_0^\theta F_2(\theta - \psi)\,\overline{m}(\psi)\,d\psi, \quad (12)$$

în care integrarea se face în raport cu variabila ψ, θ fiind parametru şi limită superioară a integralei.

Dacă bara cu pereţi subţiri este solicitată numai de un bimoment concentrat $B_\omega^\wedge$ aplicat în secţiunea θ_1, se poate demonstra că acesta este echivalent cu două momente de torsiune egale şi de semne contrare, situate la distanţa infinit mică δx unul de celălalt şi avînd astfel de valori încît

$$B_\omega^\wedge = M_t \delta x = M_t l \delta\theta. \quad (13)$$

Întrucît momentul de torsiune concentrat M_t poate fi înlocuit cu un moment uniform repartizat aplicat pe o distanţă infinit mică Δx, valoarea lui se exprimă cu ajutorul relaţiei

$$M_t = m\,\Delta x = m\,\Delta(\theta l) = ml\,\Delta\theta. \quad (14)$$

Din relaţiile (13) şi (14) rezultă

$$m = \frac{B_\omega^\wedge}{l^2 \delta\theta\,\Delta\theta}. \quad (15)$$

Ţinînd seama de ultima relaţie (6) şi înlocuind în relaţia (12) se obţine

$$\overline{\varphi}_\theta(\theta) = \int_{\theta_1}^{\theta_1+\Delta\theta} F_2(\theta - \psi)\,\frac{\nu B_\omega^\wedge\, l^2}{EI_\omega^\wedge\,\delta\theta\,\Delta\theta}\,d\psi - \int_{\theta_1+\delta\theta}^{\theta_1+\delta\theta+\Delta\theta} F_2(\theta - \psi)\,\frac{\nu B_\omega^\wedge\, l^2}{EI_\omega^\wedge\,\delta\theta\,\Delta\theta}\,d\psi. \quad (16)$$

Se precizează că această relaţie a fost scrisă în presupunerea că primul moment concentrat M_t a fost considerat negativ, iar cel de-al doilea pozitiv.

Cum $\delta\theta$ este parametru pentru fiecare integrală în parte, iar $\frac{\nu B_\omega^\wedge\, l^2}{EI_\omega^\wedge}$ este constant, aplicînd prima teoremă a valorii medii a integralei rezultă

$$\overline{\varphi}_\theta(\theta) = \frac{\nu B_\omega^\wedge\, l^2}{EI_\omega^\wedge}\left\{\frac{F_2(\theta - \theta_1)}{\delta\theta} - \frac{F_2[\theta - (\theta_1 + \delta\theta)]}{\delta\theta}\right\}. \quad (17)$$

Făcînd pe $\delta\theta$ să tindă către zero, paranteza reprezintă tocmai derivata funcţiei $F_2(\theta - \theta_1)$ şi în consecinţă

$$\overline{\varphi}_\theta(\theta) = F_2'(\theta - \theta_1)\,\frac{\nu B_\omega^\wedge\, l^2}{EI_\omega^\wedge}. \quad (18)$$

Dacă se înlocuiește $B^{\wedge}_{\omega}$ prin $B^{\wedge}_{\omega\,\mathrm{imp}}$, iar θ_1 prin θ_{imp}, soluția generală (7) a ecuației neomogene (5) se scrie

$$\varphi_\theta(\theta) = \varphi_0[F_1'(\theta) + \varkappa a_f^2 F_2'(\theta)] + \nu\beta_0 l[F_1(\theta) + (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c^{2\wedge}_{\omega})F_2(\theta)] +$$

$$+ \frac{\nu B^{\wedge}_{\omega_0} l^2}{EI^{\wedge}_{\omega}} F_2'(\theta) + \frac{M_{tf_0} l}{GI_f}\left[F_1(\theta) + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c^{2\wedge}_{\omega}\right) F_2(\theta)\right] +$$

$$+ \frac{\nu B^{\wedge}_{\omega_0\,\mathrm{imp}} l^2}{EI^{\wedge}_{\omega}} F_2'(\theta - \theta_{\mathrm{imp}}). \tag{19}$$

Această relație permite calculul amplitudinii vibrației libere a barei cu pereți subțiri, prevăzută cu o diafragmă rigidă în secțiunea θ_{imp}.

Întrucît, indiferent de modul de rezemare, doi dintre cei patru parametri inițiali din relația (19) sînt zero, această relație conține numai trei necunoscute. Valorile lor se obțin prin rezolvarea sistemului rezultat din scrierea celor două condiții la limită pe reazemul din secțiunea $\theta=1$ și a condiției de deplanare nulă în secțiunea θ_{imp}. Condiția de compatibilitate a acestui sistem omogen reprezintă tocmai ecuația pulsațiilor.

De exemplu, dacă bara este presupusă simplu rezemată la capete, pentru secțiunea $\theta = 0$ sînt îndeplinite condițiile

$$\varphi_0 = 0, \quad B^{\wedge}_{\omega_0} = 0. \tag{20}$$

În acest caz, relația (19) devine

$$\varphi_\theta(\theta) = \nu\beta_0 l[F_1(\theta) + (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c^{2\wedge}_{\omega}) F_2(\theta)] +$$

$$+ \frac{M_{tf_0} l}{GI_f}\left[F_1(\theta) + (\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c^{2\wedge}_{\omega}) F_2(\theta)\right] + \frac{\nu B^{\wedge}_{\omega\,\mathrm{imp}} l^2}{EI^{\wedge}_{\omega}} F_2'(\theta - \theta_{\mathrm{imp}}). \tag{21}$$

Această relație trebuie să îndeplinească condițiile:

— pentru $\theta = 1$:

$$\varphi_1(1) = 0 \text{ și } B^{\wedge}_{\omega 1}(1) = 0; \tag{22}$$

— pentru $\theta = \theta_{\mathrm{imp}}$:

$$\beta_{\mathrm{imp}}(\theta_{\mathrm{imp}}) = 0. \tag{23}$$

Exprimînd bimomentul în funcție de unghiul de răsucire φ și de derivatele sale, rezultă că, deoarece în reazem unghiul este zero, condiția

$$B^{\wedge}_{\omega 1}(1) = 0$$

este echivalentă cu condiția

$$\varphi_1''(1) = 0. \tag{24}$$

În mod analog se ajunge la concluzia că condiția (23) este satisfăcută cînd

$$\varphi'''_{\text{împ}}(\theta_{\text{împ}}) + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2\right) \varphi'_{\text{împ}}(\theta_{\text{împ}}) = 0. \tag{25}$$

Ținînd seama de aceste observații, ecuațiile (22) și (23) devin respectiv

$$\begin{aligned}
&\nu\beta_0 l\,[F_1(1) + (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2) F_2(1)] + \frac{M_{tf_0} l}{GI_f}\left[F_1(1) + \right.\\
&\left. + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2\right) F_2(1)\right] + \frac{\nu B_{\hat{\omega}\,\text{împ}}\, l^2}{EI_{\hat{\omega}}} F_2'(1-\theta_{\text{împ}}) = 0,\\
&\nu\beta_0 l\,[F_1''(1) + (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2) F_2''(1)] + \frac{M_{tf_0} l}{GI_f}\left[F_1''(1) + \right.\\
&\left. + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2\right) F_2''(1)\right] + \frac{\nu B_{\hat{\omega}\,\text{împ}}\, l^2}{EI_{\hat{\omega}}} F_2'''(1-\theta_{\text{împ}}) = 0,\\
&\nu\beta_0 l\left\{[F_1'''(\theta_{\text{împ}}) + (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2) F_2'''(\theta_{\text{împ}})] + \right.\\
&\left. + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2\right)[F_1'(\theta_{\text{împ}}) + (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2) F_2'(\theta_{\text{împ}})]\right\} +\\
&+ \frac{M_{tf_0} l}{GI_f}\left\{\left[F_1'''(\theta_{\text{împ}}) + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2\right) F_2'''(\theta_{\text{împ}})\right] + \right.\\
&\left. + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2\right)\left[F_1'(\theta_{\text{împ}}) + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2\right) F_2'(\theta_{\text{împ}})\right]\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

Se observă că în ultima ecuație termenul în $B_{\hat{\omega}\,\text{împ}}$ nu apare, întrucît

$$F_2''(0) = F_2^{\text{IV}}(0) = 0. \tag{27}$$

Scriind condiția de compatibilitate a sistemului omogen (26) și efectuînd calculele, se obține următoarea ecuație a pulsațiilor :

$$\frac{\operatorname{ch} s_1(1-\theta_{\text{împ}}) \cdot \operatorname{sh} s_2 \cdot \operatorname{ch} s_1\theta_{\text{împ}}}{\operatorname{ch} s_2(1-\theta_{\text{împ}}) \cdot \operatorname{sh} s_1 \cdot \operatorname{ch} s_2\theta_{\text{împ}}} = \frac{s_2\left(s_2^2 + \varkappa a_f^2 + \dfrac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2\right)}{s_1\left(s_1^2 + \varkappa a_f^2 + \dfrac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2\right)}. \tag{28}$$

Atît pentru $\theta_{\text{împ}} = 0$, cît și pentru $\theta_{\text{împ}} = 1$, diafragma fiind situată pe unul dintre reazeme, acesta devine echivalent cu o încastrare.

Întocmind pe s_1 și s_2 din relația (11), ecuația (28) permite calculul pulsației adimensionale $\varkappa$ în funcție de poziția diafragmei luată ca parametru.

Ecuația (28) a fost rezolvată, cu ajutorul mașinii electronice de calcul MECIPT-1, pentru bara de secțiune dreptunghiulară cu înălțimea h și lățimea b, avînd pereții de grosime constantă.

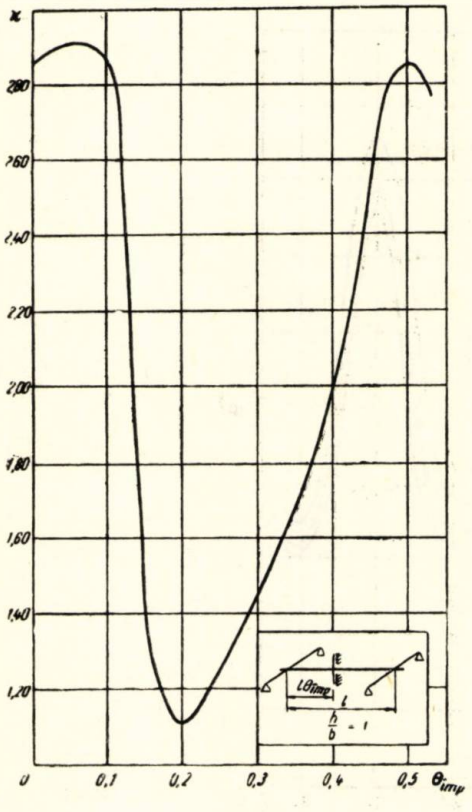


Fig. 1

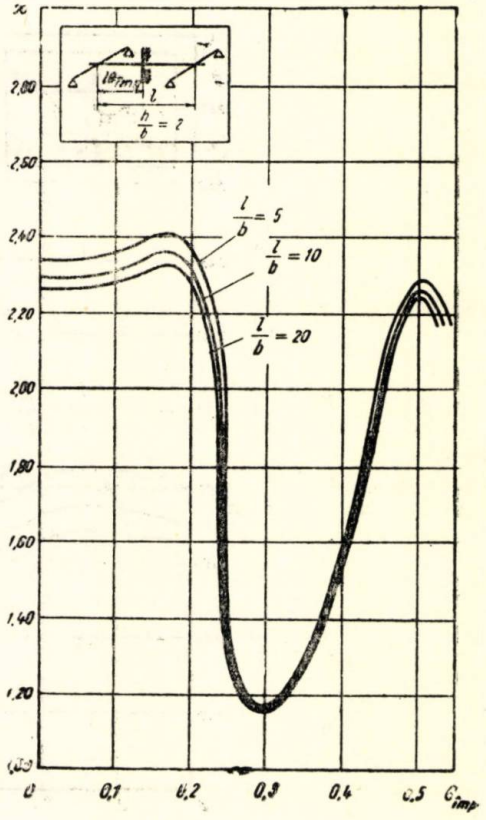


Fig. 2

Valorile pulsației adimensionale $\varkappa$ au fost reprezentate grafic în funcție de poziția diafragmei θ_{imp} pentru diferite rapoarte $\frac{h}{b}$ și $\frac{l}{b}$ luate ca parametru. Diagramele obținute sînt reprezentate în figurile 1, 2 și 3. Deoarece aceste diagrame sînt simetrice față de mijlocul barei, ele nu sînt construite decît pentru o jumătate din lungimea acesteia.

Din examinarea diagramelor rezultă că valorile pulsației adimensionale $\varkappa$ pentru $\theta_{imp} = 0$ și pentru $\theta_{imp} = 1$ sînt cu puțin superioare celor obținute în lucrarea [3] pentru bara simplu rezemată la capete. Aceasta demonstrează că împiedicarea deplanării în secțiunile extreme ale barei afectează în foarte mică măsură valoarea pulsației proprii de răsucire. Explicația constă în faptul că influența împiedicării deplanării asupra unghiului de răsucire are un pronunțat caracter local.

În schimb, prezența diafragmei de rigidizare pe intervalul dintre reazeme are o importanță deosebită. Din diagrame rezultă că există o regiune în care prezența diafragmei rigide modifică substanțial valoarea pulsației proprii a barei.

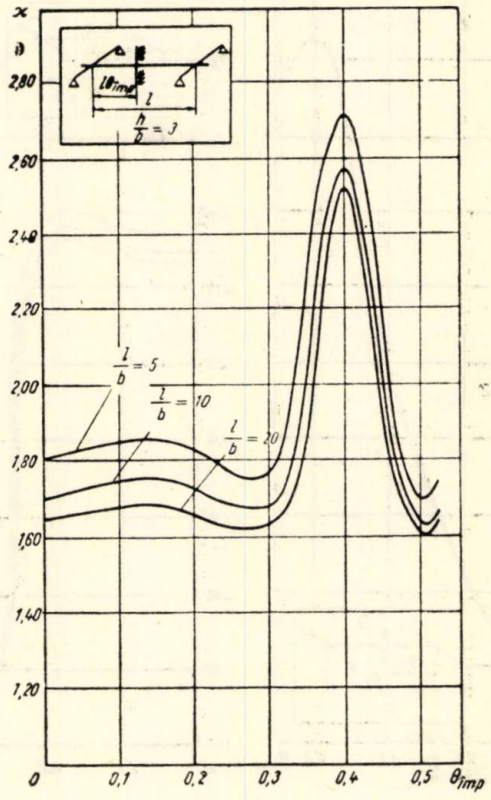


Fig. 3

Întinderea acestei regiuni este funcție de raportul $\frac{h}{b}$, ea fiind cu atît mai mică cu cît raportul $\frac{h}{b}$ este mai mare. Influența raportului $\frac{l}{b}$ este în general mică; ea crește o dată cu creșterea raportului $\frac{h}{b}$.

Pentru alte moduri de rezemare, problema se tratează la fel ca mai sus, cu singura deosebire că se schimbă condițiile la limită (20) și (22).

Deoarece împiedicarea deplanării în reazeme modifică în mică măsură pulsația proprie, autorul propune ca pentru încastrare să se folosească condițiile la limită

$$\varphi_\vartheta = 0 \quad \text{și} \quad \varphi'_\vartheta = 0 \tag{29}$$

în locul condițiilor clasice

$$\varphi_\theta = 0 \quad \text{și} \quad \beta_\theta = 0. \tag{30}$$

Prin aceasta se ține seama implicit și de faptul că reazemul are în general o rigiditate la răsucire suficient de mare ca să anuleze momentul de torsiune provenit din răsucirea liberă.

Astfel, condițiile (29) iau în considerare efectul de împiedicare a răsucirii, spre deosebire de condițiile (30), care îl iau în considerare pe acela al împiedicării deplanării.

Primită la redacție la 22 iulie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Н. И. Безухов, О. В. Лужин, *К расчету тонкостенных стержней на вынужденные колебания*. Исследования по теории сооружений, выпуск VII, Москва, Госстройиздат, 1957.
2. J. P. Den Hartog, *Mehnical vibrations*. New-York, Mc. Graw-Hill, 1956.
3. T. Pană, *Calculul pulsațiilor proprii ale vibrațiilor de încovoiere-răsucire la barele cu pereți subțiri având profilul închis*. St. cerc. mec. apl., **18**, 2 (1965).
4. A. Petre, M. Atanasiu, *Bare cu pereți subțiri*. București, Edit. tehnică, 1960.

VIBRAȚII TRANSVERSALE ALE BARELOR ÎN ROTAȚIE SOLICITATE LA EFORT AXIAL ȘI LA RĂSUCIRE

de D. CRAIFALEANU
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

539.4 : 534

Se studiază vibrațiile transversale ale unei bare de secțiune circulară simplu rezemată la capete, care se rotește în jurul axei sale și este solicitată de o forță axială și de un moment de răsucire. Introducînd deplasarea complexă $r = u + iv$, cele două ecuații diferențiale ale mișcării transversale se cuplează într-una singură, care se integrează prin metoda lui Galerkin. Se obține ecuația valorilor proprii, din care rezultă primele trei valori ale pulsațiilor. Pulsațiile fundamentale adimensionale η_ν se determină cu ajutorul abacei, în funcție de turația adimensională η_ω, de forța axială adimensională η_c și de momentul de răsucire adimensional η_t. În cazul în care nu există amortizare, mișcarea este stabilă, iar anularea frecvenței conduce la condiția de pierdere a stabilității barei în rotație, solicitată de forța axială și momentul de răsucire. Dacă vibrația este însoțită de amortizare, mișcarea poate deveni instabilă în anumite condiții.

1. INTRODUCERE, NOTAȚII

Problema vibrațiilor transversale ale unei bare de secțiune circulară care se rotește în jurul axei sale, fiind totodată solicitată de un efort axial și de un moment de răsucire (fig. 1), prezintă un deosebit interes în calculul și funcționarea arborilor de mașini, a prăjinilor de foraj, a arborilor elicelor de nave, a axelor portburghiu etc. În literatura de specialitate sînt tratate o serie de cazuri particulare. Prezenta lucrare își propune un studiu de ansamblu, ținînd seama de influența simultană a factorilor menționați.

Se consideră că bara are inițial axa rectilinie și este simplu rezemată la capete. Secțiunea sa este constantă și rotația în jurul axei este uniformă. Sînt valabile toate ipotezele solicitării barei în regim elastic (omogenitate, izotropie, liniarelasticitate, ipoteza lui Bernoulli etc.).

Se fac următoarele notații uzuale :

l — lungimea barei ;
μ — masa barei pe unitatea de lungime ;
EI — rigiditatea la încovoiere a barei ;
z — coordonata unei secțiuni transversale oarecare ;

u, v — săgeţile transversale ale liniei elastice a barei pe direcţiile axelor x, respectiv y;

P, P_0 — efortul axial, constant pe lungimea barei, respectiv forţa critică de flambaj a lui Euler;

M_t, M_{t0} — momentul de răsucire, constant în lungul barei, respectiv momentul de răsucire critic corespunzător flambajului la răsucire pură;

ω, ω_0 — viteza unghiulară a barei, respectiv viteza critică a barei nesolicitate;

ε — factorul de amortizare vîscoasă pe unitatea de masă;

$\eta_c = \dfrac{P}{P_0}$ — efortul axial adimensional;

$\eta_t = \dfrac{M_t}{M_{t0}}$ — momentul de răsucire adimensional;

$\eta_\omega = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ — viteza unghiulară adimensională;

$\eta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{\omega_0}$ — factorul de amortizare adimensional;

t — timpul.

2. ECUAŢIILE DIFERENŢIALE ALE MIŞCĂRII

Se raportează secţiunea transversală la un sistem mobil de axe Oxy care se roteşte împreună cu bara cu viteza unghiulară ω în jurul axei Oz. Se ia originea O la una dintre extremităţi. Deplasările transversale u şi v pe direcţiile axelor Ox, respectiv Oy sînt presupuse mici. În planul

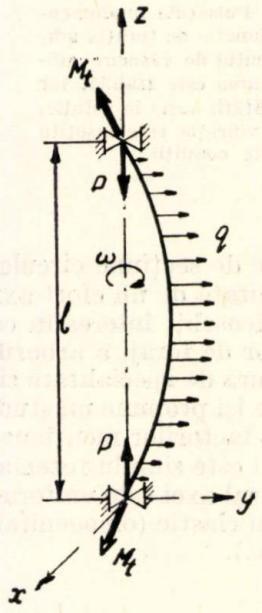


Fig. 1

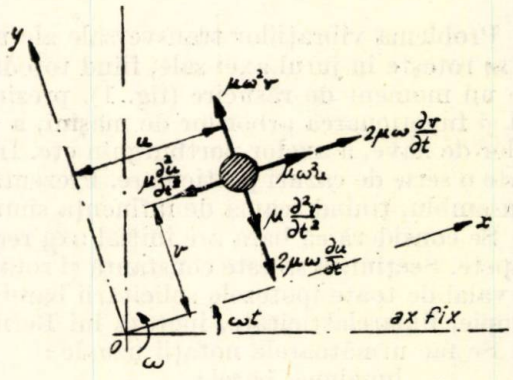


Fig. 2

secţiunii transversale vor apărea forţe de inerţie centrifuge produse de rotirea barei (fig. 2), forţe de inerţie datorite oscilaţiilor transversale şi, în plus, vor mai acţiona forţele lui Coriolis. Astfel forţele transversale

distribuite rezultante vor avea componentele pe direcțiile axelor Ox și, respectiv, Oy :

$$\left.\begin{aligned} q_x &= \mu\omega^2 u - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\,\mu\omega\frac{\partial v}{\partial t} \\ q_y &= \mu\omega^2 v - \mu\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2\,\mu\omega\frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

considerînd că vectorul rotație $\bar{\omega}$ este dirijat în sensul pozitiv al axei Oz.

Forțele distribuite q_x și q_y produc în planele Oxz și Oyz momente încovoietoare. Se consideră cazul uzual al momentului de răsucire tangențial [4], [5], adică vectorul moment rămîne permanent tangent la axa deformată a barei. Ținînd seama că, pe axa deformată a barei, M_t și P dau componente de încovoiere, ecuațiile diferențiale ale mișcării elementului de bară vor fi [4], [5]

$$\left.\begin{aligned} -EI\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} &= -M_t\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + P\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - q_y \\ EI\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} &= -M_t\frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - P\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + q_x. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

în care, înlocuind (1), se obține sistemul

$$\left.\begin{aligned} EI\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + M_t\frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + P\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \mu\omega^2 u + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\mu\omega\frac{\partial v}{\partial t} &= 0 \\ EI\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - M_t\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + P\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \mu\omega^2 v + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\mu\omega\frac{\partial u}{\partial t} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Introducînd variabilele adimensionale $\zeta = \frac{\pi}{l}z$, $\zeta \in [0, \pi]$ și $\tau = \omega_0 t$ și înmulțind relațiile cu $\frac{l^4}{\pi^4 EI}$, sistemul (3) capătă forma

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^4 u}{\partial\zeta^4} + \frac{M_t l}{\pi EI}\frac{\partial^3 v}{\partial\zeta^3} + \frac{Pl^2}{\pi^2 EI}\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2} - \frac{\mu l^4}{\pi^4 EI}\omega^2 u + \\ &\quad + \frac{\mu l^4}{\pi^4 EI}\omega_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2} - 2\frac{\mu l^4}{\pi^4 EI}\omega\omega_0\frac{\partial v}{\partial\tau} = 0 \\ &\frac{\partial^4 v}{\partial\zeta^4} - \frac{M_t l}{\pi EI}\frac{\partial^3 u}{\partial\zeta^3} + \frac{Pl^2}{\pi^2 EI}\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta^2} - \frac{\mu l^4}{\pi^4 EI}\omega^2 v + \\ &\quad + \frac{\mu l^4}{\pi^4 EI}\omega_0^2\frac{\partial^2 v}{\partial\tau^2} + 2\frac{\mu l^4}{\pi^4 EI}\omega\omega_0\frac{\partial u}{\partial\tau} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

În cele ce urmează se vor nota cu apostrof derivatele în raport cu spațiul ζ și cu punct derivatele în raport cu timpul τ. Cunoscînd expresiile [1], [3]

$$P_0 = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad M_{t0} = \frac{2\pi EI}{l}, \quad \omega_0 = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}} \tag{5}$$

și folosind cantitățile adimensionale η_c, η_t și η_ω menționate la nr. 1, sistemul de ecuații diferențiale (4) devine

$$\left.\begin{aligned} u^{IV} + 2\eta_t \dot{v}''' + \eta_c u'' - \eta_\omega^2 u + \ddot{u} - 2\eta_\omega \dot{v} = 0 \\ v^{IV} - 2\eta_t u''' + \eta_c v'' - \eta_\omega^2 v + \ddot{v} + 2\eta_\omega \dot{u} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Introducînd aici deplasarea complexă [7]—[10],

$$r = u + \mathrm{i}\, v, \tag{7}$$

ecuațiile sistemului (6) se cuplează sub forma unei singure ecuații diferențiale :

$$r^{IV} - \mathrm{i}\, 2\eta_t r''' + \eta_c r'' - \eta_\omega^2 r + \ddot{r} - \mathrm{i}\, 2\eta_\omega \dot{r} = 0. \tag{8}$$

Se va căuta o soluție a ecuației (8) de forma

$$r = R(\zeta) \cdot T(\tau). \tag{9}$$

Luînd $T(\tau) = \mathrm{e}^{\eta_s \tau}$, soluția devine

$$r = R(\zeta) \cdot \mathrm{e}^{\eta_s \tau}, \tag{9'}$$

care, înlocuită în (8), conduce la ecuația

$$R^{IV} - \mathrm{i}\, 2\eta_t R''' + \eta_c R'' - (\eta_\omega^2 - \eta_s^2 + \mathrm{i}\, 2\eta_\omega \eta_s) R = 0, \tag{10}$$

în care a rămas numai variabila ζ.

Notînd

$$k^2 = (\eta_\omega + \mathrm{i}\eta_s)^2, \tag{11}$$

ecuația diferențială a deplasării complexe ia forma

$$L(R) = R^{IV} - \mathrm{i}\, 2\eta_t R''' + \eta_c R'' - k^2 R = 0. \tag{12}$$

Arborele fiind simplu rezemat la capete, deplasările vor fi nule, adică $u(o) = u(\pi) = v(o) = v(\pi) = 0$. Ținînd seama că momentul de răsucire este tangențial, rezultă că momentele încovoietoare vor fi nule la extremități și, în consecință, $u''(o) = u''(\pi) = v''(o) = v''(\pi) = 0$, iar deplasarea complexă trebuie să satisfacă condițiile la limite

$$R(o) = R(\pi) = R''(o) = R''(\pi) = 0. \tag{13}$$

3. CALCULUL FRECVENȚELOR VIBRAȚIILOR TRANSVERSALE

Rezolvarea exactă a ecuației diferențiale (12) fiind dificilă, se va aplica metoda aproximativă a lui Galerkin de determinare a valorilor proprii. Conform acestei metode, soluția este de forma

$$R = \sum_{n=1}^{m} a_n \varphi_n(\zeta), \tag{14}$$

în care $\varphi_n(\eta)$ sînt funcțiile-eroare, fiecare dintre ele trebuind să satisfacă condițiile la limite. Se ponderează apoi ecuația diferențială cu aceste funcții, calculînd expresiile

$$\int_0^{\pi} L(R)\,\varphi_n(\zeta)\,d\zeta = 0 \quad (n = 1, \ldots, m), \tag{15}$$

din care rezultă un sistem algebric liniar și omogen în constantele a_n. Determinantul acestui sistem trebuind să fie nul, el constituie tocmai ecuația valorilor proprii.

În cazul ecuației (12) se alege șirul funcțiilor proprii [4]

$$\varphi_n(\zeta) = \sin n\zeta,$$

care îndeplinesc condițiile (13) și constituie un șir rapid convergent și ortogonal. Limitînd șirul la primii trei termeni, soluția va fi

$$R = a_1 \sin \zeta + a_2 \sin 2\zeta + a_3 \sin 3\zeta. \tag{16}$$

Se înțelege că luarea în considerare a unui număr mai mare de termeni conduce la o eroare mai mică față de soluția exactă.

Cu soluția (16) sistemul (15) devine

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} (a_1 \sin\zeta + 16\,a_2 \sin 2\zeta + 81\,a_3 \sin 3\zeta + \mathrm{i}\,2a_1\eta_t \cos\zeta + \\
&+ \mathrm{i}\,16\,a_2\,\eta_t \cos 2\zeta + \mathrm{i}\,54\,a_3\,\eta_t \cos 3\zeta - a_1\eta_c \sin\zeta - \\
&- 4a_2\eta_c \sin 2\zeta - 9a_3\eta_c \sin 3\zeta - a_1k^2 \sin\zeta - a_2k^2 \sin 2\zeta - \\
&- a_3k^2 \sin 3\zeta) \sin\zeta\,d\zeta = 0 \\
&\int_0^{\pi} (a_1 \sin\zeta + 16\,a_2 \sin 2\zeta + 81\,a_3 \sin 3\zeta + \mathrm{i}\,2a_1\eta_t \cos\zeta + \\
&+ \mathrm{i}\,16\,a_2\,\eta_t \cos 2\zeta + \mathrm{i}\,54\,a_3\eta_t \cos 3\zeta - a_1\eta_c \sin\zeta - \\
&- 4a_2\,\eta_c \sin 2\zeta - 9a_3\eta_c \sin 3\zeta - a_1\,k^2 \sin\zeta - a_2k^2 \sin 2\zeta - \\
&- a_3k^2 \sin 3\zeta) \sin 2\zeta\,d\zeta = 0 \\
&\int_0^{\pi} (a_1 \sin\zeta + 16\,a_2 \sin 2\zeta + 81\,a_3 \sin 3\zeta + \mathrm{i}\,2a_1\eta_t \cos\zeta + \\
&+ \mathrm{i}\,16\,a_2\,\eta_t \cos 2\zeta + \mathrm{i}\,54\,a_3\eta_t \cos 3\zeta - a_1\eta_c \sin\zeta - \\
&- 4a_2\eta_c \sin 2\zeta - 9a_3\eta_c \sin 3\zeta - a_1k^2 \sin\zeta - a_2k^2 \sin 2\zeta - \\
&- a_3k^2 \sin 3\zeta) \sin 3\zeta\,d\zeta = 0.
\end{aligned}\right\}$$

După integrare se obține următorul sistem algebric omogen în $a_1\ a_2,\ a_3$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\pi}{2}a_1 - \mathrm{i}\,16\frac{2}{3}\eta_t a_2 - \frac{\pi}{2}\eta_c a_1 - \frac{\pi}{2}k^2 a_1 = 0 \\ &16\frac{\pi}{2}a_1 - \mathrm{i}\,2\frac{4}{3}\eta_t a_1 - \mathrm{i}\,54\frac{4}{5}\eta_t a_3 - 4\frac{\pi}{2}\eta_c a_2 - \frac{\pi}{2}k^2 a_2 = 0 \\ &81\frac{\pi}{2}a_3 + \mathrm{i}\,16\frac{6}{5}\eta_t a_2 - 9\frac{\pi}{2}\eta_c a_3 - \frac{\pi}{2}k^2 a_3 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Ca să admită soluții nenule pentru a_n, trebuie ca determinantul sistemului (17) să fie egal cu zero :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\pi}{2}(1-\eta_c-k^2) & -\mathrm{i}\frac{32}{3}\eta_t & 0 \\ \mathrm{i}\frac{8}{3}\eta_t & \frac{\pi}{2}(16-4\eta_c-k^2) & -\mathrm{i}\frac{216}{5}\eta_t \\ 0 & \mathrm{i}\frac{96}{5}\eta_t & \frac{\pi}{2}(81-9\eta_c-k^2) \end{vmatrix} = 0,$$

care, dezvoltat, conduce la ecuația de gradul trei în k^2 :

$$\begin{aligned} &(k^2+\eta_c-1)\left[(k^2+4\eta_c-16)(k^2+9\eta_c-81) - 336{,}16\,\eta_t^2\right] - \\ &\quad - 11{,}528\,(k^2+9\eta_c-81)\,\eta_t^2 = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

sau

$$\begin{aligned} &k^6 + (14\eta_c - 98)\,k^4 + (49\eta_c - 578\eta_c + 1\,393 - 347{,}7\eta_t^2)\,k^2 + \\ &+ 36\eta_c^3 - 504\eta_c^2 + 1\,764\eta_c - 1\,296 - 439{,}9\eta_c\,\eta_t^2 + 1\,270\eta_t^2 = 0. \end{aligned} \quad (18')$$

Ecuația (18′) are trei rădăcini reale în k^2, în funcție de η_c și η_t. Pentru fiecare dintre aceste rădăcini rezultă din (11)

$$\eta_s = \mathrm{i}\,(\pm k - \eta_\omega).$$

Întrucît η_ω este real, exponentul η_s al funcției de timp va fi pur imaginar și se obțin mișcări stabile. Pentru fiecare valoare a lui k^2 se obțin doi exponenți reali :

$$\eta_{\nu_1} = k - \eta_\omega, \qquad \eta_{\nu_2} = -(k + \eta_\omega) \quad (19)$$

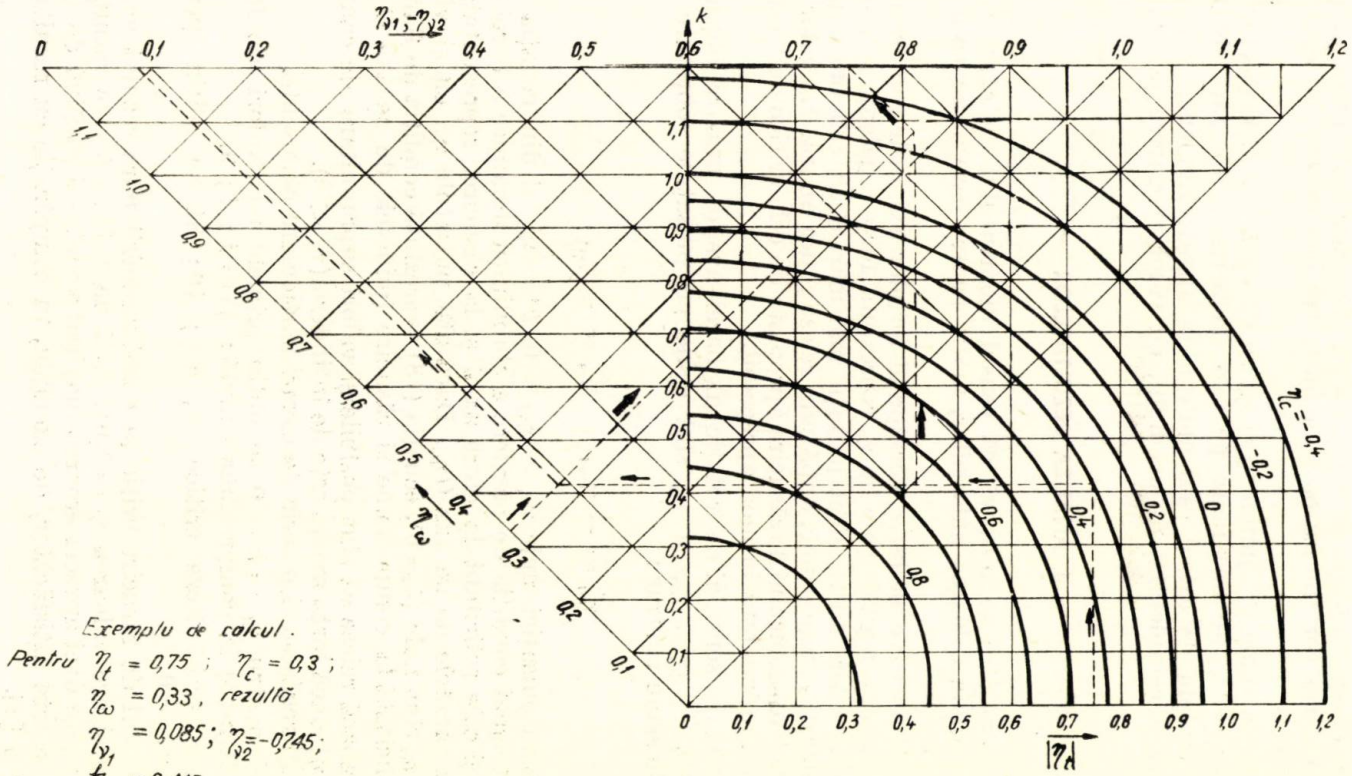
și fiecare mod de vibrație al barei va fi dat de ecuația

$$T(\tau) = Ae^{\mathrm{i}\eta_{\nu_1}\tau} + Be^{\mathrm{i}\eta_{\nu_2}\tau}, \quad (20)$$

fiind rezultatul suprapunerii a două mișcări armonice care au pulsațiile adimensionale $|\eta_{\nu_1}|$, respectiv $|\eta_{\nu_2}|$.

Cele trei valori ale lui k^2 obținute din ecuația (18′) dau primele trei moduri de vibrație ale barei.

Ecuația (18′) a fost rezolvată pentru valori ale forței axiale adimensionale η_c cuprinse între $-0{,}4$ și 1, și ale momentului de răsucire adimensional η_t cuprinse între 0 și 1,2. Rădăcinile minime corespund pulsațiilor



Exemplu de calcul.

Pentru $\eta_t = 0,75$; $\eta_c = 0,3$;
$\eta_\omega = 0,33$, *rezultă*
$\eta_{v1} = 0,085$; $\eta_{v2} = -0,745$;
$k = 0,415$

Fig. 3

fundamentale, care au fost reprezentate în abacă în funcție de η_c, η_t și η_ω. Curbele corespund forței axiale η_c const. Axa perpendiculară pe $O|\eta_t|$ reprezintă valorile corespunzătoare ale lui k, iar pe axa $O|\eta_t|$ se suprapun valorile lui $-k$.

Pentru ca suma mărimilor η_ν și η_ω să fie egală cu k, respectiv $-k$ valorile lui η_ν și η_ω au fost luate pe axe înclinate la 45° față de $O|\eta_t|$.

Un exemplu de calcul este indicat în abacă. Evident, la nevoie, abaca poate fi completată, de exemplu, cu valori negative pentru η_{ν_1}.

4. ANALIZA REZULTATELOR

În relația (18) se observă că sensul momentului de răsucire nu schimbă cu nimic valoarea pulsațiilor, motiv pentru care în abacă a fost trecut în modul.

Valorile pozitive ale lui η_c corespund forțelor axiale de compresiune, în timp ce valorile negative ale lui η_c reprezintă forțe axiale de întindere. Forțele de întindere au ca efect pulsații mai mari decît cele obținute în cazul forțelor de compresiune, după cum reiese și din abacă. La valori ale forței axiale și momentului de răsucire apropiate de cele critice de flambaj, pulsația este influențată în mod apreciabil.

Schimbarea sensului de rotație al barei are ca urmare obținerea pulsațiilor $|\eta'_{\nu_1}|$ și $|\eta'_{\nu_2}|$. η'_{ν_1} și η'_{ν_2} sînt egale cu pulsațiile obținute mai sus, însă de semn contrar :

$$\eta'_{\nu_1} = -\eta_{\nu_2}, \qquad \eta'_{\nu_2} = -\eta_{\nu_1}. \tag{21}$$

În cazul pulsației nule $\eta_{\nu_1} = \eta_{\nu_2} = 0$, $k^2 = \eta_\omega^2$ și din ecuația (18) se obține tocmai condiția de pierdere a stabilității dinamice a barei care se rotește și este solicitată la efort axial și la răsucire, reprezentată în abacă prin punctele de pe axa $O\eta_\omega$. Dacă atît pulsațiile η_ν, cît și viteza de rotație η_ω sînt nule ($k = 0$), ecuația (18) reprezintă condiția de flambaj a barei solicitată la compresiune și răsucire (punctele de pe axa $O|\eta_t|$).

Din abacă reiese că sînt posibile și valori supraunitare ale cantităților η_t și η_ω dacă forța axială este de întindere ($\eta_c < 0$).

Se mai regăsesc și o serie de cazuri particulare cunoscute.

Astfel pentru $\eta_t = k = 0$ se obțin primele trei valori ale forței critice de flambaj la compresiune simplă : $\eta_c = 1\,;\ 4\,;\ 9$.

Primele trei viteze critice $\eta_\omega = 1\,;\ 16\,;\ 81$ se obțin pentru $\eta_c = \eta_t = \eta_\nu = 0$.

Momentul de răsucire critic în cazul răsucirii pure rezultă pentru $\eta_c = k = 0$ și are valoarea $\eta_t = 1{,}01$, față de 1 [4] cît este rezultatul exact. Se poate deci aprecia eroarea maximă a metodei ca fiind de circa 1%, ceea ce este satisfăcător, de exemplu, în comparație cu rezultatele din lucrarea [9].

Primele trei viteze critice ale arborilor comprimați se obțin pentru $\eta_t = \eta_\nu = 0$, ecuația (18) devenind

$$(\eta_\omega^2 + \eta_c - 1)\,(\eta_\omega^2 + 4\eta_c - 16)\,(\eta_\omega^2 + 9\eta_c - 81) = 0.$$

În general se poate studia efectul prezenței oricăror doi sau trei dintre cei patru factori η_c, η_t, η_ω și η_ν.

Observînd că curbele din abacă se apropie de cercuri avînd alura unor elipse cu excentricitatea mică și cu axa mare pe bisectoarea întîi, se poate utiliza formula aproximativă acoperitoare

$$(\eta_\nu + \eta_\omega)^2 = 1 - \eta_c - \eta_t^2 \tag{22}$$

în locul ecuației (18) pentru calculul pulsațiilor fundamentale $|\eta_\nu|$ sau pentru condiția de pierdere a stabilității barei dacă $\eta_\nu = 0$, avînd o eroare destul de mică.

5. EFECTUL AMORTIZĂRII

Presupunînd, așa cum este uzual, că amortizarea este produsă de o forță rezistentă proporțională cu viteza, expresiile (1) vor fi înlocuite prin

$$\left.\begin{aligned} q_x &= \mu\,\omega^2 u - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\mu\omega\frac{\partial v}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} \\ q_y &= \mu\omega^2 v - \mu\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2\,\mu\omega\frac{\partial u}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial v}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

care, înlocuite în (2), conduc la sistemul de ecuații diferențiale

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^4 u}{\partial\zeta^4} + \frac{M_t l}{\pi EI}\frac{\partial^3 v}{\partial\zeta^3} + \frac{Pl^2}{\pi^2 EI}\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2} - \frac{\mu l^4}{\pi^4 EI}\omega^2 u + \\ &+ \frac{\mu l^4}{\pi^4 EI}\omega_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2} - 2\frac{\mu l^4}{\pi^4 EI}\omega\omega_0\frac{\partial v}{\partial\tau} + \frac{\mu l^4}{\pi^4 EI}\varepsilon\omega_0\frac{\partial u}{\partial\tau} = 0 \\ &\frac{\partial^4 v}{\partial\zeta^4} - \frac{M_t l}{\pi EI}\frac{\partial^3 u}{\partial\zeta^3} + \frac{Pl^2}{\pi^2 EI}\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta^2} - \frac{\mu l^4}{\pi^4 EI}\omega^2 v + \\ &+ \frac{\mu l^4}{\pi^4 EI}\omega_0^2\frac{\partial^2 v}{\partial\tau^2} + 2\frac{\mu l^4}{\pi^4 EI}\omega\omega_0\frac{\partial u}{\partial\tau} + \frac{\mu l^4}{\pi^4 EI}\varepsilon\omega_0\frac{\partial v}{\partial\tau} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Utilizînd aceleași notații ca la nr. 2, se ajunge la ecuația diferențială a deplasării complexe

$$r^{IV} - i2\eta_t r''' + \eta_c r'' - \eta_\omega^2 r + \ddot{r} - i2\eta_\omega \dot{r} + \eta_\varepsilon \dot{r} = 0. \tag{25}$$

Înlocuind soluţia de forma (9'), se obţine ecuaţia diferenţială în variabila ζ

$$R^{IV} - i\,2\eta_t\,R''' + \eta_c\,R'' - (\eta_\omega^2 - \eta_s^2 + i\,2\eta_\omega\,\eta_s - \eta_\varepsilon\,\eta_s)\,R = 0,$$

care poate fi pusă sub forma

$$R^{IV} - i\,2\eta_t\,R''' + \eta_c\,R'' - k_1^2\,R = 0 \tag{26}$$

dacă se notează

$$k_1^2 = (\eta_\omega + i\,\eta_s)^2 - \eta_\varepsilon\,\eta_s. \tag{27}$$

Ecuaţia (26) este identică cu (12), care a fost rezolvată cu ajutorul metodei lui Galerkin, deci valorile lui k_1 se pot citi în abacă pe axa ordonatelor în funcţie de η_c şi η_t.

Trebuie însă cercetată stabilitatea mişcării dată de ecuaţia (25). Din (27) se obţine exponentul funcţiei de timp

$$\eta_s = i\,\eta_\omega - \frac{1}{2}\,\eta_\varepsilon \pm \sqrt{\frac{1}{4}\,\eta_\varepsilon^2 - k_1^2 - i\,\eta_\omega\,\eta_\varepsilon}. \tag{28}$$

Mişcarea este stabilă dacă partea reală a lui η_s este negativă sau nulă

$$\mathcal{R}\,\eta_s \leqslant 0. \tag{29}$$

η_ω şi η_ε sînt cantităţi reale, iar în cazul barei studiate k_1 este de asemenea real. Aplicînd formula lui Moivre expresiei de sub radical, se găseşte

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{R}\eta_s &= -\frac{1}{2}\,\eta_\varepsilon \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\,\eta_\varepsilon^2 - k_1^2\right)^2 + \eta_\omega^2\,\eta_\varepsilon^2} + \frac{1}{4}\,\eta_\varepsilon^2 - k_1^2}\\ \mathcal{J}\eta_s &= \eta_\omega \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\,\eta_\varepsilon^2 - k_1^2\right)^2 + \eta_\omega^2\,\eta_\varepsilon^2} - \frac{1}{4}\,\eta_\varepsilon^2 + k_1^2}.\end{aligned}\right\}$$

După efectuarea calculelor, condiţia de stabilitate a mişcării (29) capătă forma

$$\eta_\omega^2 \leqslant k_1^2. \tag{30}$$

În alte cazuri de rezemare, k_1 poate avea valori complexe. Atunci condiţia de stabilitate a mişcării se poate deduce cu uşurinţă:

$$(\mathcal{J}k_1^2 - \eta_\omega\,\eta_\varepsilon)^2 \leqslant \eta_\varepsilon^2\,\mathcal{R}\,k_1^2.$$

În tabelele 1—12 sînt date valorile lui $\mathcal{R}\,\eta_s$ şi $\mathcal{J}\eta_s$ în funcţie de k_1, η_ω şi η_ε.

Tabela 1

$\eta_\varepsilon = 0{,}01$

k_1	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$ / $\mathcal{J}\eta_{s_1}$	η_ω							
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
0	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0							
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0							
0,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,005	0,005						
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,2	0,4						
0,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,005	0,005	0,005					
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,4	0,6	0,8					
0,6	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,005	0,005	0,005	0,005				
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,6	0,8	1,0	1,2				
0,8	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005			
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6			
1,0	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005		
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0		
1,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	
1,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8

Tabela 2

$\eta_\varepsilon = 0{,}01$

k_1	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$ / $\mathcal{J}\eta_{s_2}$	η_ω							
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
0	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,01							
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	0							
0,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,005	0,005						
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,2	0						
0,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,005	0,005	0,005					
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,4	−0,2	0					
0,6	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,005	0,005	0,005	0,005				
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,6	−0,4	−0,2	0				
0,8	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005			
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,8	−0,6	−0,4	−0,2	0			
1,0	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005		
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−1,0	−0,8	−0,6	−0,4	−0,2	0		
1,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−1,2	−1,0	−0,8	−0,6	−0,4	−0,2	0	
1,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−1,4	−1,2	−1,0	−0,8	−0,6	−0,4	−0,2	0

Tabela 3

$\eta_\varepsilon = 0{,}1$

k_1	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$ / $\mathcal{J}\eta_{s_1}$	η_ω							
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
0	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0							
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0							
0,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,05	0						
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,194	0,4						
0,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,05	0,0245	0					
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,397	0,598	0,8					
0,6	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,05	0,0327	0,0168	0				
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,598	0,798	0,999	1,2				
0,8	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,05	0,0378	0,0245	0,0126	0			
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,798	0,998	1,199	1,399	1,6			
1,0	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,05	0,04	0,03	0,02	0,00937	0		
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,999	1,199	1,399	1,599	1,800	2,0		
1,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,05	0,0442	0,0342	0,0226	0,0146	0,0082	0	
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	1,2	1,399	1,599	1,799	1,999	2,198	2,4	
1,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,05	0,0442	0,0342	0,0342	0,0226	0,0146	0,0082	0
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	1,4	1,599	1,799	1,999	2,199	2,399	2,6	2,8

Tabela 4

$\eta_\varepsilon = 0{,}1$

k_1	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$ / $\mathcal{J}\eta_{s_2}$	η_ω							
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
0	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,1							
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	0							
0,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,05	0,1						
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,194	0						
0,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,05	0,0755	0,1					
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,397	−0,198	0					
0,6	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,05	0,0673	0,0832	0,1				
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,598	−0,398	−0,199	0				
0,8	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,05	0,0622	0,0755	0,0874	0,1			
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,798	−0,598	−0,399	−0,199	0			
1,0	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,0906	0,1		
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,999	−0,799	−0,599	−0,399	−0,2	0		
1,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,05	0,0658	0,0658	0,0774	0,0854	0,0918	0,1	
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−1,2	−0,999	−0,799	−0,599	−0,399	−0,198	0	
1,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,05	0,0658	0,0658	0,0658	0,0774	0,0854	0,0918	0,1
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−1,4	−1,999	−0,999	−0,799	−0,599	−0,399	−0,2	0

Tabela 5

$\eta_\varepsilon = 0{,}25$

k_1	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$ / $\mathcal{J}\eta_{s_1}$	η_ω = 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
0	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0							
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0							
0,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,125	0						
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,156	0,4						
0,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,125	0,0601	0					
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,380	0,585	0,8					
0,6	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,125	0,083	0,0407	0				
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,587	0,788	0,993	1,2				
0,8	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,125	0,0932	0,0621	0,0306	0			
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,790	0,991	1,19	1,40	1,6			
1,0	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,125	0,100	0,0749	0,0498	0,0259	0		
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,992	1,193	1,39	1,60	1,80	2,0		
1,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,125	0,107	0,0824	0,0632	0,0425	0,021	0	
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	1,194	1,40	1,59	1,80	2,00	2,20	2,4	
1,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,125	0,107	0,0888	0,072	0,0521	0,0366	0,0186	0
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	1,394	1,60	1,76	2,01	2,20	2,40	2,60	2,8

Tabela 6

$\eta_\varepsilon = 0{,}25$

k_1	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$ / $\mathcal{J}\eta_{s_2}$	η_ω = 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
0	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,25							
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	0							
0,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,125	0,25						
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,156	0						
0,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,125	0,190	0,25					
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,380	−0,185	0					
0,6	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,125	0,167	0,209	0,25				
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,587	−0,388	−0,193	0				
0,8	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,125	0,157	0,188	0,219	0,25			
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,790	−0,591	−0,393	−0,196	0			
1,0	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,125	0,150	0,175	0,200	0,224	0,25		
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,992	−0,793	−0,593	−0,395	−0,197	0		
1,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,125	0,143	0,168	0,187	0,208	0,229	0,25	
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−1,194	−1,00	−0,794	−0,595	−0,396	−0,198	0	
1,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,125	0,143	0,161	0,178	0,198	0,213	0,231	0,25
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−1,394	−1,20	−0,959	−0,813	−0,596	−0,397	−0,198	0

Tabela 7
$\eta_\varepsilon = 0{,}5$

k_1	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$ / $\mathcal{J}\eta_{s_1}$	η_ω = 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
0	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0							
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0							
0,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,10	0						
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0	0,4						
0,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,25	0,105	0					
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,312	0,544	0,8					
0,6	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,25	0,150	0,0754	0				
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,545	0,753	0,973	1,2				
0,8	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,25	0,184	0,120	0,059	0			
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,760	0,963	1,17	1,38	1,6			
1,0	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,25	0,198	0,147	0,097	0,0481	0		
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	0,968	1,17	1,37	1,58	1,79	2,0		
1,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,25	0,208	0,165	0,123	0,0819	0,0592	0	
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	1,174	1,37	1,58	1,78	1,99	2,19	2,4	
1,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,25	0,215	0,178	0,142	0,106	0,0704	0,0349	0
	$\mathcal{J}\eta_{s_1}$	1,378	1,58	1,78	1,98	2,19	2,39	2,59	2,8

Tabela 8
$\eta_\varepsilon = 0{,}5$

k_1	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$ / $\mathcal{J}\eta_{s_2}$	η_ω = 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
0	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,5							
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	0							
0,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,40	0,5						
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	0	0						
0,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,25	0,395	0,5					
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,312	−0,144	0					
0,6	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,25	0,340	0,425	0,5				
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,545	−0,353	−0,173	0				
0,8	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,25	0,316	0,38	0,441	0,5			
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,760	−0,563	−0,371	−0,184	0			
1,0	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,25	0,302	0,353	0,403	0,452	0,5		
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−0,968	−0,770	−0,574	−0,380	−0,189	0		
1,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,25	0,292	0,335	0,378	0,418	0,459	0,5	
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−1,174	−0,974	−0,777	−0,581	−0,386	−0,192	0	
1,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,25	0,285	0,323	0,358	0,394	0,430	0,465	0,5
	$\mathcal{J}\eta_{s_2}$	−1,378	−1,18	−0,979	−0,782	−0,585	−0,389	−0,194	0

Tabela 9
$\eta_\varepsilon = 0{,}75$

k_1	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$ / $\mathcal{I}\eta_{s_1}$	η_ω 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
0	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0							
	$\mathcal{I}\eta_{s_1}$	0							
0,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,0578	0						
	$\mathcal{I}\eta_{s_1}$	0	0,4						
0,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,375	0,118	0					
	$\mathcal{I}\eta_{s_1}$	0,139	0,492	0,8					
0,6	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,375	0,223	0,099	0				
	$\mathcal{I}\eta_{s_1}$	0,468	0,693	0,934	1,2				
0,8	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,375	0,270	0,171	0,0803	0			
	$\mathcal{I}\eta_{s_1}$	0,707	0,914	1,14	1,37	1,6			
1,0	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,375	0,294	0,216	0,140	0,0679	0		
	$\mathcal{I}\eta_{s_1}$	0,927	1,193	1,34	1,58	1,78	2,0		
1,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,375	0,309	0,243	0,181	0,119	0,0539	0	
	$\mathcal{I}\eta_{s_1}$	1,14	1,34	1,55	1,76	1,97	2,18	2,4	
1,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,375	0,317	0,264	0,210	0,155	0,102	0,0505	0
	$\mathcal{I}\eta_{s_1}$	1,35	1,55	1,75	1,96	2,17	2,38	2,59	2,8

Tabela 10
$\eta_\varepsilon = 0{,}75$

k_1	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$ / $\mathcal{I}\eta_{s_2}$	η_ω 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
0	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,75							
	$\mathcal{I}\eta_{s_2}$	0							
0,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,692	0,75						
	$\mathcal{I}\eta_{s_2}$	0	0						
0,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,375	0,632	0,75					
	$\mathcal{I}\eta_{s_2}$	−0,139	−0,092	0					
0,6	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,375	0,527	0,651	0,75				
	$\mathcal{I}\eta_{s_2}$	−0,468	−0,293	−0,134	0				
0,8	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,375	0,480	0,579	0,669	0,75			
	$\mathcal{I}\eta_{s_2}$	−0,707	−0,514	−0,336	−0,165	0			
1,0	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,375	0,456	0,534	0,610	0,682	0,75		
	$\mathcal{I}\eta_{s_2}$	−0,927	−0,731	−0,541	−0,382	−0,177	0		
1,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,375	0,441	0,507	0,570	0,631	0,696	0,75	
	$\mathcal{I}\eta_{s_2}$	−1,14	−0,942	−0,747	−0,556	−0,368	−0,183	0	
1,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,375	0,433	0,486	0,540	0,595	0,648	0,700	0,75
	$\mathcal{I}\eta_{s_2}$	−1,35	−1,15	−0,953	−0,759	−0,567	−0,376	−0,187	0

Tabela 11

$\eta_\varepsilon = 1{,}0$

k_1	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$ / $\mathcal{I}\eta_{s_1}$	η_ω							
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
0	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0							
	$\mathcal{I}\eta_{s_1}$	0							
0,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,042	0						
	$\mathcal{I}\eta_{s_1}$	0	0,4						
0,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,200	0,107	0					
	$\mathcal{I}\eta_{s_1}$	0	0,454	0,8					
0,6	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,5	0,257	0,110	0				
	$\mathcal{I}\eta_{s_1}$	0,332	0,611	0,912	1,2				
0,8	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,5	0,345	0,210	0,0965	0			
	$\mathcal{I}\eta_{s_1}$	0,624	0,844	1,09	1,344	1,6			
1,0	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,5	0,386	0,276	0,183	0,0835	0		
	$\mathcal{I}\eta_{s_1}$	0,866	1,07	1,29	1,52	1,75	2,0		
1,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,5	0,408	0,320	0,233	0,151	0,0734	0	
	$\mathcal{I}\eta_{s_1}$	1,09	1,30	1,51	1,72	1,95	2,17	2,4	
1,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_1}$	0,5	0,423	0,348	0,274	0,202	0,132	0,0647	0
	$\mathcal{I}\eta_{s_1}$	1,31	1,51	1,72	1,93	2,14	2,36	2,58	2,8

Tabela 12

$\eta_\varepsilon = 1{,}0$

k_1	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$ / $\mathcal{I}\eta_{s_2}$	η_ω							
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
0	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	1,0							
	$\mathcal{I}\eta_{s_2}$	0							
0,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,958	1,0						
	$\mathcal{I}\eta_{s_2}$	0	0						
0,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,8	0,893	1,0					
	$\mathcal{I}\eta_{s_2}$	0	−0,0543	0					
0,6	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,5	0,743	0,890	1,0				
	$\mathcal{I}\eta_{s_2}$	−0,332	−0,211	−0,112	0				
0,8	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,5	0,655	0,790	0,904	1,0			
	$\mathcal{I}\eta_{s_2}$	−0,624	−0,444	−0,289	−0,144	0			
1,0	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,5	0,614	0,724	0,817	0,917	1,0		
	$\mathcal{I}\eta_{s_2}$	−0,866	−0,674	−0,494	−0,322	−0,151	0		
1,2	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,5	0,592	0,680	0,767	0,849	0,927	1,0	
	$\mathcal{I}\eta_{s_2}$	−1,09	−0,895	−0,706	−0,523	−0,345	−0,171	0	
1,4	$-\mathcal{R}\eta_{s_2}$	0,5	0,578	0,652	0,726	0,798	0,868	0,935	1,0
	$\mathcal{I}\eta_{s_2}$	−1,31	−1,11	−0,916	−0,727	−0,541	−0,359	−0,178	0

6. CONCLUZII

Lucrarea de față constituie o generalizare a cazurilor studiate în literatură. Ca rezultat nou se obține expresia pulsației oscilațiilor transversale în funcție de momentul de răsucire, luat separat sau combinat cu acțiunea simultană a forței axiale și a vitezei de rotație a barei. Se arată că prezența momentului de răsucire, ca și a celorlalți factori, are ca efect micșorarea frecvențelor de oscilație atîta timp cît forța axială produce compresiune. În schimb, acțiunea unei forțe de întindere, ceea ce corespunde lui $\eta_c < 0$, determină creșterea acestor frecvențe, după cum rezultă și din abacă.

Amortizarea are ca efect modificarea frecvențelor, iar în anumite condiții mișcarea poate deveni instabilă.

Primită la redacția la 7 iulie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. S. Timoshenko, *Théorie de la Stabilité Élastique*. Paris et Liège, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 1947.
2. C. B. Biezeno, R. Grammel, *Technische Dynamik*. 2. Auflage, Berlin, Springer-Verlag, 1953.
3. А. Н. Динник, *Продольный изгиб, кручение*. Москва, Изд. АН СССР, 1955.
4. С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев, В. М. Макушин, Н. Н. Малинин В. И. Феодосьев, *Расчеты на прочность в машиностроении*. Том III, Москва, Машгиз, 1959.
5. В. В. Болотин, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*. Москва, Физматгиз. 1961.
6. H. Ziegler, *Stabilitätsprobleme bei geraden Stäben und Wellen*. ZAMP., II, 265 (1951).
7. — *Knickung gerader Stäbe unter Trosion*. ZAMP, III, 96 (1952).
8. — *On the Concept of Elastic Stability*. Advanced in Applied Mechanics, New-York, IV, 1956.
9. A. Tröesch, *Stabilitätsprobleme bei tordierten Stäben und Wällen*. Ingenieur-Archiv, **20**, 258 (1952).
10. M. Beck, *Knickung gerader Stäbe durch Druck und konservative Torsion*. Ingenieur-Archiv, **23**, 231 (1953).
11. R. Voinea, D. Craifaleanu, *Asupra turației critice a arborilor*. St. cerc. mec. apl. **15**, 2 (1964).

ASUPRA TRENURILOR DIFERENȚIALE ȘI A FOLOSIRII LOR ÎN LEGĂTURĂ CU VARIATOARELE DE VITEZĂ [1)]

de EUG. BUGAJEWSKI
Institutul de petrol, gaze și geologie, București

531.1

În lucrare se analizează unele aspecte ale trenurilor diferențiale și se stabilesc relații cinematice cu caracter general, independent de poziția elementelor de intrare și de ieșire, în scopul analizării cinematice a comportării acestora în situația modificării raportului de transmitere între două elemente inițiale. Se studiază variația raportului de transmitere total, cu concluzii asupra folosirii diferențialelor în scopul modificării unui raport de transmitere dat și deci a modificării caracteristicilor unui variator. De asemenea se dau relații generale privind mărimile caracteristice ale unei game de variație a raportului de transmitere pentru un ansamblu variator de viteză cu diferențial.
Lucrarea tratează numai aspectul cinematic al problemei și urmează a fi continuată cu o cercetare cu aspect dinamic.

1. CONSIDERAȚII STRUCTURALE ASUPRA TRENURILOR DIFERENȚIALE

Trenurile de angrenaje diferențiale au o importanță deosebită sub aspectul combinațiilor cinematice posibile, datorită în primul rînd gradului lor de mobilitate supraunitar și a alcătuirii lor numai din elemente în rotație, ceea ce asigură, pe lîngă o construcție simplă și robustă, realizarea unor stări de regim dorite cu viteze unghiulare practic constante pe durată nelimitată.

Întrucît combinațiile posibile de roți pentru alcătuirea mecanismelor diferențiale sînt foarte variate, apare că diferitele tipuri urmează să fie studiate separat după specificul lor, ceea ce de fapt se și face în lucrările de specialitate, aplicîndu-se metodele cunoscute din teoria mecanismelor fiecărui caz în parte.

[1)] Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, *2* (1966) (în limba germană).

Există, totuși, posibilitatea de a reduce studiul unui diferențial oarecare la studiul celui mai simplu tip, combinînd apoi rezultatele după legile cunoscute ale legării mecanismelor între ele. Pentru aceasta este necesar să se arate că un mecanism diferențial oarecare se poate descompune sau rezultă din compunerea de diferențiale simple, în care un element

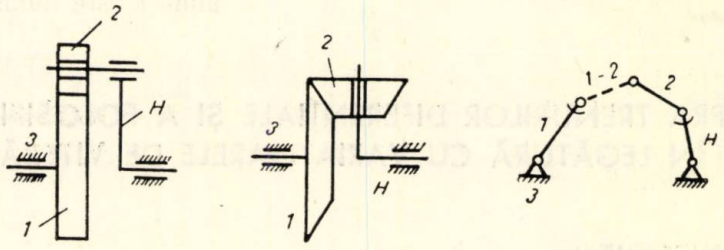


Fig. 1 *a*, *b*, *c*

condus al unuia produce antrenarea elementului conducător al altuia și așa mai departe.

Cel mai simplu tren diferențial, trebuind să aibă roți cu mișcare de revoluție, se compune dintr-o asemenea roată (satelit), o roată cu axul fix (solară sau centrală), pe care aceasta se rostogolește și brațul portsatelit, care asigură contactul între elementele cinematice menționate (fig. 1 *a* și *b*). Schema structurală a acestui diferențial se arată în fig. 1 *c*. Atît această schemă (prin descompunerea ei), cît și formula lui Cebîșev, pentru cazul plan (fig. 1 *a*), sau a lui Dobrovolski, pentru cazul spațial (fig. 1 *b*), ne arată că acest mecanism are gradul de mobilitate

$$M = (6-f)\ (m-1) - \sum_{j=f+1}^{5} (j-f)\ c_j = (6-3)\ (m-1) - c_4 - 2c_5 =$$

$$= 3\ (4-1) - 1 - 2 \times 3 = 2, \qquad (1)$$

unde cu m s-a notat numărul de elemente, c_j este numărul de cuple de clasa j, iar f numărul de restricții inițiale (familia mecanismului).

Se observă că, datorită posibilității de angrenare și necesității de coaxialitate între roata solară și brațul portsatelit, mecanismul acesta simplu trebuie să fie de familia a treia, adică $f = 3$ (plan sau spațial).

Pentru ca acest mecanism să poată fi utilizat este necesar ca trei elemente să aibă axele fixe (următor gradului de mobilitate 2) pentru a fi puse în legătură cu alte elemente exterioare acestei „grupe diferențiale elementare". Cel mai simplu mod de realizare a acestui deziderat constă în adăugarea unei roți cu axă fixă în contact cu roata satelită, care în grupa arătată este al treilea element ce trebuie legat de exterior. Roata suplimentară este însă în mod necesar tot o roată solară, coaxială cu prima și cu brațul, deoarece trebuie să angreneze permanent cu elementul satelit, fie direct (fig. 2 *a*), fie printr-o roată suplimentară, tot satelită, însă solidară cu prima (fig. 2 *b*) (așa încît nu formează un element nou). Mecanismele diferențiale simple astfel obținute au fost prezentate în fig. 2 *a*

și *b* numai pentru cazul plan, întrucît cazul spațial nu diferă esențial ca studiu, și de acum înainte se vor face exemplificările numai pe acest caz pentru simplificare, rezultatele extinzîndu-se în cazul spațial, datorită familiei comune ($f = 3$) a diferențialelor.

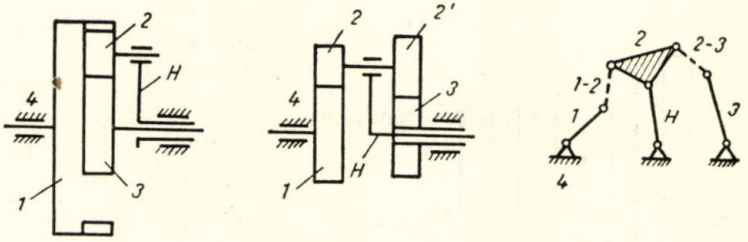


Fig. 2 *a*, *b*, *c*

Structural, se vede în figura 2 *c* că mecanismele din figura 2 *a* și *b* rezultă din „grupa diferențială" din figura 1 *a* și *b* prin adăugarea unei diade, ceea ce nu modifică gradul de mobilitate inițial (se poate verifica și prin formula structurală).

Din aceste mecanisme simple se pot obține toate combinațiile diferențiale posibile, legînd elementele cu axe fixe sau chiar satelite, fie de trenuri cu axe fixe, fie de alte diferențiale de tipul celor arătate.

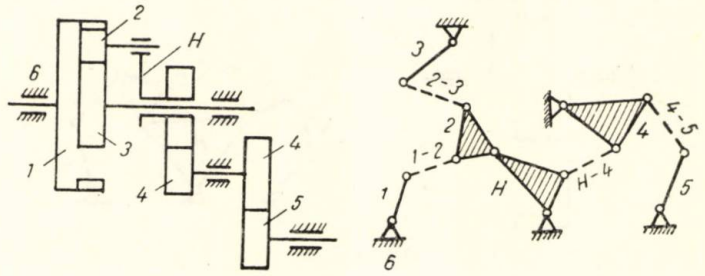


Fig. 3 *a*, *b*

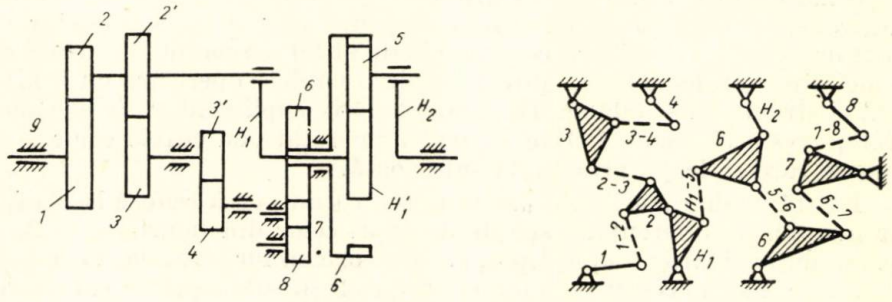


Fig. 4 *a*, *b*

În figurile 3 *a*, *b* și 4 *a*, *b* sînt date două asemenea exemple cu schemele structurale aferente, din care se vede că este posibilă descompu-

nerea în grupuri, fie toate de tip diferențial, fie cu unele de tip cu axe fixe, fiind deci posibil studiul lor prin părți componente.

De fapt, descompunerea se poate face mai simplu fără a utiliza schema structurală, „desfăcînd" sau „rupînd" o cuplă superioară oarecare

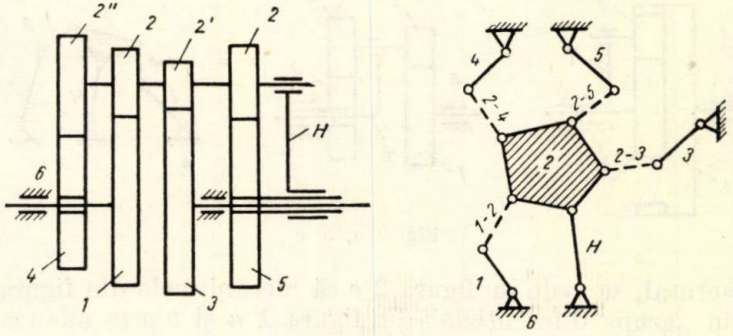


Fig. 5 *a*, *b*

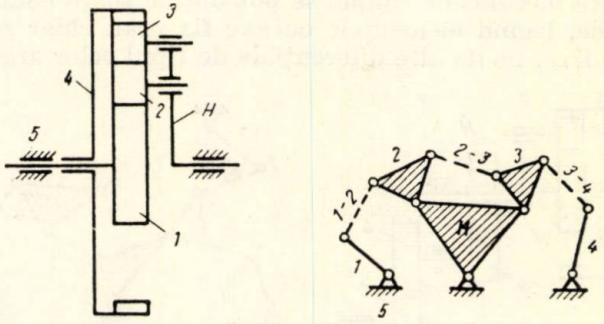


Fig. 6 *a*, *b*

și socotind elementul din partea grupului situat mai aproape de motorul de antrenare o dată ca condus (în acest grup) și apoi ca conducător (în grupul următor). Acest lucru corespunde de altfel descompunerii clasice a schemei structurale, întrucît prin înlocuirea cuplei superioare cu echivalentul ei structural se adaugă un element fictiv suplimentar. În schemele arătate, aceste elemente fictive au fost numerotate cu cifrele celor două elemente care se leagă prin cupla superioară.

Există unele cazuri care fac impresia că nu pot fi reduse la studiul unor mecanisme diferențiale simple de tipul celor din figurile 1 și 2, ca de exemplu în figurile 5 *a*, *b* și 6 *a*, *b*. Din schema lor structurală se vede însă că acestea au același grad de mobilitate 2 și, sub aspectul caracteristicilor exterioare, se pot reduce la studiul unui diferențial simplu (care trebuie să cuprindă brațul portsatelit), de care sînt legate o serie de roți suplimentare (diade prin înlocuirea cuplelor superioare) a căror mișcare poate fi studiată fără dificultate.

În general se constată că gradul de mobilitate al unui mecanism diferențial complex depinde de numărul brațelor portsatelit, următor formulei

$$M = 2\ b - (b - 1) = \underline{b + 1}, \tag{2}$$

unde b este numărul brațelor (fig. 4 *a* și *b*).

Acest lucru se arată prin faptul că fiecare diferențial simplu are gradul de mobilitate 2 și un braț, deci în total $2b$ grade, iar pentru legarea între ele sînt necesare $b - 1$ cuple superioare (între roți), întrucît legarea brațelor între ele nu s-ar putea face decît prin unificare (adică dispariția cîte unui braț). În cazul legării brațelor prin cuple inferioare sau cu elemente intermediare și cuple superioare s-ar ajunge în domeniul mecanismelor cu bare articulate, care se știe că se pot studia prin descompunere (asemenea cazuri sînt însă aproape inexistente, dat fiind că mecanismele diferențiale se realizează tocmai pentru transformarea rotațiilor, evitîndu-se barele articulate).

2. CONSIDERAȚII CINEMATICE GENERALE

Din cele arătate rezultă că studiul oricărui mecanism diferențial se poate fundamenta pe rezultatele obținute la mecanismul simplu (plan sau spațial), conform figurilor 1 și 2, ceea ce justifică, de altfel, extinderea mare a studiului acestui mecanism, întîlnită în toate tratatele de specialitate.

În studiul mecanismelor diferențiale complexe se pot folosi astfel, fără restricții, relațiile generale cunoscute în cazul legării mecanismelor în serie sau cu ramificații.

★

Una dintre posibilitățile de studiu cinematic ale mecanismelor diferențiale pornește de la formula cunoscută a lui Willis, bazată pe aplicarea legilor mișcării relative în cazul rotațiilor. Această relație poate fi scrisă, pentru generalitate, adoptînd indicii x, y, z pentru cele trei elemente legate cu exteriorul, brațul portsatelit putînd fi oricare din ele (conf. schemei de principiu a unui diferențial cu $M = 2$, ca în fig. 7 *a* și *b*). Astfel, notînd cu indice superior elementul care apare fix printr-o rotație fictivă contrară dată întregului ansamblu, formula generalizată a lui Willis se poate scrie

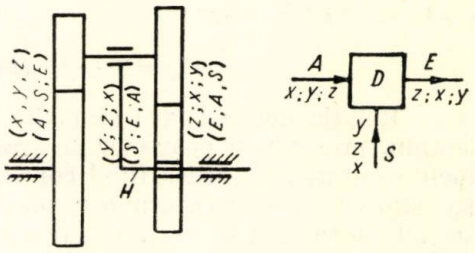


Fig. 7 *a*, *b*

$$i_{xy}^{z} = \frac{\omega_x - \omega_z}{\omega_y - \omega_z} = \frac{n_x - n_z}{n_y - n_z}. \tag{3}$$

Această relație se folosește frecvent și sub formele de mai jos, obținute :

— prin adăugarea și scăderea la numărător a lui n_y

$$i^z_{xy} = 1 - i^y_{xz} \text{ sau } i^z_{xy} + i^y_{xz} = 1 ; \tag{3'}$$

— rezolvînd relația în raport cu una dintre turații (de exemplu n_x) și folosind relația (3')

$$n_x = i^z_{xy} \cdot n_y + i^y_{xz} \cdot n_z . \tag{3''}$$

Aceste expresii se pot modifica formal prin permutări de indici pentru orice schimbare a rolului cinematic al elementelor inițiale.

Referitor la această relație se poate face observația interesantă că, pentru un diferențial simplu dat, *produsul rapoartelor de transmitere obținute cu relația lui Willis, considerînd pe rînd prin permutări circulare fiecare dintre cele trei elemente fix, este egal cu — 1*, adică

$$\boxed{i^x_{yz} \cdot i^y_{zx} \cdot i^z_{xy} = -1} . \tag{4}$$

Aceasta rezultă simplu din efectuarea produsului prin aplicarea formulei (3)

$$i^x_{yz} \cdot i^y_{zx} \cdot i^z_{xy} = \frac{n_y - n_x}{n_z - n_x} \cdot \frac{n_z - n_y}{n_x - n_y} \cdot \frac{n_x - n_z}{n_y - n_z} = -1.$$

Se observă că această relație este generală, fără nici o precizare asupra elementului care joacă rol de braț portsatelit. În această formulă, pentru un diferențial dat, unele dintre rapoartele de transmitere componente se pot calcula geometric simplu, în cazul cînd indicele superior este brațul, prin rapoartele razelor cercurilor de rostogolire sau ale numerelor de dinți (întrucît apare un tren cu axe fixe), iar altele, indirect, prin aplicarea formulei (3'), ca mai jos, unde s-a notat cu H brațul portsatelit și cu 1 și 2 roțile solare :

$$i^2_{1H} = 1 - i^H_{12} \text{ sau } i^1_{2H} = 1 - i^H_{21} .$$

Relația generală (4) se poate interpreta astfel : într-un diferențial simplu, produsul rapoartelor de transmitere posibile între cîte două elemente inițiale, al treilea fiind considerat fix (sau produsul rapoartelor de transmitere ale mecanismelor posibile prin fixarea cîte unui element inițial), este egal cu — 1. Rezultă că numărul acestor rapoarte negative trebuie să fie impar, în orice diferențial existînd deci cel puțin o posibilitate ca prin fixarea unui element să se obțină inversarea mișcării.

De asemenea relația (4) ușurează calculele cinematice, permițînd înlocuirea produsului a două rapoarte prin inversul celui de-al treilea după regula sinoptică simplă

$$\boxed{i^z_{xy} \cdot i^x_{yz} = -i^y_{xz}} . \tag{5}$$

Pentru evidențierea rolului elementelor inițiale vom nota elementul condus final (*ieșirea*) cu indicele E, iar elementele conducătoare cu A (de *antrenare*) și cu S (de antrenare *suplimentar*), oricare dintre ele putînd fi brațul portsatelit într-o situație dată (fig. 7 *a* și *b*). Astfel, relațiile (4) și (5) pot fi scrise

$$i^E_{AS} \cdot i^A_{SE} \cdot i^S_{EA} = -1, \tag{4'}$$

$$i^E_{AS} \cdot i^A_{SE} = -i^S_{AE}. \tag{5'}$$

Acționarea elementelor conducătoare se poate face sau independent, sau, pentru folosirea unui singur motor, unul dintre aceste elemente (notat de aceea S, *suplimentar*) se poate lega de unul dintre celelalte printr-o transmisie suplimentară.

Astfel există întotdeauna un raport de transmitere (i_{SA} sau i_{SE}) între elementul conducător suplimentar S și unul dintre celelalte elemente inițiale A sau E, fie că acesta este o caracteristică a unei transmisii reale între ele, fie că este numai imaginat, întrucît turațiile care-l definesc există mereu. Prin această observație se face imediat trecerea de la diferențialele simple la mecanismele compuse din diferențial și o transmisie suplimentară. Dintre acestea, un caz important este acela al folosirii unui variator între S și A, respectiv E, întrucît variatoarele au o gamă de rapoarte de transmitere redusă din motive organologice, care astfel se poate modifica convenabil.

Cazurile posibile de funcționare ale unui diferențial simplu sînt deci, în general, următoarele două :

I. Transmisie $A \rightarrow E$ cu legătură $S - A$.

II. Transmisie $A \rightarrow E$ cu legătură $S - E$.

Figura 8 *a* și *b* reprezintă schematic aceste cazuri, legătura suplimentară a elementului S fiind realizată printr-un variator V.

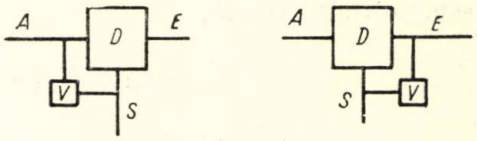


Fig. 8 *a*, *b*

Prin precizarea brațului port satelit între cele trei elemente inițiale, precum și a sensului de transmitere a mișcării, se pot deduce din aceste două cazuri toate modurile posibile de lucru ale unui diferențial, în număr de 12, conform tabelei de mai jos (unde s-a admis brațul portsatelit $H = y$), care în literatura de specialitate sînt tratate independent [9] :

		Sensul transmisiei	*Legătura suplimentară*
1)	$x \rightarrow z$	$(A = x;\ E = z)$	$x - H\ (S = y = H)$
2)	$x \rightarrow z$	$(A = x;\ E = z)$	$z - H\ (S = y = H)$
3)	$z \rightarrow x$	$(A = z;\ E = x)$	$z - H\ (S = y = H)$
4)	$z \rightarrow x$	$(A = z;\ E = x)$	$x - H\ (S = y = H)$
5)	$x \rightarrow H$	$(A = x:\ E = y = H)$	$x - z\ \ (S = z)$

6)	$x \to H$	$(A = x;\ E = y = H)$	$H - z\ (S = z)$
7)	$H \to x$	$(A = y = H;\ E = x)$	$H - z\ (S = z)$
8)	$H \to x$	$(A = y = H;\ E = x)$	$x - z\ (S = z)$
9)	$H \to z$	$(A = y = H;\ E = z)$	$H - x\ (S = x)$
10)	$H \to z$	$(A = y = H;\ E = z)$	$z - x\ (S = x)$
11)	$z \to H$	$(A = z;\ E = y = H)$	$z - x\ (S = x)$
12)	$z \to H$	$(A = z;\ E = y = H)$	$H - x\ (S = x)$

3. STUDIUL CINEMATIC GENERAL AL MECANISMULUI DIFERENȚIAL

Pentru cele două cazuri menționate (fig. 8 *a* și *b*) se pot stabili relații care dau viteza unghiulară sau turația la ieșire (E) în funcție de cea de intrare, de caracteristicile cinematice ale diferențialului și de raportul de transmitere al legăturii la elementul conducător suplimentar S, din care, prin înlocuiri simple, se pot găsi formulele deduse separat pentru cele 12 cazuri.

Aceste relații, deduse din formula Willis sub forma (3″) cu notațiile de indici adoptate, sînt date mai jos sub mai multe forme, alegîndu-se, după nevoie, cea mai convenabilă în fiecare situație :

— *pentru cazul I* :

$$n_E = n_A \cdot i^S_{EA}\,(1 - i^E_{AS} \cdot i_{SA}) = n_A \frac{1 - i^E_{AS} \cdot i_{SA}}{1 - i^E_{AS}} \tag{6}$$

sau, sub altă formă,

$$n_E = n_A \cdot i^A_{ES}\,(i_{SA} - i^E_{SA}) = n_A \frac{i_{SA} - i^E_{SA}}{1 - i^E_{SA}}; \tag{7}$$

— *pentru cazul II* :

$$n_E = n_A \frac{i^S_{EA}}{1 - i^A_{ES} \cdot i_{SE}} = n_A \frac{1 - i^A_{ES}}{1 - i^A_{ES} \cdot i_{SE}} \tag{8}$$

sau, sub altă formă,

$$n_E = n_A \frac{i^E_{SA}}{i_{SE} - i^A_{SE}} = n_A \frac{1 - i^A_{SE}}{i_{SE} - i^A_{SE}}\,. \tag{9}$$

Din aceste formule se pot găsi simplu expresiile rapoartelor de transmitere între arborele de intrare (A) și cel de ieșire (E), după cum urmează :

— *pentru cazul I* :

$$i_{AE} = \frac{n_A}{n_E} = \frac{i^S_{AE}}{1 - i^E_{AS} \cdot i_{SA}} = \frac{1 - i^E_{AS}}{1 - i^E_{AS} \cdot i_{SA}} \tag{6'}$$

sau

$$i_{AE} = \frac{i^A_{SE}}{i_{SA} - i^E_{SA}} = \frac{1 - i^E_{SA}}{i_{SA} - i^E_{SA}}; \tag{7'}$$

— *pentru cazul II*:

$$i_{AE} = i^S_{AE}(1 - i^A_{ES} \cdot i_{SE}) = \frac{1 - i^A_{ES} \cdot i_{SE}}{1 - i^A_{ES}} \tag{8'}$$

sau

$$i_{AE} = i^E_{AS}(i_{SE} - i^A_{SE}) = \frac{i_{SE} - i^A_{SE}}{1 - i^A_{SE}}. \tag{9'}$$

★

Cu ajutorul relațiilor (6') și (8') sau (7') și (9') se poate găsi condiția de echivalență între cazurile I și II, adică legătura între i_{SA} și i_{SE} pentru ca să se obțină același i_{AE} la montaje diferite.

Astfel din

$$\frac{i^S_{AE}}{1 - i^E_{AS} \cdot i_{SA}} = i^S_{AE}(1 - i^A_{ES} \cdot i_{SE})$$

rezultă

$$i^E_{AS} \cdot i^A_{ES} \cdot i_{SA} \cdot i_{SE}(1 - i^A_{SE} \cdot i_{ES} - i^E_{SA} \cdot i_{AS}) = 0.$$

Cum rapoartele de transmitere nule sînt practic irealizabile, rămîne condiția ca paranteza să fie nulă, ceea ce duce la o dependență liniară între i_{ES} și i_{AS}:

$$i_{ES} = i^S_{EA} \cdot i_{AS} + i^A_{ES} \tag{10}$$

★

O concluzie generală a relațiilor (6)—(9) este că, în cazul cînd avem la dispoziție un mecanism care să permită obținerea unui raport de transmitere anumit (i_{SA} sau i_{SE}), legarea lui la un diferențial după schema 8 permite modificarea acestui raport după o relație care nu este de simplă proporționalitate, ca în cazul legării la un tren cu axe fixe.

Aceasta justifică folosirea diferențialelor cuplate cu variatori de viteză, întrucît astfel gama variatorului poate fi nu numai deplasată, ci și modificată ca lărgime, avantaj esențial pentru variatoare, la care construcția cu interval mare de turații duce la dificultăți.

Analiza relațiilor de mai sus este interesantă pentru studiul influenței parametrilor diferențialului asupra modificării unui raport de transmitere dat (i_{SA} sau i_{SE}), ceea ce permite aprecierea judicioasă a ansamblului format dintr-un diferențial cu o transmisie în vederea obținerii unor parametri cinematici ceruți.

3.1. STUDIUL RAPORTULUI DE TRANSMITERE TOTAL

Pentru cazul I, studiul variației raportului de transmitere $i_{AE} = i_{AE}(i_{SA})$ duce la rezultatele de mai jos. Folosind ca cea mai potrivită relația (7'), se constată că variația este o iperbolă echilateră, cu centrul la intersecția dreptelor,

$$i_{AE} = 0 \text{ și } i_{SA} = i_{SA}^{E}, \tag{11}$$

care sînt totodată și asimptote și cu axele de simetrie înclinate la 45° față de axele coordonate.

Semiaxele iperbolei au totdeauna valoarea $\sqrt{|2(1 - i_{SA}^{E})|}$, iar coordonatele punctelor de vîrf sînt respectiv,

$$\begin{aligned} &- \text{abscisa } i_{SA}^{E} \pm \sqrt{|1 - i_{SA}^{E}|}, \\ &- \text{ordonata } \pm \sqrt{|1 - i_{SA}^{E}|}. \end{aligned} \tag{12}$$

De asemenea iperbola trece totdeauna prin punctul $(+1, +1)$.

Alura iperbolei depinde astfel de valorile parametrului i_{SA}^{E} al diferențialului :

— cînd $i_{SA}^{E} > +1 \Rightarrow i'_{AE} = \dfrac{di_{AE}}{di_{SA}} = \dfrac{i_{SA}^{E} - 1}{(i_{SA} - i_{SA}^{E})^2} > 0,$

— cînd $i_{SA}^{E} < +1 \Rightarrow i'_{AE} < 0$ — iperbolă cu alură conjugată cu prima,

— cînd $i_{SA}^{E} = +1 \Rightarrow i'_{AE} = 0$ și iperbola degenerează în două drepte :

$$i_{AE} = 0 \text{ și } i_{SA} = +1.$$

Pentru cazul II, studiul $i_{AE} = i_{AE}(i_{SE})$ arată cu ajutorul relației (9') că avem a face cu o funcție liniară.

Referindu-ne la forma generală a ecuației unei drepte, obținem

$$i_{AE} = \frac{i_{SE}}{1 - i_{SE}^{A}} - \frac{i_{SE}^{A}}{1 - i_{SE}^{A}}, \tag{9''}$$

ceea ce arată că dreapta are coeficientul unghiular

$$p = \frac{1}{1 - i_{SE}^{A}} = i_{AS}^{E} \tag{13}$$

și ordonata la origine

$$q = \frac{i_{SE}^{A}}{i_{SE}^{A} - 1} = i_{AE}^{S}. \tag{14}$$

Acești parametri, $p = p(i_{SE}^{A})$ și $q = q(i_{SE}^{A})$, variază iperbolic, primul cu asimptotele $i_{SE}^{A} = +1$ și $p = 0$, iar al doilea cu $i_{SE}^{A} = +1$ și $q = +1$.

Și aici, în toate cazurile, dreptele trec prin punctul $(+1, +1)$.

Cazurile posibile depind deci de i^A_{SE} în felul următor :
— cînd $i^A_{SE} > +1 \Rightarrow p < 0$ și $q > +1$,
— cînd $0 < i^A_{SE} < +1 \Rightarrow p > +1$ și $q < 0$,
— cînd $i^A_{SE} < 0 \Rightarrow 0 < p < +1$ și $0 < q < +1$,
— cînd $i^A_{SE} = i_{SE} \Rightarrow i_{AE} = 0$.

Reprezentînd grafic expresiile i_{AE} (i_{SA}) și i_{AE} (i_{SE}), se găsesc următoarele curbe (fig. 9) :
— pentru $i^E_{SA} > +1$ — o iperbolă de alura curbei (a_1),
— pentru $i^E_{SA} < +1$ — o iperbolă de alura curbei (a_2),
— pentru $i^E_{SA} = +1$ — iperbola degenerată în dreptele (a_3) și (a_4),

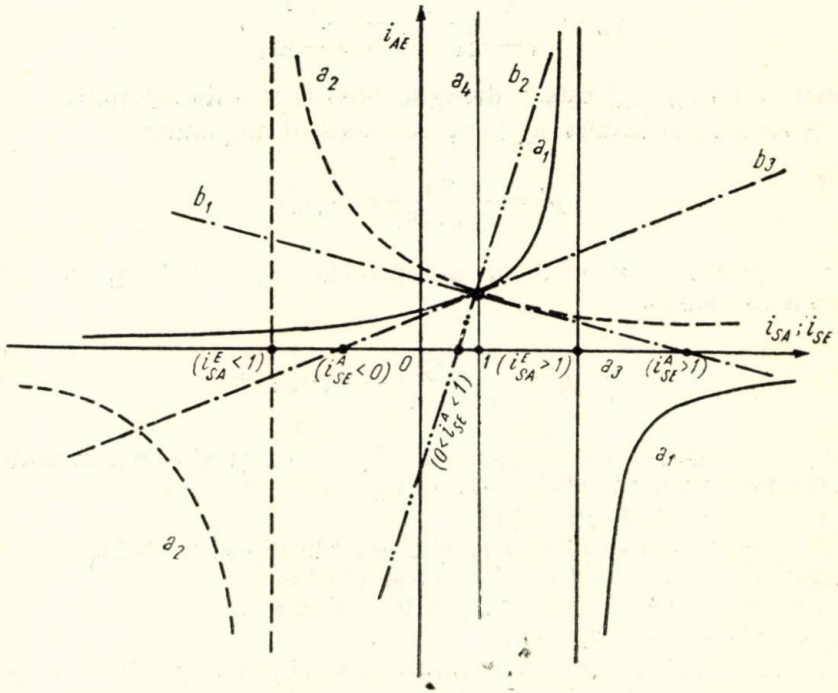


Fig. 9

— pentru $i^A_{SE} > +1$ — o dreaptă descendentă de felul (b_1) cu ordonata la origine $> +1$,
— pentru $0 < i^A_{SE} < +1$ — o dreaptă ascendentă de felul (b_2) cu ordonata la origine negativă și înclinată peste 45° față de orizontală,
— pentru $i^A_{SE} < 0$ — o dreaptă ascendentă de felul (b_3) cu ordonata la origine pozitivă și înclinată sub 45° față de orizontală.

În cazul I, toate curbele de felul (a) au asimptota verticală $i_{SA} = i^E_{SA}$, iar în cazul II toate dreptele de felul (b) au abscisa la origine $i_{SE} = i^A_{SE}$.

3.2. STUDIUL TURAȚIEI LA IEȘIRE

Asupra turației la ieșire se pot trage concluzii direct din cele arătate în legătură cu variația raportului i_{AE} (§ 3.1), întrucît variația sa are un caracter invers față de i_{AE}, fiind $n_E = \frac{n_A}{i_{AE}}$. Studiul acestei variații este util în special în cazul folosirii variatoarelor pentru discutarea gamei de turații ce se poate obține.

Pentru cazul I, următor relației (7), scrisă sub forma

$$n_E = \frac{n_A}{1 - i_{SA}^E} i_{SA} - \frac{n_A i_{SA}^E}{1 - i_{SA}^E}, \tag{7''}$$

se constată că $n_E\,(i_{SA})$ este o dreaptă, ceea ce era de așteptat.

Socotind totdeauna $n_A > 0$, coeficientul unghiular

$$p' = \frac{n_A}{1 - i_{SA}^E} = n_A i_{ES}^A \tag{15}$$

variază iperbolic cu i_{SA}^E, cu asimptotele $i_{SA}^E = +1$ și $p' = 0$, iar ordonata la origine

$$q' = \frac{n_A \cdot i_{SA}^E}{i_{SA}^E - 1} = n_A \cdot i_{EA}^S \tag{16}$$

variază tot iperbolic cu asimptotele $i_{SA}^E = +1$ și $q' = n_A$. Întotdeauna dreptele trec prin punctul $(+1,\ +n_A)$.

Cazurile posibile sînt deci :
— pentru $i_{SA}^E > +1 \Rightarrow p' < 0$ și $q' > n_A$ (de obicei $> +1$),
— pentru $0 < i_{SA}^E < +1 \Rightarrow p' > n_A$ și $q' < 0$,
— pentru $i_{SA}^E < 0 \Rightarrow 0 < p' < n_A$ și $0 < q' < n_A$,
— pentru $i_{SA}^E = i_{SA} \Rightarrow n_E = 0$.

Pentru cazul II, ecuația (9) arată că $n_E\,(i_{SE})$ variază după o iperbolă echilateră cu centrul la intersecția dreptelor (totodată asimptote)

$$n_E = 0 \text{ și } i_{SE} = i_{SE}^A. \tag{17}$$

Axele de simetrie ale acestei iperbole sînt și în acest caz înclinate cu 45° față de axele coordonate, iar semiaxele sale au valoarea $\sqrt{|2n_A(1 - i_{SE}^A)|}$. Coordonatele punctelor de vîrf sînt respectiv

$$\text{— abscisa } i_{SE}^A \pm \sqrt{|n_A(1 - i_{SE}^A)|},$$

$$\text{— ordonata } \pm \sqrt{|n_A(1 - i_{SE}^A)|}. \tag{18}$$

Totodată, iperbola trece în orice caz prin punctul $(+1,\ +n_A)$.

Astfel, alura iperbolei depinde de i_{SE}^{A} după cum urmează :

— cînd $i_{SE}^{A} > +1 \Rightarrow n'_E = \dfrac{dn_E}{di_{SE}} = \dfrac{n_A(i_{SE}^{A}-1)}{(i_{SE}-i_{SE}^{A})^2} > 0$,

— cînd $i_{SE}^{A} < +1 \Rightarrow n'_E < 0$ — iperbolă de alură conjugată cu prima,

— cînd $i_{SE}^{A} = +1 \Rightarrow n'_E = 0$ și iperbola degenerează în dreptele

$$i_{SE} = +1 \text{ și } n_E = 0 .$$

Reprezentarea grafică a turațiilor n_E (i_{SA}) și $n_E\,(i_{SE})$ dă curbele arătate în figura 10 :

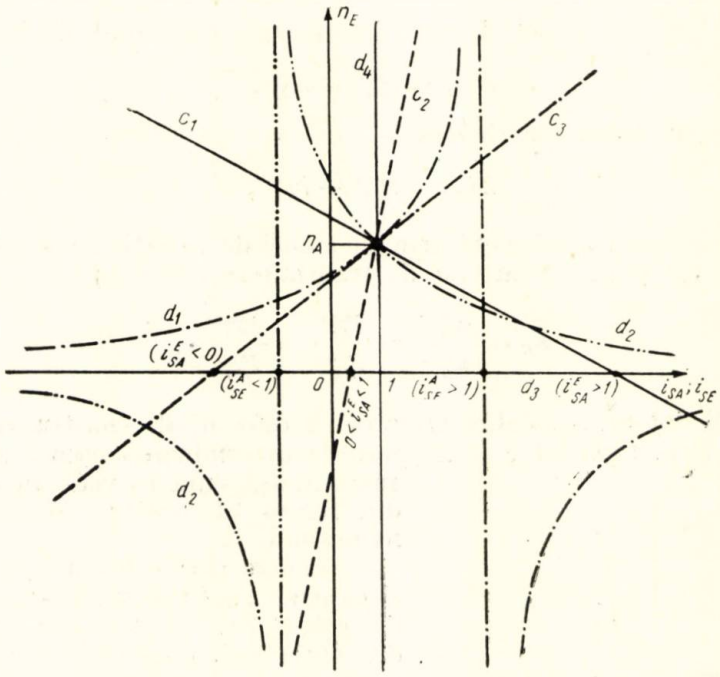


Fig. 10

— pentru $i_{SA}^{E} > +1$ — o dreaptă descendentă de felul (c_1) cu ordonata la origine $> n_A$,

— pentru $0 < i_{SA}^{E} < +1$ — o dreaptă ascendentă de felul (c_2), cu ordonata la origine negativă,

— pentru $i_{SA}^{E} < 0$ — o dreaptă ascendentă de felul (c_3), cu ordonata la origine pozitivă $< n_A$,

— pentru $i_{SE}^{A} > +1$ — o iperbolă cu alura (d_1),

— pentru $i_{SE}^{A} < +1$ — o iperbolă cu alura (d_2),

— pentru $i_{SE}^{A} = +1$ — iperbola degenerată în dreptele (d_3) și (d_4).

În cazul montajului I, toate dreptele de tip (c) au abscisa la origine $i_{SA} = i_{SA}^{E}$, iar pentru montajul II toate iperbolele de tip (d) au asimptota verticală $i_{SE} = i_{SE}^{A}$.

3.3. MĂRIMI CARACTERISTICE ALE GAMEI DE VARIAȚIE A VITEZEI DE ROTAȚIE

Pentru aprecierea domeniului de lucru al unui ansamblu variator de viteză se pot folosi următoarele mărimi caracteristice, date mai jos cu relațiile lor de definiție :

— intervalul gamei de variație a turației de ieșire

$$\Delta n_E = n_E^{\max} - n_E^{\min}, \tag{19}$$

— intervalul gamei de variație a raportului total de transmitere

$$\Delta i_{AE} = i_{AE}^{\max} - i_{AE}^{\min}, \tag{20}$$

sau intervalul raportului invers

$$\Delta i_{EA} = i_{EA}^{\max} - i_{EA}^{\min}, \tag{20'}$$

— raportul valorilor extreme ale gamei de variație (care este atît al turațiilor, cît și al rapoartelor de transmitere extreme)

$$k_E = \frac{n_E^{\max}}{n_E^{\min}} = \frac{i_{AE}^{\max}}{i_{AE}^{\min}} = \frac{i_{EA}^{\max}}{i_{EA}^{\min}}. \tag{21}$$

Fiind dat un ansamblu variator cu diferențial, construirea diagramelor conform figurilor 9 și 10 permite determinarea ușoară a acestor mărimi, așa cum se vede în exemplul din figura 11 pentru Δi_{AE} în cazul montajului I.

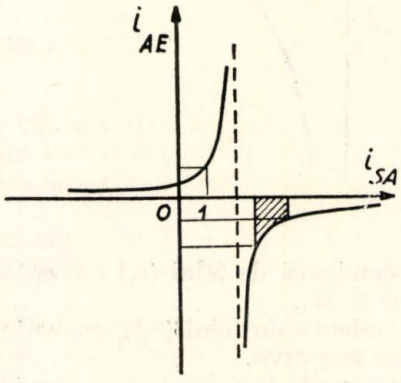


Fig. 11

Pentru aceste mărimi se pot găsi și expresii analitice generale, în funcție de caracteristicile variatorului și ale diferențialului, care oferă posibilitatea unui calcul exact, lipsit de neprecizia construcțiilor grafice, și care constituie un alt mijloc de discutare și de operare asupra gamei de viteze în proiectare.

Cu ajutorul relațiilor stabilite mai înainte se obțin următoarele formule valabile în general pentru ambele montaje (I și II) :

— pentru intervalul de turații,

$$\Delta n_E = (i_{EA}^S \cdot n_A + i_{ES}^A \cdot n_S^{\max}) - (i_{EA}^S \cdot n_A + i_{ES}^A \cdot n_S^{\min}) = i_{ES}^A \cdot \Delta n_S \tag{22}$$

sau, ținînd seama că $n_S = n_A \cdot i_{SA} = n_E \cdot i_{SE}$, se poate scrie

$$\Delta n_E = n_A \cdot i_{ES}^A \cdot \Delta i_{SA} \tag{22'}$$

și

$$\Delta n_E = i_{ES}^A \cdot \Delta (n_E \cdot i_{SE}); \tag{22''}$$

— pentru intervalul rapoartelor totale de transmitere inverse,

$$\Delta i_{EA} = \frac{\Delta n_E}{n_A} = \frac{i_{ES}^A}{n_A} \Delta n_S \tag{23}$$

și de asemenea

$$\Delta i_{EA} = i_{ES}^A \cdot \Delta i_{SA}, \tag{23'}$$

$$\Delta i_{EA} = \frac{i_{ES}^A}{n_A} \Delta (n_E \cdot i_{SE}) = i_{ES}^A \cdot \Delta (i_{EA} \cdot i_{SE}); \tag{23''}$$

— pentru formulele corespunzătoare ale intervalului rapoartelor de transmitere directe trebuie făcute transformările

$$\Delta i_{AE} = \frac{1}{i_{EA}^{\min}} - \frac{1}{i_{EA}^{\max}} = \frac{i_{EA}^{\max} - i_{EA}^{\min}}{i_{EA}^{\max} \cdot i_{EA}^{\min}} = \frac{\Delta i_{EA}}{i_{EA}^{\max} \cdot i_{EA}^{\min}}; \tag{24}$$

— pentru raportul valorilor extreme rezultă analog

$$k_E = 1 + \frac{\Delta n_E}{n_E^{\min}} = 1 + i_{ES}^A \frac{\Delta n_S}{n_E^{\min}}, \tag{25}$$

$$k_E = 1 + i_{ES}^A \cdot \frac{n_A}{n_E^{\min}} \cdot \Delta i_{SA} = 1 + i_{ES}^A \cdot i_{AE}^{\max} \cdot \Delta i_{SA}, \tag{25'}$$

$$k_E = 1 + i_{ES}^A \cdot \frac{\Delta (n_E \cdot i_{SE})}{n_E^{\min}}. \tag{25''}$$

În cazul montajului I se pot folosi cel mai comod relațiile (22'), (23') și (25') nemijlocit (care de altfel se pot deduce și din relațiile 6 sau 7), întrucît conțin ca variabilă numai pe i_{SA}, caracteristic variatorului în acest montaj.

Pentru montajul II, relațiile (22''), (23'') și (25''), care conțin pe i_{SE} al variatorului în acest caz, nu se pot folosi direct cu ușurință, întrucît cuprind și variabila n_E.

Eliminarea acestui inconvenient este posibilă prin unele transformări, ținînd seama că $n_E = n_A \cdot i_{EA}$, unde i_{EA} se ia din formulele (8) sau (9). Astfel se obține:

— pentru Δn_E,

$$\Delta n_E = n_A \cdot i_{ES} \cdot \Delta (i_{SE}^A \cdot i_{EA}) \tag{26}$$

sau, mai bine cu relația (9),

$$\Delta n_E = n_A \cdot i_{EA}^S \cdot \Delta \left(\frac{i_{SE}}{i_{SE} - i_{SE}^A} \right), \tag{26'}$$

care se poate pune sub forma mai simplă

$$\Delta n_E = n_A \cdot i_{SA}^E \cdot \Delta\left(\frac{1}{i_{SE} - i_{SE}^A}\right) = n_A \cdot (1 - i_{SE}^A) \cdot \Delta\left(\frac{1}{i_{SE} - i_{SE}^A}\right); \qquad (26'')$$

— pentru k_E, folosind rezultatele (26), (26') și (26''),

$$k_E = 1 + i_{ES}^A \cdot \frac{n_A}{n_E^{\min}} \cdot \Delta(i_{SE} \cdot i_{EA}), \qquad (27)$$

$$k_E = 1 + i_{EA}^S \cdot \frac{n_A}{n_E^{\min}} \cdot \Delta\left(\frac{i_{SE}}{i_{SE} - i_{SE}^A}\right), \qquad (27')$$

$$k_E = 1 + i_{SA}^E \cdot \frac{n_A}{n_E^{\min}} \cdot \Delta\left(\frac{1}{i_{SE} - i_{SE}^A}\right) = 1 + (1 - i_{SE}^A) \frac{n_A}{n_E^{\min}} \cdot \Delta\left(\frac{1}{i_{SE} - i_{SE}^A}\right). \qquad (27'')$$

Raportul k_E se mai poate exprima și prin formulele:
— pentru montajul I (cu relația (6), respectiv (7)),

$$k_E = \frac{1 - i_{AS}^E \cdot i_{SA}^{\max}}{1 - i_{AS}^E \cdot i_{SA}^{\min}}, \qquad (28)$$

$$k_E = \frac{i_{SA}^{\max} - i_{SA}^E}{i_{SA}^{\min} - i_{SA}^E}; \qquad (28')$$

— pentru montajul II (cu relația (8), respectiv (9)),

$$k_E = \frac{1 - i_{ES}^A \cdot i_{SE}^{\max}}{1 - i_{ES}^A \cdot i_{SE}^{\min}}, \qquad (29)$$

$$k_E = \frac{i_{SE}^{\max} - i_{SE}^A}{i_{SE}^{\min} - i_{SE}^A}. \qquad (29')$$

Gama de turații este determinată dacă dintre mărimile de mai sus sînt cunoscute două, în așa fel încît să se poată forma un sistem de ecuații care să permită calculul limitelor intervalului. Pentru aceasta se obișnuiește să se folosească k_E și Δn_E.

4. CONCLUZII PRIVIND CINEMATICA UNUI GRUP VARIATOR CU DIFERENȚIAL

Relațiile și diagramele generale arătate în cele ce precedă permit, prin aplicare directă, rezolvarea cinematică a oricărui caz concret sub care se poate prezenta un mecanism variator cu un diferențial.

De asemenea aceste relații și diagrame dau posibilitatea unei discuții cinematice cu caracter general, cu concluzii asupra funcționării diferențialelor.

În cazul acționării monomotoare, folosind o transmisie pentru antrenarea secundară S și a unor cerințe impuse, se poate vedea din comportarea celor două montaje posibile arătate care este mai indicat și cum trebuie aleși parametrii cinematici necesari.

Mai jos se arată unele concluzii generale care se degajează din cele expuse și care se pot urmări ușor cu ajutorul diagramelor din figurile 9 și 10.

— *La montajul I* (curbele *a* și *c*), raportul de transmitere rezultant i_{AE} este mare (deci n_E mic) pentru valori i_{SA} apropiate de i^E_{SA} al diferențialului folosit și invers (i_{AE} este mic, deci n_E mare, pentru i_{SA} depărtat de i^E_{SA}).

Dacă se folosește un variator cu o gamă de rapoarte Δi_{SA}, se vede că aceasta este lărgită ($\Delta i_{AE} > \Delta i_{SA}$) cînd Δi_{SA} este în vecinătatea parametrului i^E_{SA} al diferențialului, și anume cînd raportul mediu $i^{med}_{SA} = \frac{1}{2}(i^{max}_{SA} + i^{min}_{SA})$ este cuprins între limitele

$$i^E_{SA} - \sqrt{|1 - i^E_{SA}|} < i^{med}_{SA} < i^E_{SA} + \sqrt{|1 - i^E_{SA}|}\,. \tag{30}$$

Invers, în afara acestor limite, Δi_{SA} este îngustat (adică $\Delta i_{AE} < \Delta i_{SA}$), și anume cu atît mai mult, cu cît i^{med}_{SA} este mai depărtat de i^E_{SA}.

Sub aspectul turației la ieșire, rezultă că intervalul Δn_E nu depinde de Δi_{SA} decît ca poziție, iar ca valoare numai de parametrul i^E_{SA}, care determină coeficientul unghiular al dreptelor (*c*), conform relației (15). Astfel, Δn_E este mai mare pentru valori i^E_{SA} apropiate de $+1$.

Cînd $i_{SA} = i^E_{SA}$, raportul i_{AE} devine infinit, iar n_E nul, ceea ce reprezintă, în cazul folosirii unui variator cu $i^{min}_{SA} < i^E_{SA} < i^{max}_{SA}$, o discontinuitate în variația raportului de transmitere total i_{AE}, deci anularea turației la ieșire n_E cu schimbare de sens.

De altfel, n_E are sensul contrar lui n_A (sau $i_{AE} < 0$) cînd i_{SA} depășește pe i^E_{SA} în același sens în care i^E_{SA} depășește valoarea $+1$, adică $i_{AE} < 0$ cînd $i_{SA} < i^E_{SA}$ pentru $i^E_{SA} < +1$ și cînd $i_{SA} > i^E_{SA}$ pentru $i^E_{SA} > +1$.

— *La montajul II* (curbele *b* și *d*), situația apare în mare măsură inversată față de montajul I (la care de altfel se poate ajunge prin simpla schimbare a sensului de transmitere, A devenind E și reciproc).

Astfel i_{AE} este mare (respectiv n_E mic) pentru valori i_{SE} depărtate de i^A_{SE} al diferențialului și reciproc (i_{AE} este mic, iar n_E mare pentru i_{SE} apropiat de i^E_{SA}).

În cazul folosirii unui variator, gama sa Δi_{SE} este sau nu lărgită numai în funcție de valoarea i^A_{SE} a diferențialului, care determină coeficientul unghiular al dreptelor (*b*) conform relației (13), și anume

$$\Delta i_{AE} > \Delta i_{SE} \text{ pentru } 0 < i^A_{SE} < +2,$$

și

$$\Delta i_{AE} < \Delta i_{SE} \text{ pentru } 0 > i^A_{SE} > +2, \tag{31}$$

dreapta avînd de fiecare dată o pantă peste, respectiv sub 45°.

De notat că la acest montaj Δi_{AE} nu depinde de Δi_{SE} decît ca poziţie (nu ca valoare). În schimb, intervalul de turaţii la ieşire Δn_E creşte cu cît Δi_{SE} este mai apropiat de i^A_{SE} al diferenţialului, şi anume pentru

$$i^A_{SE} - \sqrt{|n_A(1-i^A_{SE})|} < i^{\text{med}}_{SE} = \frac{1}{2}(i^{\max}_{SE} + i^{\min}_{SE}) < i^A_{SE} + \sqrt{|n_A(1-i^A_{SE})|}. \tag{32}$$

Dacă $i_{SE} = i^A_{SE}$, i_{AE} se anulează, iar n_E devine infinit, adică, în cazul folosirii unui variator cu $i^{\min}_{SE} < i^A_{SE} < i^{\max}_{SE}$, i_{AE} ajunge să se anuleze schimbînd de sens, iar n_E prezintă o discontinuitate de asemenea cu schimbare de sens, ceea ce practic este de evitat.

În cazul acestui montaj, schimbarea de sens a turaţiei de intrare (adică $i_{AE} < 0$) apare ca şi la montajul I, cînd i_{SE} depăşeşte pe i^A_{SE} în acelaşi sens în care i^A_{SE} depăşeşte valoarea $+1$ (adică $i_{AE} < 0$ cînd $i_{SE} < i^A_{SE}$ pentru $i^A_{SE} < +1$ sau cînd $i_{SE} > i^A_{SE}$ pentru $i^A_{SE} > +1$).

— *La ambele montaje* apare trăsătura comună că în cazul introducerii unui raport i_{SA} sau $i_{SE} = +1$, $i_{AE} = +1$, adică ansamblul funcţionează analog unui cuplaj, fără modificarea turaţiei. Pentru cazul folosirii unui variator cu $i^{\min}_{SA} < +1 < i^{\max}_{SA}$, respectiv cu $i^{\min}_{SE} < +1 < i^{\max}_{SE}$, aceasta reprezintă posibilitatea depăşirii turaţiei de intrare în sensuri inverse, după montajul folosit şi poziţia parametrului i^E_{SA}, respectiv i^A_{SE} faţă de valoarea $+1$.

— Este de remarcat că cele două montaje prezintă deosebirea esenţială că schimbarea de sens a turaţiei la ieşire se realizează în condiţii diferite (prin anulare, respectiv discontinuitate, după cum s-a arătat).

— În privinţa posibilităţii de obţinere a unei turaţii de ieşire foarte apropiate de valoarea dorită, pentru o potrivire grosieră a raportului i_{SA}, respectiv i_{SE}, ceea ce vom numi „reglaj precis" (abateri ale lui n_E mici pentru abateri largi ale lui i_{SA}, respectiv i_{SE}), se poate spune că la montajul I aceasta se realizează cu ajutorul unui i^E_{SA} mare în valoare absolută, independent de poziţia sa faţă de intervalul Δi_{SA} dat, ca urmare a dependenţei coeficientului unghiular al dreptelor (c) de i^E_{SA}. Cu montajul II însă se ajunge la acest rezultat printr-un i^A_{SE} depărtat de Δi_{SE} dat de variator, şi deci, în acest din urmă caz, obţinerea unei „precizii" mari de reglaj este mai uşoară.

În ambele cazuri însă, sporirea preciziei de reglaj se poate realiza, evident, numai în dauna cîmpului total de variaţie a turaţiei de ieşire.

Dimpotrivă, „reglajul sensibil" — cu creştere pronunţată a turaţiei la creşteri mici ale raportului de transmitere introdus — comportă consideraţii inverse faţă de cele de mai înainte (i^E_{SA} apropiat de $+1$ la montajul I, respectiv i^A_{SE} apropiat de Δi_{SE} la montajul II).

— Apropierea parametrului respectiv al diferenţialului de valoarea $+1$ atrage după sine, în ambele montaje, o variaţie mai pronunţată atît a raportului total i_{AE}, cît şi a turaţiei la ieşire n_E, datorită pantei mai pronunţate a curbelor de variaţie.

Considerațiile generale de mai sus permit o apreciere globală de la început a rezultatelor cinematice care se pot obține cu diferite combinații de variatoare și diferențiale, dînd astfel și o orientare în alegerea mărimilor adecvate unei anumite situații. Stabilindu-se astfel tipul combinației celei mai potrivite și domeniul în care se pot situa parametrii necesari, operațiile numerice cu formulele date și trasarea diagramelor ușurează sinteza cinematică a unui asemenea ansamblu. Totodată relațiile și diagramele arătate permit determinarea în final a mărimilor cinematice obținute, constituind un mijloc de analiză directă și expeditivă în orice situație.

Problema dimensionării geometrice din punct de vedere cinematic a ansamblului este, după aceea, legată de aspecte dinamice și organologice care nu sînt abordate în această lucrare.

5. CONSIDERAȚII ASUPRA GRUPURILOR CU MAI MULTE DIFERENȚIALE ȘI VARIATOARE

O posibilitate mai largă de modificare a raportului de transmitere se obține prin folosirea de lanțuri complexe formate din serii de diferențiale echipate fiecare cu variator.

Combinațiile de bază posibile sînt două și diferă după poziția variatorului atașat fiecărui diferențial, care poate fi conform cazurilor I, respectiv II, arătate mai înainte.

Figura 12 arată cazul I, în care fiecare variator V_j leagă intrările A_j și S_j ale diferențialului respectiv D_j (de ordin oarecare j).

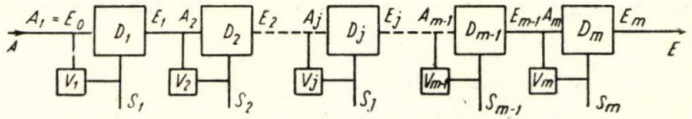


Fig. 12

Figura 13 prezintă, dimpotrivă, cazul II, cînd variatoarele V_j leagă intrarea suplimentară S_j de ieșirea E_j.

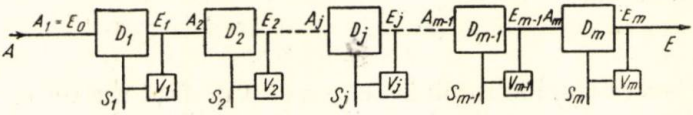


Fig. 13

În ambele cazuri, legătura grupurilor simple diferențial-variator este în serie, ieșirea E_{j-1} a unuia fiind intrarea A_j a celui următor ($A_j = E_{j-1}$).

Folosind relaţia generală cunoscută de determinare a raportului de transmitere total, rezultă cu notaţiile adoptate anterior :

— pentru cazul I (fig. 12), cu relaţia (6′) :

$$i_{AE} = i_{A_1E_m} = \prod_{j=1}^{m} i_{A_jE_j} = \frac{\prod_{j=1}^{m} i^{S_j}_{E_{j-1}E_j}}{\prod_{j=1}^{m} (1 - i^{E_j}_{E_{j-1}S_j} \cdot i_{S_jE_{j-1}})}, \tag{33}$$

sau cu relaţia (7′) :

$$i_{AE} = \frac{\prod_{j=1}^{m} i^{E_{j-1}}_{S_jE_j}}{\prod_{j=1}^{m} (i_{S_jE_{j-1}} - i^{E_j}_{S_jE_{j-1}})}; \tag{33′}$$

— pentru cazul II (fig. 13), cu relaţia (8′) :

$$i_{AE} = i_{A_1E_m} = \prod_{j=1}^{m} i_{A_jE_j} = \prod_{j=1}^{m} i^{S_j}_{E_{j-1}E_j} \cdot \prod_{j=1}^{m} (1 - i^{E_{j-1}}_{E_jS_j} \cdot i_{S_jE_j}) \tag{34}$$

sau cu relaţia (9′) :

$$i_{AE} = \prod_{j=1}^{m} i^{E_j}_{E_{j-1}S_j} \cdot \prod_{j=1}^{m} (i_{S_jE_j} - i^{E_{j-1}}_{S_jE_j}). \tag{34′}$$

Din aceste relaţii se pot deduce uşor expresiile turaţiilor la ieşire, ţinînd seama că $n_E = \frac{n_A}{i_{AE}}$. Se vede de aici că acestea sînt inversele expresiilor (33) — (34′), multiplicate cu n_A.

Reprezentarea grafică a acestor expresii generale nu este posibilă decît prin particularizări, datorită numărului mare de variabile $i_{S_jE_{j-1}}$, respectiv $i_{S_jE_j}$ care trebuie precizate.

Pentru alte combinaţii de diferenţiale cu variatori se observă că acestea se pot reduce la grupuri de tipul I sau II, care se studiază separat, combinînd rezultatele în baza celor spuse la început. Pentru acest motiv, combinaţiile I şi II au fost denumite de bază, prezentînd de altfel şi deosebiri de principiu.

✱

În încheiere trebuie subliniat că studiul de faţă are un caracter pur cinematic. Evident, domeniile de utilizare practică rezultînd din diagrame vor fi puternic influenţate de comportarea dinamică a ansamblului variator-diferenţial (în special de randament), ceea ce constituie un obiect pe studiu ulterior. Astfel, unele zone ale raportului de transmitere total i_{AE} nu vor putea fi realizate.

Ne permitem, totuși, să anticipăm că va exista o posibilitate eficace de exploatat în utilizarea practică a unor zone cît mai mari din diagrame, și anume antrenarea în locuri diferite a diferențialului (ceea ce va infuența puternic randamentul), întrucît pentru elementele A, S și E nu s-au făcut precizări asupra rolului lor intern.

În general se observă că folosirea variatorilor în combinație cu diferențialele oferă posibilități largi de adaptare a gamelor de turații la nevoile concrete, atît ca mărime, cît și ca precizie și sensibilitate de fixare a unei anumite turații din gamă. Acest lucru se datorește în special proprietăților diferențialelor și constituie o cale practic realizabilă în condiții, foarte avantajoase, întrucît aceste mecanisme prezintă numai elemente în rotație, ușor executabile și cu posibilități de echilibrare totală.

Primită la redacție la 18 septembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Artobolevski I. I., *Teoria mecanismelor și a mașinilor*. București, Edit. tehnică, 1955.
2. * * * *Детали машин*. Машгиз, 1953.
3. Добровольскии В. В., *Теория Механизмов*. Москва, Машгиз, 1951.
4. Gorianu M., *Unele probleme privind cinematica și dinamica transmisiilor mecanice cu două fluxuri în paralel*. Sesiunea științifică AMG-FMT din 23—24 aprilie 1963.
5. Horovitz B. A., *Reductoare și variatoare de turație*. București, Edit. tehnică, 1963.
6. Кожевников С. Н., *Теория механизмов и машин*. Киев, Машгиз, 1954.
7. Levenson L. B., *Teoria mecanismelor și a mașinilor*. București Edit. tehnică, 1951.
8. Maros D., *Cinematica roților dințate*. București, Edit. tehnică, 1958.
9. Руденко Н. Ф., *Планетарные передачи*. Москва, Машгиз, 1947.
10. Trier H., *Die Kraftübertragung durch Zahnrader*. Berlin, J. Springer, 1960.

INFLUENȚA ASIMETRIEI FLANCULUI ASUPRA CONTACTULUI ELASTIC AL ROȚILOR DINȚATE [1])

de N. BOICU

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

639.4

În lucrare se tratează cazul contactului elastic a doi cilindri infinit lungi, care prezintă asimetrie geometrică în jurul liniei de contact fără sarcină. Se stabilesc formule pentru determinarea întinderii zonei de contact și repartiției presiunilor. Din aceste formule, prin anularea termenului asimetric din ecuațiile suprafețelor cilindrilor aflați în contact, se obțin relațiile lui Hertz din cazul contactului elastic a doi cilindri simetrici față de linia de contact fără sarcină.
Se aplică relațiile generale stabilite la cazul contactului elastic al roților dințate cilindrice cu dinți drepți cu profil evolventic. Se ilustrează prin calcule numerice influența caracteristicilor geometrice ale acestor angrenaje și a caracteristicilor mecanice ale materialelor roților dințate asupra contactului elastic, cu considerarea efectului asimetriei.

În explicarea fenomenelor de uzură care se produc la roțile dințate intervine mărimea și distribuția presiunii de contact a flancurilor aflate în angrenare. Legea cantitativă de distribuție a presiunii de contact, folosită în calculele de uzură, este cea stabilită de Hertz pentru contactul elastic liniar a doi cilindri circulari infinit lungi. Aceasta implică admiterea ipotezei simetriei distribuției presiunilor și deplasărilor în jurul liniei de contact fără sarcină.

În cazul roților dințate cilindrice cu dinți drepți, ca și în numeroase alte cazuri de piese larg folosite în construcția mașinilor, suprafețele sînt asimetrice în jurul liniei de contact fără sarcină. Ca urmare, fișia de contact elastic care se formează în timpul lucrului are întinderi neegale de o parte și de cealaltă a liniei de contact fără sarcină, iar distribuția presiunilor este și ea asimetrică.

---

[1]) Lucrarea face parte din teza de disertație a autorului (conducător prof. dr. ing. Gh. Manea, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România).

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 21 NR. 2 P. 417–426 BUCUREȘTI 1966

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA BUDAPEST 1848

În lucrarea de față se stabilesc formule pentru calculul presiunilor și deformațiilor de contact elastic, cu luarea în considerație a asimetriei zonei de contact, și se analizează cantitativ cazul particular al roților dințate cilindrice cu dinți drepți cu profil evolventic.

Să considerăm, ca în figura 1, doi cilindri infinit lungi aflați în contact fără sarcină în lungul unei generatoare care înțeapă planul figurii în punctul O. În urma apăsării celor doi cilindri unul asupra altuia, din cauza deformațiilor elastice care se produc apare o zonă de contact de întinderi a și b în raport cu linia de contact fără sarcină.

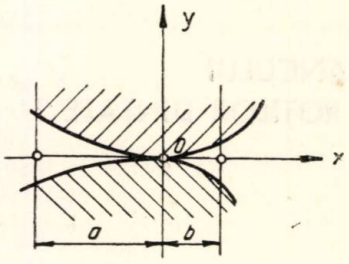


Fig. 1

Alegem un sistem de coordonate cu centrul în O și cu axele Ox și Oy orientate după tangenta, respectiv după normala la flancuri în origine. În acest sistem, zona de contact este

$$a \leqslant x \leqslant b. \tag{1}$$

Dată fiind lățimea mică a fîșiei de contact, ecuațiile contururilor celor doi cilindri nedeformați în jurul punctului O pot fi exprimate în forma

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x^3, \\ y_2 &= c_1' \cdot x^2 + c_2' \cdot x^3. \end{aligned} \tag{2}$$

Introducerea termenilor de gradul trei în ecuațiile (2) este legată de luarea în considerație a asimetriei flancurilor.

Pentru scrierea ecuației de contact elastic vom adopta modul obișnuit de tratare a contactului pe o fîșie îngustă, cu o forță mare de apăsare. Vom considera că forța distribuită pe unitatea de lungime în lungul generatoarei și pe întinderea elementară δt în punctul de abscisă t ($p \cdot \delta t$, p fiind presiunea de contact) provoacă în punctul de abscisă x o deplasare δv pe direcția y dată de relația stabilită de Boussinesq pentru cazul semiplanului elastic supus unei forțe concentrate. În acest fel, deplasarea totală a punctului de abscisă x se poate exprima ca o însumare a deplasărilor δv produse de forțele $p \cdot \delta t$, considerate concentrate. Făcînd trecerea la limită $\delta t \to 0$, se obține deplasarea totală în forma

$$v(x) = \frac{-2(1-\mu^2)}{\pi E} \int_a^b p(t) \cdot \ln|t - x| \cdot \mathrm{d}t, \tag{3}$$

în care μ este coeficientul lui Poisson și E modulul de elasticitate.

Se face observația că două puncte de pe cele două flancuri care după deformare ajung să se suprapună au în final aceeași ordonată y. În acest fel se găsește relația care leagă deplasările elastice v_1 și v_2 ale celor două puncte :

$$v_1 + v_2 = Y_{01} + Y_{02} - y_1 - y_2, \tag{4}$$

care, folosind relațiile (3), devine

$$\int_a^b p(t) \cdot \ln|t-x| \cdot \mathrm{d}t = \frac{y_1 + y_2 - Y_{01} - Y_{02}}{K},$$
$$K = \frac{2(1-\mu_1^2)}{\pi E_1} + \frac{2(1-\mu_2^2)}{\pi E_2}. \tag{5}$$

În ecuațiile (4) și (5), prin Y_{01} și Y_{02} s-au notat deplasările constante de nivel ale suprafețelor de contact pe direcția y.

Diferența față de cazul obișnuit al problemei de contact apare prin limitele de integrare a și b, ale căror module nu sînt egale între ele.

Rezolvarea problemei de contact elastic, respectiv a ecuației integrale (5), comportă determinarea funcției presiunilor $p(t)$ și a limitelor de integrare a și b (limitele zonei de contact). Pentru aceasta se aplică metoda uzuală de rezolvare a ecuației integrale de tipul celei scrise. Se folosește potențialul logaritmic de simplu strat

$$F(x;y) = \int_a^b p(t) \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{(x-t)^2+y^2}}\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Se observă că, pentru $y = 0$, funcția $F(x;y)$ devine egală și de semn contrar cu primul membru al egalității (5), deci se poate scrie

$$F(x;0) = \frac{Y_{01} + Y_{02} - y_1 - y_2}{K_1 - K_2}. \tag{7}$$

După cum se știe, potențialul logaritmic de simplu strat este caracterizat prin următoarele proprietăți:

— este o funcție armonică:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0; \tag{8}$$

— la infinit îndeplinește condiția

$$\lim_{r\to\infty} F(x;y) - P \cdot \ln\frac{1}{r} = 0, \quad P = \int_a^b p(t) \cdot \mathrm{d}t \tag{9}$$

(după cum se vede, P este forța de apăsare a celor două corpuri);

— derivata funcției $F(x;y)$ este legată de funcția presiunilor $p(x)$ prin relațiile

$$\left[\frac{\partial F(x;y)}{\partial y}\right]_{y=0} = -\pi p(x) \quad \text{pentru } y > 0,$$
$$\left[\frac{\partial F(x;y)}{\partial y}\right]_{y=0} = +\pi p(x) \quad \text{pentru } y < 0. \tag{10}$$

Prin introducerea potențialului logaritmic de simplu strat, problema rezolvării ecuației integrale (5) s-a transformat într-o problemă a lui

Dirichlet : să se determine o funcţie armonică $F(x; y)$ care în intervalul $y = 0$; $a \leqslant x \leqslant b$ să îndeplinească condiţia (7), iar la infinit să îndeplinească condiţia (9). Ultima problemă se rezolvă cu ajutorul transformării conforme a segmentului determinat prin $y = 0$; $a \leqslant x \leqslant b$ pe cercul unitar. Această transformare este dată de expresia

$$\zeta = \alpha + \frac{\beta}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right),$$

$$\zeta = x + iy\,;\ \zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\gamma}, \tag{11}$$

$$\alpha = \frac{a+b}{2}\ ;\quad \beta = \frac{b-a}{2}.$$

Se observă că β este jumătatea lăţimii, iar α este abscisa mediană a zonei de contact.

Pe cercul unitar din planul transformat, funcţia F devine

$$F(1;\gamma) = \frac{Y_{01} + Y_{02} - y_1(\gamma) - y_2(\gamma)}{K_1 - K_2}. \tag{12}$$

Pentru a elimina singularitatea în punctul $\rho = 0$ se înlocuieşte funcţia F cu o funcţie Φ dată de relaţia

$$\Phi(\rho;\gamma) = F(\rho;\gamma) - P \cdot \ln\frac{2\rho}{\beta}. \tag{13}$$

Pe cercul din planul transformat, aceasta din urmă îndeplineşte condiţia

$$\Phi(1;\gamma) = \frac{Y_{01} + Y_{02} - y_1(\gamma) - y_2(\gamma)}{K_1 - K_2} + P \cdot \ln\frac{\beta}{2}. \tag{14}$$

Pentru membrul din dreapta al egalităţii ultime vom adopta expresia care decurge din (13) :

$$y_1 + y_2 = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x^3 \qquad \begin{matrix} C_1 = c_1 + c_1', \\ C_2 = c_2 + c_2'. \end{matrix} \tag{15}$$

Din relaţiile (15), (14) şi (11) se obţine după unele calcule

$$y_1 + y_2 = C_1\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{2}\right) + C_2\left(\alpha^3 + \frac{3}{2}\rho^2\alpha\right) + \left[2\alpha\beta C_1 + \left(3\alpha^2\beta + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{3}{4}\beta^3\right)C_2\right]\cos\gamma + \frac{\beta^3}{4}C_2 \cdot \cos 3\gamma + \left(C_1\frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{2}\alpha\beta^2 C_2\right)\cdot\cos 2\gamma. \tag{16}$$

Cu aceste precizări, funcţia Φ se poate determina imediat dacă se adoptă pentru ea forma

$$\Phi(\rho;\gamma) = A_0 + A_1\rho\cos\gamma + A_2\rho^2\cos 2\gamma + A_3\rho^3\cos 3\gamma. \tag{17}$$

Făcînd în expresia (17) $\rho = 1$ și identificînd-o cu expresia care decurge din (16) și (14), se găsesc mărimile constantelor A_i:

$$A_0 = -\frac{y_0}{K} - \frac{C_1\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{2}\right) + C_2\left(\alpha^3 + \frac{3}{2}\alpha\beta^2\right)}{K} - P \cdot \ln\frac{\beta}{2},$$

$$A_1 = -\frac{2\alpha\beta C_1 + \left(3\alpha^2\beta + \frac{3}{4}\beta^3\right)C_2}{K},$$

$$A_2 = -\frac{C_1\frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{2}\alpha\beta^2 C_2}{K}, \tag{18}$$

$$A_3 = -\frac{\beta^3 C_2}{4K}, \quad y_0 = Y_{01} + Y_{02}.$$

Folosind expresiile (11), se poate ușor demonstra că există relația

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)_{\rho=1} = \beta \cdot \sin\gamma\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y=0}, \tag{19}$$

care, împreună cu (10) și (13), permite stabilirea expresiei presiunii de contact:

$$p(\gamma) = \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)_{\rho=1} + P}{\beta\pi \cdot \sin\gamma}. \tag{20}$$

Mai rămîn necunoscute mărimile α și β, caracteristice pentru întinderea zonei de contact. Pentru determinarea lor se folosește constatarea că la extremitățile zonei de contact ($x = a$ și $x = b$), care corespund prin transformarea conformă (14) valorilor 0 și π pentru unghiul γ, presiunea nu poate avea valori infinite, deci o dată cu anularea numitorului fracției (20), trebuie să se anuleze și numărătorul. Din această condiție rezultă

$$2A_2 + P = 0; \; A_1 + 3A_3 = 0. \tag{21}$$

Înlocuind în ultimele ecuații expresiile (18) ale constantelor A_i, se obține un sistem algebric de două ecuații pentru determinarea mărimilor α și β, care, după unele transformări, devine

$$9C_2^2\alpha^3 + 9C_1C_2\alpha^2 + 2C_1^2\alpha + \frac{3}{2}PC_2K = 0,$$

$$\beta^2 = \frac{P \cdot K}{C_1 + 3\alpha C_2}. \tag{22}$$

Din cele trei rădăcini ale primei ecuații s-a reținut numai aceea care, în ipoteza simetriei zonei de contact ($C_2 = 0$), duce la relațiile cunoscute ale lui Hertz, obținîndu-se astfel

$$\alpha = \frac{C_1}{3C_2} \cdot \frac{\cos\frac{\psi}{3} - \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ},$$
$$\beta = \sqrt{\frac{P \cdot K}{C_1} \cdot \frac{\cos 30^\circ}{\cos\frac{\psi}{3}}}, \tag{23}$$

în care unghiul ψ este dat de

$$\operatorname{arctg}\psi = \left[-\sqrt{\frac{16C_1^6}{3^7 \cdot P^2 \cdot K^2 \cdot C_2^4} - 1} \right]$$
$$\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \pi. \tag{24}$$

Expresiile (17), (18), (20) și (21) permit acum stabilirea expresiei analitice explicite a presiunii în forma

$$p(\gamma) = \frac{P \cdot \sin\gamma}{\pi}\left[\frac{2}{\beta} + 3\frac{C_2}{C_1 + 3\alpha C_2}\cos\gamma\right]. \tag{25}$$

Revenind cu ajutorul relațiilor (11) la variabila x din sistemul de coordonate din figura (1), se obține pentru presiunea de contact expresia

$$p(x) = \frac{P\sqrt{1 - \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}}{2}\left[\frac{2}{\beta} + 3\frac{C_2}{C_1 + 3\alpha C_2} \cdot \frac{x-\alpha}{\beta}\right]. \tag{26}$$

Dacă se face $C_2 = 0$, se obțin formulele lui Hertz, deoarece α devine egal cu zero, iar β ia valoarea cunoscută din cazul simetriei zonei de contact.

O primă concluzie care poate fi trasă pe baza relațiilor generale scrise pînă aici este în legătură cu influența caracteristicilor mecanice ale materialelor corpurilor aflate în contact. Asimetria este cu atît mai mare, cu cît raportul dintre modulul de elasticitate și forța aplicată pe unitatea de lungime a liniei de contact este mai mic.

În privința întinderii zonei de contact se constată că, pe măsură ce asimetria geometrică crește, crește abaterea α a liniei mediane a zonei de contact față de linia de contact fără sarcină. Valoarea maximă a abaterii α se obține cu formulele scrise pentru $\psi = \pi$, fiind

$$\alpha_{max} = \frac{C_1}{3C_2} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}. \tag{27}$$

De asemenea lățimea zonei de contact crește față de cazul contactului simetric în raportul

$$\frac{\beta_{max}}{\beta_s} = \sqrt[4]{3}, \tag{28}$$

unde prin β_s s-a notat semilățimea zonei de contact din cazul simetric

$$\beta_s = \sqrt{\frac{P \cdot K}{C_1}}. \tag{29}$$

Dacă se notează cu p_s funcția presiunilor din cazul contactului simetric

$$p_s = \frac{2P \cdot \sin \gamma}{\pi \beta_s} \tag{30}$$

și se pune condiția $\psi = \pi$, se obține presiunea în cazul asimetriei maxime :

$$p(\gamma) = p_s \frac{1 + \cos \gamma}{\sqrt[4]{3}}. \tag{31}$$

Valoarea maximă a presiunii din acest caz extrem se găsește pentru $\gamma = \frac{\pi}{3}$

$$p_{max} = \frac{3\sqrt[4]{3}}{4} \cdot p_{s \cdot max}.$$

După cum se vede, valoarea maximă a presiunii de contact este cu puțin mai mică decît valoarea corespunzătoare din cazul contactului simetric.

Vom aplica cele de pînă acum la cazul contactului roților dințate cilindrice cu dinți drepți, ținînd seama de prezența asimetriei flancurilor în cazul folosirii profilului evolventic.

În scopul adaptării relațiilor generale la acest caz particular, să considerăm, ca în figura 2, două roți aflate în angrenare, flancurile dinților fiind reprezentate prin evolventele $P'P_1$ și $P'P_2$. Contactul se face în punctul oarecare P' al liniei de angrenare K_1K_2. Sistemul de coordonate xOy din figura 1 îl plasăm în figura 2, cu originea în punctul de contact fără sarcină P', iar axele Ox și Oy le orientăm în mod corespunzător după tangenta și după normala (în cazul de față după linia de angrenare) la flancuri. În acest sistem , punctul curent al flancului dintelui pinionului, P_1, are coordonatele

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{r_{b1}} &= -\cos(\varphi_1 - \theta_1) - \varphi_1 \sin(\varphi_1 - \theta_1) - 1, \\ \frac{y_1}{r_{b1}} &= \theta_1 - \sin(\varphi_1 - \theta_1) - \varphi_1 \cos(\varphi_1 - \theta_1), \end{aligned} \tag{32}$$

iar punctul P_2 corespunzător de pe flancul dintelui-pereche are coordonatele

$$\frac{x_2}{r_{b2}} = \cos(\varphi_2 - \theta_2) + \varphi_2 \sin(\varphi_2 - \theta_2) - 1,$$
$$\frac{y_2}{r_{b2}} = -\sin(\varphi_2 - \theta_2) + \varphi_2 \cos(\varphi_2 - \theta_2) - \theta_2. \tag{33}$$

În ecuațiile (32) și (33), φ_1 și φ_2 sînt parametrii punctelor curente de pe flancuri, iar r_{b1} și r_{b2} sînt razele cercurilor de bază ale angrenajului.

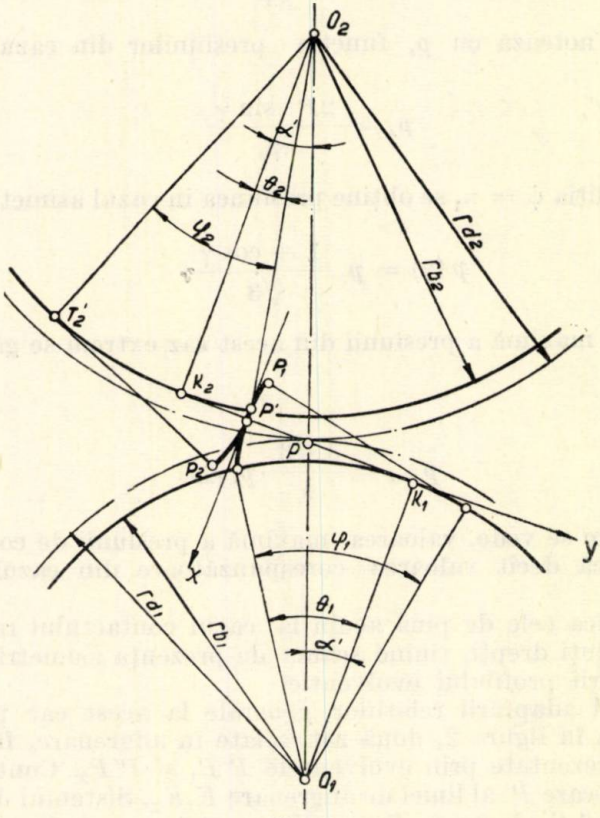


Fig. 2

Pentru a aduce expresiile (32) și (33) în forma (2), se face desvoltarea lor în serie de puteri în jurul punctului P' ($\varphi_1 = \theta_1$ și $\varphi_2 = \theta_2$) și se păstrează doar termenii de gradul doi și trei, găsindu-se

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\theta_1 r_{b1}} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\theta_1^3 r_{b1}^2} \cdot x^3,$$
$$y_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\theta_1 r_{b1}} \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\theta_2^3 r_{b1}^2} \cdot x^3. \tag{34}$$

În acest fel, constantele C_1 și C_2 (relațiile 15) devin

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\theta_1 r_{b1}} \pm \frac{1}{\theta_2 r_{b2}} \right),$$
$$C_2 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{\theta_1^3 r_{b1}^2} \mp \frac{1}{\theta_2^3 r_{b2}^2} \right). \tag{35}$$

Semnele superioare din formulele (34) și (35) sînt pentru angrenarea exterioară, iar semnele inferioare pentru angrenarea interioară. Se observă că în cazul angrenării interioare termenul C_1 scade, iar termenul C_2 are o valoare sporită față de cazul angrenării exterioare, adică influența asimetriei este mai mare la angrenarea interioară. De asemenea se constată influența poziției punctului P' pe linia de angrenare. Apropierea contactului de punctul K_1 de început al evolventei duce la micșorarea unghiului θ_1, ceea ce are drept urmare creșterea relativă a lui C_2 față de C_1, deci sporirea efectului asimetriei. De asemenea efectul asimetriei în cazul angrenării interioare este cu atît mai mare, cu cît numerele de dinți ai roților aflate în angrenare sînt mai apropiate. Acesta este, de exemplu, cazul cuplajelor dințate cu profil evolventic, la care numerele de dinți sînt egale și angrenarea este interioară. În timpul funcționării apar mici dezaxări ale celor două semicuple, ceea ce duce la realizarea unui contact între flancuri de tipul celui studiat în articolul de față.

În sensul celor arătate pînă aici, în continuare se fac cîteva exemplificări numerice.

a) În cazul angrenării exterioare a două roți dințate cilindrice cu dinți drepți, necorijați, ambele roți din oțel, cu numerele de dinți $z_1 = 17$; $z_2 = 33$, cu modulul $m = 4$ mm, care în polul angrenării suportă o sarcină $P = 150$ kgf/cm, pentru mărimile β și α (semilățimea și abscisa liniei mediane a zonei de contact) se găsesc valorile : $\alpha = -3\ \mu$; $\beta = 224\ \mu$. În cazul contactului simetric, aceleași mărimi sînt : $\alpha = 0$; $\beta = 224\ \mu$. Rezultă că, în cazul angrenării exterioare pentru roți din oțel, formulele lui Hertz dau rezultate foarte precise.

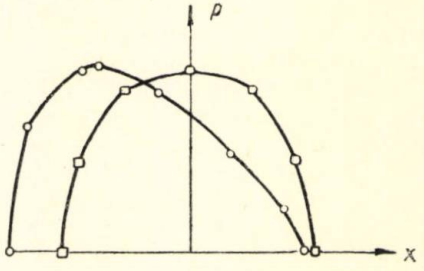


Fig. 3

b) În cazul aceleiași angrenări ca mai sus, roțile fiind confecționate din material plastic cu modulul de elasticitate $E = 25\,000$ kgf/cm^2 și care suportă în pol o sarcină $P = 20$ kgf/cm, mărimile α și β devin : $\alpha = -9\ \mu$; $\beta = 378\ \mu$. În cazul contactului simetric, $\alpha = 0$; $\beta = 378\mu$.

c) Să mai considerăm și agrenarea interioară a două roți din oțel cu numerele de dinți $z_1 = 21$ și $z_2 = 60$, cu modulul $m = 3$ mm, care în punctul de început al angrenării (la piciorul pinionului) suportă o sarcină $P = 40$ kgf/cm. De data aceasta se obține : $\alpha = -11\ \mu$; $\beta = 49\ \mu$. Con-

siderarea contactului simetric duce la: $\alpha = 0$; $\beta = 42{,}4\,\mu$. Ecuația presiunilor în cazul contactului simetric este $p(\gamma) = 6020 \sin \gamma$, iar în cazul contactului asimetric $p(\gamma) = 12{,}75\,(409 + 246 \cos \gamma) \sin \gamma$. Diagramele de presiuni sînt cele reprezentate în figura 3.

Primită la redacție la 28 august 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Manea Gh., *Organe de mașini*, vol. II. București, Edit. tehnică, 1958.
2. Resetov D. N., *Organe de mașini*. București, Edit. tehnică, 1963.
3. Стаермах К. И., *Контактные задачи теории упругости.*
4. Thmoshenko S. I., *Théorie de l'elasticité.*

CÎMPUL DE TEMPERATURI ÎN STRATUL LUBRIFIANT AL LAGĂRELOR CU ALUNECARE [1)]

de N. TIPEI și AL. NICA
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

532

Prin integrarea ecuației energiei și utilizîndu-se rezultatele deja obținute privind distribuția de presiuni în stratul lubrifiant, se stabilesc relațiile exprimînd distribuția de temperaturi în filmul lubrifiant al lagărelor cu alunecare în cazul tridimensional.
Legătura dintre ecuația presiunilor și cea a energiei se face prin intermediul exponentului care dă legea de variație a viscozității, permițînd astfel obținerea unor soluții comune.
Cîmpul de temperaturi se studiază atît pentru zona portantă, cît și pentru cea divergentă a filmului, rezultatele teoretice comparîndu-se cu datele experimentale obținute cu ajutorul unei mașini de încercat lagăre. Se constată un bun acord între datele teoretice și cele experimentale.

Se consideră (fig. 1) un sistem de axe ortogonale $Ox_1 x_2 x_3$ astfel încît viteza V este tangentă la axa Ox_1, iar Ox_2 este dirijată după normala în fiecare punct a suprafeței 1; dat fiind că razele de curbură ale suprafețelor solide sînt mult mai mari decît distanța h dintre pereții solizi, axele Ox_1 și Ox_3 se pot considera ca fiind situate pe una dintre suprafețe. Prin p se notează presiunea în punctul considerat, μ viscozitatea lubrifiantului, iar T temperatura. Cu simplificările și observațiile curente în problema lubrificației și după integrarea între 0 și h, ecuația energiei se poate scri sub forma [1], [2]

$$J\left\{\rho\left[\left(\frac{1}{2}Vh-\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)\frac{\partial (c_v T)}{\partial x_1}-\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x_3}\frac{\partial (c_v T)}{\partial x_3}\right]-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(hk\frac{\partial T}{\partial x_1}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(hk\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)+K_h(T-T_h)+K_0(T-T_0)\right\}=\frac{\mu V^2}{h}+\frac{h^3}{12\mu}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)^2\right]. \quad (1)$$

[1)] Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, 2 (1966) în limba engleză.

În această relație, J este echivalentul mecanic al caloriei, c_v căldura specifică la volum constant și ρ densitatea lubrifiantului; în fine, $K_{0,h}$ sînt coeficienții de transmisie a căldurii, iar k este coeficientul de conductibilitate termică.

Ecuația lui Reynolds și cea a energiei permit calculul presiunilor și temperaturilor în fiecare punct al filmului lubrifiant. În aceste relații figurează viscozitatea μ, care este o funcție de temperatură, ceea ce complică rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale format de relațiile citate.

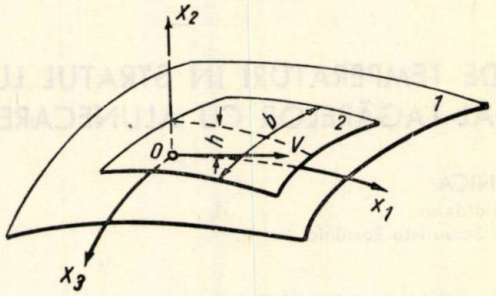


Fig. 1

Dacă se admite într-o primă aproximație $\mu = \mu_m = \text{const.}$ ecuația lui Reynolds se poate integra independent de cea a energiei; valorile $p(x_1, x_3)$ ale presiunilor odată cunoscute, se poate deduce apoi distribuția de temperaturi. În fine, cunoscîndu-se distribuția de temperaturi, rezultă variația lui μ în funcție de x_1 și x_3 (s-a presupus T independent de x_2). Cu $\mu(x_1, x_3)$ se pot deduce din nou presiunile din ecuația lui Reynolds și apoi se poate reface calculul pentru distribuția de temperaturi.

Expresiile $\mu(x_1, x_3)$ fiind destul de complicate, integrarea ecuațiilor este foarte dificilă, încît metoda este recomandabilă pentru cazuri concrete prin utilizarea mașinilor de calcul. Rezultatele obținute în diferite situații nu rezolvă însă problema în ansamblu, pentru a se permite o discuție a soluțiilor și o urmărire sistematică a influenței diferiților parametri. Reiese necesitatea stabilirii de soluții analitice, chiar cu prețul unor aproximații în limite admisibile.

S-a arătat astfel [1], [3], [4], că viscozitatea este pentru uleiuri o funcție strîns legată de grosimea peliculei lubrifiante, variind în același sens cu h conform relației

$$\mu = \mu_1 \left(\frac{h}{h_1}\right)^q, \tag{2}$$

unde μ_1 este valoarea corespunzătoare grosimii h_1; în general h_1 este grosimea maximă a filmului de ulei.

Dacă se consideră ca parametru coeficientul de încărcare a lagărului [5], [6]

$$\zeta = \frac{W \psi^2}{2\mu_1 b r_1 \omega}, \tag{3}$$

în care W este încărcarea exterioară, r_1 raza fusului, ω viteza unghiulară a acestuia și $\psi = \frac{c}{r_1}$ jocul relativ, se poate urmări experimental variația lui μ (prin intermediul temperaturii T) în stratul lubrifiant în funcție de unghiul de poziție θ și de distanța x_3 la secțiunea mediană. Se constată astfel că legea exprimată prin relația (2) este în general valabilă, independent de încărcare, presiunea de alimentare (p_i) și poziția punctului de introducere a lubrifiantului (θ_i) (fig. 2).

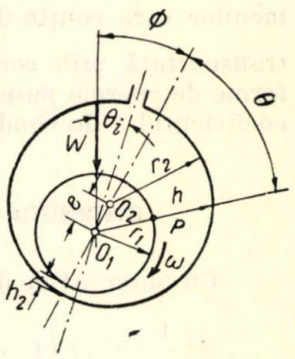


Fig. 2

Relația (2) permite înlocuirea lui μ și rezolvarea directă a ecuației lui Reynolds. Exponentul q depinde în genere de regimul de lucru al lagărului și constituie un parametru care poate fi determinat [6]. Adesea se consideră $q = 0$, deci $\mu = \text{const.}$, însă este mai aproape de realitate valoarea $q = 1$. Acest procedeu prezintă avantajul de a introduce în calcule (3) valoarea μ_1 cunoscută a viscozității la intrarea în lagăr; în realitate, unghiul $\theta_i \neq \Phi$ și deci $(\mu)_{\theta=0} \neq (\mu)_{\theta=\theta_i}$ (fig. 2). Diferențele dintre cele două valori sînt însă foarte mici pentru un lagăr corect construit și în mod practic se poate considera valoarea μ_1 cunoscută, corespunzătoare temperaturii uleiului la intrare.

Cunoscîndu-se repartiția de presiuni [1], [4], se poate trece la rezolvarea ecuației energiei (1). Pentru aceasta trebuie făcută distincția între zona de suprapresiuni ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) și zona divergentă a lagărului ($\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$), caracterizată prin tendința de emulsionare a uleiului [2]. Totodată, trebuie avut în vedere faptul că variațiile de temperatură în lungul axului lagărului nu sînt importante, fapt confirmat atît de experiențe originale, după cum reiese din figura 3, în care se vede că pentru un lagăr experimental lucrînd în condiții obișnuite această variație rămîne inferioară valorii de 4°C, cît și de alți autori [7].

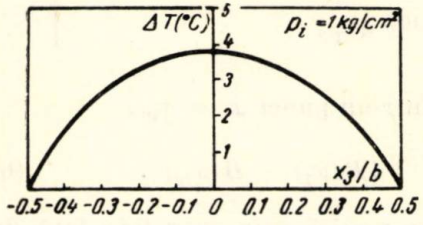


Fig. 3

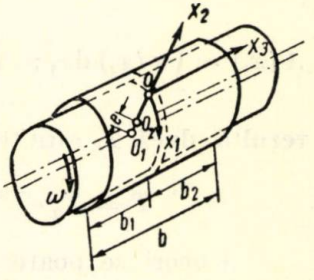


Fig. 4

Se poate admite astfel că variația lui T cu θ este aproape aceeași în orice secțiune a lagărului (fig. 4).

Se poate considera astfel o valoare particulară a lui x_3, avantajoasă din punctul de vedere a calculelor, pentru determinarea distribuţiei de temperaturi. În fine, se pot realiza unele simplificări prin neglijarea termenilor care conţin derivatele $\frac{\partial (c_v T)}{\partial x_3}$ şi, deoarece cantitatea de căldură transportată prin conductibilitate este cu mult mai mică decît celelalte forme de energie puse în joc, se pot lăsa deoparte şi termenii care conţin coeficientul k de conductibilitate a lubrifiantului.

DISTRIBUŢIA DE TEMPERATURI ÎN ZONA CONVERGENTĂ

Cu observaţiile de mai sus, ecuaţia (1) se poate scrie sub forma

$$J\left\{\frac{1}{2} V\rho c_v h\left(1-\frac{h^2}{6\mu V}\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)\frac{\partial T}{\partial x_1}+(K_h+K_0)\,T-K_h\,T_h-K_0\,T_0\right\}=$$

$$=\frac{\mu V^2}{h}+\frac{h^3}{12\mu}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)^2\right]. \tag{4}$$

Considerînd apoi $x_3 = x_{3s} = \text{const.}$ şi notînd

$$\left.\begin{aligned} a(x_1) &= \frac{2(K_h+K_0)}{V\rho c_v h\left[1-\frac{h^2}{6\mu V}\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)_{x_3=x_{3s}}\right]},\\ b(x_1) &= 2\,\frac{\frac{1}{J}\left\{\frac{\mu V^2}{h}+\frac{h^3}{12\mu}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)^2\right]_{x_3=x_{3s}}\right\}+K_h\,T_h+K_0 T_0}{V\rho c_v h\left[1-\frac{h^2}{6\mu V}\left(\frac{\partial p}{y x_1}\right)_{x_3=x_{3s}}\right]},\\ A(x_1) &= \int a(x_1)\,dx_1\,;\quad B(x_1)=\int b(x_1)\,e^{A(x_1)}\,dx_1\,, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

rezultă, dacă T_0 este temperatura dată într-un punct $x_1 = x_{10}$,

$$T = T_0\,e^{-[A(x_1)-A(x_{10})]}+e^{-A(x_1)}\,[B(x_1)-B(x_{10})]. \tag{6}$$

Uneori se poate neglija căldura transmisă prin suprafeţe faţă de aceea transportată prin transferul de masă, adică prin uleiul care iese sau intră la capetele lagărului. În această situaţie, $a(x_1) = 0$, şi, ţinîndu-se seama de forma distribuţiei de presiuni [1], [4]

$$p = p_a+\frac{p_b-p_a}{b}\,x_3+f_1(x_1)\,f_3(x_3)\,, \tag{7}$$

în care p_a și p_b sînt presiunile la capetele lagărului, se poate scrie

$$T = T_0 + \frac{2V}{J\rho c_v}\int_{x_{10}}^{x_1}\frac{\mu}{h^2}\,\frac{1+\dfrac{h^4}{12\mu^2V^2}\left[f_3^2\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\dfrac{p_b-p_a}{b}+f_1\dfrac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}x_3}\right)^2\right]_{x_3=x_{3s}}}{1-\dfrac{h^2}{6\mu V}(f_3)_{x_3=x_{3s}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x_1}}\,\mathrm{d}x_1. \tag{8}$$

Dacă $x_{3s} = b_2$ sau $x_{3s} = -b_1$ pentru unul dintre capetele lagărului și se scrie $p_a = p_b = p_0$, pentru secțiunea considerată $f_3(x_3) = 0$ temperatura va avea la extremități valoarea

$$T_e = T_0 + \frac{2V}{J\rho c_v}\int_{x_{10}}^{x_1}\frac{\mu}{h^2}\left[1+\frac{h^4}{12\mu^2V^2}f_1^2(x_1)\left(\frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}x_3}\right)^2_{x_3=b_2}\right]\mathrm{d}x_1. \tag{9}$$

Dacă se admite $q = 1$, din ecuația presiunilor [3], [4]:

$$\left.\begin{aligned} p = p_a+\frac{p_b-p_a}{b}(x_3+b_1)+\frac{6\mu_1Vr_1\varepsilon}{c^2(1+\varepsilon)^q(1-\varepsilon^2)^{1-q}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}\varepsilon^2(1-q)\left(2-\frac{q}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}\varepsilon^2(1-q)\left(1-\frac{q}{2}\right)}\cdot \\ \cdot\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}\left[1-\frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_{1q}}}{r_1}\left(x_3+b_1-\frac{b}{2}\right)}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1q}}}\right]\cdot\left\{\sin\theta+\left[\frac{A_{12q}}{A_{11q}}-\right.\right. \\ \left.\left.-\frac{1-\frac{1}{\operatorname{ch}2\lambda}}{1-\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1q}}}}\cdot\left(\frac{A_{12q}}{A_{11q}}-\frac{1-\frac{1}{2}(1-q)\left[1+\varepsilon^2\left(1-\frac{q}{2}\right)\right]}{1-\frac{1}{2}\varepsilon^2(1-q)\left(2-\frac{q}{2}\right)}\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]\cdot\sin 2\theta\right\} \\ \frac{A_{12q}}{A_{11q}} = 0{,}05386\,q-0{,}03816+(0{,}6524-0{,}0254\,q)\,\varepsilon \\ \beta_{1q} = 0{,}83292+0{,}09828\,q+(0{,}7412-0{,}4992q)\,\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

rezultînd

$$f_1(\theta) = \frac{6\mu_1Vr_1\varepsilon}{c^2(1+\varepsilon)}\cdot\frac{\sin\theta+\bar{a}_1\sin 2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}. \tag{11}$$

În aceste relații θ este unghiul de poziție a unui punct curent, $\lambda = \dfrac{b}{2r_1}$ alungirea și $\varepsilon = \dfrac{e}{c}$ excentricitatea relativă a lagărului:

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_1 &= 0{,}0157+0{,}627\,\varepsilon-\frac{1-\frac{1}{\operatorname{ch}2\lambda}}{1-\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{11}}}}(0{,}0157+0{,}127\,\varepsilon), \\ \beta_{11} &= 0{,}9312+0{,}242\,\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Considerînd $x_1 = r_1\,\theta$,

$$\left.\begin{aligned} I_{11} &= \frac{\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} - \frac{1}{1-\varepsilon^2}\left[\frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} - \right.\\ &\left. - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\right],\\ I_{12} &= \frac{\sin 2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} + 2\,\frac{2-\varepsilon^2}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}\,\frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} +\\ &+ \frac{4}{\varepsilon^2}\cdot\frac{2-3\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right),\\ I_{13} &= \frac{\sin\theta\sin 2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} - \frac{2}{\varepsilon}\left[\frac{\cos^2\theta+\cos 2\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} - \frac{2}{1+\varepsilon} - \right.\\ &\left. - \frac{2}{\varepsilon}\left(1-\cos\theta+\frac{1}{\varepsilon}\cdot\ln\frac{1+\varepsilon\cos\theta}{1+\varepsilon}\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

și avînd în vedere că $x_1 = x_{10}$ corespunde începutului zonei portante, respectiv grosimii maxime h_1 a peliculei, deci $x_{10} = 0$ și $\theta = 0$, integrala (9) se scrie

$$T_e = T_0 + \frac{2V\mu_1}{J\rho c_v c\,\psi(1+\varepsilon)}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\,\varepsilon\,\beta_{11}\cdot(I_{11} + 2\,\bar{a}_1 I_{12} + \bar{a}_1^2 I_{13})\right]. \qquad (14)$$

Dacă se admite viscozitatea constantă, $\mu = \mu_m = \mu_1$, $q = 0$, rezultă

$$T_e = T_0 + \frac{2V\mu_m}{J\rho c_v c\psi}\int_0^\theta\left[1 + \frac{12\beta_{10}\varepsilon^2}{(2+\varepsilon)^2}(\sin\theta + \bar{a}_0\sin 2\theta)^2\right]\frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}, \qquad (15)$$

în care :

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_0 &= -0{,}03816 + 0{,}6524\,\varepsilon + \frac{1-\dfrac{1}{\operatorname{ch} 2\lambda}}{1-\dfrac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{10}}}}(0{,}03816 - 0{,}4024\,\varepsilon),\\ \beta_{10} &= 0{,}83292 + 0{,}7412\,\varepsilon\,. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Notînd

$$\left.\begin{aligned}
I_{01} &= \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} - \frac{\theta}{\varepsilon} + \frac{2}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\right],\\
I_{02} &= \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} + \frac{4}{\varepsilon}\left(\frac{\theta}{\varepsilon} - \sin\theta\right) - \right.\\
&\quad \left. - \frac{4\left(\frac{2}{\varepsilon^2}-1\right)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\right],\\
I_{03} &= \frac{4}{\varepsilon^2}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{\varepsilon^2}\right)\theta + \frac{2}{\varepsilon}\sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} + \right.\\
&\quad \left. + \frac{2(3-2\varepsilon^2)}{\varepsilon^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\right],
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

se obține

$$T_e = T_0 + \frac{2V\mu_m}{J\rho c_v c\psi}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{12\beta_{10}\varepsilon^2}{(2+\varepsilon)^2}\left(I_{01} + 2\bar{a}_0 I_{02} + \bar{a}_0^2 I_{03}\right)\right]. \quad (18$$

În mod analog se poate aplica apoi formula (8) la mijlocul lagărului, unde $x_3 = \frac{b_2 - b_1}{2}$, obținîndu-se din (10)

$$\left(\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x_1}\right)_{f_3\left(x_3=\frac{b_2-b_1}{2}\right)} = \frac{1}{r_1}\left(\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}\theta}\right)_{f_3\left(x_3=\frac{b_2-b_1}{2}\right)} = \frac{6\mu_1 V r_1 \varepsilon}{c^2(1+\varepsilon)^q(1-\varepsilon^2)^{1-q}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2(1-q)\left(2-\frac{q}{2}\right)}{1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(1-q)\left(1-\frac{q}{2}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1q}}}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{(\cos\theta + 2\bar{a}_q\cos 2\theta)(1+\varepsilon\cos\theta) + 2\varepsilon\sin\theta(\sin\theta + \bar{a}_q\sin 2\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} \cdot \quad (19)$$

Înlocuind această expresie în (8) și ținînd seama că $h = c(1+\varepsilon\cos\theta)$, rezultă ($p_a = p_b$)

$$T^* = T_0^* + \frac{2V\mu_1 r_1}{J\rho c_v c^2 (1+\varepsilon)^q} \cdot \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{2-q}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1 + \frac{K^2(q,\lambda)}{12} \cdot \frac{\left(\cos\theta + 2\bar{a}_q \cos 2\theta + \frac{2\varepsilon\sin\theta(\sin\theta + \bar{a}_q \sin 2\theta)}{1+\varepsilon\cos\theta}\right)^2}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{2q}}}{1 - \frac{K(q,\lambda)}{6} \cdot \frac{\cos\theta + 2\bar{a}_q \cos 2\theta + \frac{2\varepsilon\sin\theta(\sin\theta + \bar{a}_q \sin 2\theta)}{1+\varepsilon\cos\theta}}{(1+\varepsilon\cos\theta)^q}} \, d\theta, \quad (20)$$

în care s-a notat

$$\left.\begin{aligned} K(q,\lambda) &= \frac{6\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{1-q}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2(1-q)\left(2-\frac{q}{2}\right)}{1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(1-q)\left(1-\frac{q}{2}\right)} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1q}}}\right) \\ \bar{a}_q &= \frac{A_{12q}}{A_{11q}} - \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch} 2\lambda}}{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1q}}}} \left(\frac{A_{12q}}{A_{11q}} - \frac{1 - \frac{1}{2}(1-q)\left[1+\varepsilon^2\left(1-\frac{q}{2}\right)\right]\frac{\varepsilon}{2}}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2(1-q)\left(2-\frac{q}{2}\right)}\right), \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

iar limita inferioară $\theta_0 = 0$.

Pentru $q = 0$, coeficienții adimensionali din relația (20) vor căpăta valorile

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_0 &= -0{,}03816 + 0{,}6524\,\varepsilon + \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch} 2\lambda}}{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{10}}}} (0{,}03816 - 0{,}4024\,\varepsilon), \\ \beta_{10} &= 0{,}83292 + 0{,}7412\,\varepsilon, \\ K(0,\lambda) &= \frac{6\varepsilon}{1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{10}}}\right). \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Pentru cazul $q = 1$ se obține

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_1 &= 0{,}0157 + 0{,}627\,\varepsilon - \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch} 2\lambda}}{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{11}}}} (0{,}0157 + 0{,}127\,\varepsilon), \\ \beta_{11} &= 0{,}9312 + 0{,}242\,\varepsilon, \\ K_{(1,\lambda)} &= 6\varepsilon\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{11}}}\right). \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Pentru aceste cazuri-limită, relaţia (20) se reduce la integrale de forma

$$I = \int_0^{\theta} \frac{\bar{a} + \bar{b}\cos\theta + \bar{c}\cos^2\theta + \bar{d}\cos^3\theta + \bar{e}\cos^4\theta}{\bar{f} + \bar{g}\cos\theta + \bar{h}\cos^2\theta + \bar{j}\cos^3\theta + \bar{i}\cos^4\theta + \bar{k}\cos^5\theta}\,\mathrm{d}\theta, \quad (24)$$

care se pot calcula fără dificultăţi deosebite pentru cazuri practice, cînd coeficienţii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ etc. capătă valori cunoscute [8].

Pentru a găsi soluţia mai exactă a ecuaţiei (4) se poate ţine seama apoi şi de variaţia temperaturii în lungul axului, adică cu x_3. Se consideră pentru aceasta soluţiile (6) sau (8) pentru diferite valori $x_3 = x_{3s}$, $T_{x_{3s}} = T_{1s}(x_1)$, $1 \leqslant s \leqslant S$; soluţia generală se poate scrie sub forma :

$$T = K_1(x_3 - x_{32})(x_3 - x_{33}) \ldots (x_3 - x_{3S}) T_{11}(x_1) + K_2(x_3 - x_{31}) \cdot$$

$$\cdot (x_3 - x_{33}) \ldots (x_3 - x_{3S}) T_{12}(x_1) + \ldots + K_S(x_3 - x_{31})(x_3 - x_{32}) \ldots$$

$$\ldots (x_3 - x_{3,S-1}) T_{1S}(x_1) = \prod_{r=1}^{r=S}(x_3 - x_{3r}) \sum_{s=1}^{s=S} \frac{1}{(x_3 - x_{3s})} K_s T_{1s}(x_1) =$$

$$= \sum_{s=1}^{s=S} T_{2s}(x_3)\, T_{1s}(x_1), \quad (25)$$

unde

$$K_s = \frac{1}{\prod_{r=1}^{r=s-1}(x_{3s} - x_{3r}) \prod_{r=s+1}^{r=S}(x_{3s} - x_{3r})}; \quad K_1 = \frac{1}{\prod_{r=2}^{r=S}(x_{31} - x_{3r})};$$

$$K_S = \frac{1}{\prod_{r=1}^{r=S-1}(x_{3s} - x_{3r})}. \quad (26)$$

Variaţia temperaturii va fi simetrică faţă de secţiunea mediană a lagărului, deoarece $f_3(x_3)$ este o funcţie pară, iar relaţiile (4), (5) arată că şi T va fi tot o funcţie pară în raport cu această variabilă dacă $p_a = p_b$ şi dacă T_0, T_h nu depind de x_3. Aceasta implică condiţia $T_{1s} = T_1$, $S - s + 1$ şi este independentă de produsele care intră în formula (25), respectiv de $T_{2s}(x_3)$. Maximele şi minimele lui T în lungul axei O_{x3} sînt date de relaţia

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x_3} = \prod_{r=1}^{r=S}(x_3 - x_{3r}) \sum_{s=1}^{s=S} \frac{K_s T_{1s}}{x_3 - x_{3s}} \left[\sum_{r=1}^{r=S} \frac{1}{x_3 - x_{3r}} - \frac{1}{x_3 - x_{3s}}\right] = 0. \quad (27)$$

Deoarece

$$\sum_{r=1}^{r=S} \frac{1}{x_3 - x_{3r}} \neq \frac{1}{x_3 - x_{3s}}, \quad (28)$$

rezultă că poziţia acestor puncte de maxim şi minim depind de x_1 şi că ele nu se găsesc într-un plan normal pe axa fusului decît în cazul variaţiei

simetrice a temperaturii față de secțiunea mediană. În acest caz, condiția (27) este îndeplinită automat pentru $x_3 = \frac{b_2 - b_1}{2}$, adică în planul de simetrie al lagărului.

De cele mai multe ori se ia $b_2 = b_1$, adică planul Ox_1, x_2 la mijlocul lagărului (fig. 4), iar soluția se poate construi cu ajutorul funcțiilor $T_e(x_1) = (T)_{x_3 = \pm \frac{b}{2}}$ și $T_M(x_1) = (T)_{x_3 = 0}$. Aplicînd relația (25), rezultă

$$T = T_M - (T_M - T_e)\frac{4x_3^2}{b_2^2}. \tag{29}$$

Variația parabolică astfel obținută este foarte apropiată de aceea experimentală (fig. 3). Soluțiile (25), deși nu satisfac ecuația (1), constituie în general o bună aproximație.

DISTRIBUȚIA DE TEMPERATURI ÎN ZONA DIVERGENTĂ

Pentru zona divergentă ($\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$) se poate scrie [2]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \\ &\frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{p_b - p_a}{b}, \ (p_b \neq p_a); \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0, \ (p_v = p_a) \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

și, neglijînd efectul conductibilității lubrifiantului, ecuația (1) capătă forma

$$\frac{1}{2} J \rho V h c_v \frac{\partial T}{\partial x_1} + J (K_h + K_0) T - J (K_h T_h + K_0 T_0) = \frac{\mu V^2}{h}. \tag{31}$$

Se poate remarca faptul că toți coeficienții sînt constante sau funcții de h, care depinde numai de x_1, respectiv de unghiul θ. Rezultă că T va fi o funcție numai de x_1, deci $\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x_1}$, dacă nici constanta de integrare nu depinde de x_3.

Ecuația (31) devine

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x_1} + \frac{2(K_h + K_0)}{\rho V c_v}\frac{1}{h} T - \frac{2}{\rho V c_v}\left[(K_h T_h + K_0 T_0)\frac{1}{h} + \frac{V^2}{J}\cdot\frac{\mu}{h^2}\right] = 0. \tag{32}$$

Soluția acesteia se obține imediat:

$$T = \exp\left[-\frac{2(K_h + K_0)}{\rho V c_v}\int \frac{\mathrm{d}x_1}{h}\right]\left\{C + \frac{2}{\rho V c_v}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\int\left(K_h T_h + K_0 T_0 + \frac{V^2 \mu_1}{J h_1^q}\cdot\frac{1}{h^{1-q}}\right)\frac{1}{h}\exp\left[\frac{2(K_h + K_0)}{\rho V c_v}\int \frac{\mathrm{d}x_1}{h}\right]\mathrm{d}x_1\right\}. \tag{33}$$

Dacă se notează

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{2\,(K_h + K_0)}{\rho V c_v}, \\ b &= \frac{2}{\rho V c_v}\,(K_h\,T_h + K_0\,T_0), \\ d &= \frac{2V\mu_1}{J\rho\,c_v\,h_1^q}, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

iar h are valoarea cunoscută $h = c\,(1 + \varepsilon\cos\theta)$, se găsește

$$T = \mathrm{e}^{-\frac{a}{\psi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)} \left\{ C + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\psi}\int\left[b + \frac{d}{c^{1-q}(1+\varepsilon\cos\theta)^{1-q}}\right]\frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{\psi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)}}{1+\varepsilon\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta\right\}. \tag{35}$$

Această expresie constituie o soluție exactă a problemei în condițiile specificate; forma sa destul de complicată necesită însă o integrare grafică.

Dacă se consideră, ca și în cazul zonei portante, că transmisia de căldură prin suprafețele solide care limitează filmul de lubrifiant este neglijabilă, $K_h = K_0 = 0$, se obține $a = 0$, $b = 0$ și

$$T = \frac{d}{\psi\,c^{1-q}}\int\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{2-q}} + C, \tag{36}$$

formulă valabilă în toate cazurile cînd răcirea se face mai ales prin lubrifiantul care iese din lagăr.

Pentru cazurile caracteristice $q = 0$ și $q = 1$ se găsește

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{2\mu_m V}{J\rho\,c_v\,c\,\varphi}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon^2}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\varepsilon\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\right] + C \\ &\qquad\qquad (q = 0), \\ T &= \frac{4\mu_1 V}{J\rho\,c_v\,c\,\psi}\cdot\frac{1}{(1+\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) + C \\ &\qquad\qquad (q = 1). \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

În zona divergentă, lubrifiantul ocupă o parte din lățimea lagărului [1] corespunzătoare pentru un unghi θ dat unei lățimi reale b_θ :

$$b_\theta = \frac{h_2}{h}\,b. \tag{38}$$

Pe această lățime redusă, fluidul care a lucrat în zona încărcată va avea temperatura T. Dacă în zona divergentă se introduce lubrifiant din exterior la o temperatură T_i, aceasta va ocupa lățimea

$$b - b_\theta = b\left(1 - \frac{h_2}{h_1}\right), \tag{39}$$

astfel încît temperatura medie în zona divergentă va fi, pentru un unghi θ oarecare,

$$T_m = T\frac{b_\theta}{b} + T_i\frac{b - b_\theta}{b} = T_i + (T - T_i)\frac{h_2}{h}. \tag{40}$$

În secțiunea corespunzătoare grosimii maxime $h = h_1$ ($\theta = 2\pi$), valoarea lui T se notează prin T_1, rezultînd din relațiile precedente

$$T_{m1} = T_i + (T_1 - T_i)\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}. \tag{41}$$

Se obține în consecință pentru T_m din a doua relație (37)

$$T_m = T_i + \left\{(T_{m1} - T_i)(1 + \varepsilon) - \frac{4\mu_1 V}{J\rho c_v c\psi}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1 - \varepsilon}{(1 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon^2}}\left[\pi - \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\frac{1}{1 + \varepsilon\cos\theta}. \tag{42}$$

Cu această relație se obține pentru secțiunea minimă valoarea

$$T_{m2} = T_i + (T_{m1} - T_i)\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} - \frac{2\pi\mu_1 V}{J\rho c_v c\psi}\cdot\frac{1}{(1 + \varepsilon)\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \tag{43}$$

Pentru calculul temperaturii T_i a lubrifiantului care intră între suprafețe în zona divergentă, se remarcă faptul că debitul de fluid se compune din acela corespunzător uleiului care trece prin fanta de alimentare Q_ν și din debitul de fluid Q_{si} aspirat din exterior sub acțiunea depresiunii care tinde să se nască în zona divergentă. Această depresiune este redusă, iar determinările experimentale i-au stabilit valoarea la aproximativ 1/100 kg/cm^2.

Dacă νb este lățimea fantei de alimentare (ν fiind raportul dintre lățimea fantei de alimentare și lățimea lagărului [6]) și dacă se observă că la o așezare corectă a acesteia grosimea filmului este foarte aproape de valoarea $h_1 = (1 + \varepsilon)c$, rezultă că secțiunea de trecere a lubrifiantului introdus sub presiunea de alimentare p_i este $\nu(1 + \varepsilon)cb$.

Pentru lubrifiantul care pătrunde din exterior se găsește la fel că secțiunea de intrare este $\pi c r_1$. Gradientul de presiune pentru debitul Q_ν este $\frac{p_i - p_0}{\pi r_1}$, iar pentru Q_{si} este egal cu depresiunea maximă care se poate crea în zona divergentă (100 kg/m^2) raportată la lungimea $(1 - \nu)\frac{b}{2}$ (fig. 5).

Debitele de fluid se scriu, conform legii lui Poiseuille

$$\left.\begin{aligned} Q_\nu &= \frac{h_1^2}{12\,\mu_{1f}} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1}\, h_1 \nu b = \frac{h_1^3 \nu b}{12\,\mu_{1f}} \cdot \frac{p_i - p_0}{\pi r_1}, \\ Q_{si} &= 2\,\frac{c^2}{12\,\mu_{1s}} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_3}\, c\,\pi r_1 = \frac{2\pi c^3 r_1}{12\,\mu_{1s}} \cdot \frac{100}{\frac{1}{2}(1-\nu)\,b}, \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Viscozităţile μ_{1f} şi μ_{1s} corespund temperaturilor T_ν a lubrifiantului introdus prin fantă şi T_s a lubrifiantului care scapă din zona încărcată a lagărului ($p > p_0$); se poate lua, în primă aproximaţie, $T_\nu = T_s$. Se obţine

$$\frac{Q_\nu}{Q_{si}} = (1+\varepsilon)^3\,\frac{\mu_{1s}}{\mu_{1f}} \cdot \frac{\nu(1-\nu)\,\lambda^2}{\pi^2} \cdot \frac{p_i - p_0}{100} = (1+\varepsilon)^3\,\frac{\nu(1-\nu)\,\lambda^2}{\pi^2} \cdot \frac{p_i - p_0}{100} \quad (45)$$

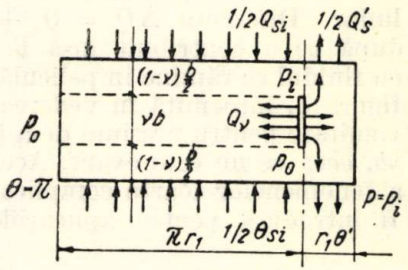


Fig. 5

şi apoi, pentru temperatura medie la intrare, expresia

$$T_i = \frac{T_s + T_\nu \dfrac{Q_\nu}{Q_{si}}}{1 + \dfrac{Q_\nu}{Q_{si}}}, \quad (46)$$

care trebuie introdusă în relaţiile precedente.

Fenomenul real este foarte complex, iar calculele de pînă acum reprezintă o schematizare a sa. Nu s-a ţinut astfel seama de efectul vitezei relative, de sens contrar celei date de diferenţa de presiuni $p_i - p_0$. În realitate, fanta nu este aşeaztă chiar în dreptul secţiunii $\theta = 0$, ci în amonte, astfel încît se poate scrie mai corect

$$Q_\nu = \left[\left(\frac{h_1^2}{12\,\mu_{1f}} \cdot \frac{p_i - p_0}{(\pi - \theta_i')\,r_1} - V\right) + \left(\frac{h_1^2}{12\,\mu_{1f}} \cdot \frac{p_i - p_0}{\theta_i''\,r_1} + V\right)\right] h_1 \nu b -$$

$$- Q_s' = \frac{h_1^3 \nu b}{12\,\mu_{1f}} \cdot \frac{p_i - p_0}{\pi r_1}\left(\frac{1}{1 - \dfrac{\theta_i'}{\pi}} + \frac{\pi}{\theta_i' + \alpha\theta'}\right) - Q_s', \quad (47)$$

unde $\theta_i' = \Phi - \theta_i$ (fig. 2).

Debitul Q_s' se datoreşte lubrifiantului introdus în aval de fantă şi care este eliminat, în parte, datorită creşterii presiunilor, care pentru un unghi $\theta = \theta'$ ajung la o valoare $p = p_i$ (fig. 5). Cînd $\theta_i \to 0$, Q_s' este aproximativ egal cu debitul introdus în zona aval a fantei sub efectul diferenţei de presiune $p_i - p_0$, astfel încît se regăseşte valoare lui Q_ν

dată de prima relaţie (44). Factorul α de la numitorul celei de-a doua fracţii este subunitar ($0 < \alpha < 1$) şi variabil de la caz la caz.

Trebuie remarcat faptul că toate consideraţiile precedente pentru deducerea raportului $\frac{Q_v}{Q_{si}}$ au fost făcute în vederea calculului temperaturii T_i. Debitul real de fluid introdus din exterior şi prin fanta de alimentare este egal cu $\frac{1}{2} V b (h_1 - h_2) = V b c \varepsilon$, conform legii de continuitate, deoarece, în secţiunile $\theta = 0$, $h = h_1$ şi $\theta = \pi$, $h = h_2$, presiunile au valoarea p_0, iar vitezele în interiorul peliculei de lubrifiant variază liniar. Diferenţa $\Delta Q_s = Q_v + Q_{si} - V b c \varepsilon$ este evacuată în exterior, după ce a contribuit însă la modificarea temperaturii prin amestecul cu fluidul ce rămîne în peliculă, conform relaţiilor (41) şi (46). Schema din figura 5, întocmită în vederea simplificării calculelor, prezintă o discontinuitate pentru presiuni de-a lungul frontierelor benzii centrale de lăţime vb, ceea ce nu este exact. Aceasta constituie însă o reprezentare globală a fenomenelor foarte complicate care au loc în această regiune şi poate fi introdusă pentru aplicaţiile practice.

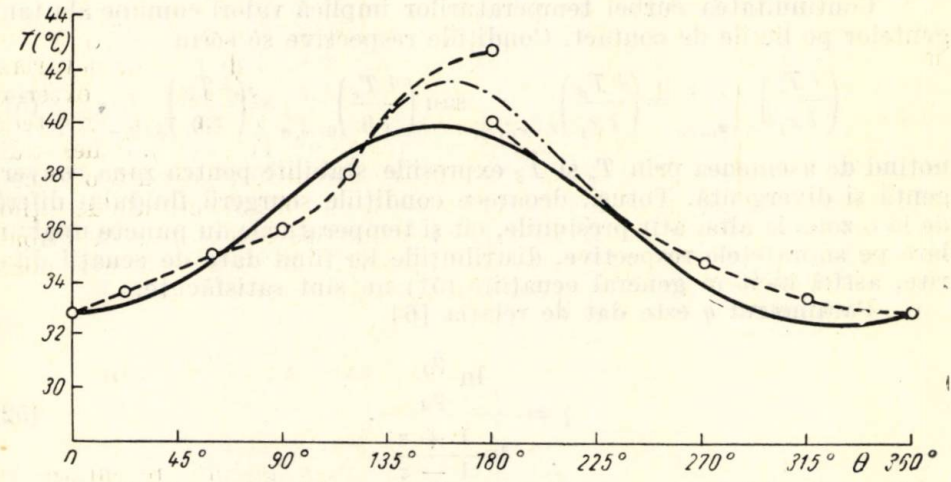
VERIFICĂRI EXPERIMENTALE ŞI CONSIDERAŢII ASUPRA METODEI DE CALCUL

Pentru verificarea experimentală a rezultatelor prezentate s-a considerat variaţia temperaturii cu unghiul de poziţie θ pentru un lagăr de alungire $\lambda = 0{,}5$ [3]. Celelalte caracteristici experimentale au fost: $r_1 = 18$ mm, $\psi = \frac{c}{r_1} = 1{,}14\ \% \div 1{,}66\%$, $V = 1{,}81$ m/s, $c_v = 0{,}5$ cagl/masă °C, $J c_v = 2\,100$ m²/s² °C. Uleiul folosit a fost ulei Stas 305, iar alimentarea s-a făcut sub presiunea $p_i = 1$ kg/cm², fanta de alimentare fiind aşezată pe direcţia sarcinii, în zona descărcată a lagărului. S-au considerat diagramele experimentale rezultate pentru valorile coeficientului de încărcare ζ, relaţia (3), făcîndu-se comparaţia cu rezultatele teoretice date de relaţia (20) pentru zona convergentă şi (42) pentru zona divergentă şi admiţînd $q = 1$. Excentricitatea relativă ε şi unghiul Φ s-au determinat din diagramele teoretice respective [5], [6], iar valoarea Tm_1 din secţiunea de grosime maximă a peliculei ($\theta = 2\pi$ pentru zona divergentă sau $\theta = 0$ pe diagramă) s-a obţinut de pe curba experimentală.

În figura 6 s-a trasat astfel diagrama temperaturilor din peliculă lubrifiantă în funcţie de unghiul θ pentru valoarea $\zeta = 0{,}764$ şi $\psi = 1{,}5 \times 10^{-3}$. Se constată diferenţe între valorile date de cele două grupuri de relaţii pentru punctul de racordare, firesti dacă se au în vedere simplificările făcute pentru fiecare dintre cele două zone ale filmului lubrifiant şi mai ales dacă se ţine seama de faptul că în cazul zonei convergente s-au considerat valorile T^* în planul median al lagărului, deci valorile maxime; dacă se face o mediere a valorilor pentru toată lăţimea lagărului, în mod evident se vor obţine valori mai reduse, deci şi diferen-

ţele pentru cele două zone vor fi mai mici. Diferenţele faţă de valorile experimentale sînt însă reduse în ambele cazuri, şi, dacă se aminteşte faptul că ultimele nu corespund chiar valorilor din filmul lubrifiant, ci au fost măsurate din 90 în 90° în cuzinet la 0,5 mm distanţă faţă de suprafaţa de lucru, se poate afirma că în realitate aceste diferenţe sînt şi mai mici.

În cele de mai sus s-au determinat separat temperaturile în zona de suprapresiuni şi în zona divergentă a lagărului. Constantele de inte-



——— Valori experimentale — — — Valori teoretice —·—· Valori teoretice medii

Fig. 6

grare $T_0\,(T_0^*)$, T_{m1} şi parametrul q au fost presupuse cunoscute şi introduse în formule ca atare pentru calcule de verificare, considerîndu-se valorile experimentale în secţiunile respective.

În cazul proiectării, aceste elemente sînt necunoscute şi trebuie determinate prin condiţii de racordare pe liniile care separă cele două zone. De obicei $x_{10} = \theta_0 = 0$, din relaţiile (6) şi (20), deci

$$T_0 = T_0^* = T_{m1}\,. \tag{48}$$

O altă condiţie este ca temperaturile T_2 din secţiunea minimă ($h = h_2$) de separaţie a zonelor divergentă şi convergentă, date de cele două categorii de formule stabilite (T_{2c} pentru zona convergentă şi T_{2d} pentru cea divergentă, respectiv pentru formulele corespunzătoare regiunilor încărcate şi descărcate), să fie egale:

$$T_{2c} = T_{2d} = T_{m2}\,. \tag{49}$$

Temperatura de ieşire la capetele lagărului $T_s = \dfrac{T_{m1} + T_{m2}}{2}$ [3] depinde de T_2 şi T_i, iar din relaţia (46) rezultă

$$T_i = \frac{\dfrac{1}{2}\,(T_{m1} + T_{m2}) + T_v\,\dfrac{Q_v}{Q_{si}}}{1 + \dfrac{Q_v}{Q_{si}}}\,. \tag{50}$$

Dacă se cunoaşte tempeatura T_v cu care intră uleiul prin orificiul de alimentare, relaţiile (48) şi (49) permit determinarea lui T_{m1}, deoarece T_{m2} rezultă din formulele stabilite pentru zona convergentă sau divergentă aplicate în punctul de grosime minimă a peliculei ($h = h_2$, $\theta = \pi$). T_i este de asemenea cunoscut prin intermediul relaţiei (50), astfel încît condiţiile de egalitate a temperaturilor pe liniile de contact ale celor două regiuni considerate se pot îndeplini, şi ele determină pe T_{m1}.

Continuitatea curbei temperaturilor implică valori comune ale tangentelor pe liniile de contact. Condiţiile respective se scriu

$$\left(\frac{\partial T_c}{\partial x_1}\right)_{x_1=x_{11},\,x_{12}} = \left(\frac{\partial T_d}{\partial x_1}\right)_{x_1=x_{11},\,x_{12}} \quad \text{sau} \quad \left(\frac{\partial T_c}{\partial \theta}\right)_{\theta=0,\,\pi} = \left(\frac{\partial T_d}{\partial \theta}\right)_{\theta=0,\,\pi}, \tag{51}$$

notînd de asemenea prin T_c şi T_d expresiile stabilite pentru zona convergentă şi divergentă. Totuşi, deoarece condiţiile scurgerii fluidului diferă de la o zonă la alta, atît presiunile, cît şi temperaturile au puncte unghiulare pe suprafeţele respective, distribuţiile lor fiind date de ecuaţii diferite, astfel încît în general ecuaţiile (51) nu sînt satisfăcute.

Parametrul q este dat de relaţia [6]

$$q = \frac{\ln \frac{\mu_1}{\mu_2}}{\ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}. \tag{52}$$

Valorile μ_1 şi μ_2 corespund temperaturilor T_{m1}, T_{m2} calculate. Cu ajutorul ecuaţiei de mai sus şi al curbei viscozitate-temperatură a lubrifiantului se poate determina q şi prin aceasta întreaga problemă este rezolvată.

Rezumînd, aplicarea practică necesită o serie de aproximaţii succesive, plecîndu-se de la o valoare μ_1 eventual corespunzătoare temperaturii T_v, şi o valoare pentru q cu care se determină parametrul ζ, relaţia (3), apoi excentricitatea relativă ε, parametrii β_{1q}, $\frac{A_{12q}}{A_{11q}}$, relaţia (10), presiunile şi $f_1(X_1)$, în fine temperaturile şi valorile μ_1, μ_2 cu ajutorul curbei viscozitate-temperatură a lubrifiantului, obţinîndu-se din relaţia (52) o valoare pentru q diferită de aceea admisă iniţial. Cu această valoare şi cu μ_1 corespunzător lui T_{m1} se reiau calculele pînă la obţinerea unei concordanţe satisfăcătoare între cele două valori.

Cînd se consideră distribuţia temperaturilor în mai multe secţiuni, luîndu-se în consideraţie şi variaţia în lungul axului lagărului (variaţia cu x_3), T_{m1} rezultă de asemenea ca funcţie de x_3. Variaţia sa se poate determina în mod analog cu ajutorul condiţiilor (48), (49), aplicate în fiecare secţiune. Pentru T_i se poate utiliza tot relaţia (50), în care însă T_{m2} se înlocuieşte prin valoarea sa în secţiunile externe (la capetele lagărului şi pentru $\theta = \pi$).

Se poate renunţa eventual, cu o destul de bună aproximaţie, la aplicarea acestor condiţii provenite din considerarea separată a distribuţiei

de temperaturi în cele două regiuni ale lagărului. Folosind observațiile formulate anterior, se poate admite curba temperaturilor aproximativ asimetrică față de linia centrelor și utiliza repartiția calculată numai pe porțiunea divergentă, unde formulele au un caracter mai simplu și mai ușor de aplicat (37), (42). În acest caz, relațiile amintite dau distribuția temperaturilor între $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, condiția de simetrie față de linia centrelor fiind

$$T_c(\theta) = T_d(-\theta); \quad T_{mc}(\theta) = T_{md}(-\theta), \tag{53}$$

ceea ce arată imediat că pe porțiunea convergentă $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ trebuie schimbat semnul în fața funcțiilor de θ din formulele citate. Temperatura T_{m1} rămîne totuși în acest caz nedeterminată. Pentru a se evita această dificultate se admite $q = 1$, valoare care, după cum s-a specificat, conduce la o bună apropiere față de rezultatele experimentale.

Admițînd μ_1 pentru temperatura T_v de intrare a lubrifiantului (în loc de T_{m1}), se poate determina ζ, ε, presiunile, ecuația temperaturilor care conține pe T_{m1} ca parametru și raportul $\frac{T_{m2}}{T_{m1}}$. Rezultă din (52)

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{54}$$

Rămîne astfel să se determine pe curba viscozitate-temperatură a uleiului punctele pentru care temperaturile și viscozitățile corespunzătoare se găsesc în rapoartele stabilite. La T_{m1} astfel determinat corespunde o viscozitate μ_1, cu care se poate recalcula ζ și celelalte elemente, pentru o mai bună aproximare.

EVACUAREA CĂLDURII NUMAI PRIN SUPRAFEȚELE FUSULUI ȘI CUZINETULUI

În cazul lagărelor cu un debit de lubrifiant foarte redus (lagăre unse prin inel, prin forțe de capilaritate — cu fitil, perniță etc. — sau lagăre impregnate cu lubrifiant), răcirea lubrifiantului se poate considera că are loc numai prin suprafețele de contact. Ecuația (1) dă direct distribuția temperaturilor, neglijînd pentru acest caz efectul răcirii prin transferul de masă:

$$T = \frac{K_h T_h + K_0 T_0 + \frac{1}{J}\left\{\frac{\mu V^2}{h} + \frac{h^3}{12\mu}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)^2\right]\right\}}{K_h + K_0} \tag{55}$$

sau, înlocuind pe μ (2)

$$T = \frac{K_h T_h + K_0 T_0 + \frac{1}{J}\left\{\frac{\mu_1 V^2}{h_1^q h^{1-q}} + \frac{h_1^q h^{3-q}}{12\mu_1}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)^2\right]\right\}}{K_h + K_0}. \tag{56}$$

Dacă distribuția de presiuni este cunoscută, se obține imediat repartiția temperaturilor, care în zona divergentă (30) ia o formă foarte simplă pentru lagărele cilindrice circulare :

$$T = \frac{K_h T_h + K_0 T_0}{K_h + K_0} + \frac{\mu_1 V^2}{J c^2 (K_h + K_0)(1+\varepsilon)^q} \cdot \frac{1}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{1-q}}. \quad (57)$$

Rezultă că pe porțiunea descărcată T variază invers cu h^{1-q}. Se observă, de asemenea, că ipoteza frecvent admisă $q = 0$ (μ = const.) nu este posibilă, deoarece T variază în acest caz cu $\frac{1}{h}$, care nu poate fi constant decît sub sarcină nulă. Variația lui T atrage însă și variația lui μ, deci $q \neq 0$.

Ținînd seama de debitul Q_v (cînd acesta este cunoscut : ungere prin inel de exemplu) se poate calcula T_i cu ajutorul relației (46) și apoi temperatura medie în fiecare punct al zonei divergente cu ajutorul relațiilor (57) și (40). Temperatura T_s este, la rîndul ei,

$$T_s = \frac{T_{m_1} + T_{m_2}}{2} = \frac{1}{2}\left[T_{\theta=\pi} + T_i + (T_{\theta=0} - T_i)\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right] \quad (58)$$

sau din (46)

$$T_i = \frac{\frac{1}{2}\left(T_{\theta=\pi} + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} T_{\theta=0}\right) + T_v \frac{Q_v}{Q_{si}}}{\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{Q_v}{Q_{si}}}. \quad (59)$$

Pentru diagrama aproximativă a temperaturilor medii pe întreaga periferie a fusului [$T_m = f(\theta)$] se poate considera apoi și în zona încărcată ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) o variație simetrică față de linia centrelor și analogă cu aceea din zona descărcată.

Primită la redacție la 24 octombrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. N. Tipei, *Hidroaerodinamica lubrificației*. București, Edit. Acad. R.P.R., 1957.
2. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica, *Cercetări asupra transferului de căldură în lubrificația hidrodinamică, cu aplicații la calculul lagărelor de turbină*. Referat intern, I.M.A. (1960).
3. N. Tipei., Al. Nica, *Cercetări asupra regimurilor de funcționare a lagărelor. I. Influența variației viscozității*. St. cerc. mec. apl., **X**, *3* (1959).
4. N. Tipei, *Theory of Lubrication*. Stanford Stanford University Press, 1962.
5. N. Tipei, Al. Nica, *Cercetări asupra regimurilor de funcționare a lagărelor. II. Caracteristicile globale în cazul viscozității variabile*. St. cerc. mec. apl., *4* (1959).
6. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica, O. Biță, *Lagăre cu alunecare*. București, Edit. Acad. R.P.R., 1961.
7. F. T. Barwell, *Lubrication of Bearings*. Londra, Butterworth Scientific Publications, 1956.
8. I. M. Rîjic, I. S. Gradstein, *Tabele de integrale, sume, serii și produse*. București, Edit tehnică, 1958.

STUDIUL LUBRIFICAȚIEI TURBULENTE FOLOSIND IPOTEZA LUNGIMII DE AMESTEC CU O VARIAȚIE PARABOLICĂ DUPĂ NORMALĂ LA STRATUL DE LUBRIFIANT [1])

de V. N. CONSTANTINESCU
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România
și S. GĂLETUȘE
institutul politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej"

532

Folosind același mod de tratare ca în unele lucrări precedente, se examinează, mișcarea turbulentă în straturi subțiri mărginite de frontiere solide, utilizînd însă o variație parabolică a lungimii de amestec în locul unei variații liniare.
Se integrează ecuațiile de mișcare, deducîndu-se succesiv distribuțiile de viteze, debitele de lubrifiant, tensiunile de forfecare și ecuația diferențială a presiunilor pentru lubrificația în regim turbulent. În comparație cu rezultatele anterioare deduse folosind o lege liniară pentru lungimea de amestec, rezultatele obținute verifică observația făcută și cu o altă ocazie, și anume că legea de variație a lungimii de amestec nu alterează calitativ rezultatele, iar influența cantitativă este relativ redusă și poate fi luată în considerare prin corectarea valorii numerice a constantei care definește variația lungimii de amestec în funcție de distanța de la perete. Astfel, profilele de viteze rezultă de aceeași natură, iar dependența debitelor de lubrifiant de gradienții de presiune rămîne în continuare liniară, deducîndu-se în final ecuația presiunilor sub aceeași formă, dar cu unele constante determinate mai precis.

În unele lucrări anterioare [1], [2], [3] s-a utilizat ipoteza lungimii de amestec a lui Prandtl pentru studiul mișcării turbulente în stratul de lubrifiant.

Rezultatele obținute în privința profilelor de viteze, distribuției presiunilor, rezultantei presiunilor și frecărilor care apar în diferite tipuri

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, 2 (1966) (în limba engleză).

de lagăre au fost calitativ confirmate de rezultatele experimentale. În lucrările menţionate s-a folosit pentru variaţia lungimii de amestec o lege liniară de forma

$$\begin{aligned} l_a &= k^* y \qquad 0 < y < \frac{h}{2}, \\ l_a &= k^* (h - y) \qquad \frac{h}{2} < y < h. \end{aligned} \tag{1}$$

Se observă că o astfel de lege prezintă la $y = h/2$ o schimbare bruscă a pantei, ceea ce constituie cu siguranţă o aproximaţie.

De altfel, pentru scurgeri turbulente în tuburi, J. Nikuradse a obţinut experimental pentru lungimea de amestec legea [4]

$$\frac{l_a}{r} = 0{,}14 - 0{,}08\left(1 - \frac{y}{r}\right)^2 - 0{,}06\left(1 - \frac{y}{r}\right)^4 \ldots \tag{2}$$

sau, dezvoltînd în serie,

$$l_a = 0{,}4\ y - 0{,}44\frac{y^2}{r} + \ldots \cong 0{,}4\ y\left(1 - \frac{y}{r}\right), \tag{3}$$

Pentru astfel de mişcări în tuburi, canale etc. s-a dovedit ca fiind foarte corectă valoarea propusă de Prandtl, adică $k^* = 0{,}4$.

Deoarece înălţimea h a filmului de lubrifiant are valori relative şi absolute foarte mici, există o influenţă reciprocă a celor doi pereţi ceea ce va duce la o micşorare a constantei k^* [5], [6]. Deoarece nu există încă suficiente date experimentale pentru a se determina legea de variaţie a lungimii de amestec, această constantă k^* a fost lăsată oarecare cu valori între 0,25 şi 0,35. Comparînd rezultatele globale (presiuni, frecări) cu cele experimentale, acest lucru a fost confirmat însă nu s-a putut preciza ce valoare trebuie luată în calcule pentru k^* la un interval suficient de mare de numere Reynolds. În acelaşi timp, valoarea constantei k^* trebuie de asemenea corectată pentru a compensa eroarea introdusă prin considerarea a două regiuni separate de scurgere în stratul de lubrifiant : una interioară, în care tensiunile viscoase sînt neglijabile şi cîte un substrat laminar în apropierea fiecărei suprafeţe lubrificate, în care tensiunile turbulente sînt neglijate. Într-adevăr, pentru o tratare mai precisă a problemei ar trebui luată în considerare şi o a treia regiune de tranziţie, în care ambele tipuri de tensiuni sînt de acelaşi ordin de mărime. S-a preferat totodată utilizarea în primă aproximaţie a unei legi liniare de variaţie a lungimii de amestec, nu numai pentru simplificarea calculelor, dar şi pentru motivul că, în cazul-limită al mişcărilor în straturi groase de tip Couette sau Poi-

seuille, rezultatele obținute în acest mod sînt integral confirmate de către datele experimentale existente. Cu toate acestea, deoarece pentru cazurile curente de lubrificație rezultă $k^* < 0{,}4$, vom relua în cele ce urmează studiul mișcării în stratul de lubrifiant, folosind o lege parabolică pentru lungimea de amestec, cu scopul de a examina mai precis influența legii de variație a lungimii de amestec și influența reciprocă a celor două suprafețe lubrificate.

Considerînd mișcarea pe direcția x, ecuația diferențială a mișcării se scrie [1], [3]

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho l_a^2 \frac{\partial u}{\partial y}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\right] + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{4}$$

în care u — componenta vitezei medii locale pe direcția x a mișcării și p — presiunea, sînt valori medii în timp, iar notațiile sînt cele uzuale pentru probleme de lubrificație [1].

Prin integrare în raport cu y, ecuația (4) devine

$$\mathcal{R}e\, \bar{l}_a^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right| + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{h^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x}\bar{y} - C = 0, \tag{5}$$

unde

$$\mathcal{R}e = \frac{\rho V h}{\mu}; \quad \bar{u} = \frac{u}{V}; \quad \bar{y} = \frac{y}{h}; \quad \bar{l}_a = \frac{l_a}{h}. \tag{6}$$

Vom folosi pentru lungimea de amestec legea de variație parabolică

$$l_a = k^* y\left(1 - \frac{y}{h}\right) \tag{7}$$

sau încă, cu notații adimensionale,

$$\bar{l}_a = k^* \bar{y}\,(1 - \bar{y}). \tag{8}$$

Să notăm cu

$$R = k^{*2}\mathcal{R}e \quad \text{și} \quad B_x = -\frac{h^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{9}$$

Ecuația (5) devine atunci

$$R\bar{y}^2(1 - \bar{y})^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right| + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + B_x \bar{y} - C = 0. \tag{10}$$

În lucrarea [3] au fost deduse soluțiile acestei ecuații, considerînd că în apropierea suprafețelor lubrificate există un substrat laminar în inte-

riorul căruia influenţa termenului $R\overline{y}^2(1-\overline{y})^2\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}}\left|\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}}\right|$ este neglijabilă, iar în restul grosimii filmului de lubrifiant tensiunea datorită viscozităţii $\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}}$ este neglijabilă faţă de tensiunea turbulentă.

În continuare vom stabili sistemele de ecuaţii algebrice pentru aflarea constantelor care intervin în formulele pentru distribuţia de viteze u.

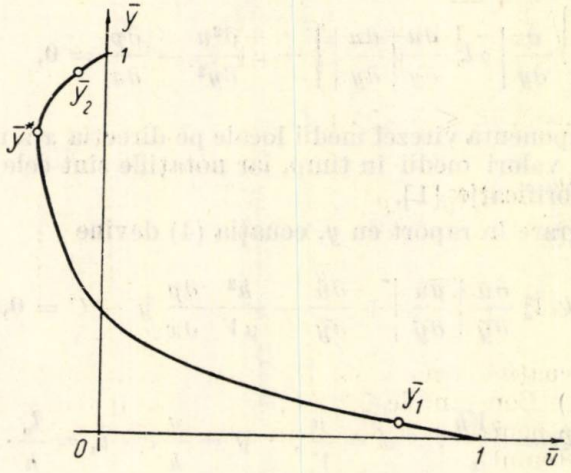


Fig. 1. — Distribuţia de viteze în cazul 1.

Cazul 1 ($B_x < 0$). Profilul de viteze arătat în figura 1 corespunde unor valori $B_x < 0$ mari în valoare absolută.
Pentru prima zonă, $0 \leqslant \overline{y} \leqslant \overline{y}_1$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}} &= -B'_x(\overline{y}^* - \overline{y}) \\ \overline{u} &= 1 - B'_x\overline{y}\left(\overline{y}^* - \frac{\overline{y}}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Pentru a doua zonă, $\overline{y}_1 \leqslant \overline{y} \leqslant \overline{y}^*$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}} &= -\sqrt{\frac{B'_x}{R}}\,\frac{\sqrt{\overline{y}^* - \overline{y}}}{\overline{y}(1-\overline{y})} \\ \overline{u} &= -\sqrt{\frac{B'_x\overline{y}^*}{R}}\left[-\ln\frac{1+\sqrt{1-\overline{y}/\overline{y}^*}}{1-\sqrt{1-\overline{y}/\overline{y}^*}} + \right. \\ &\left. + 2\sqrt{\frac{1}{\overline{y}^*}-1}\ \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\overline{y}^* - \overline{y}}{1-\overline{y}^*}}\right] + \overline{u}_1^* \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Pentru a treia zonă, $\overline{y}^{\star} \leqslant \overline{y} \leqslant \overline{y}_2$;

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} &= \sqrt{\frac{B'_x}{R}}\,\frac{\sqrt{\overline{y}-\overline{y}^{\star}}}{\overline{y}(1-\overline{y})} \\ \overline{u} &= \sqrt{\frac{B'_x}{R}\,\overline{y}^{\star}}\left[-2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\overline{y}}{\overline{y}^{\star}}-1}+\right. \\ &\left.+\sqrt{\frac{1}{\overline{y}^{\star}}-1}\ln\frac{\sqrt{1-\overline{y}^{\star}}+\sqrt{\overline{y}-\overline{y}^{\star}}}{\sqrt{1-\overline{y}^{\star}}-\sqrt{\overline{y}-\overline{y}^{\star}}}\right]+\overline{u}_1^{\star}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Pentru a patra zonă, $\overline{y}_2 \leqslant \overline{y} \leqslant 1$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} &= B'_x(\overline{y}-\overline{y}^{\star}) \\ \overline{u} &= -B'_x\overline{y}\left(\overline{y}^{\star}-\frac{\overline{y}}{2}\right)+B'_x\left(\overline{y}^{\star}-\frac{1}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

În aceste ecuații s-a notat cu B'_x valoarea absolută a parametrului B_x, ($B'_x = -B_x$). Constantele $\overline{y}^{\star}$, $\overline{u}_1^{\star}$, $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$ se determină punînd condiții de racordare pentru $\overline{u}$ și $\partial\overline{u}/\partial\overline{y}$ în punctele $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$ (fig. 1). Se obține în acest mod sistemul

$$\left.\begin{aligned} B'_x(\overline{y}^{\star}-\overline{y}_1) &= \sqrt{\frac{B'_x}{R}}\,\frac{\sqrt{\overline{y}^{\star}-\overline{y}_1}}{\overline{y}_1(1-\overline{y}_1)} \\ \overline{u}_1^{\star} &= 1-B'_x\overline{y}_1\left(\overline{y}^{\star}-\frac{\overline{y}_1}{2}\right)+\sqrt{\frac{B'_x}{R}\,\overline{y}^{\star}}\left[\right. \\ &\left.-\ln\frac{1+\sqrt{1-\overline{y}_1/\overline{y}^{\star}}}{1-\sqrt{1-\overline{y}_1/\overline{y}^{\star}}}+2\sqrt{\frac{1}{\overline{y}^{\star}}-1}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\overline{y}^{\star}-\overline{y}_1}{1-\overline{y}^{\star}}}\right] \\ \overline{u}_1^{\star} &= -B'_x\overline{y}_2\left(\overline{y}^{\star}-\frac{\overline{y}_2}{2}\right)+B'_x\left(\overline{y}^{\star}-\frac{1}{2}\right)-\sqrt{\frac{B'_x}{R}\,\overline{y}^{\star}}\left[\right. \\ &\left.-2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\overline{y}_2}{\overline{y}^{\star}}-1}+\sqrt{\frac{1}{\overline{y}^{\star}}-1}\ln\frac{\sqrt{1-\overline{y}^{\star}}+\sqrt{\overline{y}_2-\overline{y}^{\star}}}{\sqrt{1-\overline{y}^{\star}}-\sqrt{\overline{y}_2-\overline{y}^{\star}}}\right] \\ B'_x(\overline{y}_2-\overline{y}^{\star}) &= \sqrt{\frac{B'_x}{R}}\,\frac{\sqrt{\overline{y}_2-\overline{y}^{\star}}}{\overline{y}_2(1-\overline{y}_2)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Cazul 2 ($B_x < 0$). În mod analog pentru distribuția de viteză din figura 2 se deduce sistemul

$$\left.\begin{aligned} B'_x(1-\bar{y}_1) &= \sqrt{\frac{B'_x}{R}}\,\frac{\sqrt{1-\bar{y}_1}}{\bar{y}_1(1-\bar{y}_1)} \\ C_1 &= 1 - B'_x\bar{y}_1\left(1-\frac{\bar{y}_1}{2}\right) - \sqrt{\frac{B'_x}{R}}\ln\frac{1+\sqrt{1-\bar{y}_1}}{1-\sqrt{1-\bar{y}_1}} \\ C_1 &= -B'_x\bar{y}_2\left(1-\frac{\bar{y}_2}{2}\right) + \frac{B'_x}{2} - \sqrt{\frac{B'_x}{R}}\ln\frac{1+\sqrt{1-\bar{y}_2}}{1-\sqrt{1-\bar{y}_2}} \\ B'_x(1-\bar{y}_2) &= \sqrt{\frac{B'_x}{R}}\,\frac{\sqrt{1-\bar{y}_2}}{\bar{y}_2(1-\bar{y}_2)} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

prin rezolvarea căruia se obțin constantele B'_x, C_1, $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$.

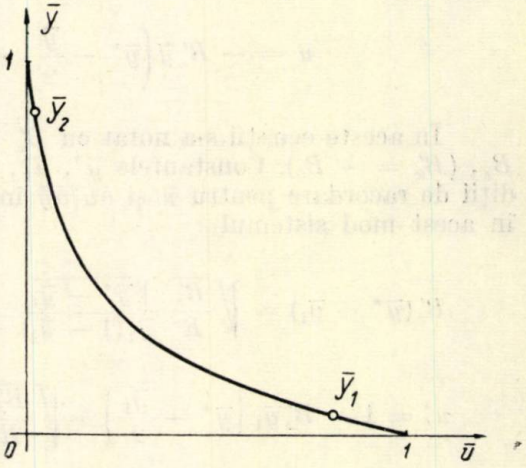


Fig. 2. — Distribuția de viteze în cazul 2.

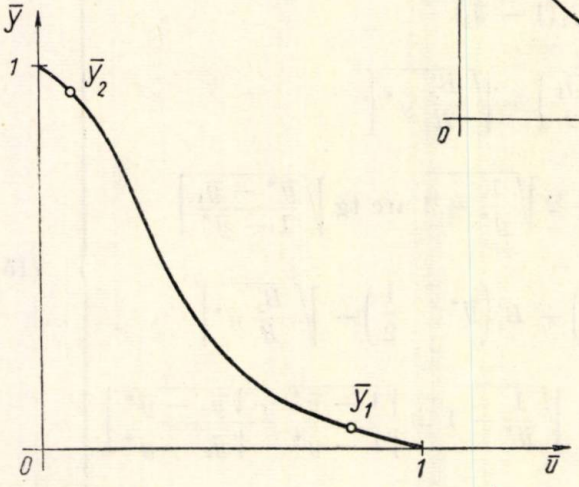


Fig. 3. — Distribuția de viteze în cazul 3.

Cazul 3 ($B_x < 0$). Pentru profilul de viteze din figura 3 se obține sistemul algebric din care se determină necunoscutele C_1,

C_2, $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$:

$$\left.\begin{aligned}
&B'_x(C_1-\bar{y}_1)=\sqrt{\frac{B'_x}{R}}\frac{\sqrt{C_1-\bar{y}_1}}{\bar{y}_1(1-\bar{y}_1)}\\
&C_2=1-B'_x\bar{y}_1\left(C_1-\frac{\bar{y}_1}{2}\right)-\sqrt{\frac{B'_xC_1}{R}}\left[\ln\frac{1+\sqrt{1-\dfrac{\bar{y}_1}{C_1}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{\bar{y}_1}{C_1}}}-\right.\\
&\left.-\sqrt{1-\frac{1}{C_1}}\ln\frac{\sqrt{C_1-\bar{y}_1}+\sqrt{C_1-1}}{\sqrt{C_1-\bar{y}_1}-\sqrt{C_1-1}}\right]\\
&C_2=-B'_x\bar{y}_2\left(C_1-\frac{\bar{y}_2}{2}\right)+B'_x\left(C_1-\frac{1}{2}\right)-\sqrt{\frac{B'_x}{R}C_1}\left[\right.\\
&\left.\left[\ln\frac{1+\sqrt{1-\bar{y}_2/C_1}}{1-\sqrt{1-\bar{y}_2/C_1}}-\sqrt{1-\frac{1}{C_1}}\ln\frac{\sqrt{C_1-\bar{y}_2}+\sqrt{C_1-1}}{\sqrt{C_1-\bar{y}_2}-\sqrt{C_1-1}}\right]\right.\\
&B'_x(C_1-\bar{y}_2)=\sqrt{\frac{B'_x}{R}}\frac{\sqrt{C_1-\bar{y}_2}}{\bar{y}_2(1-\bar{y}_2)}.
\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Cazul 4 ($B_x=0$). Pentru mișcarea Couette sistemul este

$$\left.\begin{aligned}
&C_1=\sqrt{\frac{C_1}{R}}\frac{1}{\bar{y}_1(1-\bar{y}_1)}\\
&1-C_1\bar{y}_1=\frac{1}{2}+\\
&\quad+\sqrt{\frac{C_1}{R}}\ln\frac{1-\bar{y}_1}{\bar{y}_1}\\
&C'_1(1-\bar{y}_2)=\frac{1}{2}-\\
&\quad-\sqrt{\frac{C'_1}{R}}\ln\frac{\bar{y}_2}{1-\bar{y}_2}\\
&C'_1=\sqrt{\frac{C'_1}{R}}\frac{1}{\bar{y}_2(1-\bar{y}_2)}.
\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

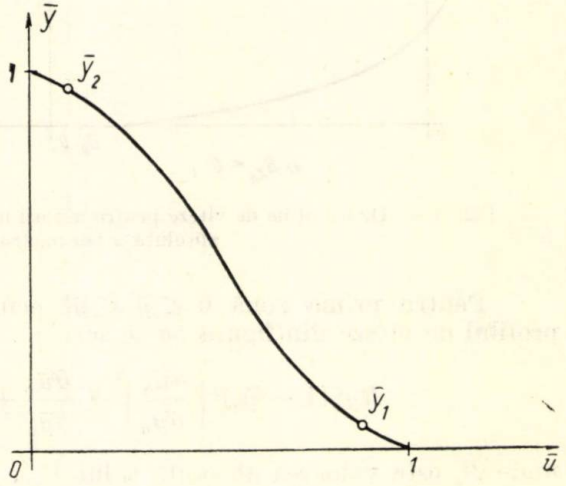


Fig. 4. — Distribuția de viteze în cazul 4 (Couette).

În acest caz, necunoscutele C_1 și $\bar{y}_1$ se pot determina din primele două ecuații ale sistemului (18), iar celelalte două ecuații sînt automat

satisfăcute pentru $\overline{y}_2 = 1 - \overline{y}_1$. În sfîrşit $C_1' = C_1$, deoarece ecuaţia (10), pentru $B_x = 0$, devine

$$R\overline{y}^2(1-\overline{y})^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}}\left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}}\right| + \frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}} - C = 0, \tag{19}$$

de unde

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}}\right)_{\overline{y}=0} &= -C_1 = C\\ \left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}}\right)_{\overline{y}=1} &= -C_1' = C.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

În concluzie, afirmaţia $C_1' = C_1$ este adevărată.

Urmează încă trei cazuri posibile analoge cu cazurile 1, 2, 3, tratate însă cu $B_x > 0$. Vom relua cazul 1 şi analogul său cu $B_x > 0$, reprezentate în figura 5.

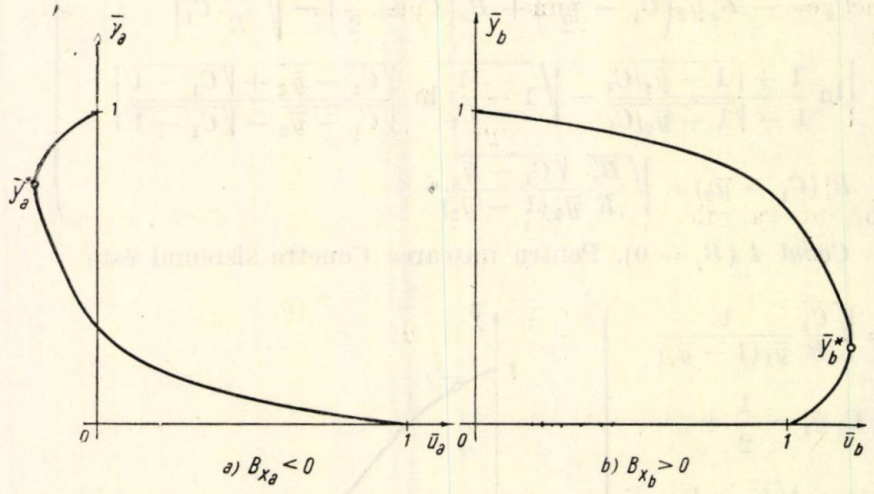


Fig. 5. — Distribuţiile de viteze pentru acelaşi număr Reynolds şi aceeaşi valoare absolută a parametrului B.

Pentru prima zonă $0 \leqslant \overline{y} \leqslant \overline{y}_1^*$ ecuaţia diferenţială (10), pentru profilul de viteze din figura 5*a* se scrie :

$$R\overline{y}_a^2(1-\overline{y}_a)^2\left(\frac{\partial\overline{u}_a}{\partial\overline{y}_a}\right)^2 + \frac{\partial\overline{u}_a}{\partial\overline{y}_a} + B_x'\overline{y}_a + C = 0, \tag{21}$$

unde B_x' este valoarea absolută a lui B_{xa}.

Pentru punctul $\overline{y}_a^*$, derivata $\dfrac{\partial\overline{u}_a}{\partial\overline{y}_a} = 0$, deci

$$B_x'\overline{y}_a^* = -C. \tag{22}$$

Atunci ecuația (21) devine

$$R\overline{y}_a^2(1-\overline{y}_a)^2\left(\frac{\partial\overline{u}_a}{\partial\overline{y}_a}\right)^2+\frac{\partial\overline{u}_a}{\partial\overline{y}_a}-B'_x(\overline{y}_a^*-\overline{y}_a)=0. \tag{23}$$

În cazul profilului de viteze din figura 5*b*, cînd $B_{xb}>0$, egal cu modulul lui B_{xa}, deci egal cu B'_x, pentru zona $\overline{y}_b^*\leqslant\overline{y}_b\leqslant 1$, ecuația diferențială se scrie

$$R\overline{y}_b^2(1-\overline{y}_b)^2\left(\frac{\partial\overline{u}_b}{\partial\overline{y}_b}\right)^2+\frac{\partial\overline{u}_b}{\partial\overline{y}_b}-B'_x(\overline{y}_b-\overline{y}_b^*)=0. \tag{24}$$

Să presupunem că ecuația (23) este satisfăcută pentru soluții $\overline{u}_a$ în punctele $\overline{y}_a$. Vom considera pentru cazul „*b*" soluții $\overline{u}_b=1-\overline{u}_a$ pentru punctele $\overline{y}_b=1-\overline{y}_a$ și punctul de maxim $\overline{y}_b^*=1-\overline{y}_a^*$. În aceste condiții

$$\frac{\partial\overline{u}_b}{\partial\overline{y}_b}=\frac{\partial\overline{u}_a}{\partial\overline{y}_a}. \tag{25}$$

Înlocuind valorile $\overline{u}_b$, $\overline{y}_b$, $\overline{y}_b^*$, $\partial\overline{u}_b/\partial\overline{y}_b$ în ecuația (24), se obține ecuația

$$R(1-\overline{y}_a)^2\overline{y}_a^2\left(\frac{\partial\overline{u}_a}{\partial\overline{y}_a}\right)^2+\frac{\partial\overline{u}_a}{\partial\overline{y}_a}-B'_x(\overline{y}_a^*-\overline{y}_a)=0, \tag{26}$$

adică tocmai ecuația (23) care este satisfăcută.

Pentru a doua zonă, $\overline{y}_a^*\leqslant\overline{y}_a\leqslant 1$ pentru cazul 5*a* și $0\leqslant\overline{y}_b\leqslant\overline{y}_b^*$ în cazul 5*b*, proprietatea se păstrează. De altfel, această proprietate este adevărată și în cazul aproximațiilor făcute prin presupunerea existenței stratului laminar în vecinătatea suprafețelor lubrificate. Această proprietate a fost arătată și atunci cînd s-a presupus pentru lungimea de amestec o variație liniară în lucrarea [5].

În concluzie, pentru cazurile $B_x>0$ se obțin foarte ușor profilele de viteză înlocuind în soluțiile cazurilor analoge $B_x<0$, $\overline{y}$ cu $1-\overline{y}$ și $\overline{u}$ cu $1-\overline{u}$.

Folosind sistemele de ecuații anterioare, au fost trasate profilele de viteze (fig. 6 și 7) pentru diferite numere Reynolds modificate R și parametri B_x în ipoteza variației parabolice și liniare a lungimii de amestec. Se constată că modificarea legii de variație a lungimii de amestec nu influențează calitativ profilele de viteze, diferențele cantitative ce se obțin, de

exemplu față de cazul lungimii de amestec liniare, fiind echivalente cu reducerea într-un anumit raport a numărului Reynolds modificat R, sau, ceea ce este același lucru, a constantei k^*.

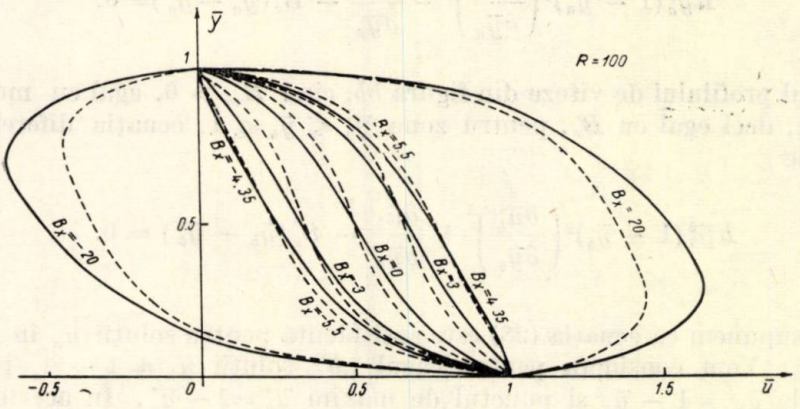


Fig. 6. — Profile de viteze în cazul $R = 100$ și diferite valori B_x.
———— l_a parabolic
---------- l_a liniar

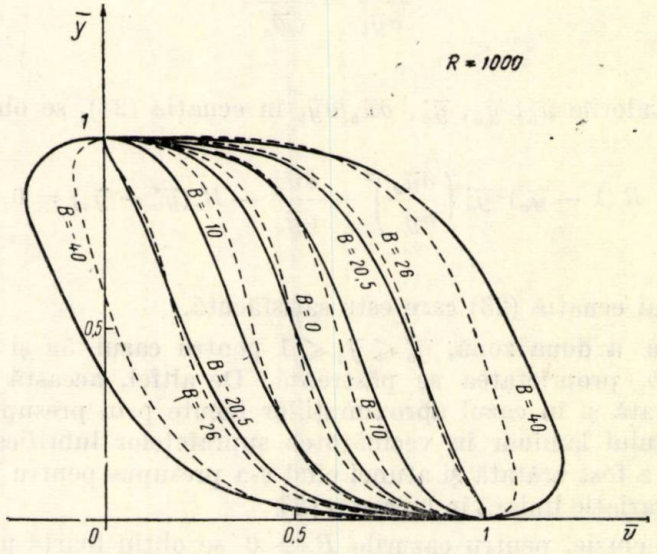


Fig. 7. — Profile de viteze în cazul $R = 1\,000$ și diferite valori B_x.
———— l_a parabolic
---------- l_a liniar

Rezultatele cantitative au fost concretizate în diagrama din figura 8, unde

$$\bar{U}_m = \bar{U}'_m - 0{,}5\,, \tag{27}$$

iar $\bar{U}'_m$ este viteza medie din stratul de lubrifiant.

Dacă considerăm variația parametrului B_x cu $\overline{U}_m$ liniară sub forma

$$B_x = k_x \overline{U}_m \tag{28}$$

pentru același R, k_x variază destul de puțin. Astfel, pentru fiecare caz calculat, k_x este prezentat în tabela 1.

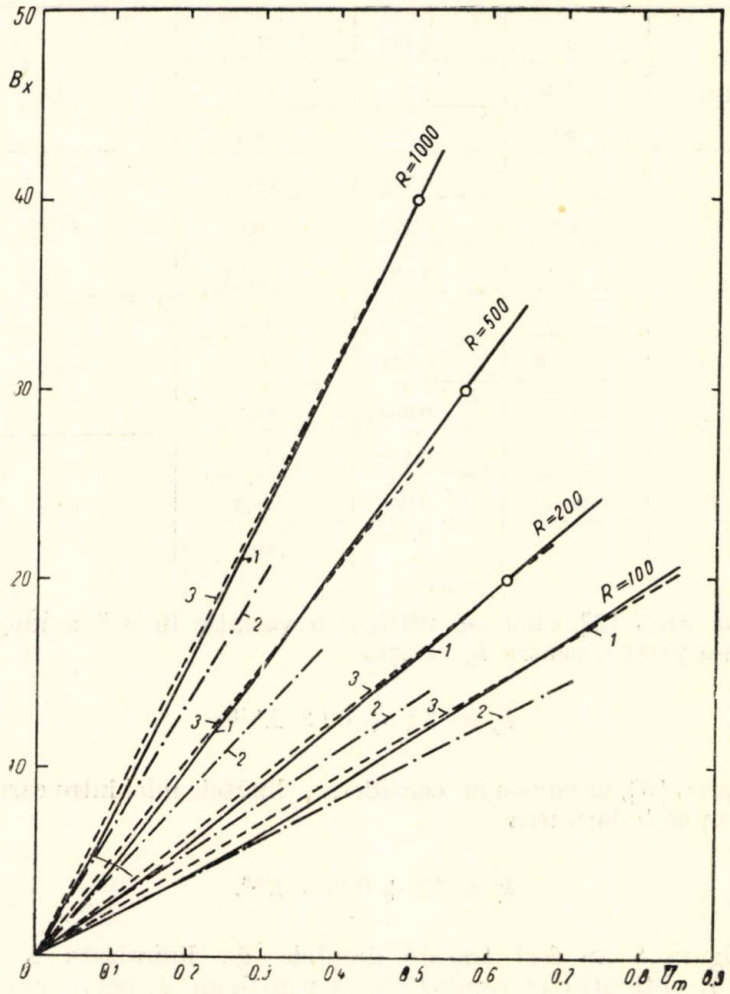


Fig. 8. — Variația parametrului B_x cu $\overline{U}_m$ pentru diferite numere Reynolds modificate R.

1. ———— exact
2. — · — · — formula (29)
3. – – – – formula (32)

În tabela 1 au fost trecute și valorile k_x obținute cu formula

$$k_x = 12 + 0{,}22\, R^{0{,}8}. \tag{29}$$

Tabela 1

Viteza medie $\overline{U}_m$ şi coeficientul k_x pentru diferite numere Reynolds modificate R şi parametri B_x

R	B_x	$\overline{U}_m$	$k_x = B_x/\overline{U}_m$	$k_x = 12 + 0{,}22\,R^{0,8}$
100	3	0,143	21	20,8
	4,35	0,205	21,2	
	20	0,82	24,4	
200	5	0,1741	28,7	27,29
	6,72	0,227	29,6	
	20	0,6225	32,15	
500	5	0,106	47,2	43,5
	12,22	0,241	50,7	
	30	0,565	53,1	
1000	10	0,1332	75	67,2
	20,5	0,2618	78,3	
	40	0,5	80	

În lucrarea [2], cînd s-a utilizat o variaţie liniară a lungimii de amestec, s-a propus pentru k_x relaţia

$$k_x = 12 + 0{,}23\,R^{0,725}, \tag{30}$$

iar în lucrarea [6], luîndu-se în considerare limitele mici între care variază B_x, s-a propus liniarizarea

$$k_x = 12 + 0{,}238\,R^{0,8}. \tag{31}$$

În figura 8 au fost trasate dreptele de liniarizare a curbelor $B_x = f(\overline{U}_m)$, obţinute cu formula (29), iar pentru un domeniu mai larg de valori B_x şi $\overline{U}_m$, comparabil cu cel pentru care a fost dedusă relaţia (30), au fost trasate dreptele de liniarizare obţinute cu formula

$$k_x = 12 + 0{,}38\,R^{0,75}. \tag{32}$$

Pentru valori negative ale lui B_x nu au mai fost trecute rezultatele deoarece există o perfectă antisimetrie, panta k_x păstrîndu-se aceeaşi.

În figura 9 s-a reprezentat variația lui k_x în funcție de numărul Reynolds modificat R, dată de formulele (29), (30), (31) și (32). Se observă că formulele (30) și (32), obținute pentru un domeniu mai larg de valori B_x și $\overline{U}_m$, în ipoteza variației liniare a lungimii de amestec și respectiv a

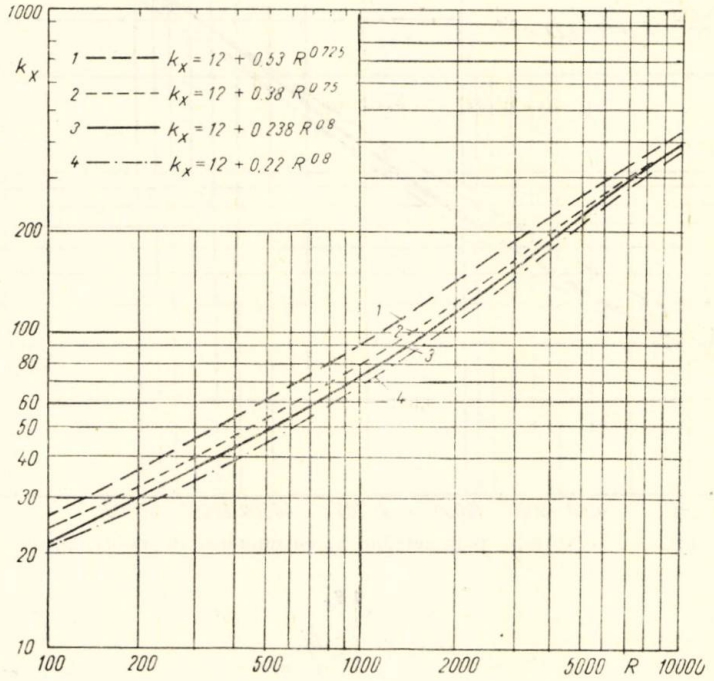


Fig. 9. — Variația parametrului k_x cu numărul Reynolds modificat R.

variației parabolice a lungimii de amestec, dau pentru k_x valorile cele mai mari în funcție de R, iar formulele (31) și (29) dau pentru k_x valori ceva mai mici, însă foarte apropiate între ele. Dacă se reprezintă k_x în funcție de numărul Reynolds (fig. 10), cele patru formule dau valori foarte apropiate pentru k_x, însă luînd pentru k^* valoarea 0,3 pentru formulele (30) și (32) și $k^* = 0{,}33$ pentru formulele (31) și (29).

Pentru frecări se obțin rezultate asemănătoare cu cele din lucrarea [5], dar cu valori mai mici pentru aceleași valori B_x și R. Rezultatele sînt concretizate în tabela 2 și reprezentate grafic în figura 11.

În tabela 2 s-a notat

$$\overline{\tau}_{0,h} = \frac{h}{\mu V}\,\tau_{0,h}. \tag{33}$$

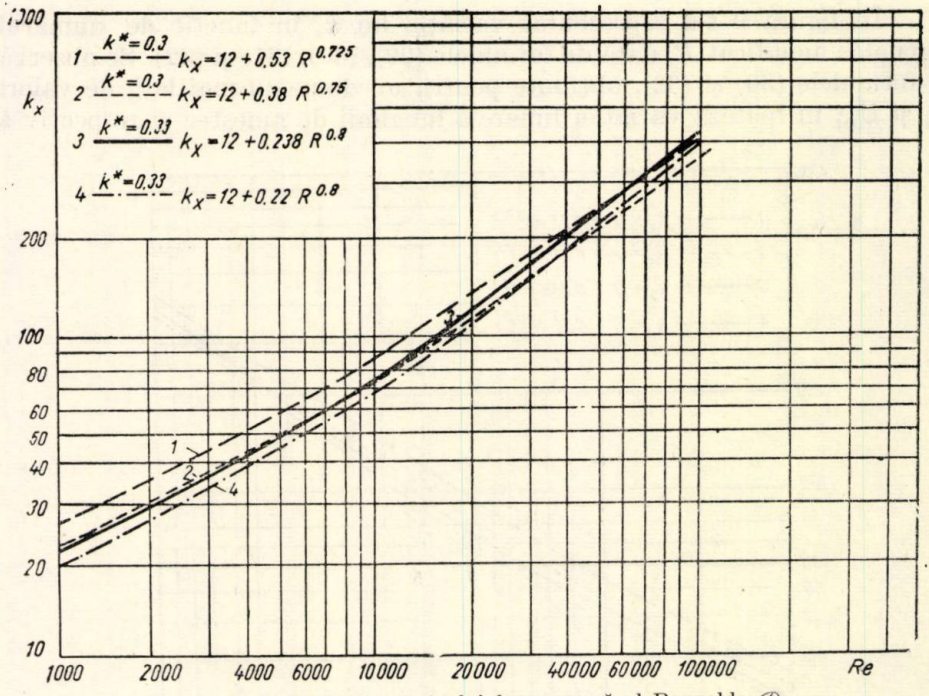


Fig. 10. — Variaţia parametrului k_x cu numărul Reynolds $\mathcal{R}e$.

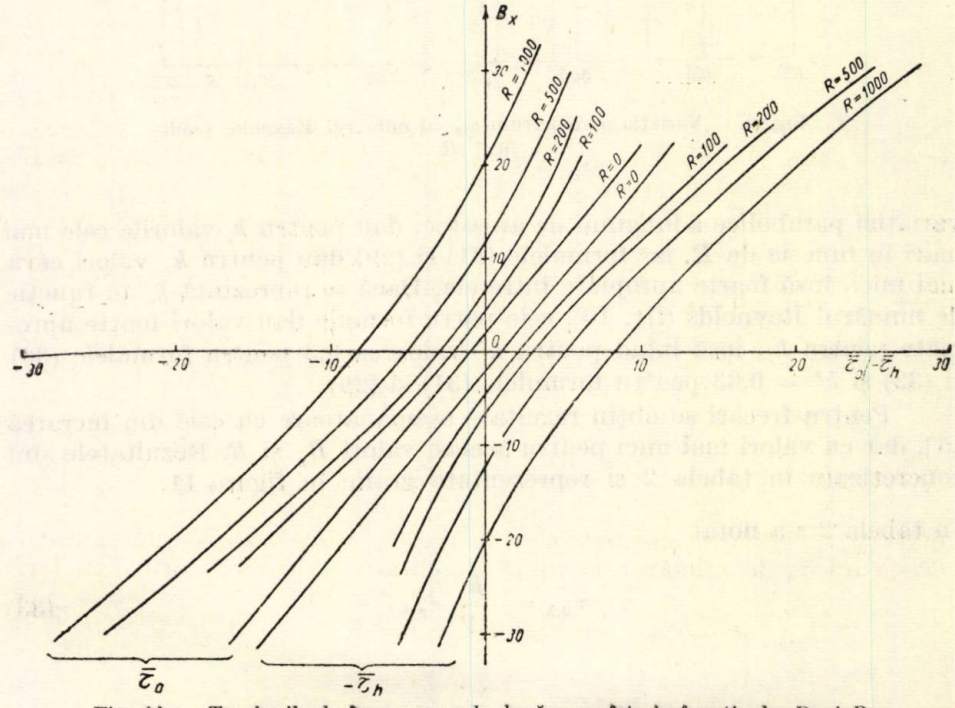


Fig. 11. — Tensiunile de frecare pe cele două suprafeţe în funcţie de B_x şi R.

Tabela 2

Tensiunile $\bar{\tau}_0$; $\bar{\tau}_h$ pentru diferite numere Reynolds modificate R și parametri B_x

$R = 100$							
B_x	−20	− 4,35	− 3	0	3	4,35	20
$\bar{\tau}_0$	−14,08	− 4,35	− 3,63	− 1,98	− 0,63	0	5,92
$\bar{\tau}_h$	5,92	0	− 0,63	− 1,98	− 3,63	− 4,35	−14,08
$R = 200$							
B_x	−20	− 6,72	− 5	0	5	6,72	20
$\bar{\tau}_0$	−15,4	− 6,72	− 5,65	− 2,92	− 0,65	0	4,6
$\bar{\tau}_h$	4,6	0	− 0,65	− 2,92	− 5,65	− 6,72	−15,4
$R = 500$							
B_x	−30	−12,22	− 5	0	5	12,22	30
$\bar{\tau}_0$	−24,54	−12,22	− 7,75	− 5,12	− 2,75	0	5,46
$\bar{\tau}_h$	5,46	0	− 2,75	− 5,12	− 7,75	−12,22	−24,54
$R = 1\,000$							
B_x	−40	−20,5	−10	0	10	20,5	40
$\bar{\tau}_0$	−34,4	−20,5	−13,6	− 8,33	− 3,6	0	5,6
$\bar{\tau}_h$	5,6	0	− 3,6	− 8,33	− 13,6	−20,5	− 34,4

Examinînd curbele $\bar{\tau}_0(B_x)$ și $\bar{\tau}_h(B_x)$ date în figura 11, se observă că proprietățile demonstrate în lucrarea [5] se păstrează și în cazul folosirii unei legi parabolice pentru lungimea de amestec, adică derivatele $\partial\bar{\tau}_0/\partial B_x$, $\partial\bar{\tau}_h/\partial B_x$ la $B_x=0$ au valori constante independent de numărul Reynolds modificat R, și anume egale cu valoarea corespunzătoare regimului laminar. Liniarizînd curbele $\bar{\tau}_{0,h}(B_x)$ în vecinătatea punctului în care $B_x = 0$, putem scrie

$$\bar{\tau}_0 = \bar{\tau}_c + \frac{1}{2} B_x, \qquad \bar{\tau}_h = \bar{\tau}_c - \frac{1}{2} B_x, \tag{34}$$

unde $\bar{\tau}_c$ reprezintă tensiunea de frecare pentru scurgerea Couette. Dependența lui $\bar{\tau}_c$ de numărul Reynolds modificat R o vom scrie sub forma

$$-\bar{\tau}_c = 1 + k_c R^{n_c}. \tag{35}$$

În tabela 3 şi în diagrama din figura 12 sînt date valorile $|\bar{\tau}_c|$ obţinute cu ajutorul sistemelor algebrice şi valorile $|\bar{\tau}_c|$ date de formula

$$-\bar{\tau}_c = 1 + 0{,}04\ R^{0{,}75}. \tag{36}$$

Tabela 3

Tensiunea $|\bar{\tau}_c|$ în funcţie de numărul Reynolds modificat R

R	100	200	500	1000
$\|\bar{\tau}_c\|$ Calculat	1,98	2,92	5,12	8,33
$\|\bar{\tau}_c\|$ Formula 36	2,26	3,12	5,25	8,16

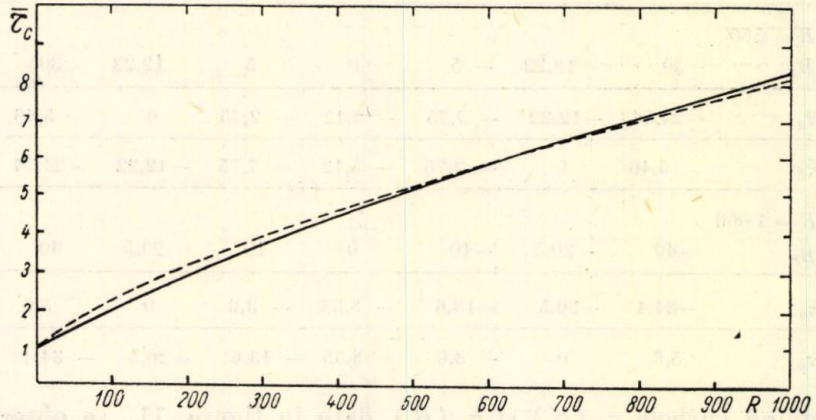


Fig. 12. — Tensiunea de frecare $\bar{\tau}_c$ în funcţie de numărul Reynolds modificat R.
——— din sistem
– – – – – – $1 + 0{,}04\ R^{0{,}75}$

Vom compara aceste rezultate cu acelea date de experienţele lui Smith şi Fuller [7] şi cu cele obţinute în lucrarea anterioară [5], unde s-a propus

$$-\bar{\tau}_c = 1 + 0{,}0525\ R^{0{,}75}. \tag{37}$$

Coeficientul de frecare $C_f = 2\tau_c/\rho V^2$, reprezentat în figura 13 funcţie de numărul Reynolds, dă o bună concordanţă cu rezultatele experimentale ale lui Smith şi Fuller, folosind formula (37) pentru $k^* = 0{,}27$. Aceeaşi concordanţă se obţine şi în cazul formulei (36), deduse în cazul variaţiei parabolice a lungimii de amestec, însă luînd $k^* = 0{,}33$. Pe aceeaşi diagramă sînt trecute şi rezultatele obţinute de Ng şi Pan [8]. Se vede că

pentru numere Reynolds mari există de asemenea o bună concordanță cu rezultatele experimentale, însă pentru numere Reynolds relativ mici datele lui Ng și Pan sînt mai mici decît cele experimentale.

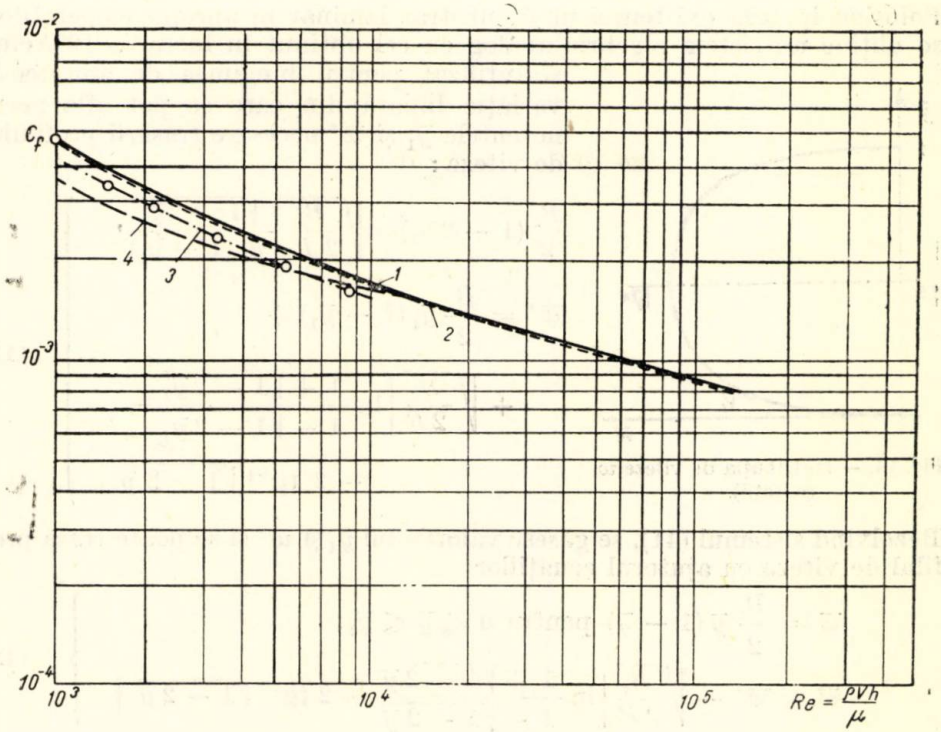


Fig. 13. — Coeficientul de frecare $C_f = \frac{2\tau}{\rho V^2}$ în funcție de numărul Reynolds.

1. ———— l_a parabolic, $k^* = 0{,}33$
2. — — — — — l_a liniar $k^* = 0{,}27$
3. —.—.—. experimental, Smith și Fuller [7]
4. — — — — Ng și Pan [8]

Pentru mișcarea pe direcția z, tensiunea turbulentă $\overline{v'w'}$ poate fi determinată aproximativ tot cu ajutorul ipotezei lungimii de amestec:

$$-\rho\,\overline{v'w'} = \rho\, l_a^2 \frac{\partial w}{\partial y}\left|\frac{\partial w}{\partial y}\right|. \tag{38}$$

Utilizînd relația (38) și o variație parabolică pentru lungimea de amestec, se obține pentru mișcarea laterală o ecuație analogă cu (10):

$$R\overline{y}^2(1-\overline{y})^2\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{y}}\left|\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{y}}\right| + \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{y}} + B_z\overline{y} - C = 0, \tag{39}$$

în care

$$\overline{y} = \frac{y}{h}, \quad \overline{w} = \frac{w}{V}, \quad R = k^{*2}\,\mathrm{Re}, \quad B_z = -\frac{h^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{40}$$

Folosind ipoteza existenţei unui substrat laminar în apropierea pereţilor, se obţine un sistem algebric analog cu cel obţinut în lucrarea [9], cînd s-a utilizat pentru lungimea de amestec o variaţie liniară din care se pot afla necunoscutele $\overline{y}_1$ şi $\overline{w}^*$ necesare trasării profilului de viteze :

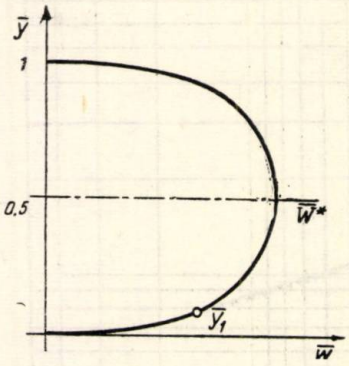


Fig. 14. — Distribuţia de viteze $\overline{w}$ (notaţii).

$$\left.\begin{aligned} &\frac{B_z}{2}(1-2\overline{y}_1) = \sqrt{\frac{B_z}{2R}}\,\frac{\sqrt{1-2\overline{y}_1}}{\overline{y}_1(1-\overline{y}_1)}, \\ &\overline{w}^* = \frac{B_z}{2}\overline{y}_1(1-\overline{y}_1) + \\ &\quad + \sqrt{\frac{B_z}{2R}}\left[\ln\frac{1+\sqrt{1-2\overline{y}_1}}{1-\sqrt{1-2\overline{y}_1}} - \right. \\ &\quad \left. - 2\,\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{1-2\overline{y}_1}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Rezolvînd sistemul (41), se găsesc valorile lui $\overline{y}_1$ şi $\overline{w}^*$ şi se poate trasa profilul de viteze cu ajutorul ecuaţiilor

$$\left.\begin{aligned} &\overline{w} = \frac{B_z}{2}\overline{y}(1-\overline{y}) \ \text{ pentru } 0 \leqslant \overline{y} \leqslant \overline{y}_1, \\ &\overline{w} = \overline{w}^* - \sqrt{\frac{B_z}{2R}}\left[\ln\frac{1+\sqrt{1-2\overline{y}}}{1-\sqrt{1-2\overline{y}}} - 2\,\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{1-2\overline{y}}\right] \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

pentru $\overline{y}_1 \leqslant \overline{y} \leqslant 0{,}5$.

Pentru zona $0{,}5 \leqslant \overline{y} \leqslant 1$, profilul de viteze este simetric faţă de dreapta $\overline{y}=0{,}5$. S-au trasat şi pentru mişcarea laterală mai multe profile de viteze pentru diferite numere Reynolds modificate R şi parametri B_z, în ipoteza variaţiei parabolice şi liniare a lungimii de amestec (fig. 15 şi 16). Se constată că şi pentru mişcarea laterală modificarea legii de variaţie a lungimii de amestec nu influenţează calitativ

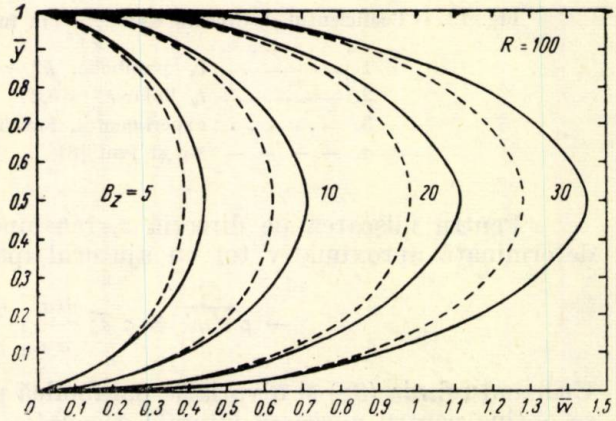


Fig. 15. — Profile de viteze $\overline{w}$ în cazul $R = 100$ şi diferite valori B_z.
———— l_a parabolic
---------- l_a liniar

profilul de viteze, diferențele cantitative ce se obțin devenind destul de mici pentru numere Reynolds mari și parametri B_z mici. Rezultatele cantitative au fost concretizate în diagrama din figura 17, unde $\overline{w}_m$ este viteza medie din stratul de lubrifiant. Considerînd variația parametrului B_z cu $\overline{w}_m$ liniară sub forma

$$B_z = k_z \overline{w}_m, \qquad (43)$$

s-a dedus în lucrarea [9], cînd s-a utilizat o variație liniară a lungimii de amestec, pentru k_z relația

$$k_z = 12 + 0{,}296\ R^{0{,}65}. \qquad (44)$$

În figura 17 s-au reprezentat dreptele de liniarizare date de formula (44) și se constată că, pentru rezultatele obținute în ipoteza variației parabolice a lungimii de amestec, această liniarizare este valabilă pentru un domeniu mai larg de valori pentru B_z și $\overline{w}_m$.

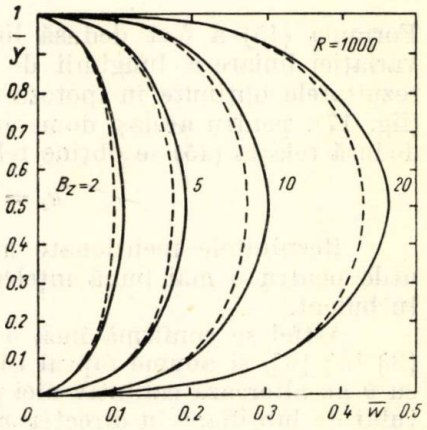


Fig. 16. — Profile de viteze $\overline{w}$ în cazul $R = 1000$ și diferite valori B_z.
———— l_a parabolic
---------- l_a liniar

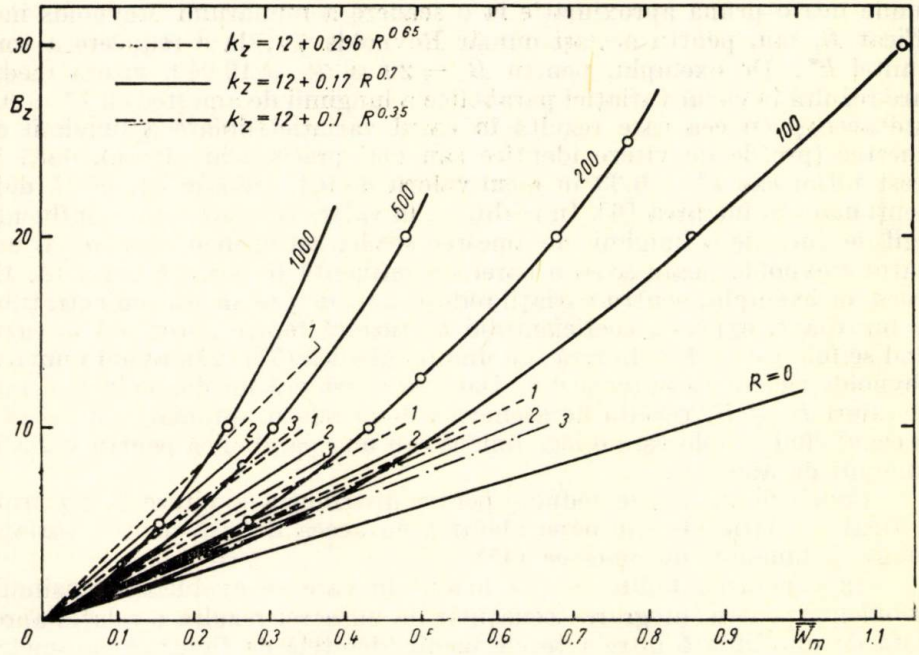


Fig. 17. — Variația parametrului B_z cu W_m pentru diferite numere Reynolds modificate R.

În lucrarea [6], s-a propus o altă liniarizare mult mai corectă pentru un domeniu mic de valori pentru B_z şi $\overline{w}_m$, dată de formula

$$k_z = 12 + 0{,}17\, R^{0{,}7}. \tag{45}$$

Formula (45) a fost dedusă liniarizînd rezultatele obţinute în ipoteza variaţiei liniare a lungimii de amestec. În schimb, dacă se liniarizează rezultatele obţinute în ipoteza variaţiei parabolice a lungimii de amestec (fig. 17), pentru acelaşi domeniu de valori B_z şi $\overline{w}_m$ pentru care a fost dedusă relaţia (45) se obţine relaţia

$$k_z = 12 + 0{,}1\, R^{0{,}75}. \tag{46}$$

Rezultatele menţionate mai sus permit deducerea unor concluzii utile pentru o mai bună înţelegere a fenomenului lubrificaţiei în regim turbulent.

Astfel se confirmă încă o dată observaţia făcută şi cu alte ocazii [3] [5] [6], şi anume faptul că legea de variaţie a lungimii de amestec cu y nu alterează calitativ nici profilul de viteze şi nici dependenţa debitului de lubrifiant în direcţia x şi gradientul de presiune $\partial p/\partial x$, curbele $B_x(\overline{U}_m)$ din figura 8 avînd o alură aproape liniară. Legea de variaţie a lungimii de amestec are o influenţă cantitativă destul de redusă, dar sesizabilă asupra parametrilor funcţionali ai unui lagăr în regim turbulent. Din examinarea profilelor de viteze (fig. 6 şi 7) se constată că, în comparaţie cu legea liniară pentru lungimea de amestec, cazul legii parabolice corespunde într-o primă aproximaţie la o scădere a numărului Reynolds modificat R, sau, pentru acelaşi număr Reynolds $\mathcal{R}e$, la o reducere a constantei k^*. De exemplu, pentru $B_x = 20$ şi $\mathcal{R}e = 10\,000$, viteza medie care rezultă în cazul variaţiei parabolice a lungimii de amestec cu $k^* = 0{,}4$ este aceeaşi cu cea care rezultă în cazul variaţiei liniare a lungimii de amestec (profile de viteze identice sau mai precis echivalente), dacă în acest ultim caz $k^* = 0{,}33$ în locul valorii de 0,4, valoare corectată deja menţionată în lucrarea [6]. În realitate, la valori B_x mai reduse, influenţa legii de variaţie a lungimii de amestec scade, astfel încît se pare că numărul Reynolds poate avea o oarecare influenţă în această privinţă. De aceea, de exemplu, pentru variaţii reduse şi moderate ale grosimii stratului de lubrifiant, expresia coeficientului k_x rezultă foarte apropiată în cazul cînd se foloseşte o lege liniară sau una parabolică (31) (29), avînd numărul Reynolds ridicat la puterea 0,8. Dacă se consideră un domeniu mai larg de valori B_x şi U, rezultă de asemenea două relaţii apropiate (30) şi (32) în cazul cînd se foloseşte o lege liniară sau una parabolică pentru variaţia lungimii de amestec.

Concluzii analoge se deduc şi pentru distribuţia de viteze $\overline{w}$, rezultînd în final o relaţie (46) aproape identică cu aceea dedusă pentru variaţia liniară a lungimii de amestec (45).

În concluzie, indiferent de modul în care se evaluează tensiunile turbulente pentru integrarea ecuaţiilor de mişcare, rezultă o relaţie apropiată de una liniară între vitezele medii (debitele de fluid) şi parametrii B_x, B_z (gradienţii de presiune), ceea ce conduce la o ecuaţie diferenţială a

presiunilor de o formă unică, similară cu ecuația presiunilor dedusă în regim laminar [2]. Singurele corecții care pot eventual fi necesare la explicitarea variației parametrilor k_x, k_z cu numărul Reynolds modificat R și la precizarea valorii constantei k^*. În această privință, răspunsul trebuie dedus pe cale experimentală, datele obținute pînă în prezent fiind însă, din păcate, prea puține și obținute pentru numere Reynolds prea reduse pentru a putea trage concluzii din compararea cu rezultatele teoretice.

Primită la redacție la 26 octombrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Influența turbulenței asupra mișcării în stratul de lubrifiant.* St. cerc. mec. apl., **IX**, *1*, 103–137 (1958).
2. — *Studiul lubrificației bidimensionale în regim turbulent.* St. cerc. mec. apl. **IX**, *1*, 139–162 (1958).
3. N. Tipei, V. N. Constantinescu, *Influența legii de variație a lungimii de amestec asupra mișcării turbulente în stratul de lubrifiant.* St. cerc. mec. apl., **XI**, *5*, 1091–1101 (1960).
4. J. Nikuradse, *Gesetzmassigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren.* Forschungen-Arch. Ing. Wesen, *356* (1932).
5. V. N. Constantinescu, S. Găletuşe, *On the determination of friction forces in turbulent lubrication.* ASLE Paper (1965).
6. V. N. Constantinescu, *On the improvement of the turbulent lubrication theory, by using the mixing-lenght hypothesis.* Rev. roum. sci. techn. — Méc. appl., **X**, *2*, 421–437 (1965).
7. M. I. Smith, D. D. Fuller, *Journal Bearing operation at superlaminar speeds*, ASME Transaction, *78*, 469–474 (1956).
8. C. W. Ng., H. T. Pan, *A linearized turbulent lubrication theory*, ASME Paper.
9. V. N. Constantinescu, *Considerații asupra lubrificației tridimensionale în regim turbulent.* St. cerc. mec. apl., **X**, *4*, 1 093–1 112 (1959).

ASUPRA INFLUENȚEI VISCOZITĂȚII ÎN LUBRIFICAȚIA LA SARCINI RIDICATE[1])

OLGA BIȚĂ și I. DINCĂ
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

539.6

Lubrificația mecanismelor sever solicitate ridică aspecte noi și complexe, pentru a căror elucidare se întreprind din ce în ce mai multe studii teoretice și experimentale.
Lucrarea de față cuprinde unele observații experimentale obținute pe un dispozitiv cu patru bile, privind rolul important pe care îl joacă viscozitatea inițială a lubrifianților și în procesele de ungere, frecare și uzură la sarcini ridicate (contact punctiform), în condiții variabile de sarcină, viteză, temperatură și timp. Datele prezentate se referă la regimul mixt de ungere, în care filmul de ulei este parțial întrerupt, punînd în evidență un domeniu destul de larg de existență a acestuia pînă la apariția gripajului.

Complexitatea proceselor de ungere și de frecare întîlnite în cazul unor organe de mașini în care contactul dintre suprafețe este liniar sau punctiform a impus cu necesitate investigații asupra acestor fenomene cînd sarcinile de contact dintre suprafețe depășesc de zeci și sute de ori valoarea capacității rezistente a peliculei de lubrifiant, așa cum este considerată în hidrodinamica clasică a lubrificației.

Pe baza cercetărilor fundamentale se pot distinge în acest domeniu, în general, două situații din punct de vedere fizico-mecanic și, în consecință, al modului de rezolvare a problemei :

— cînd valoarea excesivă a sarcinii aplicate în locul de contact acționează un timp foarte redus sub perioada de relaxare a mediului de ungere și

— cînd timpul de acționare al sarcinii excesive este limitat și variază de la o situație la alta, în toate cazurile însă depășind cu mult domeniul de manifestare al proprietăților viscoelastice ale mediului de ungere.

[1]) Lucrare prezentată la Conferința de mecanică din 27—30 octombrie 1965 București, publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, 2 (1966) (în limba franceză)

Pentru explicarea faptului că, chiar în domeniul unor sarcini așa de mari suprafețele în frecare nu gripează, ceea ce este principial pentru prima situație, toate ipotezele iau în considerare proprietățile viscoelastice ale lubrifiantului și rezolvarea lor se bazează pe concepția lui Maxwell asupra fenomenului [1]—[4]. Pentru cea de-a doua situație, cercetările teoretice și mai cu seamă cele experimentale iau ca ipoteză de bază creșterea simultană, o dată cu sarcina, a viscozității și, implict, a rezistenței peliculei de lubrifiant [5], [6]. Studiile prof. N. Tipei [2]) asupra acestui aspect în lubrificația hidrodinamică au condus la exprimarea analitică mai completă a acestei dependențe.

Aceste aspecte sînt completate cu interacțiunile termochimice lubrifiant—metal, care fac obiectul unor cercetări cu caracter pur experimental [7], [8], și dacă, din punct de vedere calitativ se dau unele explicații, cantitativ fenomenele sînt încă discutate.

În lucrarea de față se prezintă unele date experimentale obținute în urma unui studiu efectuat pe o mașină cu patru bile, privind influența viscozității inițiale a lubrifianților asupra lubrificației la sarcini ridicate în cazul acționării acestora pe un timp limitat, mai mare decît perioada de relaxare.

DATE EXPERIMENTALE

APARATURA

Pentru efectuarea cercetărilor experimentale privind unele aspecte ale influenții viscozității inițiale a uleiului în lubrificația la sarcini ridicate, s-a folosit un dispozitiv cu patru bile, adaptat la mașina pentru studiul ungerii, frecării și uzurii.

Acest dispozitiv cu patru bile a fost proiectat de colectivul nostru și executat în întregime în cadrul Institutului de mecanica fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România.

În figura 1 este prezentată schematic instalația folosită, completată cu aparatura anexă.

După cum se vede din figură, bila mobilă (*1*) este fixată în capul axului motor (*2*) cu ajutorul unei bucșe de fixare (*3*) cu filet și prag conic în partea inferioară. Celelalte trei bile (*4*) sînt montate într-un cilindru cu un singur fund (*5*), filetat interior, și imobilizate cu ajutorul unui niplu filetat exterior (*6*).

Acest cilindru se reazimă, prin intermediul unui rulment axial (*7*), pe fundul unui vas cilindric cu pereți dubli (*8*), vas de termostatare, care constituie baia de ulei. Uleiul din interiorul băii ajunge la bilele fixe prin niște orificii practicate pe circumferința cilindrului interior în care sînt fixate.

Montajul rulmentului axial (7) este astfel făcut, încît să permită autocentrarea bilelor în timpul funcționării.

---

[2]) N. Tipei, *Effects of Fluid Film Pressure on Hydrodynamic Lubrication*. ASLE Trans., **3**, *2* (1960).

Aplicarea sarcinii axiale se face cu ajutorul unei pîrghii (*9*) acționată prin greutăți, al cărui punct de aplicare se află în centrul băii de ulei care conține bilele fixe.

Momentul rezistent rezultat la frecarea dintre bila mobilă pe cele trei bile fixe se determină cu ajutorul unui resort etalonat (*10*), intercalat

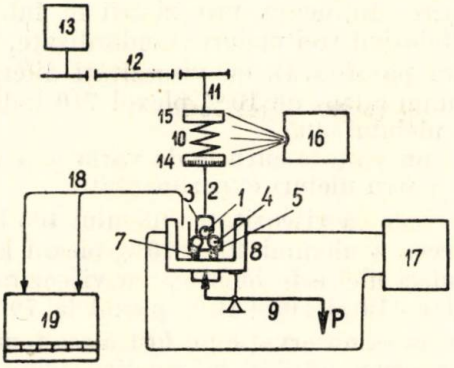


Fig. 1. — Schema instalației experimentale complete, cu aparatura anexă.

între axul motor (*2*) și axul de ieșire (*11*) al reductorului (*12*), antrenat de un motor electric (*13*).

Capetele resortului etalonat (*10*) sînt fixate de două discuri : unul (*14*) gradat în 360° și fixat pe axul motor și altul (*15*) prevăzut cu un ac indicator și fixat pe axul de ieșire (*11*) al reductorului (*12*). Momentul rezistent determină o decalare între cele două discuri, putînd fi determinată vizual cu ajutorul unui stroboscop (*16*), care indică în același timp și turația de lucru.

Imobilizarea cilindrului cu bile fixe în scopul măsurării momentului rezistent se face cu ajutorul unui fir inextensibil prins pe circumferința cilindrului.

Forța de frecare F între bile rezultă din produsul dintre forța rezistentă F_r, obținută din curba de etalonare a resortului $F_r = f(\alpha^0)$, și raportul dintre raza resortului și raza cercului de contact dintre cele patru bile, vizibil pe bila mobilă.

În cazul dispozitivului folosit în lucrarea de față, raza resortului este de 50 mm, iar a cercului de contact de 3,6 mm ($Ø_{\text{bilă exp}} = 12{,}7$ mm).

Realizarea și menținerea riguros constantă a temperaturilor inițiale de lucru s-a obținut cu ajutorul unui termostat (*17*), pus în legătură în baia de ulei cu pereți dubli (*8*), iar măsurarea acestora s-a efectuat cu ajutorul unui termocuplu (*18*), introdus în baia de ulei la nivelul bilelor și conectat la un galvanometru cu oglindă (*19*).

Capacitatea băii de ulei (*8*) a permis folosirea unei cantități de 25 cm^3 mediu lubrifiant, cantitate menținută constantă pentru toate probele.

Înaintea fiecărei experiențe, bilele și baia de ulei cu toate piesele anexe necesare prinderii bilelor erau spălate, degresate și suflate cu aer cald.

CONDIȚII DE LUCRU

Natura epruvetelor experimentale. Încercările s-au efectuat pe bile de rulmenți din oțel cu Ø 12,7 mm (STAS), identice ca natură, starea suprafețelor și duritate ($HRC = 60-64$, $E = 2{,}1 \times 10^6$ kgf/cm^2).

Mediul de ungere. Influența viscozității în lubrificația la sarcini ridicate s-a urmărit folosind trei uleiuri standardizate, identice ca natură, 405, 413, 419 (natură parafinică), cu viscozități diferite. S-a urmărit de asemenea influența unui adaos de 10% plexol 710 (aditiv de viscozitate) asupra comportării uleiului 405.

În figura 2 sînt prezentate curbele de variație a viscozității cu temperatura pentru cele patru uleiuri experimentate.

Din figura 2 se vede că viscozitatea uleiului 405 la 30°C este aproximativ identică cu aceea a uleiului 405+10% plexol la 50°C, iar viscozitatea la 50°C a aceluiași ulei este identică cu viscozitatea uleiului 413 la 70°C și cu a uleiurilor 419 și 405+10% plexol la 79°C.

În funcție de această observație au fost alese temperaturile de lucru pentru efectuarea experimentărilor în condiții identice de viscozitate.

Cantitatea de ulei a fost menținută constantă la 25 cm^3 pentru toate încercările, uleiul fiind schimbat la fiecare probă pentru a elimina pe cît posibil efectul particulelor de uzură rămase în ulei de la proba anterioară.

Alegerea acestor uleiuri de natură parafinică, care sînt supuse la fabricare unui proces mai intens de rafinare, s-a făcut în scopul eliminării pe cît posibil a interacțiunii chimice lubrifiant-metal, care prezintă efecte favorabile asupra rezistenței peliculei de lubrifiant, depășind efectul viscozității.

Sarcina. Domeniul sarcinilor de lucru s-a stabilit ținînd seama de condițiile similare întîlnite în funcționarea normală a unor organe de mașini cu contact punctiform sau liniar. În cazul angrenajelor hipoide, de exemplu, sarcinile maxime aplicate sînt de $\sim$ 38 000 kgf/cm^2. Limita inferioară a sarcinii s-a stabilit în funcție de posibilitățile instalației experimentale de a furniza date cît mai concludente, accesibile urmăririi lor cu aparatura anexă folosită. Această limită a corespuns unui p_{med} la care s-a putut pune în evidență existența unui regim de ungere de contact mixt (fluid și contact intermetalic).

Pentru stabilirea presiunilor maxime (p_{max}) și medii (p_{med}), între bila mobilă și fiecare dintre cele trei bile fixe, în funcție de sarcina aplicată P, s-au folosit relațiile lui Hertz aplicabile contactului punctiform sferă–sferă pentru materialele identice [9].

Astfel, presiunea maximă p_{max} este dată de relația

$$p_{max}^3 = 0{,}94 \frac{P_N \cdot E^2}{d^2} = 0{,}235 \frac{P_N E^2}{r^2}, \qquad (1)$$

unde

P_N reprezintă sarcina repartizată la cele trei bile,
E — modulul de elasticitate al bilelor,

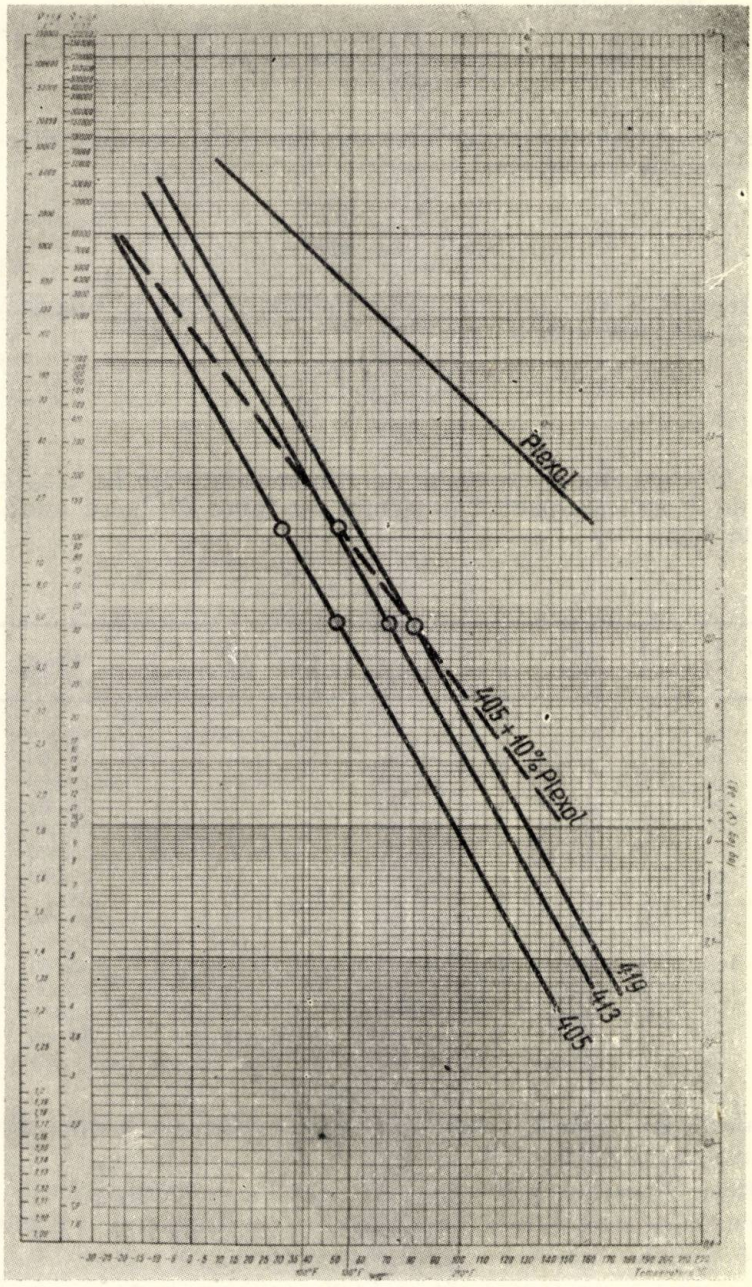


Fig. 2. — Curbele viscozitate — temperatură ale uleiurilor experimentate.

r — raza bilelor,

$$P_N = \frac{P\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = 0{,}41\ P. \tag{2}$$

De asemenea, presiunea medie între bila mobilă și fiecare dintre cele trei bile fixe rezultă din relația

$$p_{med} = \frac{P_N}{\pi a^2}, \tag{3}$$

unde a reprezintă raza amprentei de contact, vizibilă pe bila fixă, care se calculează folosind relația

$$a^3 = 0{,}68\frac{P_N \cdot r}{E}. \tag{4}$$

În tabela 1 sînt prezentate valorile calculate ale lui p_{max} și p_{med} în funcție de P aplicat, pentru domeniul sarcinilor de lucru folosite în lucrarea de față.

Tabela 1

P kgf	P_N kgf	p_{max} kgf/cm²	$a \times 10^{-2}$ cm	p_{med} kgf/cm²
10	4,1	21.300	0,955	15.000
15	6,15	24.400	1,08	16.700
20	8,2	27.000	1,19	18.400
30	12,2	30.700	1,365	21.050
40	16,4	33.800	1,49	23.500
50	20,5	36.400	1,62	25.000
60	24,6	38.700	1,71	27.000
70	28,7	40.700	1,81	28.000
80	32,8	42.600	1,89	29.400
90	36,9	44.400	1,96	30.600
100	41,0	46.000	2,04	31.500
110	45,1	47.400	2,11	32.450
120	49,2	48.700	2,17	33.400
130	53,3	50.000	2,22	34.500
150	61,5	52.500	2,32	36.000

Valorile din această tabelă se referă la condițiile inițiale ale contactului punctiform dintre bile.

Viteza. În ceea ce privește gama vitezelor de lucru, valorile acestora au fost cuprinse între $n = 825$ rot/min ($v \cong 30$ cm/s) și $n = 4\,200$ rot/min ($v \cong 156$ cm/s.).

Depășirea unei turații de $\sim 4\,200$ rot/min ($v \cong 156$ cm/s) nu a fost posibilă, din cauza vibrațiilor puternice și funcționării anormale a cuplului de frecare.

Din acest motiv, gama de viteze a fost limitată deocamdată la valorile redate în tabela 2.

Tabela 2

Turația n rot/min	~ 825	~ 1050	~ 1350	~ 2100	~ 2700	~ 4200
Viteza liniară, v cm/s	~ 30	~ 39	~ 50	~ 78	~ 100	~ 156

Timpul de lucru. Timpul de experimentare a fost ales în funcție de viteza de lucru, reducîndu-l o dată cu creșterea vitezei, astfel că în toate cazurile parcursul mediu a rămas aproximativ constant. Pentru gama de turații experimentate, timpul de lucru pentru o probă a variat între 150 și 30 s, primul corespunzînd vitezei minime, iar al doilea celei maxime.

În cazul în care s-a urmărit influența parametrului timp asupra uzurii bilelor la sarcini ridicate, în condiții de sarcină și viteză identice și constante, timpul minim de funcționare a fost redus la 10 s, iar cel maxim ridicat la 60 min.

REZULTATE

În scopul urmăririi influenței viscozității inițiale asupra proceselor de lubrificație, frecare și uzură la sarcini ridicate, s-au considerat ca parametri de apreciere coeficientul de frecare, uzura de contact (exprimată prin mărimea amprentei de contact dintre bile) și rezistența la gripaj a bilelor la contactul punctiform, în condiții variabile de sarcină, viteză, temperatură și timp.

Coeficientul de frecare. În figura 3 sînt reprezentate curbele comparative ale variației coeficientului de frecare în funcție de sarcină pentru un domeniu de încercări ce depășește un $p_{med} = 15\,000$ kgf/cm^2 pentru toate uleiurile încercate în condiții identice de viscozitate (temperaturi diferite). Se remarcă faptul că la aceeași viscozitate inițială ($\nu_{ti} \cong 42$ cSt), obținută la temperaturi ce diferă de la un ulei la altul (fig. 2), toate cele trei uleiuri de bază asigură un regim de ungere identic pentru celelalte condiții de lucru similare. Adaosul de 10% plexol în uleiul cu viscozitatea cea mai redusă îi îmbunătățește comportarea și rezistența peliculei. Curbele din figurile 4 și 5 referindu-se numai la comportarea uleiului 405, pur (fig. 4) și aditivat cu polimer (fig. 5), ilustrează mai concludent această observație.

Se remarcă astfel că adaosul de polimer, prin îmbunătățirea caracteristicei viscozitate—temperatură a uleiului 405, în cazul unor sarcini mari asigură în punctele de contact condiții de frecare mai bune decît același ulei fără aditiv.

Aceste curbe evidențiază în plus și efectul creșterii viscozității asupra îmbunătățirii ungerii la sarcini foarte mari.

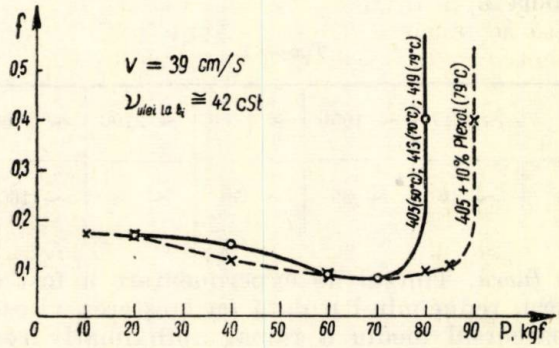


Fig. 3. — Curbele $f = f(P)$ pentru toate uleiurile urmărite, aduse la acelaşi nivel de viscozitate iniţială.

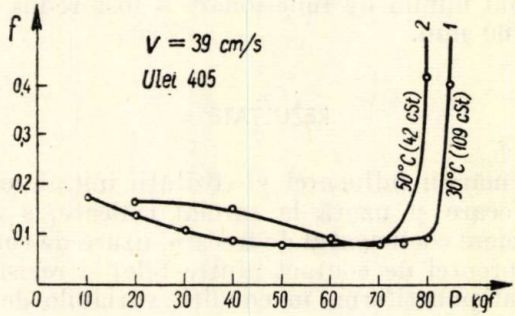


Fig. 4. — Curbele $f = f(P)$ pentru uleiul 405.

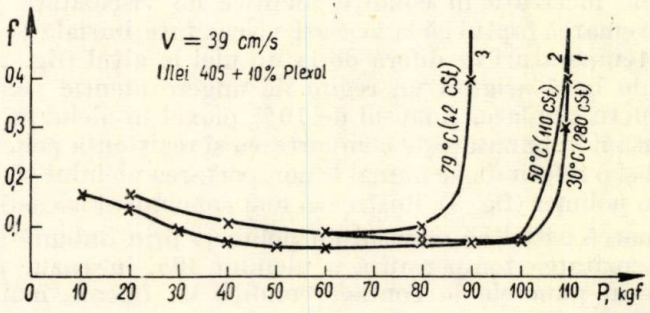


Fig. 5. — Curbele $f = f(P)$ pentru uleiul 405 + 10% plexol.

Curbele din figura 6 urmăresc efectul viscozității, în cazul ultimelor două medii de ungere, la o viteză de lucru dublă.

În acest caz se remarcă o scădere simțitoare a rezistenței peliculei de lubrifiant, pentru ambele cazuri menținîndu-se efectul datorat visco-

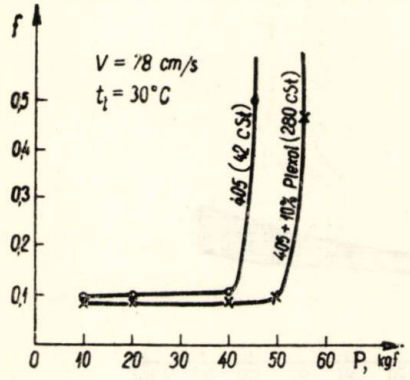


Fig. 6. — Curbele 1 din fig. 4 și 5 pentru $v = 78$ cm/s

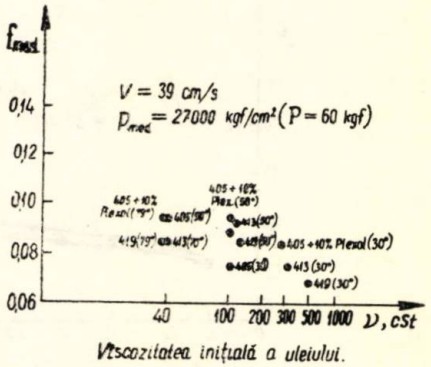


Fig. 7. — Influența viscozității asupra coeficientului de frecare.

zității mai ridicate în cazul adaosului de polimer, însă cantitativ mult mai redus.

În figura 7 este reprezentată variația coeficientului de frecare în funcție de viscozitatea cinematică inițială ν pentru valori constante ale

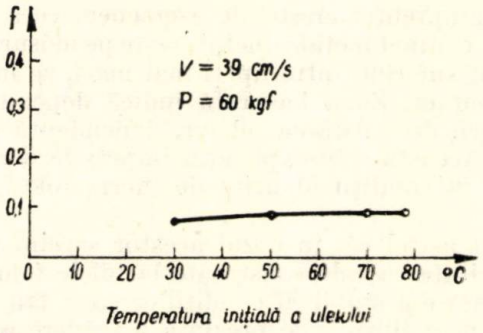


Fig. 8. — Dependența coeficientului de frecare de temperatură pentru un domeniu restrîns al acesteia.

sarcinii $p_{med} \cong 27\,000$ kgf/cm² ($P = 60$ kgf) și vitezei ($v \cong 39$ cm/s). Se remarcă o scădere a coeficientului de frecare pe măsură ce crește viscozitatea uleiului, observație care verifică ipoteza că în aceste condiții de presiuni excesive regimul hidrodinamic este întrerupt parțial, predominînd un regim de frecare de contact semifluid (mixt). În curba din figura 8, urmărind variația coeficientului de frecare în funcție de temperatură, se

găsește în realitate tot dependența acestuia de viscozitate. Se observă și aici ușoara creștere a coeficientului de frecare cu temperatura și, implicit, cu scăderea viscozității.

Uzura. Aspectele privind uzura cuplurilor de frecare supuse sarcinilor excesive au fost verificate în cazul lucrării de față, urmărind evo-

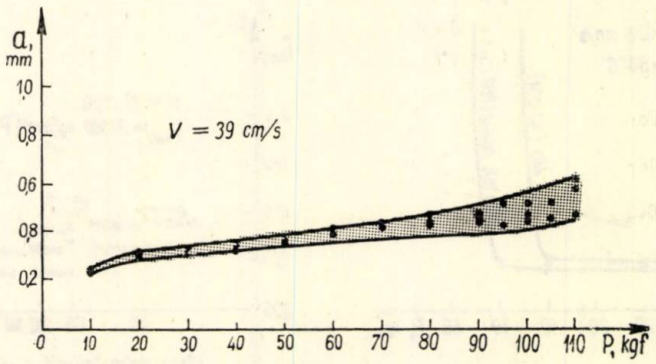


Fig. 9. — Variația diametrului amprentei de contact cu sarcina aplicată.

luția amprentelor obținute la contactul dintre cele trei bile fixe și bila mobilă pentru un timp constant de lucru (120 s la $v \cong 39$ cm/s).

În figura 9 este prezentată dependența diametrului amprentei a de sarcina aplicată P.

Se observă, de altfel o comportare normală că, pe măsură ce sarcina crește, diametrul amprentei crește de asemenea, ceea ce arată că întinderea suprafeței de contact metal—metal crește pe măsură ce crește sarcina; filmul de lubrifiant suferind întreruperi mai mari, se intensifică consecințele frecării de contact. Zona hașurată indică dependența, la contactul punctiform, a uzurii de duritatea bilelor, dependență mai pronunțată la sarcini mai mari. Aceasta este explicația împrăștierii rezultatelor experimentale, obținute în condiții identice de lucru, folosind diverse perechi de bile.

S-a constatat astfel că, în cazul acestor sarcini excesive, diferențe foarte mici de duritate ca cele constatate la bilele folosite ($HRC = 60—64$) provoacă o grăbire a stabilirii condițiilor care dau naștere gripajului, chiar dacă numai una dintre bile prezintă o scădere a durității. Această observație a scos în evidență importanța pe care o are și natura materialelor în aceste condiții extreme, aspect care însă în lucrarea de față nu a constituit un parametru variabil.

Pentru a urmări evoluția în timp a uzurii la presiune și la viteză constantă, s-au trasat curbele din figura 10.

Curbele (a) arată influența viscozității inițiale a mediului de ungere asupra uzurii la contactul punctiform supus unor sarcini excesive. Efectul viscozității se manifestă mai ales cînd se prelungește timpul de funcționare. Curbele (b) arată modificări insensibile ale amprentelor de uzură

pentru timpul de 120 s. Aceeași observație se desprinde și din figura 11, în care este reprezentată variația temperaturii mediului lubrifiant în funcție de timpul de lucru.

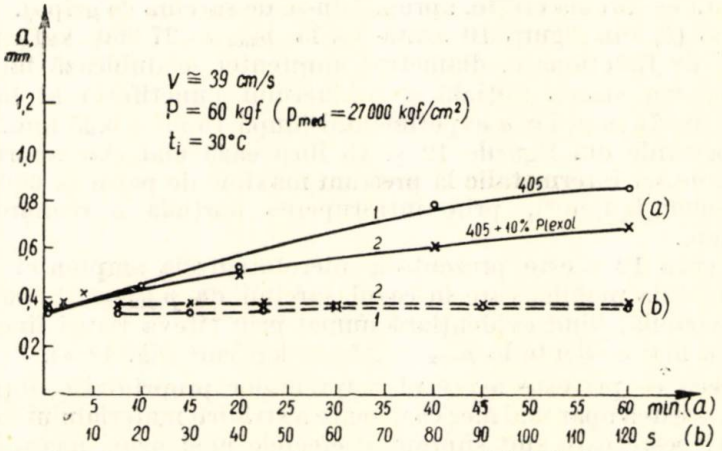


Fig. 10. — Dependența diametrului amprentei de factorul timp.

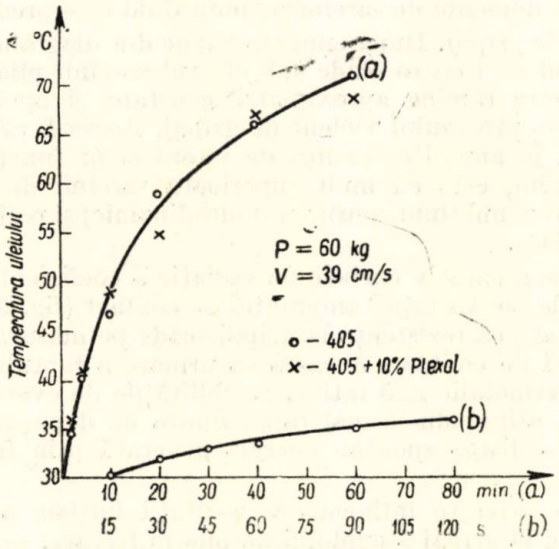


Fig. 11. — Influența timpului de lucru asupra temperaturii uleiului din baie.

Se remarcă o creștere continuă a regimului termic generat în procesul frecării de contact, regim care, după cum se vede, se stabilește cu mult înainte de gripaj, ca urmare a străpungerii filmului de ulei după depășirea unei anumite limite a sarcinii aplicate. S-a determinat experimental că acest regim de contact se stabilește peste un $p_{med} = 15\,000$ kgf/cm² (fig. 12 și 13).

Făcînd o comparație între valorile inițiale calculate ale diametrului amprentei a redate în tabela 1 și cele obținute experimental pentru diferite sarcini, se constată o diferență destul de mare, care se accentuează în timp și pe măsură ce sarcina crește, apropiindu-se de sarcina de gripaj.

Curba (b) din figura 10 arată că la $p_{med} = 27\,000$ kgf/cm^2 chiar după 15 s de funcționare, diametrul amprentei se dublează față de cel calculat pentru starea inițială a contactului punctiform al bilelor : a calculat = 0,171 mm, iar a experimental (după 15 s) = 0,35 mm.

Fotografiile din figurile 12 și 13 ilustrează mai clar apariția regimului de contact intermetalic la presiuni maxime de peste 21 000 kgf/cm^2 ($p_{med} = 15\,000$ kgf/cm^2), prin întreruperea parțială a regimului fluid hidrodinamic.

În figura 12 a este prezentată microfotografia amprentei circulare obținută pe bila mobilă, care în cazul sarcinii de $p_{max} = 21\,300$ kgf/cm^2 este abia vizibilă, fiind evidențiată numai prin cîteva rizuri fine. Aceste rizuri devin mai evidente la $p_{max} = 24\,400$ kgf/cm^2 (fig. 13 a).

În ceea ce privește aspectul amprentelor propriu-zise obținute pe bilele fixe, acestea apar mai ales ca urmare a strivirii materialului la punctul de contact, peste care sînt suprapuse efectele unei uzuri mecanice slabe (fig. 12 b și 13 b) ; încă nu apar efectele proceselor termice locale, ceea ce arată că în acest domeniu de sarcini regimul fluid este predominant.

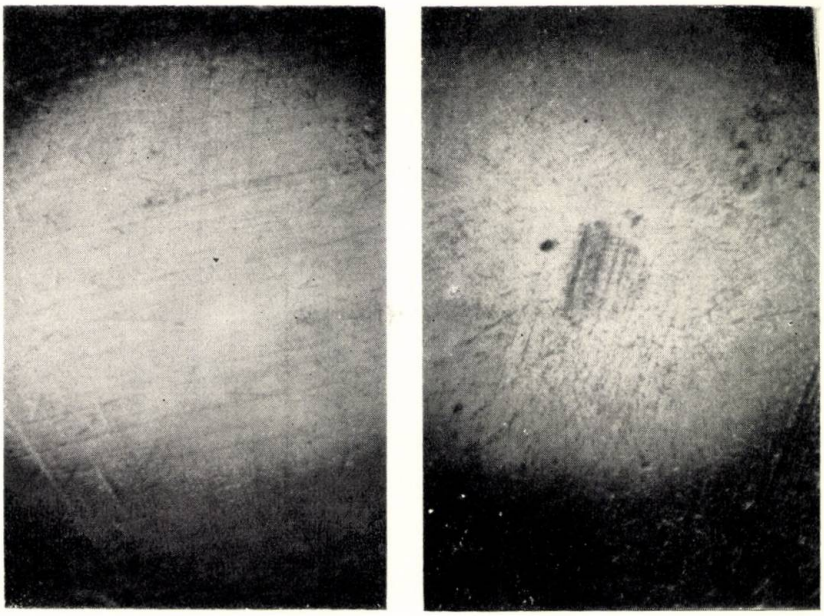
Rezistența la gripaj. După cum s-a văzut din diagramele din figurile 3—6, coeficientul de frecare scade sub efectul sarcinii pînă la o anumită valoare, după care rămîne aproximativ constant și apoi crește brusc, indicînd stabilirea procesului violent de gripaj. Această valoare a sarcinii maxime admise, în anumite condiții de viteză și în funcție de viscozitatea lubrifiantului, este cu mult superioară sarcinii de contact de la frontiera dintre regimul fluid continuu (hidrodinamic) și regimul de contact intermetalic (mixt).

Urmărind comparativ curbele de variație a coeficientului de frecare (fig. 3—6) cu cele ale variației amprentei de contact (fig. 9) în funcție de sarcină, se constată că rezistența la gripaj scade pe măsură ce crește diametrul amprentei de contact. Aceasta ca urmare a faptului că, în cazul unui contact intermetalic mai întins, posibilitățile de evacuare a căldurii sînt mai reduse, atingîndu-se mai rapid limita de depășire a capacității materialelor de a disipa spontan energia generată prin frecare la locul de contact.

În ceea ce privește influența viscozității inițiale a lubrifiantului asupra rezistenței la gripaj a cuplului de bile în frecare, s-a constatat experimental că efectul acesteia se manifestă simțitor, mărindu-le capacitatea de a suporta sarcini excesive fără pericolul de gripaj (fig. 14).

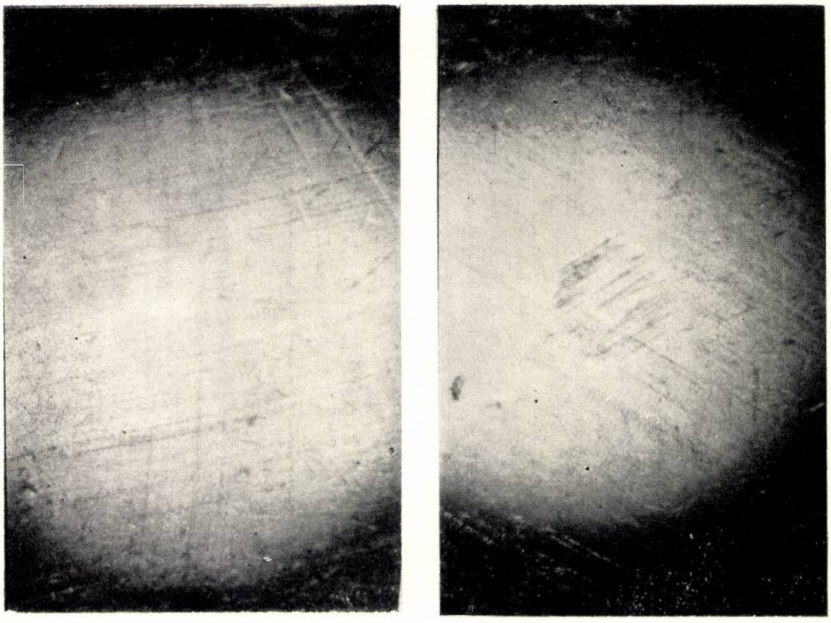
Zonele marginale haşurate se referă la lubrifiantul aditivat, care a permis în toate cazurile, pentru aceeași viscozitate, griparea cuplului de bile la o sarcină ceva mai ridicată.

În ceea ce privește efectul vitezei de lucru, s-a constatat că sarcina de gripaj scade o dată cu creșterea vitezei și că la viteze ridicate influența viscozității scade foarte mult (fig. 15 și 16).



a *b*

Fig. 12. — Microfotografiile amprentelor obținute la $p_{max} \cong 21\,300$ kgf/cm² și $v \cong 39$ cm/s ($\times 60$) :
a = pe bila mobilă ; *b* — pe bila fixă.



a *b*

Fig. 13. — Microfotografiile amprentelor obținute la $p_{max} \cong 24\,400$ kgf/cm² și $v \cong 39$ cm/s ($\times 60$) :
a — amprenta de pe bila mobilă ; *b* — amprenta de pe bila fixă.

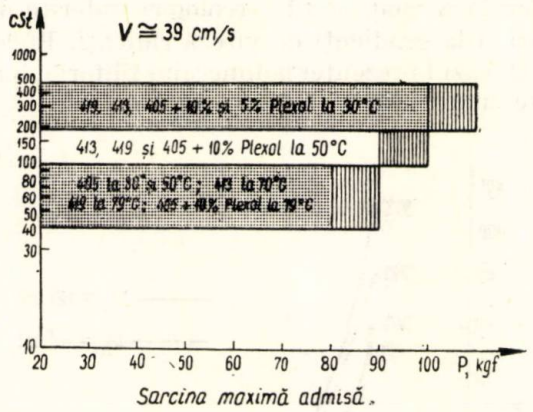


Fig. 14. — Dependenta sarcinii de gripaj de viscozitatea inițială a lubrifiantului.

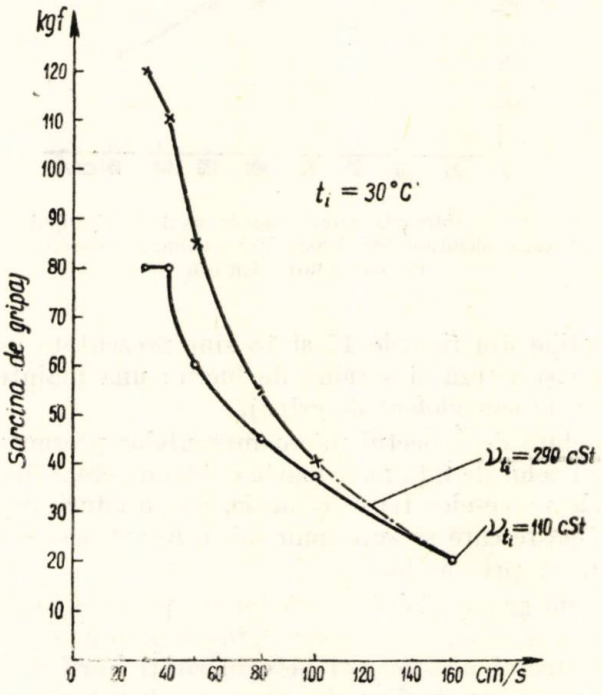


Fig. 15. — Influența vitezei de lucru asupra sarcinii de gripaj în cazul uleiului 405, curat și aditivat cu polimer.

Dispariția diferenței de viscozitate peste o anumită valoare a vitezei apare ca o consecință a modificărilor reologice suferite de lubrifiant sub sarcini foarte mari și la gradienți de viteză ridicați. Efectul se manifestă mult mai evident în cazul prezenței polimerului filiform, a cărei comportare nenewtoniană este cunoscută.

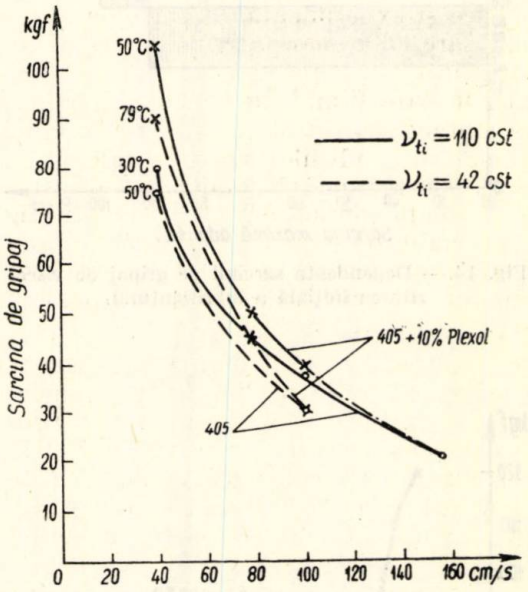
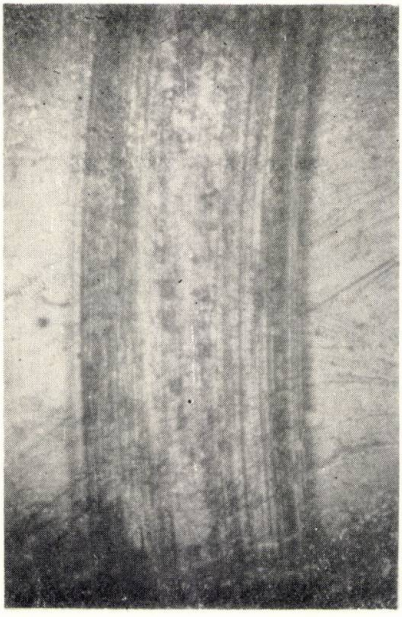


Fig. 16. — Influența vitezii asupra sarcinii de gripaj în cazul uleiurilor 405 și 405+10% polimer, în condiții de viscozitate identică.

În fotografiile din figurile 17 și 18 sînt prezentate două amprente obținute la aceeași viteză și sarcină de lucru : una înainte de gripaj și cealaltă după un proces violent de gripaj.

Spre deosebire de aspectul microamprentelor prezentate în figurile 12 și 13, în cazul celor de față apar foarte evidente, chiar înainte de gripaj (fig. 17), efectele proceselor termice locale, microsuduri, ruperea punților de sudură etc., peste care se suprapun sub o formă accentuată procesele de uzură mecanică prin așchiere.

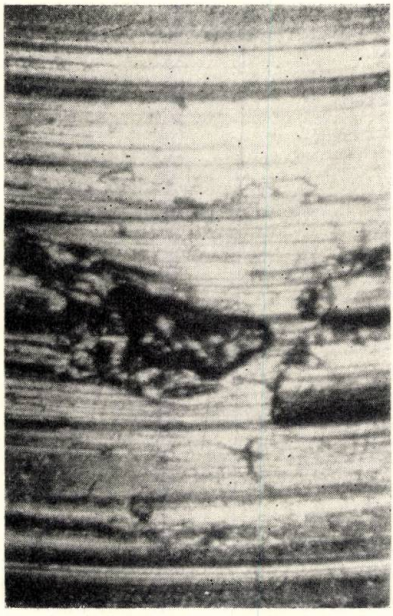
Efectele unui gripaj violent, caracterizat printr-o topire de material pe suprafețe întinse, apare mai evident în amprenta de pe bila mobilă (fig. 18 *a*). Iar efectul acestor noi neregularități durificate, sub efectul temperaturilor și al presiunilor excesive, se manifestă printr-o uzură intensă a bilei fixe conjugate, ceea ce explică dimensiunile exagerate ale amprentei deformate în special pe direcția mișcării (fig. 18 *b*).



a

b

Fig. 17. — Microfotografiile amprentelor obţinute înainte de gripaj (× 60) : *a* — pe bila mobilă ; *b* = pe bila fixă.



a

b

Fig. 18. — Microfotografiile amprentelor obținute după gripaj (× 60) : *a* — pe bila mobilă ; *b* — pe bila fixă.

DISCUȚII ȘI CONCLUZII

Rezultatele obținute în lucrarea de față concordă cu observațiile experimentale publicate de alți cercetători [5], [6], [7] și scot în evidență rolul important pe care îl joacă viscozitatea și modificările ei în lubrificația la sarcini excesive.

Datele teoretice și experimentale au demonstrat existența în zonele de contact supuse sarcinilor mari a două regimuri de contact : regimul fluid, caracterizat printr-o peliculă separatoare continuă de ulei, și regimul de contact (mixt), în care filmul de ulei este parțial întrerupt.

Regimul de contact apare peste o anumită valoare a presiunii maxime aplicate, valoare care în condițiile experimentale ale lucrării de față este în jur de $p_{max} = 21\,000$ kgf/cm^2. Numai peste această sarcină s-a putut pune în evidență prezența contactului metal—metal (fig. 12și 13). De fapt, în literatura de specialitate se indică existența unui regim elastohidrodinamic de ungere, caracterizat prin menținerea constantă a grosimii filmului de lubrifiant în funcție de sarcină, numai pînă la aproximativ aceeași valoare [1].

Rezultatele experimentale obținute au arătat că viscozitatea mediului de ungere își menține un rol important și în lubrificația la sarcini mari în regim de frecare de contact, uleiurile mai viscoase avînd un efect mai bun în îmbunătățirea acestui proces (fig. 4, 5 și 14). De asemenea au demonstrat că presiunea de străpungere a filmului de lubrifiant este cu mult inferioară celei de gripaj, punînd în evidență un domeniu destul de larg de existență a unui regim de lubrificație mixt, lichid și contact intermetalic.

Explicația că uleiurile de aceeași natură asigură un regim de ungere identic în condiții similare de experimentare (fig. 3) în cazul în care viscozitatea lor inițială este adusă la același nivel prin modificarea temperaturilor de lucru constă în faptul că aceste uleiuri prezintă aceeași pantă a curbelor de variație a viscozității cu temperatura (fig. 2). Curbele lor $\nu_{cSt} = f(t)$ reale sînt paralele, prezentînd în funcție de fluiditatea lor, pentru domenii de temperaturi diferite, aproximativ aceeași scădere a viscozității pe °C. Deoarece regimul termic care se stabilește în zonele de contact este funcție de viscozitatea inițială a mediului lubrifiant, creșterea temperaturii în aceste puncte de contact va fi aproximativ aceeași indiferent de nivelul de temperatură de la care s-a pornit, provocînd modificări similare ale viscozității și deci o comportare asemănătoare în ceea ce privește frecarea, uzura și rezistența la gripaj a cuplului de bile.

Adaosul de aditivi de viscozitate îmbunătățește simțitor panta curbei de variație a viscozității cu temperatura a uleiului de bază, astfel că permite menținerea unei viscozități mai ridicate la zonele de contact (fig. 3—5), cu efecte pozitive asupra procesului de ungere. Superioritatea uleiului aditivat scade însă pe măsură ce crește viteza, anulîndu-se peste o anumită valoare a acesteia ca urmare a comportării lui nenewtoniene. Reducerea viscozității se datorează, după cum se știe, efectului forfecării și sensibilității lui mecanice : la viteze de forfecare mari molecula polime-

rului este supusă unei acțiuni de întindere care poate să depășească rezistența ei mecanică, provocîndu-i ruperea în molecule mai mici și, implicit, scăderea viscozității.

Efectul viscozității în lubrificația în regim de contact exprimat prin uzura cuplului de bile (mărimea amprentei de contact) se manifestă în special în cazul unei funcționări prelungite (fig. 10) ca urmare a creșterii nivelului energetic la zona de contact. În aceste condiții de lucru identice, lubrifianții cu viscozitatea mai mare asigură un film lichid separator pe o arie mai întinsă decît cel mai puțin vîscos și cu rezistență mai scăzută, ceea ce face ca în primul caz uzura de contact să fie mai redusă.

Microamprentele din figurile 12 și 13 arată că în jurul sarcinilor care provoacă apariția regimului mixt, uzura ia aspectul unei acțiuni mecanice de zgîriere a suprafețelor de contact conjugate, ca urmare a străpungerii, mai mult sau mai puțin intensă, a filmului de ulei de către vîrfurile asperităților dure angrenate în procesul de frecare.

La sarcini apropiate de sarcina de gripaj sau în cazul unei funcționări prelungite apar și efectele termice, de topire, microsudare, rupere și transfer de material (fig. 17 *a*), care capătă un caracter violent în momentul apariției gripajului (fig. 18 *a*). Așchierea intensă observată pe amprenta obținută pe bila fixă (fig. 17 *b* și 18 *b*) este urmarea firească a acțiunii neregularităților durificate rezultate pe suprafața de frecare a bilei mobile prin procesul de sudare și rupere a microsudurilor și care în procesul de frecare au lucrat în suprafața conjugată ca niște microcuțite de strung. Creșterea excesivă a amprentei gripate se datorește intensificării acestor procese de uzură termică și mecanică combinate, sub efectul presiunilor locale foarte mari.

S-a observat că gripajul suprafețelor apare brusc, în cazul unor condiții de lucru date, la o anumită valoare a sarcinii, specifică unei anumite viscozități. În cazul prelungirii experienței, gripajul apare și la sarcina imediat inferioară sarcinii de gripaj, în momentul în care se atinge limita de depășire a capacității materialelor de a degaja spontan energia generată prin frecare la locul de contact.

Același efect de reducere a sarcinii de gripaj s-a obținut și prin ridicarea vitezei de lucru (fig. 15 și 16). Aceasta ca urmare a faptului că, pe măsură ce viteza crește, gradienții energetici limită ai materialelor, care declanșează procesul violent de gripaj, se stabilesc la sarcini mai reduse. Și în acest caz contribuția viscozității este apreciabilă, deoarece valoarea ei în zona de contact se reduce mult atît sub efectul forfecării intense provocate de creșterea vitezei, cît și sub acela al temperaturilor locale excesive care se stabilesc în timpi de funcționare din ce în ce mai reduși pe măsură ce viteza crește.

În lucrarea de față s-a neglijat voit interdependența fizico-chimică dintre moleculele de lubrifiant și metal la interfața de contact, aceste aspecte rămînînd în atenția noastră imediată.

Primită la redacție la 12 octombrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. F. K. Orcutt, *Elasto-Hydrodynamic Lubrication of Rolling-Contact Surfaces.* ASLE, **4**, *2* (1961).
2. D. W. Darieng, E. I. Radzimovsky, *Experimental Investigation of the minimum oil-Film Thickness in spur Gears.* Trans. of the ASME, D, *9*, (1963).
3. I. C. Bell, J. W. Kannel, C. M. Allen, *The Rheological Behaviour of the Lubricant in the Contact zone of a Rolling Contact System.* Trans. of the ASME, D, *9* (1964).
4. A. C. Smith, *Some notes on the Application of Elasto-hydrodynamic theory to gear Lubrication.* Scient. Lubr., *4—5* (1965).
5. P. S. Y. Chu, A. Cameron, *Pressure viscosity Characteristics of lubricating oils.* Journal of the Inst. of Petroleum, **48**, *461*, may (1962).
6. G. Henriot, *La Lubrification des angrenages et ses difficultés.* Revue Mécanique, **II**, *1* (1965).
7. P. M. Матвеески, *Температурный метод оценки предельной смазочной способности машинных масел.* Москва, Издательство Акад. наук СССР, 1956.
8. S. V. Vinogradov §. a., *Investigation of the lubrication process under heavy friction conditions.* Wear, **6**, *3* (1963).
9. * * * *Hütte. Manuel de l'Ingénieur,* **1** (19).

CURGEREA UNUI FLUID BIFAZIC PRINTR-UN MEDIU POROS ÎN REGIM TRANZITORIU[1])

de H. PASCAL

Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

532

Se studiază curgerea bifazică printr-un mediu poros în regim tranzitoriu. Cu ajutorul metodei perturbațiilor, problema este redusă la rezolvarea unui sistem de ecuații liniare, care permite determinarea distribuției presiunii și saturației. Se studiază problema restabilirii presiunii într-o sondă, care produce țiței și apă, după închiderea acesteia și se stabilesc particularitățile variației presiunii în curgerea bifazică.

Curgerea simultană a unui amestec constituit din două faze imiscibile, țiței și apă, printr-un mediu poros în regim tranzitoriu se întîlnește frecvent în exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide, unde, datorită avansării apei marginale, se produce deslocuirea țițeiului de către apă. Pentru mărirea factorului de recuperare finală a țițeiului, în exploatarea rațională a zăcămintelor de hidrocarburi fluide acest proces se realizează pe cale artificială atît în faza exploatării primare, prin injecția extracontoruală a apei în zăcămînt, cît și în faza secundară a exploatării, cunoscută sub denumirea de recuperare secundară.

Pe de altă parte, în procesul de deslocuire a țițeiului de către apă într-un mediu poros apar două faze, și anume : prima corespunzătoare situației cînd frontul de apă n-a atins sondele de exploatare și a doua după ce apa a pătruns în acestea. În cazul celei de-a doua faze, în zăcămînt are loc o curgere simultană de țiței și apă, formîndu-se o anumită distribuție a saturației, care variază cu timpul.

În lucrarea de față se va studia curgerea simultană a țițeiului și apei în regim tranzitoriu, pentru a se putea stabili particularitățile curbei de restabilire a presiunii de fund obținută într-o sondă după închiderea

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, *2* (1966) (în limba franceză)

acesteia. Menționăm că studiul curbei de restabilire a presiunii de fund este utilizat în prezent, în cazul curgerii monofazice, la determinarea permeabilității mediului poros, precum și a presiunii dinamice de zăcământ aferentă zonei de drenaj a sondei.

1. ECUAȚIILE FUNDAMENTALE

Dacă considerăm mediul poros omogen și izotrop, din punct de vedere statistic, și validitatea legii lui Darcy pentru fiecare fază, atunci curgerea nestaționară a unui amestec de două fluide imiscibile este descrisă de următorul sistem de ecuații [1]:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\rho_a \vec{v}_a) + m\frac{\partial(\rho_a \sigma_a)}{\partial t} = 0\,; \qquad \vec{v}_a = -\frac{k_a(\sigma)}{\mu_a}\operatorname{grad} p_a,\\
&\operatorname{div}(\rho_t \vec{v}_t) + m\frac{\partial(\rho_t \sigma_t)}{\partial t} = 0\,; \qquad \vec{v}_t = -\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t}\operatorname{grad} p_t,\\
&\rho_a = \rho_{a0}[1 + \beta_a(p - p_0)] \;; \qquad \sigma_a + \sigma_t = 1,\\
&\rho_t = \rho_{t0}[1 + \beta_t(p - p_0)] \;; \qquad p_a - p_t = p_c(\sigma),
\end{aligned} \tag{1}$$

unde ρ_a și ρ_t sînt masele specifice pentru apă și țiței, σ_a și σ_t saturația în apă a mediului poros, respectiv a țițeiului, v_a și v_t vitezele de curgere pentru apă și țiței, p_c presiunea capilară considerată ca o funcție univocă de saturație, k_a și k_t permeabilitățile de fază pentru apă și țiței, considerate de asemenea ca funcții univoce de saturație într-una din faze, țiței sau apă, p_t și p_a presiunea în faza de țiței, respectiv de apă, aceasta din urmă fiind faza umectantă, μ_a și μ_t viscozitățile dinamice, k permeabilitatea absolută a mediului poros și m porozitatea.

Sistemul de ecuații (1) determină distribuția presiunii și a saturației mediului poros la anumite momente de timp, respectiv a funcțiilor $p(x, y, z, t)$ și $\sigma(x, y, z, t)$. Soluția sistemului (1) nu poate fi obținută exact prin metode cunoscute, datorită neliniarității ecuațiilor. Din acest motiv apare necesar ca în cele ce urmează să recurgem la introducerea unor supoziții care, în cazul problemei pe care o studiem, sînt acceptabile în ceea ce privește concordanța cu fenomenul fizic.

Ținînd seama de faptul că curgerea are loc la presiuni mari, putem face abstracție de diferența de presiune dintre cele două faze, care în general este foarte mică [3]. După cum se știe, presiunea capilară variază puțin cu saturația în apă dacă aceasta este suficient de mare. În cazul curgerii amestecului de apă și țiței pentru faza a doua a dislocuirii, după ce apa a pătruns în sondele de exploatare, această supoziție corespunde situației reale [4], [5], [6].

În cele ce urmează ne vom limita numai la cazul curgerii monodimensionale, adică printr-o galerie. Pentru determinarea funcțiilor necu-

noscute $p\ (x, t)$ și $\sigma\ (x, t)$, vom avea în acest caz de rezolvat sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_a \frac{k_a(\sigma)}{\mu_a}\frac{\partial p}{\partial x}\right) &= m\left(\sigma_a \frac{\partial \rho_a}{\partial p} + \rho_a \frac{\partial \sigma_a}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_t \frac{k_t(\sigma)}{\mu_t}\frac{\partial p}{\partial x}\right) &= m\left(\sigma_t \frac{\partial \rho_t}{\partial p} + \rho_t \frac{\partial \sigma_t}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\rho_t = \rho_{t0}\,[1 + \beta_t\,(p - p_0)]\,;\ \rho_a = \rho_{a0}\,[1 + \beta_a\,(p - p_0)], \tag{3}$$

$$\sigma_a + \sigma_t = 1. \tag{4}$$

Pe de altă parte, din (3) obținem

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial p} = \rho_{a0}\,\beta_a \quad \text{și} \quad \frac{\partial \rho_t}{\partial p} = \rho_{t0}\,\beta_t, \tag{5}$$

unde β_a și β_t sînt coeficienții de compresibilitate pentru apă și țiței, iar ρ_{t0} și ρ_{a0} masele specifice la presiunea de referință p_0.

Deoarece deasupra presiunii de saturație greutățile specifice ale apei și țițeiului, precum și viscozitățile dinamice ale acestora, variază puțin cu presiunea, putem considera $\rho_a \cong \rho_{a0}$ și $\rho_t \cong \rho_{t0}$ și, în consecință, ținînd seama de (5), ecuațiile (2) devin

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial k_a}{\partial \sigma}\frac{\partial p}{\partial x} + k_a(\sigma)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= \mu_a m\left(\sigma\beta_a \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial k_t}{\partial \sigma}\frac{\partial p}{\partial x} + k_t(\sigma)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= \mu_t m\left[(1-\sigma)\,\beta_t \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Dependentele permeabilităților efective față de apă sau de țiței nu sînt cunoscute analitic decît numai prin curbele obținute experimental. Dat fiind faptul că în cele ce urmează studiem curgerea numai în perioada tranzitorie după închiderea sondei, care este relativ mică, respectiv pînă la momentul stabilizării presiunii, atunci putem presupune cu o bună aproximație că permeabilitățile efective variază liniar cu saturația. În consecință vom avea următoarele relații :

$$\frac{k_a(\sigma)}{\mu_a} = a_1\sigma + b_1 \quad \text{și} \quad \frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} = a_2\sigma + b_2, \tag{7}$$

valabile în intervalul $\sigma_k < \sigma < \sigma_0$, unde σ_k reprezintă valoarea medie a saturației în apă a mediului poros, la momentul inițial, unde se consideră curgerea staționară, iar σ_0 valoarea medie a saturației după stabilizarea

presiunii. Cunoscînd valorile permeabilităţilor efective după curbele experimentale, pentru valorile σ_1 şi σ_2 putem stabili coeficienţii a_1, b_1 şi a_2, b_2, care se obţin din relaţiile [2])

$$a_1 = \frac{k_a(\sigma_1) - k_a(\sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)\,\mu_a} \text{ şi } b_1 = \frac{\sigma_1 k_a(\sigma_2) - \sigma_2 k_a(\sigma_1)}{(\sigma_1 - \sigma_2)\,\mu_a}, \tag{8}$$

$$a_2 = \frac{k_t(\sigma_1) - k_t(\sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)\,\mu_t} \text{ şi } b_2 = \frac{\sigma_1 k_t(\sigma_2) - \sigma_2 k_t(\sigma_1)}{(\sigma_1 - \sigma_2)\,\mu_t}. \tag{9}$$

Rezultă deci că în acest caz problema se reduce la rezolvarea sistemului de ecuaţii neliniare

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + (a_1\sigma + b_1)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= m\left(\sigma\beta_a \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right), \\ a_2 \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + (a_2\sigma + b_2)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= m\left[(1-\sigma)\,\beta_t \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Dacă ne referim la cazul curgerii staţionare, unde $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$, atunci din (10) rezultă pentru distribuţia presiunii $p_0(x)$ în regim staţionar

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \text{ respectiv } p_0(x) = \frac{p_k - p_0}{l}\,x + p_0 \tag{11}$$

iar pentru saturaţie avem $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$, respectiv $\sigma = \sigma_k$, întrucît s-a considerat masa specifică constantă în membrul stîng al ecuaţiilor (2). Pe de altă parte, din (1) avem pentru debitul volumetric de amestec pe unitatea de secţiune Q

$$Q = Q_a + Q_t = -\left(\frac{k_a(\sigma)}{\mu_a} + \frac{k_t(\sigma)}{\mu_t}\right)\frac{\partial p}{\partial x} \tag{12}$$

care în regimul staţionar, unde avem $\sigma = \sigma_k$, devine

$$p_0(x) = \frac{Q_a + Q_t}{\frac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a} + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}}\,x + p_0(0), \tag{13}$$

unde Q_a şi Q_t sînt debitele volumetrice de apă şi de ţiţei pe unitatea de secţiune a mediului poros, corespunzătoare regimului staţionar de curgere, iar p_k presiunea pe conturul de alimentare $x = l$ şi p_0 presiunea de fund a sondei înaintea închiderii acesteia.

Cu ajutorul metodei perturbaţiilor, stabilirea soluţiei sistemului de ecuaţii neliniare (10) poate fi redusă la rezolvarea unui şir de sisteme

[2]) Intervalul $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ trebuie astfel ales încît eroarea rezultată din aproximarea curbelor $k_a(\sigma)$ şi $k_t(\sigma)$ prin relaţiile (7) să fie minimă.

de ecuații liniare. În acest scop vom căuta soluția sistemului (10) sub forma unor serii de puteri după un parametru ε :

$$\begin{aligned} p(x,t) &= p_0(x) + \varepsilon p_1(x,t) + \varepsilon^2 p_2(x,t) + \cdots \\ \sigma(x,t) &= \sigma_k + \varepsilon \sigma_1(x,t) + \varepsilon^2 \sigma_2(x,t) + \cdots \end{aligned} \tag{14}$$

unde ε este un parametru auxiliar.

Introducînd relațiile (14) în (10) și identificînd coeficienții puterilor parametrului ε, vom obține pentru determinarea funcțiilor $p_1, p_2, \ldots$, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ următoarele ecuații liniare :

$$a_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial x} + (a_1\sigma_k + b_1)\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = m\left(\beta_a \sigma_k \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial t}\right),$$

$$a_2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial x} + (a_2\sigma_k + b_2)\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = m\left[(1-\sigma_k)\beta_t \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial t}\right],$$

$$a_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\frac{\partial p_1}{\partial x} + a_1 \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial x} + (a_1\sigma_k + b_1)\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + a_1\sigma_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \tag{15}$$

$$= m\left(\beta_a \sigma_k \frac{\partial p_2}{\partial t} + \beta_a \sigma_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial t}\right),$$

$$a_2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\frac{\partial p_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial x} + (a_2\sigma_k + b_2)\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + a_2\sigma_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} =$$

$$= m\left[(1-\sigma_k)\beta_t \frac{\partial p_2}{\partial t} - \sigma_1 \beta_t \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial t}\right],$$

. . . . . .

$$a_1\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}\frac{\partial p_{n-2}}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial \sigma_{n-1}}{\partial x}\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{\partial \sigma_n}{\partial x}\right) +$$

$$+ (a_1\sigma_k + b_1)\frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} + a_1\sigma_1 \frac{\partial^2 p_{n-1}}{\partial x^2} + \cdots + a_1\sigma_{n-2}\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} +$$

$$+ a_1\sigma_{n-1}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = m\left(\beta_a \sigma_k \frac{\partial p_n}{\partial t} + \beta_a \sigma_1 \frac{\partial p_{n-1}}{\partial t} +\right.$$

$$\left. + \cdots + \beta_a \sigma_{n-1}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_n}{\partial t}\right),$$

$$a_2\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}\frac{\partial p_{n-2}}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial \sigma_{n-1}}{\partial x}\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{\partial \sigma_n}{\partial x}\right) + \tag{16}$$

$$+ (a_2\sigma_k + b_2)\frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} + a_2\sigma_1 \frac{\partial^2 p_{n-1}}{\partial x^2} + \cdots + a_2\sigma_{n-2}\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} +$$

$$+ a_2\sigma_{n-1}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = m\left[\beta_t(1-\sigma_k)\frac{\partial p_n}{\partial t} - \beta_t \sigma_1 \frac{\partial p_{n-1}}{\partial t} -\right.$$

$$\left. - \cdots - \beta_t \sigma_{n-1}\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_n}{\partial t}\right].$$

2. VARIAȚIA PRESIUNII ÎNTR-O SONDĂ DUPĂ ÎNCHIDEREA ACESTEIA

Pentru simplificarea rezolvării ecuațiilor redate mai sus, apare necesar să ținem seama de faptul că pentru anumite cazuri întîlnite în practică se poate considera, într-o primă aproximație, mai importantă variația saturației cu timpul decît cu distanța, iar pentru altele invers. În cele ce urmează vom prezenta soluția sistemelor (15) și (16) pentru ambele cazuri.

Dacă admitem că saturația este o funcție numai de timp, avînd o valoare medie ponderată după distanță, atunci avem $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = 0$, respectiv[3], peutru $t > 0$

$$\bar{\sigma}(t) = \frac{1}{l}\int_0^l \sigma(x, t)\,dx, \tag{17}$$

iar din (15) obținem pentru determinarea funcției $p_1(x, t)$ ecuația

$$[(a_1 + a_2)\sigma_k + b_1 + b_2]\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = m[(\beta_a - \beta_t)\sigma_k + \beta_t]\frac{\partial p_1}{\partial t}. \tag{18}$$

Rezultatele obținute mai sus ne permit acum să trecem la rezolvarea problemei determinării variației presiunii de fund într-o sondă după închiderea acesteia.

La fel ca în cazul curgerii monofazice, vom considera, pentru condiția inițială, că înaintea închiderii sondei curgerea amestecului apă-țiței era staționară. În ceea ce privește condițiile la limită, admitem că pe conturul de alimentare, care se găsește la distanță $x = l$, presiunea rămîne constantă după închiderea sondei [7]. În acest caz rezultă deci următoarele condiții la limită și inițiale :

$$\begin{cases} t > 0 \begin{cases} p(l, t) = p_k \\ \left.\dfrac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \end{cases} \\ t = 0,\ p(x, 0) = p_0(x) \end{cases} \tag{19}$$

iar pentru funcțiile $p_1(x, t)$ și $p_i\ (x, t)$, $i = 2, 3, \ldots$, ținînd seama de (14), vom avea

$$\begin{cases} t > 0 \begin{cases} p_1(l, t) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial p_1}{\partial x}\right|_{x=0} = -\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{Q_a + Q_t}{\dfrac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a} + \dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}} \end{cases} \\ t = 0,\ p_1(x, 0) = 0 \end{cases} \tag{20}$$

[3]) La fel ca în lucrare [11] se presupune că $\frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x}$ este neglijabil față de $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ (vezi anexa III).

şi

$$t>0\begin{cases} p_i\,(l,t)=0 \\ \left.\dfrac{\partial p_i}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \end{cases};\ t=0,\ p_i\,(x,0)=0 \qquad i=2,3,\ldots \tag{21}$$

Soluţia ecuaţiei (18) pentru condiţiile la limită şi iniţiale (20) va fi

$$p_1(\xi,\theta)=\frac{B}{\varepsilon}\left[1-\xi-\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\dfrac{\pi}{2}\,\xi}{(2m+1)^2}\,e^{-(2m+1)^2\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}\right], \tag{22}$$

unde $\theta=\dfrac{t}{\lambda}$ şi $\xi=\dfrac{x}{l}$, iar λ şi B se obţin din relaţiile

$$\lambda=\frac{m\,[\beta_t+(\beta_a-\beta_t)\,\sigma_k]}{(a_1+a_2)\sigma_k+b_1+b_2}\ \text{şi}\ B=\frac{(Q_a+Q_t)\,l}{\dfrac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a}+\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}}\,. \tag{23}$$

Pentru determinarea funcţiei $\sigma_1(\xi,\theta)$ vom avea din (15)

$$\frac{m}{\lambda}(a_1+a_2)\frac{\partial\sigma_1}{\partial\theta}=\frac{m}{\lambda}\,[\beta_t a_1(1-\sigma_k)-\beta_a a_2\sigma_k]\frac{\partial p_1}{\partial\theta}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{l^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial\xi^2}, \tag{24}$$

care mai poate fi scrisă, ţinînd seama de (18), sub forma

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\theta}=\frac{\Omega}{l^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial\xi^2}\ \text{sau}\ \frac{\partial\sigma_1}{\partial\theta}=\Omega\frac{\partial p_1}{\partial\theta}, \tag{25}$$

unde

$$\Omega=\frac{1}{a_1+a_2}\left[\beta_t a_1(1-\sigma_k)-\beta_a a_2\sigma_k+\frac{\lambda}{m}(a_2b_1-a_1b_2)\right]. \tag{26}$$

Dacă luăm în consideraţie şi variaţia cu distanţa a saturaţiei, atunci funcţia $\sigma_1(x,t)$ se obţine din ecuaţia

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\theta}-\frac{a_1}{ml^2}\frac{\partial p_0}{\partial\xi}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi}=\frac{\Omega}{l^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial\xi^2}, \tag{27}$$

unde $\dfrac{\partial p_0}{\partial\xi}$ rezultă din (13), iar pentru $\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial\xi^2}$ vom avea din (22)

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial\xi^2}=\frac{2B}{\varepsilon}\sum_{m=0}^{\infty}\cos(2m+1)\frac{\pi}{2}\,e^{-(2m+1)^2\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}. \tag{28}$$

Utilizînd condiţia iniţială $\sigma(x,0)=\sigma_k$, rezultă din (14)

$$\sigma_1(x,0)=\frac{\sigma(x,0)-\sigma_k}{\varepsilon}=0 \tag{29}$$

și, în consecință, soluția ecuației (25), cu condiția inițială (29), va fi

$$\sigma_1(\xi, \theta) = \frac{8B\,\Omega}{\pi^2\,\varepsilon} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\frac{\pi}{2}\,\xi}{(2m+1)^2} \left(1 - e^{-(2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{\theta}{l^2}}\right). \tag{30}$$

Deoarece avem relația

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\frac{\pi}{2}\,\xi}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}(1-\xi), \tag{31}$$

atunci relația (30), respectiv distribuția saturației, devine

$$\sigma_1(\xi, \theta) = \frac{B\,\Omega}{\varepsilon}\left[1 - \xi - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\frac{\pi}{2}\,\xi}{(2m+1)^2}\, e^{-(2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{\theta}{l^2}}\right], \tag{32}$$

care este identică cu (22), obținută pentru prima aproximație a distribuției presiunii.

Este ușor de observat din (32), dacă ne limităm numai la prima aproximație, că după stabilizarea presiunii de fund, unde pentru $\theta \to \infty$ avem $p = p_k$, distribuția saturației în apă a mediului poros corespunzătoare primei aproximații va fi

$$\sigma(x) = \sigma_k + \frac{(Q_a + Q_t)\,\Omega\, l}{\frac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a} + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}} \left(1 - \frac{x}{l}\right). \tag{33}$$

Funcțiile $p_1(\xi, \theta)$ și $\sigma_1(\xi, 0)$, care reprezintă prima aproximație a soluției sistemului (6), fiind determinate, putem trece acum la stabilirea aproximațiilor de ordin superior pentru distribuția presiunii și saturației.

La fel ca în cazul anterior, vom presupune de asemenea $\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} = 0$ și, în consecință, vom avea pentru determinarea funcției $p_2(x, t)$ ecuația neomogenă de tip parabolic

$$l^2 \frac{\partial p_2}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 p_2}{\partial \xi^2} + \Phi_1(\xi, \theta), \tag{34}$$

unde termenul liber $\Phi_1(\xi, \theta)$ este dat de relația

$$\Phi_1(\xi, \theta) = -\frac{m(\beta_a - \beta_t) - \lambda(a_1 + a_2)}{\lambda[(a_1 + a_2)\sigma_k + b_1 + b_2]}\, \sigma_1(\xi, \theta)\, \frac{\partial p_1}{\partial \theta}. \tag{35}$$

Ținînd seama de relațiile (22) și (32), precum și de faptul că

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)\frac{\pi}{2}\,\xi}{(2m+1)} = \frac{\pi}{4},$$

obţinem pentru termenul liber

$$\Phi_1(\xi, \theta) = -\frac{16\alpha B^2 \Omega}{l^2 \pi^2 \varepsilon^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\frac{\pi}{2}\xi}{(2m+1)^2} (1 - e^{-(2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4l^2}\theta}) \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \cos(2m+1)\frac{\pi}{2}\xi e^{-(2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}, \tag{36}$$

unde

$$\alpha = \frac{m(\beta_a - \beta_t) - \lambda(a_1 + a_2)}{\lambda[(a_1 + a_2)\sigma_k + b_1 + b_2]} = \frac{m(\beta_a - \beta_t) - \lambda(a_1 + a_2)}{\lambda\left[\frac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a} + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}\right]}. \tag{37}$$

În conformitate cu rezultatele stabilite în lucrarea [8], soluţia ecuaţiei (34) cu condiţiile la limită şi iniţiale (21) poate fi scrisă sub forma

$$p_2(\xi, \theta) = \int_0^{\theta}\int_0^1 \Phi_1(u, \tau) G(\xi, u, \theta - \tau)\, du\, d\tau \tag{38}$$

sau

$$p_n(\xi, \theta) = \int_0^{\theta}\int_0^1 \Phi_{n-1}(u, \tau) G(\xi, u, \theta - \tau)\, du\, d\tau, \tag{38'}$$

unde în acest caz funcţia lui Green are expresia

$$G(\xi, u, \theta - \tau) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4l^2}(\theta - \tau)} \cos(2m+1)\frac{\pi}{2} u \cos(2m+1)\frac{\pi}{2}\xi. \tag{39}$$

Dat fiind faptul că seria (36) este rapid convergentă, în aplicaţiile practice ne putem limita numai la primul termen, astfel încît după efectuarea integralelor din (38) vom obţine

$$p_2(\xi, \theta) = -\frac{4B^2 \Omega\alpha}{\varepsilon^2}\left[\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)\frac{\theta}{4l^2} + \frac{128}{3\pi^5}(e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}} - 1)\right] e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}} \cos\frac{\pi}{2}\xi \tag{40}$$

şi, prin urmare, variaţia presiunii după închiderea sondei, respectiv în punctul $\xi = 0$, va fi în conformitate cu (14)

$$p(0, \theta) = p_0 + B\left(1 - \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}\right) - 4B^2 \Omega\alpha\left[\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)\frac{\theta}{4l^2} + \right. \\ \left. + \frac{128}{3\pi^5}(e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}} - 1)\right] e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}, \tag{41}$$

unde B se determină din (23) sau, în conformitate cu relaţiile (13) şi (11), avem

$$B = p_k\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) \tag{42}$$

și (41) devine

$$\frac{p-p_0}{p_k-p_0}=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^2}\,e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}(2m+1)^2}- \\ -4p_k\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)\Omega\alpha\left[\left(1+\frac{4}{\pi^2}\right)\frac{\theta}{4l^2}+\frac{128}{3\pi^5}\left(e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}-1\right)\right]e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}. \tag{43}$$

În unele cazuri întîlnite în practică nu se observă după punerea sondelor în producție, care au fost închise pentru obținerea curbei de restabilire a presiunii necesare determinării permeabilității, o variație sensibilă a debitului de apă față de cazul dinaintea închiderii. Asta înseamnă că saturația în perioada restabilirii presiunii poate fi considerată practic invariabilă în timp. Din acest motiv, pentru simplificarea rezolvării sistemului (15) și (16) apare mai justificat a considera variația saturației cu distanța și a neglija variația acesteia în timp. În acest caz avem $\frac{\partial\sigma}{\partial t}=0$, iar din (15) rezultă ecuația

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial\xi^2}=l^2\frac{\partial p_1}{\partial\theta} \tag{44}$$

și, prin urmare, soluția acesteia, cu condițiile la limită și inițiale (20), se obține din (22), unde θ se determină acum din relația

$$\theta=\frac{t}{\lambda_0},\quad \text{unde}\quad \lambda_0=\frac{m\left[a_2\sigma_k\,\beta_a-a_1\beta_t(1-\sigma_k)\right]}{a_2b_1-a_1b_2}. \tag{45}$$

Rezultă deci că variația presiunii va fi aceeași ca în cazul precedent, cu deosebirea timpului de stabilizare, care este acum diferit.

Din sistemul (15) vom avea în acest caz, pentru determinarea funcției $\sigma_1(\xi,\theta)$ ecuația

$$\sigma_1(\xi,\theta)-\sigma_1(1,\theta)=\frac{1}{a_1 l\frac{\partial p_0}{\partial x}}\left(\frac{m\beta_a\sigma_k}{\lambda_0}-a_1\sigma_k-b_1\right)\left[\frac{\partial p_1}{\partial\xi}-\frac{\partial p_1}{\partial\xi}\Big|_{\xi=1}\right]. \tag{46}$$

Dacă admitem că saturația pe conturul de alimentare, $x=l$, este egală cu cea din momentul inițial, respectiv la momentul închiderii sondei, considerată conform relației (17) ca o valoare medie ponderată după distanță, atunci $\sigma_1(1,\theta)=0$ și, în consecință, (46) devine

$$\sigma_1(\xi,\theta)=\frac{\Omega_0}{\varepsilon}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)\frac{\pi}{2}\xi-(-1)^m}{2m+1}\,e^{-\frac{\pi^2}{4}(2m+1)^2\frac{\theta}{l^2}}, \tag{47}$$

unde

$$\Omega_0 = \frac{4}{\pi a_1}\left[\frac{m\beta_a\ \sigma_k}{\lambda_0} - a_1\sigma_k - b_1\right]. \tag{48}$$

Pe de altă parte, pentru determinarea funcției $p_2(\xi, \theta)$ vom avea de rezolvat acum ecuația

$$\frac{\partial p_2}{\partial \theta} = \frac{1}{l^2}\frac{\partial^2 p_2}{\partial \xi^2} - \frac{m}{\lambda_0}\frac{a_2\beta_a + a_1\beta_t}{a_2 b_1 - a_1 b_2}\sigma_1(\xi, \theta)\frac{\partial p_1}{\partial \theta}, \tag{49}$$

care se obține din sistemul (16), cu condițiile la limită și inițiale (21).

Cu ajutorul relațiilor (38) și (39), ținînd seama că termenul liber $\sigma_1(\xi, \theta)\dfrac{\partial p_1}{\partial \theta}$ se determină din (47) și (22), rezultă, dacă ne limităm numai la primul termen al seriei, ecuația

$$p_2(\xi, \theta) = \frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3\pi}\right)\frac{mB^2\Omega_0}{\lambda_0 \varepsilon^2}\frac{a_2\beta_a + a_1\beta_t}{a_2 b_1 - a_1 b_2}\, e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}\left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}\right)\cos\frac{\pi}{2}\xi \tag{50}$$

și, în consecință, vom avea pentru variația presiunii de fund, după închiderea sondei, corespunzătoare punctului $\xi = 0$, următoarea relație :

$$p(0, \theta) = p_0 + B\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-(2m+1)^2\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}\right) + \frac{16}{\pi^2}\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3\pi}\right]\frac{mB^2\Omega_0}{\lambda_0} \times$$
$$\times \frac{a_2\beta_a + a_1\beta_t}{a_2 b_1 - a_1 b_2}\, e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}\left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}\right), \tag{51}$$

care se mai poate scrie astfel :

$$\frac{p - p_0}{p_k - p_0} = 1 - \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2}{4l^2}\theta} + \frac{16\pi^2}{\lambda_0}\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3\pi}\right] m(p_k - p_0)\Omega_0 \times$$
$$+ \frac{a_2\beta_a + a_1\beta_t}{a_2 b_1 - a_1 b_2} e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}\left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}\right), \tag{51'}$$

unde θ se obține din relația (45), iar B din (42).

3. CONCLUZII

Deoarece rapiditatea convergenței seriei (14), care reprezintă soluția sistemului (10), nu poate fi stabilită decît numai prin calcule numerice, vom examina în cele ce urmează comportarea funcțiilor p_1 și p_2 în punctul $x = 0$.

Astfel, în tabela 1 sînt redate valorile funcţiilor p_1 şi p_2 în funcţie de timpul adimensional $\frac{\theta}{l^2}$, determinate din relaţiile (43) şi (22), unde, în conformitate cu (43), p_1 şi p_2 au următoarele expresii :

$$p_1(0, \theta) = 1 - \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}, \tag{52}$$

$$\frac{p_2(0, \theta)}{4(p_k - p_0)\Omega\alpha} = \left[\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)\frac{\theta}{4l^2} + \frac{128}{3\pi^5}(e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}} - 1)\right] e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}. \tag{53}$$

Tabela 1

$\frac{\theta}{l^2}$	p_1	$\frac{p_2}{4(p_k - p_0)\Omega\alpha}$
0,1	0,36633	$3{,}6235.10^{-3}$
0,2	0,50489	$9{,}74074.10^{-3}$
0,3	0,6132	$10{,}71605.10^{-3}$
0,4	0,69766	$19{,}7777.10^{-3}$
0,8	0,8872	$22{,}3889.10^{-3}$
1,5	0,98033	$9{,}65432.10^{-3}$

Din tabela 1 se observă, cînd avem îndeplinită condiţia $(p_k - p_0)\Omega\alpha < 1$, că funcţia $p_2(0, \theta)$ poate fi neglijată în raport cu $p_1(0, \theta)$ în tot intervalul de timp necesar stabilizării presiunii şi, în consecinţă, variaţia presiunii de fund după închiderea sondei, reprezentată într-o diagramă $\log \frac{p_k - p}{p_k - p_0}$ şi $\frac{\theta}{l^2}$, va fi o dreaptă avînd panta

$$i = \frac{\pi^2}{4} \frac{(a_1 + a_2)\sigma_k + b_1 + b_2}{ml^2[\beta_t + (\beta_a - \beta_t)\sigma_k]}, \tag{54}$$

care mai poate fi scrisă, ţinînd seama de relaţiile (7), sub forma

$$i = \frac{\pi^2}{4} \frac{\frac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a} + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}}{ml^2[\beta_t + (\beta_a - \beta_t)\sigma_k]}. \tag{55}$$

Din punct de vedere hidrodinamic, pentru $(p_k - p_0)\Omega\alpha < 1$, rezultatele obţinute mai sus arată că curgerea tranzitorie a amestecului de ţiţei şi apă nu influenţează calitativ evoluţia presiunii de fund faţă de cazul cînd în zăcămînt curge numai o singură fază, ţiţei sau apă, decît numai cantitativ, conform relaţiei (55). Datorită acestui fapt, cu ajutorul curbei de restabilire a presiunii obţinute la o sondă după închiderea acesteia, care produce apă şi ţiţei, putem determina din (54) sau (55) valoarea aproximativă a saturaţiei, respectiv σ_k.

Dacă $(p_k - p_0)\Omega\alpha > 1$, atunci curgerea amestecului de ţiţei şi apă va influenţa calitativ comportarea sondei în ceea ce priveşte variaţia

presiunii de fund, întrucît în acest caz trebuie să ţinem seama de aproximaţiile de ordin superior, respectiv de $p_2(0, \theta)$, ..., pentru determinarea soluţiei sistemului de ecuaţii (10). Faţă de cele arătate mai sus, rezultă că în acest caz variaţia presiunii nu mai este liniară într-o diagramă semilogaritmică şi, în consecinţă, determinarea saturaţiei mediului poros după (54) nu poate fi efectuată cînd $(p_k - p_0)\Omega\alpha > 1$.

Deoarece în majoritatea cazurilor din practică avem $(p_k - p_0)\ \Omega\alpha < 1$, atunci prima aproximaţie a soluţiei sistemului (10), $p_1(\xi, \theta)$, poate fi considerată satisfăcătoare pentru determinarea saturaţiei mediului poros după curba de restabilire a presiunii de fund.

Comportarea funcţiilor $p_1(0, \theta)$ şi $p_2(0, \theta)$, date de relaţiile (22), (50) şi (51), obţinute în cazul cînd s-a presupus neglijabilă variaţia saturaţiei cu timpul, este arătată în tabela 2, unde

$$p_1(0,\ \theta) = 1 - \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}},$$

şi

$$\overline{p}_2(0,\ \theta) = e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}\left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{l^2}}\right). \tag{56}$$

Pentru cazul cînd $\frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3\pi}\right)\frac{m(p_k - p_0)\Omega_0}{\lambda_0}\frac{a_2\beta_a + a_1\beta_t}{a_2 b_1 - a_1 b_2} < 0,1$, se observă din tabelul 2 că funcţia $\overline{p}_2(0, \theta)$ poate fi de asemenea neglijată faţă de $p_1(0, \theta)$ şi, prin urmare, ca şi în cazul precedent, variaţia presiunii de fund va fi liniară, avînd panta

$$i = \frac{\pi^2}{4}\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{ml^2\left[a_2\beta_a\sigma_k - a_1\beta_t(1 - \sigma_k)\right]}, \tag{57}$$

sau, dacă ţinem seama de (7), avem

$$i = \frac{\pi^2}{4}\frac{a_2\dfrac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a} - a_1\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}}{ml^2\left[a_2\beta_a\sigma_k - a_1\beta_t(1 - \sigma_k)\right]}. \tag{57'}$$

Tabela 2

$\frac{\theta}{l^2}$	$p_1(0,\ \theta)$	$\overline{p}_2(0,\ \theta)$
0.01	0,22	0,0241
0,1	0,36633	0,17085
0,2	0,50489	0,23783
0,3	0,6132	0,24947
0,4	0,69766	0,2338
0,8	0,8872	0,11975
1,5	0,98033	0,0241

În ceea ce privește determinarea timpului de stabilizare a presiunii, este ușor de remarcat din tabelele 1 și 2 că acesta poate fi considerat pentru $\frac{\theta}{l^2} \cong 2$. Prin urmare, vom obține

$$t = \frac{2\, ml^2 \left[\beta_t + (\beta_a - \beta_t)\, \sigma_k\right]}{\frac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a} + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}}, \tag{58}$$

pentru cazul cînd ținem seama numai de variația saturației cu timpul, și

$$t = \frac{2\, ml^2 \left[a_2\, \beta_a\, \sigma_k - a_1\, \beta_t (1 - \sigma_k)\right]}{a_2\, b_1 - a_1\, b_2}, \tag{59}$$

cînd considerăm numai variația saturației cu distanța.

În lucrarea [8] s-a arătat o metodă cu ajutorul căreia poate fi obținută curba de restabilire a presiunii de fund, necesară determinării permeabilității și presiunii dinamice de zăcămînt, aferentă zonei de drenaj, fără a mai fi necesară închiderea sondei.

Avînd în vedere rezultatele stabilite mai sus, metoda propusă în lucrarea [8] poate fi utilizată la determinarea saturației mediului poros fără a mai fi necesară închiderea sondei, considerînd cazul exploatării acesteia la un debit variabil în timp.

Este interesant de reținut că funcțiile $p_n(\xi, \theta)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, conțin factorul $\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^n$. Într-adevăr, din relațiile (22) și (32) se observă că funcțiile $p_1(\xi, \theta)$ și $\sigma_1(\xi, \theta)$ conțin factorul $\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)$, iar dacă ținem seama cînd saturația este considerată funcție numai de timp, avînd o valoare medie ponderată după distanță, vom avea din (16), pentru determinarea funcțiilor $p_n(\xi, \theta)$, $n = 2,3$, ecuația neomogenă

$$\frac{\partial p_n}{\partial \theta} = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 p_n}{\partial \xi^2} + \Phi_{n-1}(\xi, \theta) \tag{60}$$

$$n = 2, 3, \ldots$$

unde termenul liber $\Phi_{n-1}(\xi, \theta)$ se obține din relația

$$\Phi_{n-1}(\xi, \theta) = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{a_1 + a_2}{\left[(a_1 + a_2)\, \sigma_k + b_1 + b_2\right] l^2} \frac{\partial^2 p_{n-i}}{\partial \xi^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\beta_a - \beta_t}{(\beta_a - \beta_t)\, \sigma_k + \beta_t} \frac{\partial p_{n-i}}{\partial \theta} \right\} \sigma_i \,. \tag{61}$$

Pe de altă parte, tot din (16) rezultă pentru determinarea funcțiilor $\sigma_n(\xi, \theta)$ ecuația

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \theta} = \frac{\lambda}{l^2} \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{m(a_1 + a_2)} \frac{\partial^2 p_n}{\partial \xi^2} - \frac{a_2 \beta_a \sigma_k - a_1 \beta_t (1 - \sigma_k)}{a_1 + a_2} \frac{\partial p_n}{\partial \theta} - \\ - \frac{a_2 \beta_a + a_1 \beta_t}{a_1 + a_2} \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i \frac{\partial p_{n-i}}{\partial \theta}. \tag{62}$$

Deoarece funcțiile $p_n(\xi, \theta)$, pentru $n = 2, 3, \ldots$, se determină cu ajutorul formulei (38') în funcție de $\Phi_{n-1}(\xi, \theta)$, atunci, ținînd seama de relațiile (61), (62), seria (14), respectiv variația presiunii, poate fi scrisă sub forma

$$\frac{p(\xi, \theta) - p_0}{p_k - p_0} = \overline{p}_1(\xi, \theta) + \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) \overline{p}_2(\xi, \theta) + \cdots + \\ + \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^{n-1} \overline{p}_n(\xi, \theta) + \cdots \tag{63}$$

unde funcția $\overline{p}_1(\xi, \theta)$ este soluția ecuației (18), cu condițiile

$$\theta > 0, \ \overline{p}_1(1, \theta) = 0, \ \frac{\partial \overline{p}_1}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} = 1; \ \theta = 0, \ \overline{p}_1(\xi, 0) = 0,$$

iar funcțiile $\overline{p}_n(\xi, \theta)$, $n = 2, 3, \ldots$, sînt soluțiile ecuațiilor (60) cu condițiile (21).

Prin urmare, din (63) se observă că rapiditatea convergenței seriei (14) crește cu cît raportul $\frac{p_0}{p_k}$ este mai mare, respectiv cu cît presiunea diferențială a sondei este mai mică, deoarece funcțiile $p_n(\xi, \theta)$ admit margini superioare numerele c_n, unde $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$

Rezultatele obținute mai sus sînt valabile și în cazul cînd se consideră că saturația variază numai cu distanța.

ANEXA I

Vom pune acum în evidență, pe baza unor simple observații asupra ecuațiilor redate mai sus, cîteva rezultate foarte interesante în ceea ce privește comportarea hidrodinamică a curgerii amestecului de țiței și apă în regim tranzitoriu.

După cum s-a arătat mai sus, pentru $\alpha \Omega (p_k - p_0) < 1$, prima aproximație $p_1(\xi, \theta)$ permite să determinăm distribuția presiunii din relația

$$p(\xi, \theta) = p_0(\xi) + \varepsilon p_1(\xi, \theta), \tag{1}$$

care, introdusă în (18), conduce la ecuația liniară

$$\left(\frac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a} + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}\right) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = m[\beta_t + (\beta_a - \beta_t)\sigma_k] \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{2}$$

Pe de altă parte, din sistemul (2) rezultă, dacă considerăm $\rho_a \cong \rho_{a_0}$, $\rho_t \cong \rho_{t_0}$ și relațiile (5), următoarea ecuație :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{k_a(\sigma)}{\mu_a}+\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t}\right)\frac{\partial p}{\partial x}\right]=m\left[\beta_t+(\beta_a-\beta_t)\sigma\right]\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{3}$$

În felul acesta obținem pentru descrierea matematică a curgerii bifazice ecuația echivalentă

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k(\sigma)}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=m\beta\frac{\partial p}{\partial t} \tag{4}$$

sau, dacă $\sigma = \sigma_k = \text{const.}$,

$$\frac{k(\sigma_k)}{\mu}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=m\beta\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{5}$$

Este ușor de observat că în acest caz avem $v_{am} = v_a + v_t$, respectiv

$$\frac{k(\sigma)}{\mu}=\frac{k_a(\sigma)}{\mu_a}+\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t}, \tag{6}$$

care reprezintă coeficientul de mobilitate echivalent curgerii amestecului apă-țiței.

În ceea ce privește coeficientul de compresibilitate al amestecului, acesta se obține din relația

$$\beta=(\beta_a-\beta_t)\sigma+\beta_t=\beta_a\sigma+\beta_t(1-\sigma). \tag{7}$$

Comparînd ecuațiile (2) și (5), redate mai sus, observăm că acestea sînt identice dacă avem satisfăcută condiția $\sigma = \sigma_k$, de unde rezultă că pentru determinarea distribuției presiunilor, cînd $\Omega\,\alpha\,(p_k - p_0) < 1$, putem utiliza rezultatele obținute în cazul curgerii monofazice, introducînd coeficientul de mobilitate echivalent și compresibilitatea echivalentă care se obțin din relațiile (6) și (7).

ANEXA II

În cele ce urmează vom examina cazul cînd sonda exploatează cu un debit constant un zăcămînt de întindere infinită. În ceea ce privește condiția inițială, vom considera că la momentul inițial curgerea începe din stare de repaus. După cum se știe, pînă cînd frontul depresionar n-a atins limita zăcămîntului, evoluția în timp a presiunii de fund este identică cu cea corespunzătoare cazului finit. Din acest motiv, pentru determinarea permeabilității mediului poros după curba de restabilire a presiunii, putem considera zăcămîntul infinit.

Condițiile la limită și inițiale pe care trebuie să le satisfacă funcția $p(r, t)$ vor fi

$$t>0\begin{cases} p(\infty,\ t)=p_k \\ r\dfrac{\partial p}{\partial r}\Big|_{r=0}=-\dfrac{Q}{2\pi h\left(\dfrac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a}+\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}\right)} \end{cases} \text{ și } t=0,\ p(x,\ 0)=p_k. \tag{1}$$

În cazul curgerii plan radiale vom avea de rezolvat sistemul de ecuații

$$(a_1\sigma + b_1)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + a_1\frac{\partial\sigma}{\partial r}\frac{\partial p}{\partial r} = m\left(\beta_a\sigma\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right),$$

$$(a_2\sigma + b_2)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + a_2\frac{\partial\sigma}{\partial r}\frac{\partial p}{\partial r} = m\left[\beta_t(1-\sigma)\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right], \tag{2}$$

cu condițiile (1).

Soluția sistemului (2) se obține cu ajutorul seriilor (14), considerînd în locul funcției $p_0(x)$ valoarea presiunii la momentul inițial, adică $p_0(x) = p_k$. Dacă ne limităm numai la primii doi termeni din seriile (14), atunci rezultă

$$(a_1\sigma_k + b_1)\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) = m\left(\beta_a\sigma_k\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial\sigma_1}{\partial t}\right),$$

$$(a_2\sigma_k + b_2)\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) = m\left[(1-\sigma_k)\beta_t\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\partial\sigma_1}{\partial t}\right], \tag{3}$$

$$a_1\frac{\partial\sigma_1}{\partial r}\frac{\partial p_1}{\partial r} + a_1\sigma_1\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) + (a_1\sigma_k + b_1)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right) = m\left[\beta_a\sigma_k\frac{\partial p_2}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \beta_a\sigma_1\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial\sigma_2}{\partial t}\right], \tag{4}$$

$$a_2\frac{\partial\sigma_1}{\partial r}\frac{\partial p_1}{\partial r} + a_2\sigma_1\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) + (a_2\sigma_k + b_2)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right) =$$

$$= m\left[(1-\sigma_k)\beta_t\frac{\partial p_2}{\partial t} - \beta_t\sigma_1\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\partial\sigma_2}{\partial t}\right].$$

Din (3) obținem pentru determinarea funcției $p_1(r, t)$ ecuația

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_1}{\partial r} = \lambda\frac{\partial p_1}{\partial t}, \tag{5}$$

unde λ este dat de relația (23).

Pentru condițiile (1) rezultă

$$t > 0\begin{cases} p_1(\infty, t) = 0 \\ r\dfrac{\partial p_1}{\partial r}\Big|_{r=0} = -\dfrac{B}{\varepsilon} \end{cases} \tag{6}$$

$$t = 0 \qquad p_1(r, 0) = 0$$

$$t > 0\begin{cases} p_n(\infty, t) = 0 \\ r\dfrac{\partial p_n}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

și pentru $p_n(r, t)$ $n = 2,3, \ldots,$ $t = 0$ $\quad p_n(r, 0) = 0,$

unde constanta B are valoarea

$$B = \frac{Q}{2\pi h\left(\frac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a} + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}\right)}. \tag{8}$$

Soluția ecuației (5) cu condițiile la limită și inițiale (6) va fi [7]

$$p_1(r, t) = \frac{B}{\varepsilon} E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right), \tag{9}$$

unde $E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right)$ reprezintă funcția exponențială integrală

$$E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right) = -\int_{\frac{\lambda r^2}{4t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du. \tag{10}$$

În ceea ce privește prima aproximație a distribuției saturației, aceasta se determină din ecuația

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = A \frac{\partial p_1}{\partial t}, \tag{11}$$

respectiv

$$\sigma_1(r, t) = A\, p_1(r, t) + \varphi(r) = \frac{AB}{\varepsilon} E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right) + \varphi(r), \tag{12}$$

unde

$$A = \frac{\lambda}{m}(a_1 \sigma_k + b_1) - \beta_a \sigma_k = \frac{\lambda}{m}\frac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a} - \beta_a \sigma_k. \tag{13}$$

Deoarece la momentul inițial avem $\sigma(r, 0) = \sigma_k$, atunci $\sigma_1(r, 0) = 0$ și, prin urmare, $\varphi(r) = 0$.

Funcțiile $\sigma_1(r, t)$ și $p_1(r, t)$ fiind determinate din relațiile (9) și (12), putem trece la stabilirea funcției $p_2(r, t)$. În acest scop vom considera, ca și în cazul curgerii monodimensionale, că saturația nu variază cu distanța, respectiv vom presupune $\frac{\partial \sigma_1}{\partial r} = 0$ sau $\frac{\partial \sigma_1}{\partial r}\frac{\partial p_1}{\partial r} = 0$, și, în consecință, din (4) și (5) obținem

$$\lambda \frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial p_2}{\partial r}\right) + K \sigma_1(r, t) \frac{\partial p_1}{\partial t}, \tag{13'}$$

unde

$$K = \frac{(a_1 + a_2)\lambda - m(\beta_a - \beta_t)}{\frac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a} + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}}. \tag{14}$$

Pe de altă parte, din (9) și (12) obținem pentru termenul liber

$$K \sigma_1(r, t) \frac{\partial p_1}{\partial t} = KA\, p_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{KAB^2}{\varepsilon^2} \frac{e^{-\frac{\lambda r^2}{4t}}}{t} E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right) \tag{15}$$

şi, prin urmare, soluţia ecuaţiei (13′), pentru condiţiile la limită (7), va fi

$$p_2(r,\ t) = \frac{2KAB^2}{\varepsilon^2\,\lambda}\left[-\frac{1}{2}E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right)\left(1+e^{-\frac{\lambda r^2}{4t}}\right)+E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{2t}\right)\right], \tag{16}$$

iar variaţia presiunii devine

$$p\,(r,\ t) = p_k + BE_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right)+\frac{2KAB^2}{\lambda}\left[-\frac{1}{2}\left(1+e^{-\frac{\lambda r^2}{4t}}\right)E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right)+E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{2t}\right)\right]. \tag{17}$$

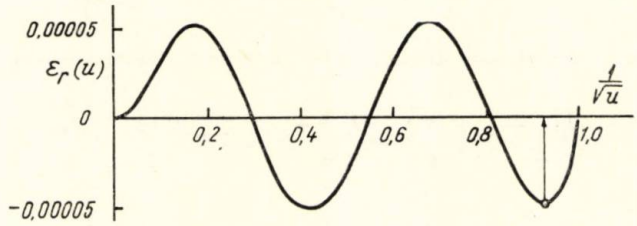


Fig. 1

Deoarece în aplicaţiile practice apare necesar să cunoaştem variaţia presiunii de fund pentru valorile de timp corespunzătoare cazului unde $\frac{\lambda r^2}{4t} < 1$, atunci putem utiliza expresia asimptotică a funcţiei $E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right)$, care este

$$-E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right) \cong \ln\frac{4t}{\lambda r^2} - 0{,}5772, \tag{18}$$

iar pentru $1 < u < \infty$ [10]

$$-E_i(-u) \cong \frac{e^{-u}}{u}\,\frac{0{,}25 + 2{,}335\,u + u^2}{1{,}68 + 3{,}33\,u + u^2}, \tag{19}$$

unde $u = \frac{\lambda r^2}{4t}$.

Curba erorii relative este arătată în figura 1.

Ţinînd seama de relaţia (18), vom obţine pentru variaţia presiunii de fund

$$p_k - p\,(t) = B\left(\ln\frac{4t}{\lambda r_0^2} - 0{,}5772\right) -$$

$$-\frac{KB^2A}{\lambda}\left[\left(1+e^{-\frac{\lambda r_0^2}{4t}}\right)\left(\ln\frac{4t}{\lambda r_0^2} - 0{,}5772\right) - 2\ln\frac{2t}{\lambda r_0^2} + 1{,}1544\right], \tag{20}$$

unde r_0 reprezintă raza sondei.

Dacă presupunem că pînă la momentul t_1 sonda a produs cu un debit constant, iar apoi este închisă instantaneu, atunci evoluţia presiunii la momentul $t = t_1 + \tau$ se obţine cu ajutorul principiului superpoziţiei [7].

În conformitate cu rezultatele stabilite în lucrarea [7], evoluția presiunii de fund după închiderea sondei va fi

$$p_k - p = B\left[E_i\left(-\frac{\lambda r_0^2}{4\tau}\right) - E_i\left(-\frac{\lambda r_0^2}{4(t_1+\tau)}\right)\right] + \\ -\frac{KB^2A}{\lambda}\left[(1+e^{-\frac{\lambda r_0^2}{4\tau}})E_i\left(-\frac{\lambda r_0^2}{4\tau}\right) - (1+e^{-\frac{\lambda r_0^2}{4(t_1+\tau)}})E_i\left(-\frac{\lambda r_0^2}{4(t_1+\tau)}\right)\right] + \\ -\frac{2KB^2A}{\lambda}\left[E_i\left(-\frac{\lambda r_0^2}{2(t_1+\tau)}\right) - E_i\left(-\frac{\lambda r_0^2}{2\tau}\right)\right], \tag{21}$$

care, pentru valori a lui τ suficient de mari, mai poate fi scrisă, ținînd seama de (18), sub forma

$$p_k - p = B\ln\frac{t_1+\tau}{\tau} + \frac{KB^2A}{\lambda}\ln\frac{t_1+\tau}{\tau} - 0{,}5772\,\frac{KAB^2}{\lambda}(e^{-\frac{\lambda r_0^2}{4\tau}} - e^{-\frac{\lambda r_0^2}{4(t_1+\tau)}}) - \\ -\frac{KB^2A}{\lambda}\left[e^{-\frac{\lambda r_0^2}{4(t_1+\tau)}}\ln\frac{4(t_1+\tau)}{\lambda r_0^2} - e^{-\frac{\lambda r_0^2}{4\tau}}\ln\frac{4\tau}{\lambda r_0^2}\right]. \tag{22}$$

Cu ajutorul relației de mai sus putem stabili pentru ce valori ale coeficientului $\frac{KB^2A}{\lambda}$ variația presiunii de fund se efectuează după relația cunoscută

$$p_k - p = B\ln\frac{t_1+\tau}{\tau}, \tag{23}$$

obținută în cazul curgerii monofazice [7].

ANEXA III

În cazul curgerii amestecului de țiței și gaze în regim tranzitoriu vom avea de rezolvat sistemul de ecuații [10]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\alpha\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma)}{\mu_g}\right)rp\frac{\partial p}{\partial r}\right] = m\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha p\sigma + p(1-\sigma)\right] \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t}\frac{\partial p}{\partial r}\right) = m\frac{\partial\sigma}{\partial t} \tag{24}$$

unde α este o mărime fără dimensiuni, care reprezintă coeficientul de solubilitate al gazelor în țiței.

La fel ca și în cazul curgerii amestecului de țiței și apă admitem ca într-un interval $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, convenabil ales, permeabilitățile efective variază liniar cu saturația. Astfel vom putea scrie următoarele relații.

$$\alpha\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma)}{\mu_g} = a_1\sigma + b_1\,;\quad \frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} = a_2\sigma + b_2 \tag{25}$$

și în consecință sistemul (24) devine

$$(a_1\sigma + b_1)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,p\,\frac{\partial p}{\partial r}\right) + a_1\frac{\partial\sigma}{\partial r}\,p\,\frac{\partial p}{\partial r} = m(\alpha-1)\frac{\partial(p\sigma)}{\partial t} + m\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$(a_2\sigma + b_2)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + a_2\frac{\partial\sigma}{\partial r}\frac{\partial p}{\partial r} = m\frac{\partial\sigma}{\partial t}. \tag{26}$$

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații neliniare (24), cu metoda perturbațiilor, va trebui să considerăm pentru funcțiile necunoscute $p(r, t)$ și $\sigma(r,t)$ următoarele dezvoltări în serii de puteri

$$\frac{p}{p_k} = 1 + \varepsilon p_1(r,\ t) + \varepsilon^2 p_2(r,\ t) + \ldots \tag{27}$$

și

$$\sigma = \sigma_k + \varepsilon\,\sigma_1(r,\ t) + \varepsilon^2\sigma_2(r,\ t) + \ldots \tag{28}$$

Introducînd relațiile (27) și (28) în (26) vom obține, după identificarea coeficienților puterilor parametrului ε, sistemul de ecuații liniare

$$p_k(a_2\sigma_k + b_2)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) = m\frac{\partial\sigma_1}{\partial t}$$

$$p_k(a_1\sigma_k + b_1)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) = m(\alpha-1)\frac{\partial\sigma_1}{\partial t} + m\,[1 + (\alpha-1)\sigma_k]\frac{\partial p_1}{\partial t} \tag{29}$$

$$\text{și } p_k(a_1\sigma_k + b_1)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right) + p_k(a_1\sigma_k + b_1)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rp_1\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) +$$

$$+ p_k a_1\sigma_1\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) + p_k a_1\frac{\partial\sigma_1}{\partial r}\frac{\partial p_1}{\partial r} = m(\alpha-1)p_1\frac{\partial\sigma_1}{\partial t} + m(\alpha-1)\frac{\partial\sigma_2}{\partial t} + \tag{30}$$

$$+ m(\alpha-1)\sigma_1\frac{\partial p_1}{\partial t} + m\,[1 + (\alpha-1)\sigma_k]\frac{\partial p_2}{\partial t}$$

$$p_k(a_2\sigma_k + b_2)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right) + p_k a_2\sigma_1\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) + a_2 p_k\frac{\partial\sigma_1}{\partial r}\frac{\partial p_1}{\partial r} = m\frac{\partial\sigma_2}{\partial t}.$$

Din (29) obținem pentru determinarea primei aproximații a distribuției presiunii ecuația

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) = \lambda\frac{\partial p_1}{\partial t} \tag{31}$$

unde

$$\lambda = \frac{m\,[1 + (\alpha-1)\sigma_k]}{p_k\left[\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}\right]}. \tag{31'}$$

Pe de altă parte este uşor de observat că din (29), ţinînd seama de (31), rezultă pentru determinarea funcţiei $\sigma_1(r,t)$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = \Omega \frac{\partial p_1}{\partial t}, \tag{32}$$

respectiv

$$\sigma_1(r,\ t) = \Omega\, p_1(r,\ t) + \varphi(r), \tag{33}$$

unde

$$\Omega = (a_2 \sigma_k + b_2) \frac{p_k \lambda}{m}. \tag{34}$$

Deoarece pentru condiţia iniţială avem $\sigma(r, 0) = \sigma_k$, respectiv $\sigma_1(r,\ 0) = 0$, atunci relaţia (33) devine

$$\sigma_1(r,\ t) = \Omega\, [p_1(r,\ t) - p_1(r,\ o)]. \tag{35}$$

Din (30) rezultă, ţinînd seama de relaţiile (32), (31) şi (33), pentru determinarea funcţiei $p_2(r,\ t)$, ecuaţia neomogenă

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_2}{\partial r} \right) = \lambda \frac{\partial p_2}{\partial t} + \Phi(r,\ t) \tag{36}$$

unde termenul liber $\Phi(r,\ t)$ se obţine din relaţia

$$\Phi(r,\ t) = A \frac{\partial p_1^2}{\partial t} - B\, p_1(r, 0) \frac{\partial p_1}{\partial t} - C \left(\frac{\partial p_1}{\partial r} \right)^2 + D \frac{\partial p_1(r,\ 0)}{\partial r} \frac{\partial p_1}{\partial r} \tag{37}$$

iar constantele A, B, C, şi D,

$$A = \frac{m(\alpha - 1)\,\Omega - (a_1 \sigma_k + b_1) \dfrac{\lambda p_k}{2} - [a_1 - (\alpha - 1)\, a_2] \dfrac{p_k \lambda \Omega}{2}}{p_k \left[\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g} \right]}$$

$$B = \Omega \frac{m(\alpha - 1) + \lambda p_k\, [a_1 - (\alpha - 1)\, a_2]}{p_k \left[\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g} \right]}; \tag{38}$$

$$C = \frac{a_1 \sigma_k + b_1 + [a_1 - a_2(\alpha - 1)]\,\Omega}{\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}} \text{ şi } D = \frac{\Omega\, [a_1 - a_2(\alpha - 1)]}{\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}}.$$

După cum s-a arătat în anexa II penftru condiţia iniţială $p_1(r,\ 0)$ avem $p_1(r, 0) = \dfrac{\partial p_1(r, 0)}{\partial r} = 0$. În cazul curgerii amestecului de ţiţei şi gaze, gradientul de presiune $\dfrac{\partial p}{\partial r}$, respectiv $\dfrac{\partial p_1}{\partial r}$, are valori reduse, astfel încît termenul $\left(\dfrac{\partial p_1}{\partial r} \right)^2$ poate fi în general

neglijat [11]. Pe de altă parte, este uşor de remarcat că neglijarea termenului $\left(\frac{\partial p_1}{\partial r}\right)^2$ este echivalentă cu neglijarea termenului $\frac{\partial \sigma_1}{\partial r}\frac{\partial p_1}{\partial r}$, întrucît pe baza relaţiei (35) avem

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial r}\frac{\partial p_1}{\partial r} = \Omega\left(\frac{\partial p_1}{\partial r}\right)^2.$$

Faţă de cele arătate mai sus, rezultă că ecuaţiile (31) şi (36) devin identice cu ecuaţiile (5) şi (13′), obţinute în cazul curgerii amestecului de ţiţei şi apă, cu deosebirea coeficienţilor care sînt diferiţi. În consecinţă, rezultatele stabilite în anexa II pot fi aplicate şi pentru amestecul de ţiţei şi gaze, ţinînd seama de faptul că coeficienţii care apar se determină din relaţiile (31′), (34) şi (38), iar distribuţia presiunii din (27).

Predat la redacţie la 16 octombrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. T. Oroveanu, *Curgerea fluidelor prin medii poroase neomogene.* Bucureşti, Edit. Acad. R.P.R., 1963.
2. M. Dupuy, J. Pottier, *Application des méthodes statistiques à l'étude détaillée des réservoirs.* Revue de l'Institut Français du Pétrole, Hors-Série, 1963.
3. B. Le Fur, Sourieau, *Étude de l'écoulement diphasique dans une couche inclinée et dans un modèle rectangulaire de milieu póreux.* Revue de l'Institut Français du Pétrole, Hors-Série, 1963.
4. P. Sourieau, *Étude du déplacement des fluides dans les milieux poreux à l'aide de modèles physiques.* La Houille Blanche, *12* (1963).
5. B. Le Fur, *Influence de la capilarité et de la gravité sur le déplacement non miscible unidimensionnel dans un milieu poreux.* Journal de Mécanique, Juin (1962).
6. V. Kniazeff, S. Naville, *Écoulement diphasique dans les gisements d'hydrocarbures léjers.* Revue de l'Institut Français du Pétrole, *5* (1962).
7. A. Houpeurt, *Éléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux.* Paris, 1958.
8. H. Pascal, F. Munteanu, *L'écoulement transitoire des gaz à travers un milieu poreux en régime turbulent.* Rev. roum. sci. techn. — méc. appl., *5* (1965).
9. Hestings, *Approximations for digital computers.* Princeton University Press, 1955.
10. Г. Б. Пахачев, *Подземная гидравлика*, Москва, 1961, p. 362.
11. J. Martin, *Simplified equation of flow in gas reservoirs and the theoretical foundation drive multiphase pressure buildup analyses.* A.I.M.E., 1959.

CONTRIBUȚII TEORETICE ȘI EXPERIMENTALE LA DIMENSIONAREA HIDRAULICĂ A GOLIRILOR VENTURI PENTRU BARAJE

de V. GHEORGHIU și T. NICOARĂ

532

Studiul hidraulic al golirilor Venturi este posibil în domeniul similitudinii Froude. În acest caz, ecuația criterială permite, în cadrul condițiilor restrictive ale fenomenului, cercetarea sistematică a problemei.
Cercetările de laborator, efectuate pe un model plan în montaj multiplu, confirmă valabilitatea ecuației criteriale și, implicit, a ipotezelor emise. Se verifică previziunile teoretice cu privire la localizarea cavitației în zona de la intrare, cu o dispersiune redusă a rezultatelor. În problema desprinderii se confirmă condiția unghiului maxim de divergență (8°) și a limitării raportului secțiunilor difuzorului (4), pentru evitarea vîrtejurilor marginale.
Sistemul format de ecuația criterială și relațiile restrictive poate constitui modelul matematic în similitudinea Froude a golirilor Venturi. Demonstrarea posibilității și a tehnicii experimentale a modelării hidraulice în acest domeniu formează contribuția finală a lucrării.

Conductele scurte de tipul Venturi pot servi ca dispozitive de golire pentru baraje. Dimensionarea hidraulică a acestor goliri nu este încă sistematizată, deși venturimetrul e bine cunoscut ca instrument pentru măsurarea debitelor.

În această lucrare se prezintă un studiu teoretic și rezultatele cercetărilor efectuate în Laboratorul de hidraulică și construcții hidrotehnice al Institutului politehnic Timișoara, cu privire la valabilitatea ipotezelor și a relațiilor stabilite în domeniul golirilor Venturi.

A. CONTRIBUȚII TEORETICE

1. ECUAȚIA CRITERIALĂ

Conducta Venturi e formată dintr-o intrare profilată care se atașează la un difuzor tronconic de mică divergență (fig. 2). Valabilitatea practică a ecuației Bernoulli

$$H = \frac{v_2^2}{2g} + \zeta \frac{v_1^2}{2g} + h_r, \qquad (1)$$

aplicată în regim permanent întregului sistem, este funcție de explicitarea termenului h_r. În acest scop s-au emis următoarele ipoteze :

— similitudinea Froude în domeniul numerelor Reynolds mari ($Re > 10^5$), cu exprimarea coeficientului Darcy în forma

$$\lambda = \lambda(K) = 0{,}11\, K^{0{,}25} = CD^{-0{,}25}\,; \quad (2)$$

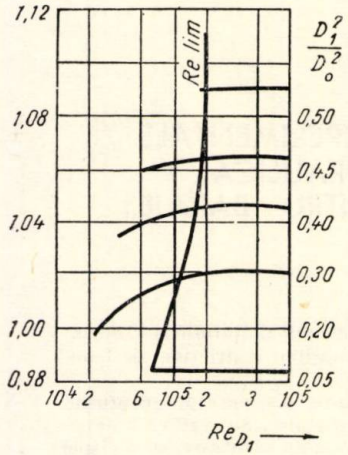


Fig. 1. — Coeficientul de debit al venturimetrelor normale.

— asimilarea curgerii în tuburile cilindrice cu mișcarea gradual variată din difuzoarele de mică divergență, cu obținerea termenului h_r din relația

$$h_r = \int_1^2 \lambda \frac{v^2}{2g} \frac{dl}{D} = \frac{\lambda_1}{4{,}25\,\alpha}\left[1 - \Delta^{4{,}25}\right]\frac{v_1^2}{2g} \quad (3)$$

în cazul secțiunii circulare.

În consecință, ecuația Bernoulli se poate scrie în forma adimensională

$$m_1^{-2} = \zeta + \Delta^4 + \frac{\lambda_1}{4{,}25\,\alpha}\left[1 - \Delta^{4{,}25}\right]. \quad (4)$$

Această ecuație criterială guvernează evoluția fenomenului pentru întreg grupul de similitudine, format din conducte Venturi de o geometrie similară, și exprimă coeficientul de debit m_1, egal cu numărul Froude al grupului în funcție de criteriile determinante

$$\zeta\,;\ \Delta = D_1/D_2\,;\ \alpha = (D_2 - D_1)/L \quad \text{și} \quad \lambda_1 = CD_1^{-0{,}25}.$$

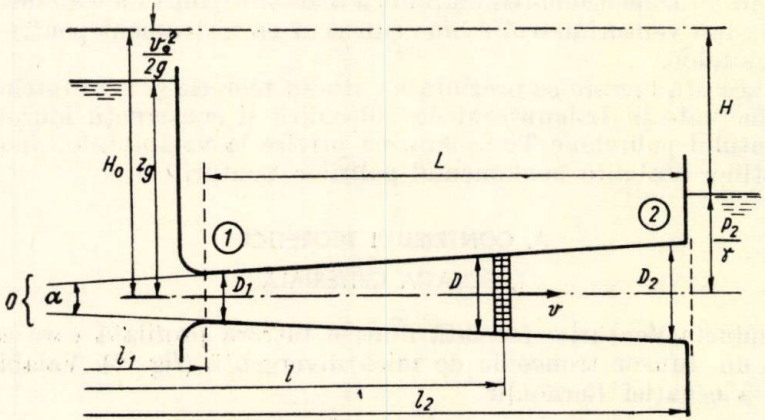


Fig. 2. — Schema de calcul a conductei Venturi.

În graficul din figura 3 s-a trecut la reprezentarea sinoptică a problemei pentru datele numerice : $\zeta = 0{,}07$; $\lambda_1 = 0{,}016$ și $\alpha = 1°, 2°, \ldots, 6°$.

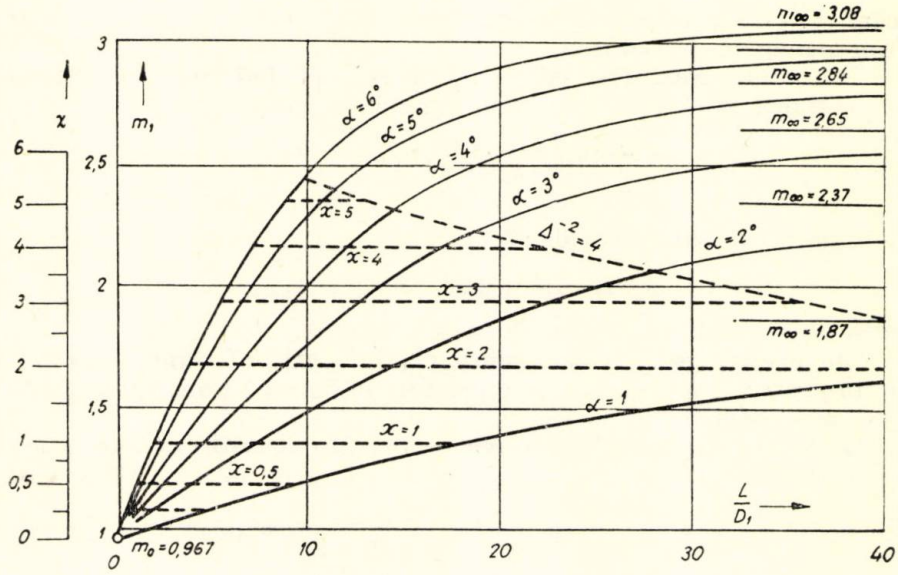


Fig. 3. — Diagrama criterială a conductelor Venturi.

2. PROBLEMA DESPRINDERII

Remarcabile sînt în această privinţă cercetările lui Polzin [2], care stabileşte şi condiţia limitării raportului $s = S_1/S_2$ al secţiunilor difuzorului pentru evitarea desprinderii. Pe baza unor relaţii geometrice simple, ecuaţia (4) trece în forma

$$m_1^{-2} = \zeta + s^{-2} - 0{,}235\,\frac{1 - s^{-2{,}13}}{1 - s^{0{,}5}}\,\lambda_1 \frac{L}{D_1}, \tag{5}$$

care, pentru $s = s_{\max} = 4$ şi datele numerice anterioare, devine

$$m_1^{-2} = 0{,}1325 + 0{,}00357\,\frac{L}{D_1}. \tag{6}$$

În figura 3 s-a trasat curba $s = \Delta^{-2} = 4$, care închide domeniul triunghiular curbiliniu de utilizare a conductelor circulare Venturi.

3. CAVITAŢIA

Fenomenul de cavitaţie apare în funcţie de condiţiile de la intrare şi admite criteriul

$$\sigma = (p_1 - p_v)\Big/\frac{\rho}{2}\,v_1^2, \text{ cu condiţia de evitare } \sigma \geqslant \sigma_{cr}, \tag{7}$$

în care σ_{cr} este valoarea coeficientului σ, luat pentru secţiunea minimă în faza incipientă a cavitaţiei.

În ipoteza conductei cu ieşire liberă, aplicînd teorema Bernoulli între secţiunea amonte şi secţiunea minimă, se poate scrie

$$\frac{p_a - p_1}{\gamma} = h_{as} = (1 + \zeta)\frac{v_1^2}{2g} - H$$

sau, în mărimi adimensionale :

$$h_{as}/H = \chi = (1 + \zeta)\, m_1^2 - 1, \tag{8}$$

ecuaţia criterială a vidului în secţiunea minimă.

Din această ecuaţie se deduce că, la acelaşi ζ, liniile $\chi =$ const. se obţin pentru $m_1 =$ const. şi se reprezintă în figura 2 prin drepte paralele cu axa absciselor.

Ecuaţia (8), prin introducerea coeficientului critic de cavitaţie, se mai poate scrie

$$\chi = (1 + \zeta)\, m_1^2 - 1 \leqslant \frac{p_a - p_v}{\gamma H} - m_1^2\, \sigma_{cr},$$

de unde rezultă relaţia de condiţie

$$m_1 = \sqrt{\frac{1 + \chi}{1 + \zeta}} \leqslant \sqrt{\frac{1 + \chi'}{1 + \zeta + \sigma_{cr}}} = m_{1\,cr} \tag{9}$$

pentru evitarea cavitaţiei.

Relaţia (9), considerată la limita evitării cavitaţiei, devine

$$\chi' = \frac{p_a - p_v}{\gamma H} = \left(1 + \frac{\sigma_{cr}}{1 + \zeta}\right)\chi + \frac{\sigma_{cr}}{1 + \zeta}, \tag{10}$$

cu următoarele limite ale intervalului de variaţie pentru H în regim necavitaţional :

$$H_{\max} = \frac{1 + \zeta}{\sigma_{cr}} \cdot \frac{p_a - p_v}{\gamma} \quad \text{la } \chi = 0 \tag{11}$$

şi

$$H_{\min} = \frac{1}{\chi'_{\max}} \cdot \frac{p_a - p_v}{\gamma} \tag{12}$$

pentru $\chi = \chi_{\max}$ citit la vîrful superior al domeniului triunghiular din figura 3. De exemplu pentru $\zeta = 0{,}07$; $\sigma_{cr} = 0{,}25$; $\chi_{\max} = 5$ şi $(p_a - p_v)/\gamma = 10$ m H_2O, rezultă valorile

$$H_{\max} = 42{,}8 \text{ m şi } H_{\min} = 1{,}56 \text{ m}.$$

Verificarea relaţiei (9) se poate face şi grafic ; în acest scop s-au construit în figura 4 curbele $m_1(\sigma, \chi)$ pentru valorile parametrice $\sigma = 0$, 0,3, ... , 1,0 ale coeficientului de cavitaţie.

Se observă, prin utilizarea conjugată a diagramelor din figura 3 și 4, legarea aspectului cavitațional de la intrare de cel energetic în funcționarea conductelor Venturi.

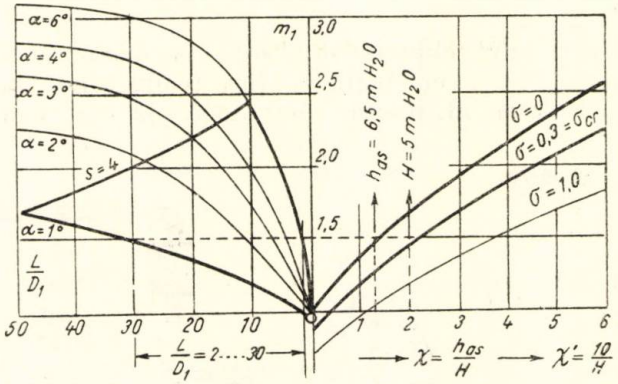


Fig. 4. — Aplicarea grafică a relației de condiție pentru evitarea cavitației.

4. COMPARAȚIE ÎNTRE GOLIRILE VENTURI ȘI CONDUCTA SIMPLĂ

Considerînd secțiunea S_1 a golirii simple și la același H, raportul debitelor are expresia

$$q = Q/Q_0 = m_1/m_{10}, \tag{13}$$

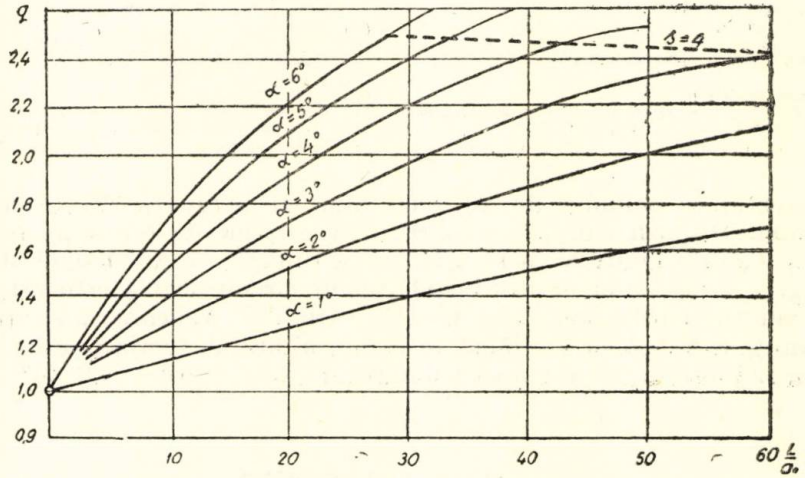


Fig. 5. — Creșterea raportului debitelor de la conducta simplă la conducta Venturi în mișcarea plană.

cu reprezentarea grafică din figura 5 în cazul modelului plan experimentat.

B. CERCETĂRI DE LABORATOR

1. STAȚIA DE ÎNCERCĂRI

Schema standului experimental este prezentat în figura 6. S-a încercat un model plan de conductă Venturi, realizat în laborator după un profil de unghi α variabil, limitat între două plăci paralele de plexiglas

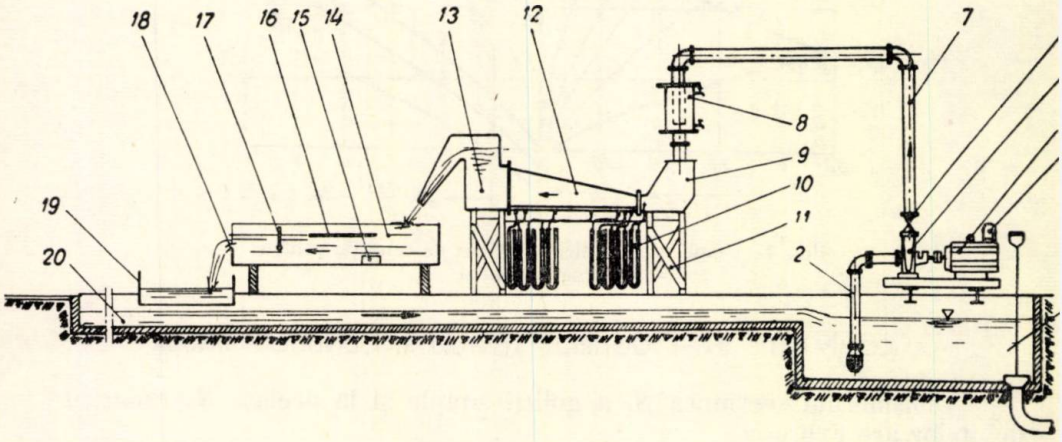


Fig. 6. — Schema instalației experimentale :

1 — bazin de aspirație ;
2 — conductă de aspirație ;
3 — pompă centrifugă ;
4 — motor electric ;
5 — dispozitiv pentru reglarea turației ;
6 — vană ;
7 — conductă de refulare ;
8 — dispozitiv pentru amortizarea oscilațiilor de la pompă ;
9 — bazin de intrare în tubul divergent ;
10 — panou cu piezometre ;
11 — cadre de susținere ;
12 — tub divergent de experimentat ;
13 — bazin de ieșire ;
14 — bazin de liniștire pentru deversorul de măsură ;
15 — prag pentru disiparea energiei apei ;
16 — grătar pentru liniștirea curentului ;
17 — termometru ;
18 — deversor de măsură (tip Rehbock) ;
19 — dispozitiv pentru dirijarea apei în canalul de retur ;
20 — canalul de retur.

avînd secțiunea minimă de 40×60 mm^2 și lungimea difuzorului de 1 900 mm. Dispozitivul, prin repartizarea prizelor de presiune, funcționează în montaj multiplu, echivalent cu 4 tuburi la o deschidere unghiulară (fig. 7 — 11). Alimentarea instalației în circuit închis este asigurată de un agregat electropompă cu turație variabilă. Aplicarea aparaturii și prelucrarea rezultatelor s-a făcut în conformitate cu teoria erorilor experimentale. Încercările au acoperit domeniul $Re = 2 \cdot 10^5 - 5{,}8 \cdot 10^5$.

2. REZULTATE EXPERIMENTALE

Cercetările de laborator au fost axate pe verificarea ecuației criteriale a modelului plan, precum și pe elucidarea condițiilor restrictive privind cavitația și desprinderile.

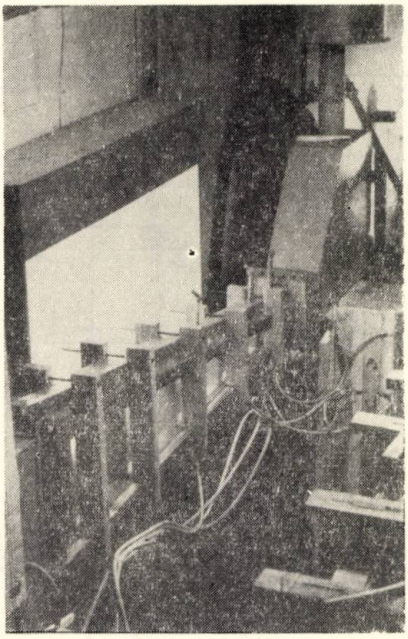


Fig. 7. — Instalaţia experimentală.

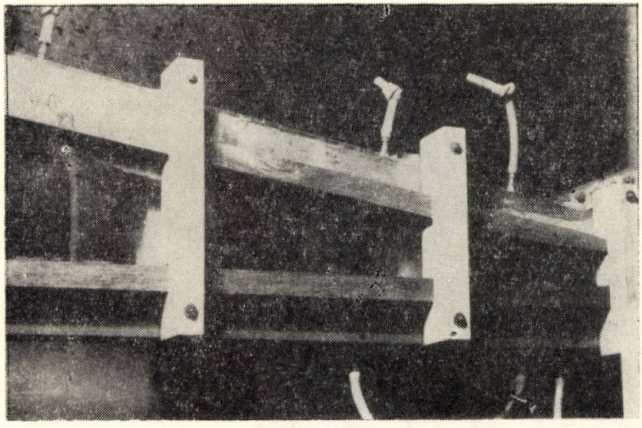


Fig. 8. — Detaliu de realizare a tubului divergent.

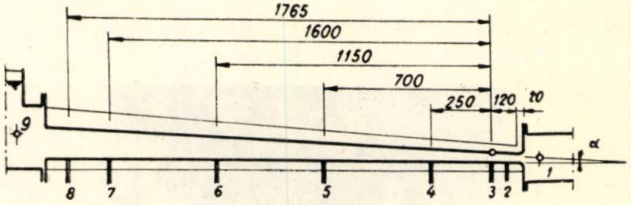


Fig. 9. — Repartizarea prizelor pentru piezometre
1–9 – prize pentru piezometre (cote în mm).

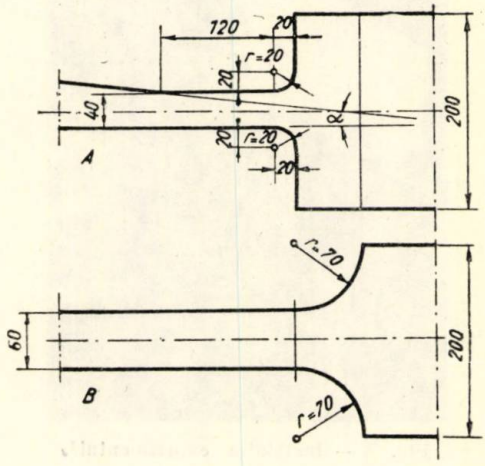


Fig. 10. — Profilul intrării :
A – secțiune verticală (cote în mm); *B* – secțiune orizontală.

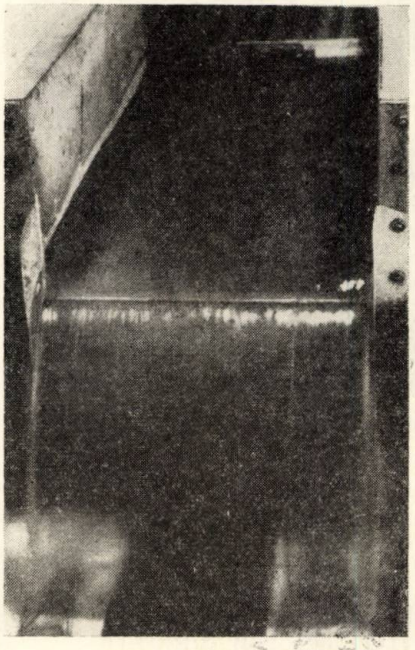


Fig. 11. — Deversor de măsură tip Rehbock.

Ecuația criterială a modelului plan ($S_1 = S_{min} = a_1 b$ și $\varkappa = a_1/a_2$)

$$m_1^{-2} = \zeta + \varkappa^2 + 0{,}22 \frac{\lambda_1}{\alpha} \left(1 + \frac{a_1}{b}\right)^2 [1 - \Delta^{2{,}25}] \tag{14}$$

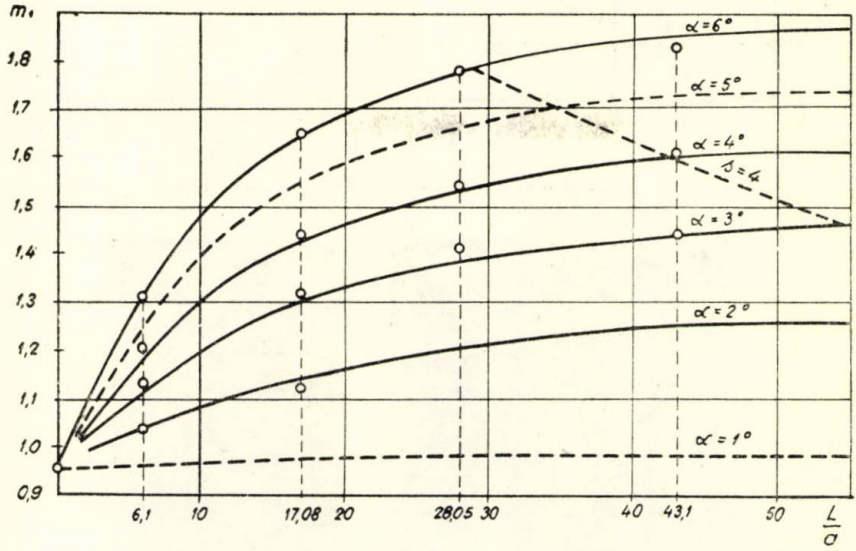


Fig. 12. — Diagrama criterială a conductei Venturi în mișcare plană.

trece în forma

$$A_i = \zeta + B_i \lambda_1 \tag{15}$$
$$i = 1, 2, \ldots, 14$$

pentru aplicarea metodei Gauss. S-au considerat 14 ecuații, prin gruparea celor 96 de valori m_1 pe medii locale, corespunzătoare celor 14 cazuri distincte, realizate prin montajul multiplu al prizelor de presiune. Rezultatele obținute:

$$\lambda_1 = 0{,}0356 \pm 0{,}0027 \text{ și } \zeta = 0{,}0976 \pm 0{,}015 \tag{16}$$

și graficul m_1 (α, L/a_1), construit în figura 12, confirmă invarianța parametrilor λ_1 și ζ în condițiile ecuației (14). În figura 13 se poate urmări evoluția curbei criteriale pentru

$$\alpha = 6°;\ \zeta = 0{,}1 \text{ și } \lambda_1 = 0{,}035,$$

cu reprezentarea tuturor valorilor m_1, la secțiunile de ieșire ale celor 4 tuburi distincte din punct de vedere experimental. Dacă se aplică relația (2) la calculul coeficientului C în intervalul de dispersiune al lui λ_1, se obține

λ_1	0,0329	0,0356	0,0383
C	0,0154	0,0167	0,0179

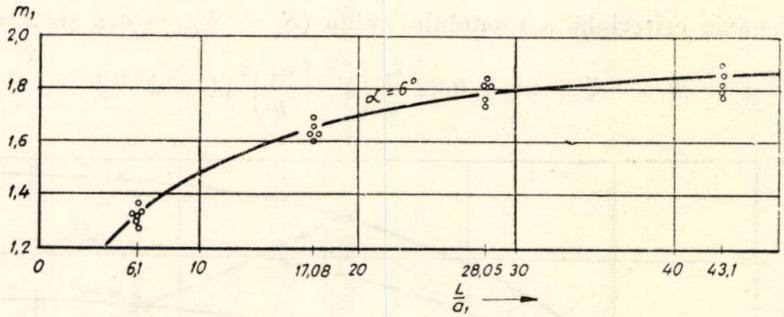


Fig. 13. — Diagrama coeficientului de debit pentru $\alpha = 6°$.

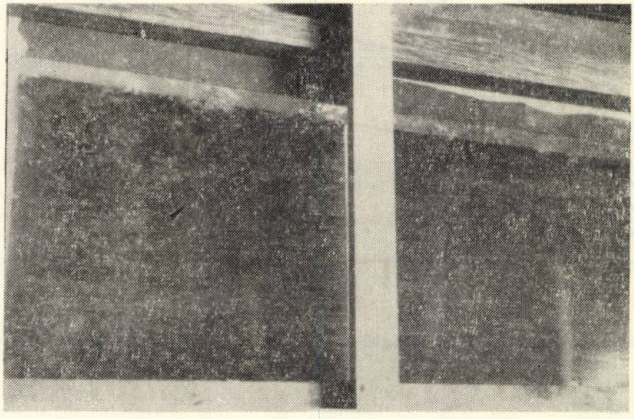


Fig. 14. — Formarea zonei de vîrtejuri la unghiul de divergenţă $\alpha = 8°$.

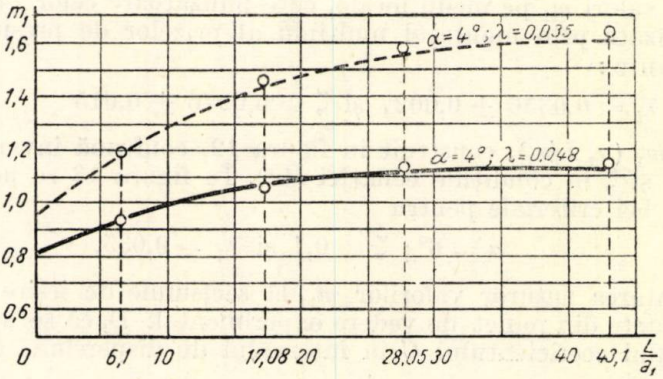


Fig. 15. — Efectul rugozităţii la $\alpha = 4°$.
——— $m_1(L/a_1)$ pentru pereţi rugoşi (nisipos —0,9 mm)
– – – $m_1(L/a_1)$,, ,, netezi (vopsea ulei)

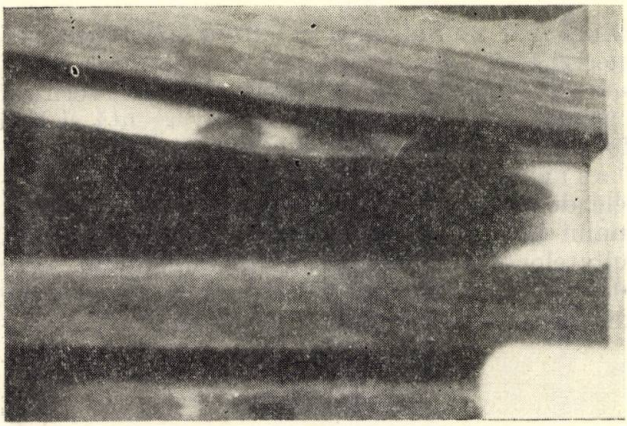


Fig. 16. — Faza întîi de cavitaţie.

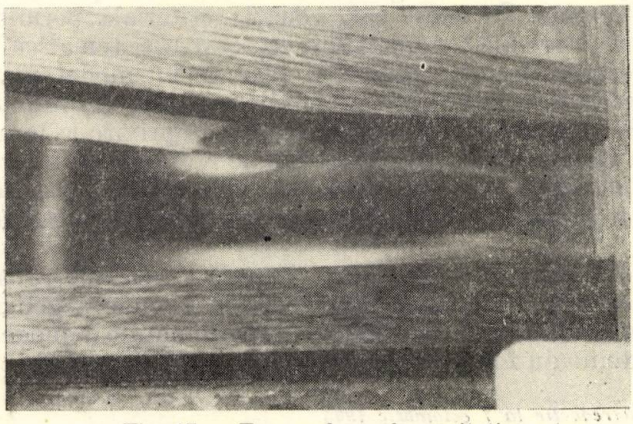


Fig. 17. — Faza a doua de cavitaţie.

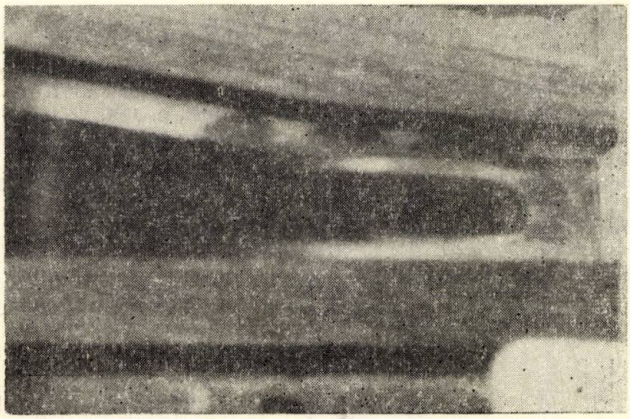


Fig. 18. — Faza a treia de cavitaţie.

În literatură [5] se indică $C = 0{,}0156$ m$^{0{,}25}$ pentru conducte cu pereți foarte netezi (fig. 15).

În cercetarea fenomenului desprinderii s-au verificat concluziile cunoscute cu privire la unghiul maxim de divergență și limitarea raportului secțiunilor difuzorului. În cazul difuzorului plan, $\alpha_{max} = 6°$ și $s \cong 4$. Pentru $\alpha = 8°$ au apărut desprinderi, ca în figura 14.

Încercările de cavitație confirmă prevederile teoretice, prin localizarea fenomenului în zona de la intrare. Este remarcabilă dispersiunea redusă a rezultatelor la diferite valori ale unghiului de divergență: $\sigma_{cr} = 0{,}252$; $0{,}287$; $0{,}257$ pentru valori $\alpha = 4°$; $6°$; $8°$. Fenomenul se dezvoltă în trei faze, ca în figurile 16, 17 și 18.

C. CONCLUZII

1. Studiul hidraulic al golirilor Venturi este posibil în domeniul similitudinii Froude. În acest caz, ecuația criterială permite, în cadrul condițiilor restrictive ale fenomenului, cercetarea sistematică a problemei.

2. Cercetările de laborator, efectuate pe un model plan în montaj multiplu, confirmă valabilitatea ecuației criteriale și, implicit, a ipotezelor emise. Se verifică previziunile teoretice cu privire la localizarea cavitației în zona de la intrare, cu o dispersiune redusă a rezultatelor. În problema desprinderii se confirmă condiția unghiului maxim de divergență și a limitării raportului secțiunilor difuzorului pentru evitarea vîrtejurilor marginale.

3. Sistemul format de ecuația criterială și relațiile restrictive poate constitui modelul matematic în similitudinea Froude a golirilor Venturi. Demonstrarea posibilității și a tehnicii experimentale a modelării hidraulice în acest domeniu formează contribuția finală a lucrării.

Primită la redacție la 7 octombrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. P. G. Chiselev, *Îndreptar pentru calcule hidraulice*. Ed. originală, 1961.
2. B. Eck, *Technische Strömungslehre*. Springer-Verlag, 1958, p. 188.
3. V. Gheorghiu, *Studiul hidraulic al golurilor Venturi pentru baraje*. Buletin științific și tehnic al IPT, *8*, 22 (1963).
4. I. V. P. Preobrakenski, *Măsuri și aparate de măsurat termotehnice*. București, Edit. tehnică, 1960, p. 306.
5. H. Richter, *Rohrhydraulik*. Springer-Verlag, 1958, p. 263.
6. T. H. Redding, *Flow Characteristics of Metering Nozzles*. The Engineer-Technical contributors section, July (1963).

VIZUALIZAREA JETURILOR FLUIDE LATERALE

de N. CĂMĂRĂȘESCU

532

În lucrare este descrisă metoda prin care s-a obținut vizualizarea unui jet fluid lateral , lansat în direcția anvergurii din capătul unei aripi de mică alungire, montată într-o suflerie subsonică. Principiul constă în difuzia luminii provocate de particule fine de apă introduse în prealabil în jet sub formă de vapori. Vizualizarea fenomenului de formare și torsionare a pînzei de jet a fost înregistrată pe peliculă cinematografică, dînd astfel posibilitatea urmăririi modificării pînzei de jet la variațiile incidenței aripii sau la variația coeficientului de jet. În lucrare sînt prezentate cîteva fotografii extrase din filmul realizat astfel.

În lucrarea [1], E. Carafoli studiază mărirea sustentației aripilor de mică alungire prin prelungirea acestora cu un jet fluid lateral în direcția anvergurii, mărind astfel alungirea aripii prin aripi fluide laterale.

Fundamentarea teoretică a problemei, precum și rezultatele verificărilor experimentale au fost prezentate la Congresul internațional de aeronautică de la Stockholm din 1962 [2]. Cu același prilej a fost prezentat și un film în care s-a vizualizat fenomenul formării pînzei de jet lateral, al torsionării acesteia și al aruncării ei spre aval, paralel cu direcția generală a curentului.

În lucrarea de față sînt prezentate cîteva vizualizări ale pînzei de jet creată la capătul unei aripi montate în sufleria Institutului de mecanica fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România, vizualizări extrase din filmul sus-amintit și care indică o concordanță bună între schema teoretică din lucrările [1] și [2] și fenomenul real. Să considerăm o aripă dreptunghiulară de anvergură b și coardă c (fig. 1), de la marginea căreia este lansat un jet sub forma unei pînze subțiri de aceeași profunzime cu aripa și sub aceeași incidență (în figură este desenată numai jumătatea din dreapta a aripii). Planul tangent la pînza de jet în dreptul fantei de ieșire poate fi același cu al aripii sau poate forma cu acesta din urmă un diedru oarecare. În figură, jetul este lansat în același plan cu aripa.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 21 Nr. 2 P. 521–529 BUCUREȘTI 1966

Concepţia prezentată în [1] asupra pînzei de jet este bazată pe cîteva consideraţii, rezultate din aplicarea teoremei impulsului asupra unei fişii oarecare AB din pînza de curent (fig. 1). Se ajunge la schematizarea următoare.

Placa fluidă care, în lipsa curentului general de viteza asimptotică V_∞, ar prelungi pur şi simplu aripa în planul ei sub acţiunea curentului

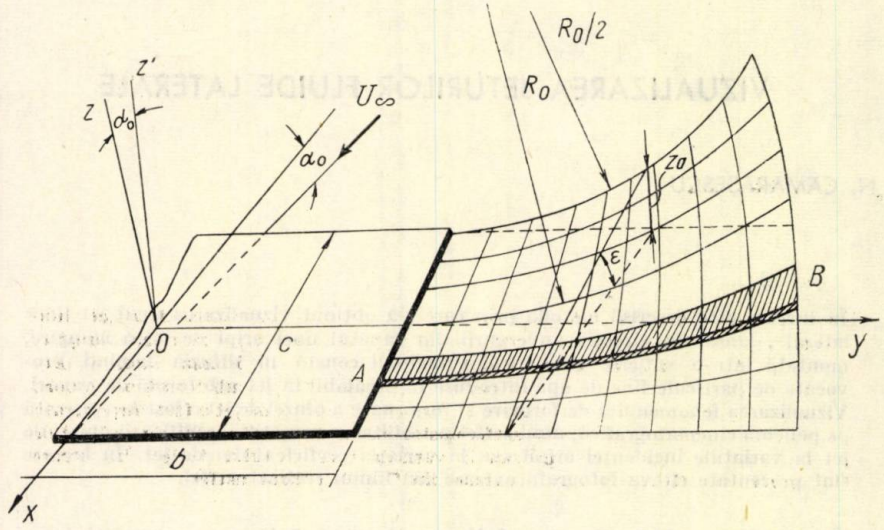


Fig. 1

general se torsionează, bordul de fugă rămînînd rectiliniu, iar celelalte linii de curent luînd forme aproximativ circulare după ecuaţia

$$(Z - R)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = R^2. \tag{1}$$

Fiecare secţiune obţinută prin intersecţia pînzei cu un plan vertical paralel cu xOz şi situat la distanţa y de acesta va avea o incidenţă suplimentară ε, dată de formula

$$\varepsilon = \frac{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{cR_0}, \tag{2}$$

unde R_0 este raza liniei de curent, care porneşte din mijlocul corzii aripii ($x = 0$) (fig. 1). Pe figură, cu z_a s-a notat cota bordului de atac.

Această incidenţă creşte, aşadar, cu anvergura, iar pînza fluidă se curbează cu raza medie R_0.

Mai departe fenomenul este foarte complex. Într-adevăr, aripa fluidă capătă o torsiune din ce în ce mai mare, în acelaşi timp căpătînd şi o arcuire, pînă cînd jetul este răsucit şi azvîrlit spre aval în direcţia

generală a curentului. Acest fenomen este arătat schematic în figura 2. Evident, din cauza frecărilor, pînza de jet se amestecă cu aerul din curentul exterior și se îngroașă, pentru ca pînă la sfîrșit să dispară în curentul general.

Schema fizică preconizată în [1] scoate în evidență aspectele principale ale fenomenului, și anume :

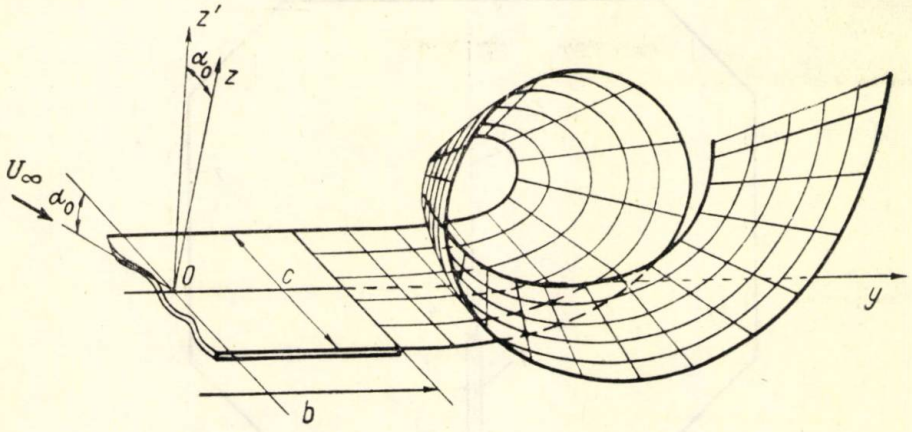


Fig. 2

a) mărirea circulației în jurul aripii reale prin creșterea aparentă a alungirii ;

b) creșterea suplimentară a circulației datorită torsionării aripii fluide ;

c) întîrzierea desprinderilor de pe extradosul aripii reale datorită sucțiunii stratului-limită provocată de pînza de jet.

Pe baza schemei fizice de mai sus, E. Carafoli stabilește o teorie simplă bazată pe determinarea unei aripi echivalente, ale cărei caracteristici geometrice se determină în funcție de caracteristicile aripii reale și ale formei și intensității pînzei de jet. Metoda de tratare conduce la rezultate în foarte bună concordanță cu experiențele [1] și [2].

În vederea confruntării schemei fizice concepute în [1] cu realitatea s-a realizat o instalație experimentală specială în cadrul sufleriei Institutului de mecanica fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România, cu ajutorul căreia s-a putut crea o pînză de jet la capătul unei aripi de alungire 2. Macheta aripii a fost montată în poziție verticală (fig. 3), avînd posibilitatea schimbării continue a incidenței prin rotirea ei în jurul unui ax vertical. Aerul necesar creării jetului este adus printr-o conductă interioară machetei de la un compresor centrifugal acționat de un motor electric. Prin modificarea admisiei aerului în compresor s-a obținut variația coeficientului de jet. Macheta aripii este prevăzută cu

un volet variabil montat deasupra fantei, astfel încît prin efect Coandă s-a obţinut o înclinare a pînzei de jet faţă de planul aripii.

Vizualizarea s-a obţinut prin injectarea de apă sub presiune în conducta de alimentare a machetei cu aer de la compresor. Antrenată în conductă sub formă de vapori, apa condensează în pînza de jet, formînd

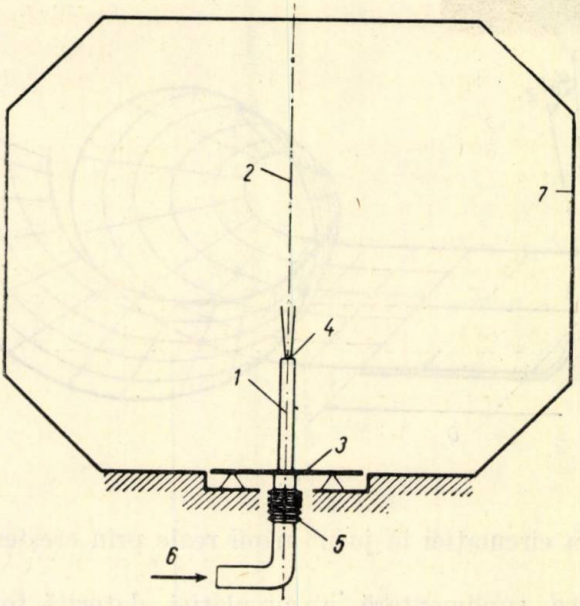


Fig. 3. — Schema de montare şi sistemul de alimentare cu aer al machetei în tunelul aerodinamic. Se vede :

(1) macheta aripii, (2) ax de rotaţie, (3) disc de prindere a machetei pe balanţa aerodinamică , (4) jet fluid, (5) racord flexibil, (6) conductă de alimentare a machetei cu aer de la compresor, (7) secţiune transversală în camera de experienţă a sufleriei aerodinamice.

mici picături capabile să reflecte lumina provenită dintr-o sursă puternică aşezată în mod convenabil. Imaginea schimbării formei pînzei de jet datorită variaţiei incidenţei sau a coeficientului de jet a fost înregistrată pe peliculă cinematografică. Alături sînt redate cîteva fotograme extrase din filmul realizat.

În figura 4 este arătată o pînză de jet lansată în lungul aripii şi avînd o intensitate relativ mică. Intensitatea pînzei se defineşte cu ajutorul coeficientului de impuls [1]:

$$C_\mu = \frac{c\,\delta_j\,\rho_j\,U_j^2}{c\,\frac{b}{2}\,\frac{\rho_\infty}{2}\,U_\infty^2} = 4\,\frac{\delta_j}{b}\,\frac{\rho_j}{\rho_\infty}\left(\frac{U_j}{U_\infty}\right)^2 \qquad (3)$$

în care δ_j este grosimea fantei de ejecție, c și b respectiv coarda și anvergura aripii reale, iar indicele j referindu-se la mărimile corespunzătoare jetului.

Se observă în figura 4 cu multă claritate formarea și torsionarea pînzei fluide în lumina schemei fizice concepute. Într-adevăr, raza de curbură a bordului de atac al jetului (fotografia este luată din amonte) este cea mai mică, în timp ce linia de curent reprezentînd bordul de fugă are tendința, la ieșirea din fantă, să se păstreze rectilinie. Din cauza frecărilor și turbulenței, pînza apare îngroșată. Iluminarea fiind făcută numai în dreptul aripii, nu apare în fotografie imaginea pînzei răsucite care se întinde spre aval.

În figura 5 se prezintă o pînză de jet laterală, combinată cu un jet longitudinal (*jet-flap*), lansată în formă de pînză din bordul de fugă al aripii reale. Coeficientul de impuls este și în acest caz mic. Iluminarea este extinsă și asupra unei regiuni în aval, ceea ce permite observarea formei pînzei de jeturi combinate suficient de departe în spatele aripii. Pînza de jet laterală din figura 5 este lansată, spre deosebire de cea din figura 4, sub un unghi de 30° față de planul aripii. Se observă că acest fapt nu modifică calitativ natura de bază a fenomenului, care rămîne mai departe cea indicată în schema fizică din figurile 1 și 2.

În cazul în care se mărește treptat coeficientul de jet, păstrîndu-se constante incidența aripii și înclinarea pînzei fluide față de planul aripii, se observă o creștere accentuată a razei de curbură, și pînza laterală pare că se desfășoară, așa cum se arată în figurile 6*a*, 6*b* și 6*c*. Jetul lateral care apare în aceste fotografii este de asemenea înclinat cu 30° față de planul aripii. În figura 6*a*, coeficientul $C\mu$ este mic și jetul este înfășurat mai strîns în apropierea fantei de ieșire.

În figura 6*a* și 6*b*, coeficientul $C\mu$ este mărit, iar pînza de jet este desfășurată.

În figura 7 se prezintă o imagine laterală a pînzei de jet lansată la capătul aripii, în lungul anvergurii acesteia. Se observă cu mai multă claritate decît în imaginile precedente creșterea continuă a razei de curbură de la bordul de atac spre bordul de fugă al aripii fluide. De asemenea se poate urmări cu ușurință modul în care pînza este răsucită și azvîrlită în aval.

În concluzie se constată că schema fizică concepută în [1] concordă bine cu experiențele, atît cantitativ, conducînd la rezultate numerice foarte satisfăcătoare, cît și calitativ, punînd în lumină cu multă precizie principalele aspecte ale fenomenului în cauză.

Acest lucru a fost arătat și într-o lucrare experimentală recentă [3], care analizează același fenomen bazată pe fundamentarea teoretică a lui E. Carafoli.

Primită la redacție la 25 noiembrie 1965

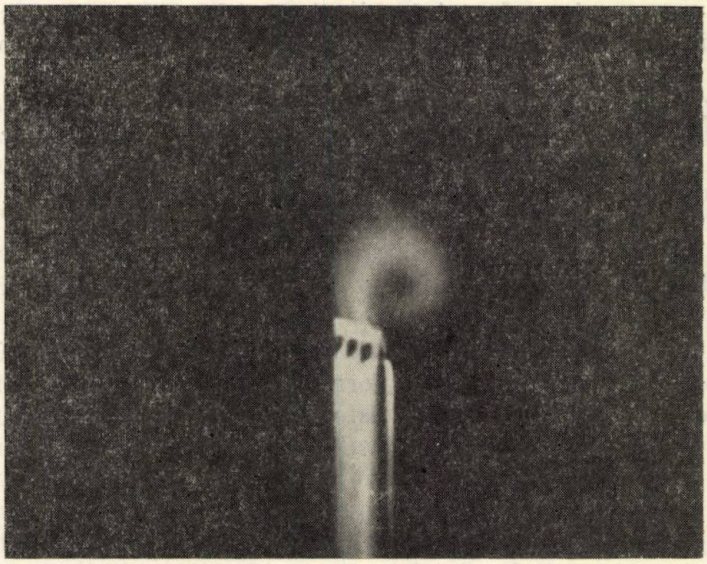


Fig. 4. — Jet lateral paralel cu anvergura aripii. Coeficient $C\mu$ mic.

Fig. 5. — Vizualizarea unui jet lateral și longitudinal combinat, înclinat la 30°.

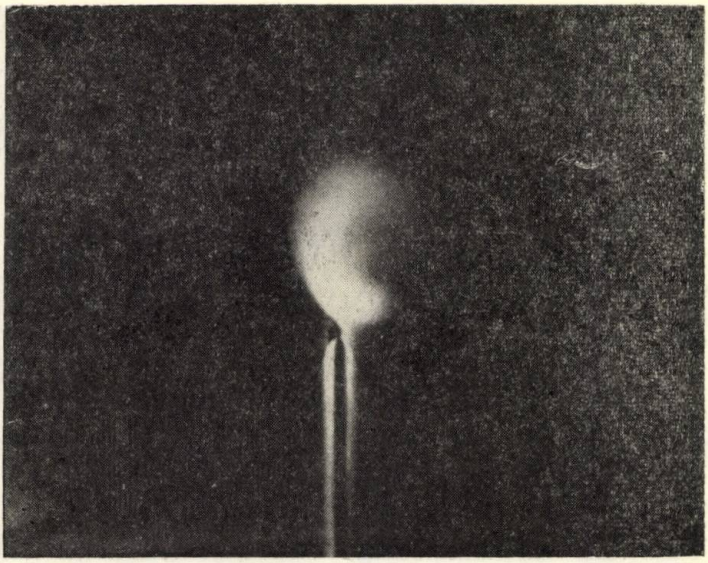


Fig. 6 *a*. — Jet lateral înclinat la 30° față de planul aripii pentru o valoare mică a lui $C\mu$.

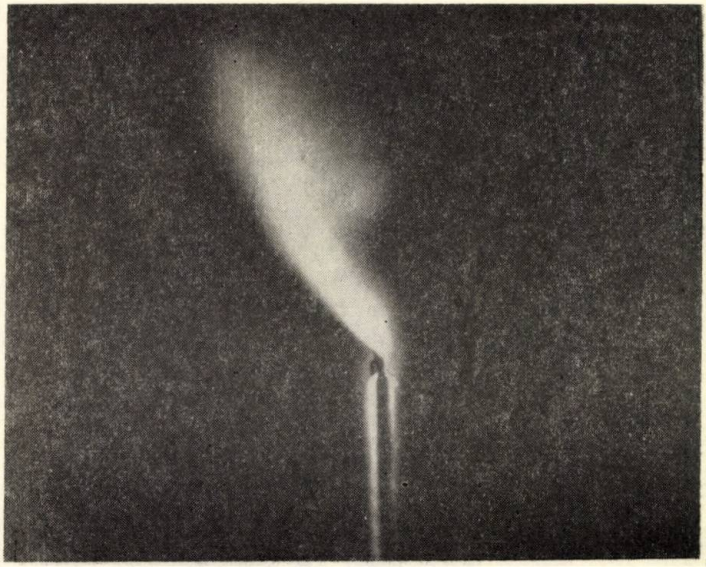


Fig. 6 *b*. — Jet lateral înclinat la 30° față de planul aripii pentru o valoare mijlocie a lui $C\mu$.

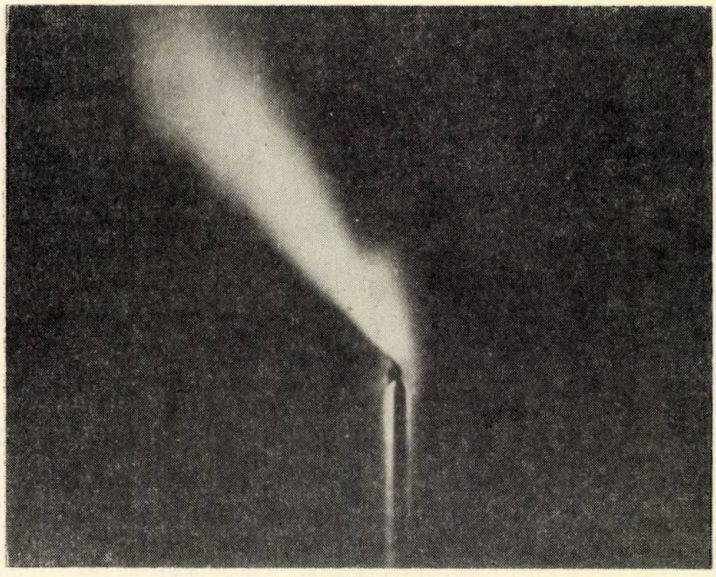


Fig. 6 *c.* — Jet lateral înclinat la 30° faţă de planul aripii pentru o valoare mare a lui $C\mu$.

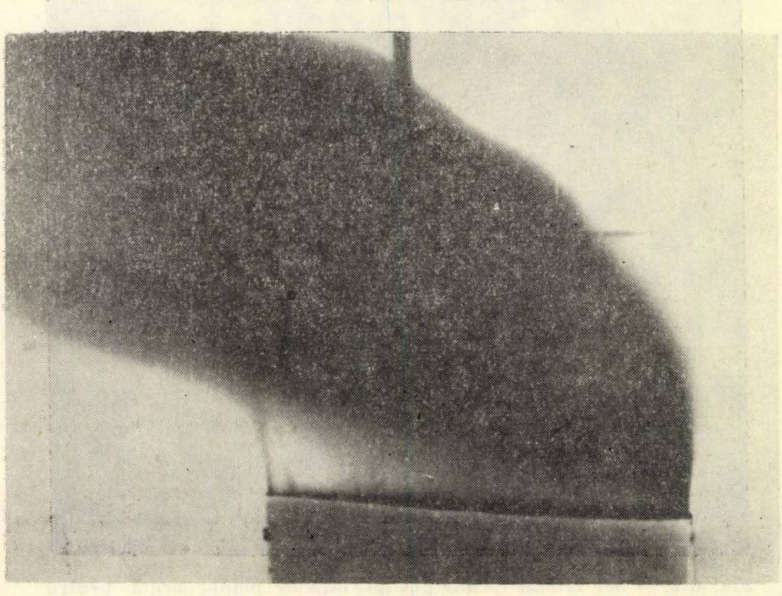


Fig. 7. — Vederea laterală a pînzei de jet.

BIBLIOGRAFIE

1. **E.** Carafoli, *Considerații teoretice asupra jeturilor fluide laterale.* St. cerc. mec. apl., *5* (1962).
2. — *The influence of lateral jets, simple or combined with longitudinal jets, upon the wing lifting characteristics.* Proceedings of the third International Congress of the Aeronautical Sciences (I. C. A. S.), Stockholm, 1962.
3. Dipl. Ing. Wolfgang Mörchen, *Über die Spaltverluste zwischen Flügeln und Endscheiben ohne und mit Ausblasung in Spannweitenrichtung.* Disertație pentru obținerea gradului de doctor inginer, Institutul politehnic Darmstadt.

UNELE PROBLEME NECLASICE ALE STABILITĂȚII ZBORULUI[1])

de T. HACKER
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

533:531.1

Se consideră unele probleme de stabilitate a zborului pentru care modelul matematic al ecuațiilor liniare cu coeficienți constanți își pierde valabilitatea. Se discută cazul cvasicritic al sistemelor cu parametri constanți, situați în vecinătatea frontierei de stabilitate asimptotică, propunîndu-se un model matematic al proprietății empirice de stabilitate neutră.
În continuare se tratează unele sisteme cu parametri variabili reductibile la modelul liniar cu coeficienți constanți, definindu-se astfel limitele de valabilitate ale acestuia din urmă.
În sfîrșit se consideră un caz nereductibil la acest model, anume al zborului orizontal rectiliniu cu viteza variabilă. Se deduc criterii de stabilitate și o evaluare a oscilațiilor incidenței. Rezultă că pierderea stabilității nu este legată de valoarea vitezei sau a accelerației, ci de natura mai intimă a mișcării.

1. INTRODUCERE

Prin *clasică* vom conveni să înțelegem teoria derivată din aproximația liniară în ipoteza constanței parametrilor sistemului (mișcare neperturbată riguros staționară), în forma în care este prezentată în majoritatea marilor lucrări de sinteză, tratate și manuale consacrate stabilității zborului.

Vom încerca să abordăm în cuprinsul acestei lucrări unele probleme legate de stabilitatea zborului care ies din cadrul trasat de teoria clasică și a căror considerare este, totuși, impusă uneori de către tehnica actuală de zbor.

Se va considera întîi cazul sistemelor cu parametri constanți (sisteme autonome) situați pe frontiera dintre domeniul de stabilitate asimpto-

[1]) Publicată și în "Rev. roum. sci. tech. – Mécanique Appliquée", **11**, 2 (1966) în limba franceză.

tică şi cel de instabilitate, unde aproximaţia liniară încetează a mai constitui un model valabil al procesului real. În particular se va discuta semnificaţia practică a noţiunii de stabilitate neutră şi se va propune un model folosind conceptele matematice de stabilitate practică („ε_0 = stabilitate") şi de punct nepericulos al frontierei domeniului de stabilitate asimptotică.

În continuare se vor trata diferite cazuri de sisteme cu parametri variabili.

La început vor fi considerate două categorii reductibile la modelul liniar cu coeficienţi constanţi, definindu-se în acelaşi timp limita de valabilitate a acestuia din urmă. Anume este vorba despre cazul unei variaţii relativ slabe a valorii coeficienţilor sistemului liniarizat şi al unei variaţii lente a acestor coeficienţi.

În sfîrşit, va fi abordat un caz în care parametrii nu satisfac condiţiile de reductibilitate a sistemului la modelul autonom (în particular, liniar cu coeficienţi constanţi). Anume se va studia cazul zborului orizontal rectiliniu cu viteza variabilă. Se vor deduce cu ajutorul metodei directe a lui Leapunov criterii de stabilitate exprimînd o condiţie suficientă de stabilitate asimptotică. După cum se va vedea în rezultat, pierderea stabilităţii nu este legată de valoarea acceleraţiei (sau a vitezei de zbor), ci de natura mai intimă a mişcării, pusă în evidenţă cu ajutorul semnului şi al valorii derivatei a doua în raport cu timpul a logaritmului vitezei. Din funcţia lui Leapunov construită pentru acest caz va rezulta, de asemenea, o evaluare a deviaţiei incidenţei faţă de valorile ei neperturbate.

2. MIŞCAREA RECTILINIE UNIFORMĂ. STABILITATEA NEUTRĂ

2.1. DESPRE STABILITATEA NEUTRĂ

Sub influenţa exclusivităţii modelului liniar cu coeficienţi constanţi, noţiunea de stabilitate dinamică neutră şi-a cîştigat un loc trainic în teoria clasică. Ea serveşte drept corespondent „dinamic" al noţiunii familiare de echilibru indiferent. Conform teoriei liniare (clasice), dacă ecuaţia caracteristică a sistemului admite, pe lîngă rădăcini cu partea reală negativă, cel puţin o rădăcină nulă sau o pereche de rădăcini complex conjugate, avem de-a face cu un caz de stabilitate neutră, cu alte cuvinte de mişcare perturbată neamortizată (aperiodică cu conservarea valorii iniţiale a perturbaţiei sau cu o oscilaţie armonică simplă). Ar fi deci un caz de stabilitate (neasimptotică) în sensul lui Leapunov. În realitate, aceasta constituie o situaţie posibilă şi nu obligatorie. Altfel spus, fapt de mult stabilit de către teoria generală, în cazurile critice, situate pe frontiera domeniului de stabilitate, aproximaţia liniară nu mai poate furniza concluzii valabile : devine necesar a se considera sistemul neliniar. Dar considerarea sistemului neliniar se impune în fapt nu numai pe frontiera domeniului de stabilitate, ci practic şi în vecinătatea ei. Într-adevăr, parametrii sistemului fiind determinaţi pe cale experimentală combinată cu calcule numerice

(aproximative), își face loc un anume grad de incertitudine: sistemul scris pe baza acestor determinări, aflat, de exemplu, în interiorul domeniului de stabilitate aproape de frontieră, s-ar putea să corespundă în realitate unui punct de pe frontieră sau chiar exterior. Pentru a avea siguranța că variația deviațiilor induse ale sistemului respectiv este una nepericuloasă, se va cerceta stabilitatea sistemului neliniar pe frontieră, într-un punct apropiat de cel presupus din interiorul domeniului de stabilitate. După cum va rezulta stabilitate asimptotică sau instabilitate, vom avea de-a face cu un punct nepericulos sau cu unul periculos al frontierei, în vecinătatea căruia mișcarea de bază va fi practic stabilă sau, respectiv, instabilă [2]).

Noțiunea de stabilitate neutră are, totuși, o semnificație empirică, atestată de practica de zbor. Ea reprezintă o mișcare perturbată puțin energică, reclamînd în general intervenția comenzilor pentru asigurarea unei amortizări destul de rapide. Astfel, mișcarea longitudinală fugoidă sau mișcarea spirală sînt caracterizate de cele mai multe ori de o stabilitate neutră sau de „indiferență" în sensul empiric al termenului. Această noțiune empirică poate fi în mod adecvat modelată cu ajutorul noțiunii cunoscute în teoria matematică sub denumirea de stabilitate practică (sau „ε_0 — stabilitate" [2]) și corespunde vecinătății unor puncte nepericuloase ale frontierei domeniului de stabilitate asimptotică.

În paragrafele următoare se vor defini noțiunile de stabilitate practică (§ 2.2) și de punct nepericulos al frontierei de stabilitate (§ 2.3), stabilindu-se o relație între cele două noțiuni (§ 2.4).

2.2. STABILITATEA PRACTICĂ SAU „ε_0-STABILITATEA"

Stabilitatea după Leapunov implică posibilitatea impunerii unei margini superioare oricît de mici (chiar nule) deviațiilor induse de o perturbație suficient de slabă. În concordanță cu cerințele, de exemplu, ale practicii de zbor, „ε_0-stabilitatea" implică existența unei margini superioare mai mult sau mai puțin determinate a valorii deviațiilor induse.

Pentru a reaminti, soluția $x = 0$ a sistemului ecuațiilor mișcării perturbate este „ε_0-stabilă" sau stabilă practic [3]) dacă pentru orice număr $\varepsilon > \varepsilon_0$ (stabilitatea după Leapunov este definită pentru orice $\varepsilon > 0$) există $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît $|x(t_0)| < \eta$ (ε) implică $|x(t)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$.

Pentru ceea ce s-a definit anterior ca stabilitate neutră (în sensul empiric al termenului), ε_0 reprezintă o valoare-limită a deviațiilor principalelor coordonate ale problemei, admisă pe baza unor considerente de securitate, confort și în primul rînd de maniabilitate; stabilitatea neutră,

---

[2] Noțiunile de puncte (respectiv zone) periculoase și nepericuloase ale frontierei domeniului de stabilitate au fost introduse de N. N. Bautin [1]. Noțiunea de stabilitate practică va fi definită aici după [2].

[3]) Vezi [2], p. 208. În cele ce urmează se va folosi, în locul termenului „ε_0 — stabilitate", termenul, mai familiar, de *stabilitate practică*.

reclamînd intervenţia stabilizatoare a comenzilor, îi asigură în acelaşi timp eficacitatea.

Evaluarea mărimii $\eta(\varepsilon)$ care rezultă în urma soluţionării problemei se va compara cu valorile curente ale perturbaţiilor la care este supus de obicei aparatul.

2.3. NOŢIUNEA DE PUNCT NEPERICULOS AL FRONTIEREI DE STABILITATE

Sistemul de ecuaţii al mişcării perturbate depinde de un anumit număr k de parametri p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, consideraţi esenţiali pentru problema tratată, caracterizînd regimul neperturbat, inclusiv mediul străbătut de aparat şi construcţia acestuia. În cele ce urmează se va considera spaţiul k-dimensional al acestor parametri. Fie p un punct al acestui hiperspaţiu. Atunci sistemul de ecuaţii autonome neliniare al mişcării perturbate va fi de forma

$$\frac{dx}{dt} = A(p)x + N(x; p), \tag{2.1}$$

unde vectorul-coloană x reprezintă deviaţiile induse ale celor n variabile dinamice principale ale sistemului, A o matrice constantă de rang n, iar vectorul-coloană N părţile neliniare ale sistemului.

Dacă $\lambda_i (i = 1,2, \ldots, n)$ sînt valorile proprii ale matricii A, condiţia necesară şi suficientă de stabilitate asimptotică locală [4]) a soluţiei $x = 0$ a sistemului (2.1) va fi dată de sistemul de inegalităţi

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}\lambda_i(p) < 0 \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Mulţimea punctelor în care inegalităţile (2.2) sînt satisfăcute simultan determină în spaţiul parametrilor domeniul stabilităţii asimptotice. Frontiera va fi generată de totalitatea punctelor p, în care cel puţin una dintre inegalităţile (2.2) se transformă în egalitate. Fiecare punct al frontierei va corespunde, prin urmare, unui caz critic în sensul teoriei lui Leapunov : soluţia $x = 0$ a sistemului corespunzător vreunui punct al frontierei va fi asimptotic-stabilă, stabilă („indiferentă") sau instabilă după forma vector-funcţiei $N(x; p)$. Exteriorul mulţimii formate din punctele domeniului de stabilitate asimptotică şi ale frontierei va constitui domeniul de instabilitate (definit prin cel puţin o inegalitate de forma $\operatorname{Re}\lambda_i(p) > 0$).

În continuare se va introduce, după [1], noţiunea de punct nepericulos al frontierei domeniului de stabilitate asimptotică. Esenţa ideii constă în faptul că în vecinătatea frontierei comportarea soluţiei sub raportul stabilităţii este determinată de comportarea ei pe frontieră.

---

[4]) Pentru valori suficient de mici ale normei vectorului x.

Fie $p^{(0)}$ un punct al frontierei domeniului de stabilitate asimptotică. Se notează prin $\delta\,(p, p^{(0)})$ distanța dintre $p^{(0)}$ și un punct oarecare p al spațiului parametrilor.

Punctul $p^{(0)}$ este un punct nepericulos al frontierei domeniului de stabilitate asimptotică dacă pentru un $\varepsilon > 0$ arbitrar există două funcții $\eta_{i1}(\varepsilon)$ și $\eta_{i2}(\varepsilon)$ pentru care inegalitățile $|x(t_0)| < \eta_{i1}(\varepsilon)$ și $\delta < \eta_{i2}(\varepsilon)$, satisfăcute simultan, implică $|x(t)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$ (x fiind soluția sistemului (2.1), corespunzător punctului p) [5].

Este de notat că punctul p poate fi situat în exteriorul domeniului $\mathrm{Re}\,\lambda_i \leqslant 0$, deci în domeniul de instabiliate după Leapunov. Esențial în ceea ce privește definiția dată este faptul că punctul p să se găsească în vecinătatea punctului $p^{(0)}$ (suficient de aproape de $p^{(0)}$), distanța $\delta(p, p^{(0)})$ depinzînd de marginea admisă (aleasă) a variației deviațiilor induse. Este deci ușor de stabilit o anumită corespondență între noțiunile definite în ultimele două paragrafe.

2.4. O RELAȚIE ÎNTRE NOȚIUNEA DE PUNCT NEPERICULOS AL FRONTIEREI DE STABILITATE ȘI ACEEA DE STABILITATE PRACTICĂ

Se va arăta că în anumite condiții, de altfel naturale, într-o vecinătate suficient de mică a unui punct nepericulos al frontierei domeniului de stabilitate, sistemul este practic stabil.

Se va proceda printr-o inversare a definiției date în paragraful precedent, considerîndu-se ca punct de pornire pentru caracterizarea comportării soluției în vecinătatea unui punct nepericulos al frontierei alegerea arbitrară nu a numărului ε, ci a mărimii η_{i2}, definind dimensiunile vecinătății considerate a punctului $p^{(0)}$.

Fie

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A_1 x + N_1(x), \tag{2.3}$$

un sistem de ecuații dat corespunzînd punctului $p^{(1)}$ al spațiului parametrilor unde $A_1 = A\,(p^{(1)})$, $N_1(x) = N\,(x;\, p^{(1)})$. Matricea A_1 admite prin ipoteză cel puțin o valoare proprie cu parte reală mică (în comparație cu celelalte valori proprii sau cu elementele matricei), pozitivă sau negativă (aici semnul nu joacă un rol esențial), celelalte valori proprii, care n-au părțile reale mici, avîndu-le negative. În acest caz, punctul $p^{(1)}$ va fi situat în apropierea frontierei domeniului de stabilitate asimptotică.

Fie $p^{(0)}$ punctul de pe frontieră cel mai apropiat (sau un punct suficient de apropiat) de punctul $p^{(1)}$. Să presupunem că $p^{(0)}$ este un punct nepericulos al frontierei. Se notează $\delta_1 = \delta\,(p^{(1)}, p^{(0)})$ distanța dintre $p^{(0)}$

[5] O condiție suficientă pentru ca $p^{(0)}$ să fie un punct nepericulos al frontierei este dată de stabilitatea asimptotică uniformă a soluției banale a sistemului neliniar

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\,(p^{(0)})\,x + N\,(x;\, p_0).$$

şi $p^{(1)}$ şi se admite că are loc inegalitatea $\eta_2 \leqslant \delta_1$ (în particular că este posibilă egalitatea $\eta_2 = \delta_1$)[6]).

În aceste condiţiuni, soluţia $x = 0$ a sistemului (2.3) va fi practic stabilă în sensul definiţiei date în § 2.2.

Într-adevăr, să presupunem că η_2 este o funcţie monotonă şi continuă de ε, admiţînd o limită, η_∞, cînd ε tinde către infinit. Avem deci $\eta_2 \leqslant \eta_\infty$. Atunci, în intervalul $[0, \eta_\infty]$ se poate defini o funcţie $\varepsilon(\eta_2)$ astfel că pentru $\delta(p, p^{(0)}) \leqslant \eta_2$ inegalitatea $|x(t_0)| < \eta_1(\varepsilon(\eta_2))$ implică $|x(t)| < \varepsilon(\eta_2)$ pe semiaxa $t \geqslant t_0$. Prin urmare, dacă $\delta(p, p^{(0)}) \leqslant \eta_2 \leqslant \delta_1$, pentru $\varepsilon_0 = \varepsilon(\eta_2)$ (sau $\varepsilon_0 = \varepsilon(\delta_1)$), sîntem în cazul definiţiei „ε_0-stabilităţii" date în § 2.2.

Pentru ca această „ε_0-stabilitate" să reprezinte o stabilitate practică efectivă, distanţa δ_1 trebuie să fie suficient de mică [7]).

2.5. UNELE CONCLUZII

Semnificaţia practică a celor expuse poate fi rezumată după cum urmează : în vecinătatea unui punct nepericulos al frontierei domeniului de stabilitate asimptotică, sistemul este practic stabil. Cu alte cuvinte, instabilitatea în sensul lui Leapunov a unui sistem aflat în vecinătatea unui punct nepericulos nu reprezintă o situaţie ce trebuie să fie evitată constructiv cu orice preţ. Dacă această vecinătate este suficient de mică, comenzile ce se execută au drept scop să impună sau să accelereze amortizarea perturbaţiilor şi nu pe acela de a împiedica o creştere nelimitată proprie situaţiilor de instabilitate veritabilă. Chiar dacă distanţa δ_1 ar depăşi cu puţin limita impusă de teoria expusă mai sus, încă nu ne-am putea aştepta decît la o instabilitate destul de slabă, care poate fi uşor înlăturată prin comenzi.

În felul acesta, stabilitatea neutră caracterizează zborul în vecinătatea unei zone nepericuloase a frontierei de stabilitate.

Nu este vorba, se înţelege, despre puncte arbitrare ale acestei frontiere. Întrucît pe frontieră (şi, după cum s-a arătat, chiar şi într-o vecinătate anumită a ei) termenii neliniari capătă o importanţă hotărîtoare în ceea ce priveşte stabilitatea sistemului, evident apare posibilitatea existenţei unor zone de instabilitate pe frontieră (în funcţie de părţile neliniare) şi în cazul sistemelor autonome. În aceste zone „periculoase" ale frontierei şi în vecinătatea lor nu putem avea o stabilitate, fie şi „neutră", ci doar instabilitate care poate fi chiar şi una puternică. Ca exemplu se poate cita stabilitatea longitudinală a unor avioane avînd o instabilitate fugoidă, altfel de construcţie curentă, în cazul constrîngerii vitezei de zbor. Într-adevăr, după cum s-a arătat [3], în zbor rectiliniu orizontal cazului contro-

[6]) În ceea ce priveşte semnificaţia simbolului η_2, vezi definiţia din paragraful precedent.

[7]) Din condiţia ca η_2 să admită o limită pentru $\varepsilon \to \infty$ rezultă o creştere foarte rapidă cînd distanţa δ_1 se apropie de valoarea η_∞. Totuşi, această condiţie suplimentară este necesară pentru ca inegalitatea $\eta_2(\varepsilon) \leqslant \delta_1$ şi în particular egalitatea $\eta_2 = \delta_1$ să fie posibile pentru ε arbitrar.

lului parțial al vitezei de zbor îi corespunde o ecuație caracteristică a sistemului auxiliar avînd o rădăcină nulă. Este vorba aici de un punct periculos al frontierei de stabilitate asimptotică în majoritatea cazurilor uzuale : sistemul neliniar este instabil în acest punct al frontierei, chiar dacă nu se ține seama de perturbațiile permanente datorite efectului secundar al intervenției continue a comenzilor. Astfel, dacă avionul în zbor liber are instabilitate fugoidă, controlul parțial al vitezei de zbor nu poate asigura o stabilizare perfectă. În cazul unei instabilități aperiodice destul de puternice a zborului liber prin constrîngerea vitezei de zbor, nu se poate obține nici măcar o comportare cvasiindiferentă (neutră) în faza fugoidă. Dimpotrivă, dacă în plus se constrînge și atitudinea longitudinală a aparatului (controlul parțial simultan al unghiului de tangaj și al vitezei de zbor), se ajunge să se asigure o stabilitate puternică a zborului uniform în regimuri uzuale, corespunzînd unor valori absolute ridicate ale rădăcinilor ecuației caracteristice a sistemului auxiliar de ordinul 2, rădăcinile fiind complex conjugate cu părți reale negative mari în valoare.

O altă ilustrare a celor afirmate mai sus cu privire la situația din vecinătatea frontierei de stabilitate ar putea fi următoarea. În legătură cu influența coeficientului de stabilitate statică asupra mișcării perturbate longitudinale a unui avion în apropierea punctului de anulare a termenului liber al cvadrinomului caracteristic corespunzător, W. J. Duncan ([4], p. 120) atrage atenția asupra unei creșteri a sensibilității sistemului la forțele aplicate pe măsura apropierii de punctul de pe frontiera de stabilitate corespunzător anulării termenului liber. Într-adevăr, considerînd în acest punct sistemul neliniar, se poate arăta că în numeroase cazuri de avioane de construcție curentă mișcarea de bază staționară este instabilă, deci ne aflăm într-un punct periculos al frontierei de stabilitate [8]).

În concluzie, stabilirea faptului dacă un punct al frontierei domeniului de stabilitate (în cazul sistemelor autonome dacă un punct în care ecuația caracteristică a sistemului liniarizat are cel puțin o rădăcină nulă sau o pereche de rădăcini imaginare) implică într-adevăr stabilitate neutră sau reprezintă un punct de instabilitate revine la considerarea problemei stabilității sistemului neliniar în acel punct al frontierei. Problema este grea, deși rezolvabilă practic în toate cazurile întîlnite în teoria stabilității zborului : cazurile unei singure rădăcini caracteristice nule sau ale unei perechi de rădăcini caracteristice imaginare, fiind puțin probabilă atingerea frontierei prin anularea simultană a mai multor rădăcini. Totuși, calculele de efectuat sînt laborioase și greoaie și nu se justifică decît în cazul studierii vreunei noi formule constructive de aparate de zbor. În rest, apropierea de frontiera de stabilitate (rădăcini caracteristice mici sau părți reale ale unor rădăcini caracteristice mici) trebuie să fie privită ca un semnal de alarmă avertizîndu-ne de necesitatea de a se recurge la o comandă stabilizatoare suplimentară sau chiar la unele modificări constructive.

---

[8]) Sînt cazurile denumite de către E. P. Grossman [5] de instabilitate statică de ordin superior. În particular este vorba de o instabilitate statică „de ordinul doi", legată de semnul derivatei a doua în raport cu incidența a coeficientului momentului de tangaj.

3. REGIMUL DE ZBOR VARIABIL (MIŞCĂRI DE BAZĂ NESTAŢIONARE). CAZURI REDUCTIBILE LA SISTEME DE ECUAŢII LINIARE CU COEFICIENŢI CONSTANŢI

3.1. DESPRE LIMITA DE VALABILITATE A MODELULUI LINIAR CU COEFICIENŢI CONSTANŢI

După cum se ştie, parametrii sistemului de ecuaţii al mişcării perturbate depind, prin intermediul unui număr de combinaţii adimensionale, de caracteristicile constructive ale aparatului, de regimul mişcării de bază (neperturbate) şi de anumite caracteristici ale mediului în care are loc zborul. Riguros vorbind, pentru ca sistemul de ecuaţii al mişcării perturbate să fie autonom, este necesar ca toate aceste cantităţi caracteristice să fie constante. De aceea modelul sistemelor autonome constituie o idealizarea evidentă chiar în majoritatea cazurilor de zbor uniform orizontal şi rectiliniu. Într-adevăr, pentru a întreţine într-un mediu rezistent, cum este atmosfera, o asemenea mişcare staţionară este necesar a se cheltui o anumită cantitate de energie, ceea ce implică variaţia masei, a momentului de inerţie şi, în general, a centrajului, care sînt, fără îndoială, caracteristici constructive de bază. Modelul sistemelor autonome se îndepărtează şi mai mult de situaţia reală în cazurile atît de frecvente de zbor cu viteza variabilă sau de-a lungul unor traiectorii diferite de cele orizontale. Cu toate acestea, modelul sistemelor autonome, şi în particular al sistemelor liniare cu coeficienţi constanţi, nu este înlăturat în mod automat ca inadecvat, ci doar valabilitatea lui încetează a fi indiscutabilă sau absolută. Apare necesitatea cunoaşterii limitelor acestei valabilităţi pentru a se putea determina condiţiile restrictive ce trebuie să fie impuse sistemului. În cele ce urmează se vor considera două cazuri de aplicabilitate a modelului liniar cu coeficienţi constanţi : cazul unei variaţii suficient de slabe a valorilor coeficienţilor sistemului liniarizat şi acela al unei variaţii suficient de lente a acestor valori. În primul caz, limita de valabilitate va trebui căutată sub forma unei margini superioare a diferenţei dintre valorile maximă şi minimă a coeficienţilor pe toată durata evoluţiei sau a raportului dintre această diferenţă şi o valoare medie a coeficienţilor consideraţi. În cel de-al doilea caz trebuie să se determine marginea superioară admisă a valorii derivatelor în raport cu timpul ale coeficienţilor. Pentru aceste cazuri, teoria generală dispune de teoreme care să permită stabilirea unor limite riguroase (în cadrul ipotezelor fizice adoptate), în care neglijarea variaţiei parametrilor este admisă, putîndu-se substitui ca model matematic unui sistem depinzînd explicit de t unul autonom şi încă neglija termenii neliniari. Cu alte cuvinte, este posibil a se deduce din aceste teoreme limita de valabilitate a modelului liniar cu coeficienţi constanţi.

3.2. VARIAŢIA MICĂ A PARAMETRILOR SISTEMULUI

În acest caz, modelul sistemului liniar ca coeficienţi constanţi este folosit în mod curent în literatura de specialitate şi pentru calcule practice efective, de obicei fără verificarea rigorii substituţiei. Cel mult se re-

curge la criterii empirice de aplicabilitate : se compară variația relativă maximă (diferența dintre valorile maximă și minimă ale coeficienților raportată la valorile lor medii) cu ordinul de mărime al erorii de determinare (prin procedee experimentale și calcule aproximative), care în practica curentă a construcțiilor aeronautice nu depășește 10—20% (vezi [6], p. 482). Se simte, totuși, necesitatea determinării limitelor de valabilitate pe o cale mai riguroasă, ceea ce de altfel nu comportă dificultăți teoretice deosebite.

Într-adevăr, se poate justifica imediat neglijarea unei variații suficient de mici a coeficienților sistemului liniarizat cu ajutorul teoriei de stabilitate după prima aproximație. În acest scop, sistemul ecuațiilor de mișcare a cărui soluție nulă reprezintă mișcarea de bază (neperturbată) se va scrie sub forma

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = [A + B(t)]\ x + N(t, x), \tag{3.1}$$

unde vectorul-coloană x reprezintă deviațiile induse de o perturbație ale celor n variabile dinamice, A este o matrice constantă de rang n, $B(t)$ o matrice funcție de t de același rang mărginită pe semiaxa $t \geqslant t_0$ (fie $\| B(t) \| \leqslant \beta_0$), iar $N(t, x)$ un vector-coloană reprezentînd termenii neliniari. Atît $A + B$, cît și N depind de parametrii sistemului. Sistemul este definit în domeniul $t \geqslant t_0, \| x \| < h$, h fiind o constantă suficient de mică, și se presupune că în acest domeniu funcția vectorială $N(t, x)$ satisface o condiție Lipschitz uniformă în raport cu t. În aceste condiții, conform teoriei de stabilitate după prima aproximație, dacă sistemul liniar cu coeficienți constanți

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax \tag{3.2}$$

este uniform asimptotic stabil (cu alte cuvinte dacă matricea A este hurwitziană) pentru valori ale lui β_0 și a constantei lui Lipschitz pentru N suficient de mici, mișcarea de bază $x^* = 0$, $x^*(t)$ fiind soluția sistemului (3.1), este de asemenea uniform asimptotic stabilă.

Marginea superioară β_0 a variației coeficienților sistemului liniar $B(t)$ sau eroarea comisă prin neglijarea adausului $B(t)$, dacă β_0 este cunoscut, pot fi evaluate ușor folosind o tehnică derivată din metoda directă a lui Leapunov sau un procedeu, utilizat de R. Bellman [7], bazat pe metoda variației constantelor a lui Lagrange.

3.3. PARAMETRI CU VARIAȚIA LENTĂ

Oricărei evoluții cu parametri variabili corespunde, evident, un anumit domeniu al spațiului parametrilor, pe care-l vom admite mărginit. Variația maximă a valorilor parametrilor va putea fi deci evaluată cu ajutorul diferenței dintre marginea superioară și cea inferioară a domeniului. Dacă evaluarea obținută nu va fi suficient de mică în sensul care re-

zultă din paragrafele precedente, utilizarea ca model matematic a unui singur sistem liniar cu coeficienți constanți (în locul unui sistem neautonom și neliniar) nu mai apare ca justificată. Totuși, în anumite situații se poate fundamenta în mod riguros înlocuirea unui sistem neautonom și neliniar — considerat adecvat în cadrul ipotezelor fizice adoptate — printr-o *serie* de sisteme liniare cu coeficienți constanți (procedeu denumit uneori al „înghețării coeficienților"). Este cazul, între altele, al parametrilor cu variația lentă $\left(\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B(t)\right\|$ — pentru $B(t)$ vezi (3.1) — admite o margine superioară suficient de mică$\right)$. La aparatele echipate cu motoare-rachetă, de exemplu, în timpul misiunii executate, masa, momentul de inerție și uneori centrajul suferă o variație apreciabilă. În același timp însă, viteza de variație a acestor parametri poate să fie destul de mică. Același lucru se poate spune, în anumite cazuri, și despre variația densității mediului traversat de aparat, al vitezei de zbor etc.

Astfel, fie ecuația vectorială definită pentru $t \geqslant t_0$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t,\ x), \tag{3.3}$$

modelul matematic al mișcării (perturbate) riguros adecvat în cadrul ipotezelor fizice adoptate. Se consideră de asemenea sistemele autonome

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = X(s,\ x), \tag{3.4}$$

corespunzînd tuturor valorilor parametrului s de pe semiaxa $s \geqslant t_0$.

Trebuie să se determine limitele (sau măcar unele limite) în care stabilitatea soluțiilor $y = 0$ ale tuturor ecuațiilor (3.4) implică stabilitatea soluției banale a ecuației (3.3). Pentru aceasta au fost stabilite teoreme corespunzătoare și propuse procedee de evaluare [8], [9],[10]. Dar, în aproape toate aplicațiile din domeniul dinamicii zborului, ecuației (3.3) i se substituie (3.4) fără să se țină seama de aceste rezultate teoretice. Cu toate acestea, necesitatea demonstrării în fiecare caz nou studiat a valabilității unei atare substituții pare evidentă. Pentru a pune în evidență această necesitate, vom reproduce mai jos un contraexemplu după [11] [9]), în care (3.3) este un sistem liniar cu coeficienți variabili :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)\ x \tag{3.5}$$

cu

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\cos\ t\ \sin\ t \\ -1 - \frac{3}{2}\sin t\ \cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2\ t \end{pmatrix}.$$

[9]) Același contraexemplu a fost utilizat în [12] pentru a dovedi nevalabilitatea unei evaluări propuse de N. Ia. Leașcenko.

Se vede ușor că toate sistemele liniare cu coeficienți constanți

$$\frac{dy}{dt} = A(s)\, y \tag{3.6}$$

(s parametru) admit aceeași ecuație caracteristică (independentă de parametrul s) :

$$\lambda^2 + 1/2 \;\lambda + 1/2 = 0,$$

avînd rădăcini complex conjugate cu parte reală negativă (Re $\lambda = -1/4$). Deci soluțiile $y = 0$ ale tuturor sistemelor (3.6) sînt uniform asimptotic stabile. În același timp, sistemul neautonom (3.5) admite soluția instabilă

$$x = \begin{pmatrix} -e^{t/2} \cos t \\ e^{t/2} \sin t \end{pmatrix}.$$

4. REGIMUL DE ZBOR VARIABIL. VARIAȚIE OARECARE A PARAMETRILOR

4.1. METODA FUNCȚIEI LUI LEAPUNOV

Dacă variația parametrilor sistemului nu este nici mică, nici lentă în sensul precizat în paragrafele precedente sau dacă nu se dispune de o metodă de evaluare efectivă, se impune considerarea directă a problemei stabilității sistemelor neautonome prin metode specifice. Metoda funcției lui Leapunov este o asemenea metodă specifică, poate singura de care dispune teoria generală de o valabilitate cu totul universală. Dar, tocmai datorită acestui caracter universal, ea nu furnizează imediat scheme practice, procedee efective de calcul pentru un caz concret dat. Devine o chestiune de investigație găsirea pentru fiecare caz studiat a unei funcții Leapunov cît mai convenabile, deci cît mai apropiate de cea optimă. Alegerea acestei funcții este adesea mult ușurată de o bună cunoaștere a fenomenului fizic. Odată găsită, funcția lui Leapunov permite nu numai punerea în evidență a stabilității, ci și evaluarea soluției într-un interval de timp finit. Astfel, chiar în caz de instabilitate se pot obține cu ajutorul ei informații privind comportarea soluției : caracterul instabilității, eficacitatea potențială a stabilizării prin comenzi etc.

În § 4.2 se va căuta o funcție Leapunov pentru cazul zborului cu viteza variabilă. Cu ajutorul acestei funcții se va deduce o condiție suficientă de stabilitate asimptotică uniformă (§ 4.3) și o evaluare a oscilației incidenței induse de o perturbație (§ 4.4).

4.2. STABILITATEA LONGITUDINALĂ A ZBORULUI CU VITEZA VARIABILĂ. ECUAȚIILE CONSIDERATE

Se va căuta să se determine unele condiții care să asigure amortizarea oscilației incidenței unui avion în jurul valorii sale neperturbate pentru cazul zborului rectiliniu orizontal cu viteză variabilă și să se evalueze amplitudinea acestei oscilații în funcție de timp. Se va considera cazul controlului parțial simultan al atitudinii longitudinale a aparatului și al vitezei de zbor. După cum s-a amintit în § 2.5, în acest caz de control parțial o mișcare de bază staționară este asimptotic stabilă. O concluzie analogă nu este apriori evidentă în cazul zborului cu viteză variabilă și, pentru a o pune în evidență, trebuie să se recurgă la metodele specifice despre care s-a vorbit în paragraful precedent.

Sistemul auxiliar liniarizat corespunzător constrîngerii simultane a unghiului de tangaj și a vitezei de zbor coincide cu ecuațiile simplificate ale mișcării perturbate longitudinale rapide în jurul centrului de greutate al aparatului [10]). Cu sistemul adimensional de tipul folosit la NACA (NASA) [11]), și anume cel indicat în tabela 1 [12])

Tabela 1

Mărimea dimensională	Unitatea adoptată	Mărimea adimensională
t	$\bar{c}/2V_{max}$	$\hat{t}$
V	V_{max}	$\hat{V}$
q, Δq	$2\ V_{max}/\bar{c}$	$\hat{q}$, $\Delta\hat{q}$
D, L	$\frac{1}{2}\rho V^2 S$	C_D, C_L
M	$\frac{1}{2}\rho V^2 S\bar{c}/2$	C_m
m	$\rho Sc/2$	μ
B	$\rho S\,(c/2)^3$	i_B

sistemul auxiliar liniarizat în cazul vitezei neperturbate variabile, dacă se neglijează variația valorilor nepeturbate ale coeficienților aerodinamici și ale derivatelor aerodinamice respective, va fi

$$\frac{d\Delta\alpha}{d\hat{t}} = -a(\hat{t})\Delta\alpha + \Delta\hat{q},$$
$$\frac{d\Delta\hat{q}}{d\hat{t}} = -b(\hat{t})\Delta\alpha - c(\hat{t})\ \Delta\hat{q}, \tag{4.1}$$

[10]) Acestea sînt, în cazul mișcării de bază uniforme, ecuațiile corespunzătoare ipotezelor cunoscute ale lui B. Melvill Jones descriind mișcarea de amortizare rapidă a oscilației de incidență (*rapid incidence adjustment*) (vezi [13], p. 96–98).

[11]) Vezi [14], p. 128–132.

[12]) Pentru semnificația simbolurilor utilizate, vezi lista principalelor notații, dată la sfîrșitul articolului.

unde

$$a(\hat{t}) = \frac{C_{L_\alpha} + C_D}{2} \hat{V} + \frac{1}{\hat{V}} \frac{d\hat{V}}{d\hat{t}},$$

$$b(\hat{t}) = -\frac{C_{m_\alpha}}{4 i_B} \hat{V}^2 + \frac{C_{m_{\dot{\alpha}}} (C_{L_\alpha} + C_D)}{4 i_B \mu} \hat{V}^3 + \frac{C_{m_{\dot{\alpha}}}}{2 i_B} \hat{V} \frac{d\hat{V}}{d\hat{t}},$$

$$c(\hat{t}) = -\frac{1}{2 i_B} (C_{m_q} + C_{M_{\dot{\alpha}}}) V^2.$$

Se va considera situația cea mai defavorabilă din punctul de vedere al stabilității, aceea a vitezelor mici. În particular, vom presupune că se poate neglija termenul al doilea din expresia lui $b(\hat{t})$ conținînd $\hat{V}$ la puterea a treia în comparație cu primul care conține în factor $\hat{V}^2$ [13]).

Se presupune, de asemenea, că momentul static de readucere longitudinal (valoarea absolută a coeficientului de stabilitate statică C_{m_α}) este destul de mare pentru ca $b(\hat{t})$ să fie tot timpul pozitiv. Expresia aproximativă a coeficientului $b(\hat{t})$ va fi deci

$$b(\hat{t}) \cong -\frac{C_{m_\alpha}}{2 i_B} \hat{V}^2 + \frac{C_{m_{\dot{\alpha}}}}{2 i_B} \hat{V} \dot{\hat{V}}. \tag{4.2}$$

Parametrul esențial al acestui coeficient este C_{m_α} (măsura momentului static de readucere [14]), avînd, analog cazului $V = \text{const.}$, o influență dominantă asupra alurii mișcării perturbate, în particular asupra aceea a variației incidenței.

Să presupunem pentru fixarea ideilor că $\dot{\hat{V}} < 0$ (zbor frînat). Pentru $\dot{\hat{V}} > 0$ s-a demonstrat [15] că avioanele static stabile se bucură și de stabilitate dinamică în faza rapidă a mișcării perturbate.

Se va construi o funcție Leapunov, ținîndu-se seama de parametrul C_{m_α}, de forma

$$v = b(\hat{t}) \Delta\alpha^2 + \Delta\hat{q}^2, \tag{4.3}$$

a cărei derivată totală în raport cu $\hat{t}$ în virtutea sistemului (4.1) nu va conține termen în $\Delta\alpha \Delta\hat{q}$:

$$\dot{v} = (\dot{b} - 2ab) \Delta\alpha^2 - 2c \Delta\hat{q}^2. \tag{4.4}$$

[13]) Diferența ca ordin de mărime dintre acești doi termeni este accentuată de valoarea ridicată, în comparație cu celelalte mărimi ce figurează în expresie, a densității relative μ a avionului.

[14]) Pentru $V = \text{const.}$, afirmația este evidentă. Ea rămîne valabilă și în cazul vitezei variabile pe baza ipotezei că $b(\hat{t})$ rămîne pozitiv oricare ar fi valorile lui $\hat{V}$ și $\dot{\hat{V}}$.

4.3. CRITERII DE STABILITATE

Se presupune că funcțiile $b(\hat{t})$, $|\dot{b} - 2ab|$ și c sînt mărginite pe semiaxa $\hat{t} \geqslant \hat{t}_0$. Fie b_1 marginea inferioară a lui b. Avem, evident, $v \geqslant w(\Delta\alpha, \Delta\hat{q}) = b_1 \Delta\alpha^2 + \Delta\hat{q}^2$; funcția w este pozitivă pentru variabilele $\Delta\alpha$ și $\Delta\hat{q}$ diferite de zero și se anulează pentru $\Delta\alpha = \Delta\hat{q} = 0$. Atunci, conform unei teoreme a lui Leapunov, stabilitatea soluției banale a sistemului (4.1) este asigurată dacă $\dot{v}$ în virtutea acestui sistem (vezi (4.4)) este negativă pentru $\hat{t}$, $\Delta\alpha$ și $\Delta\hat{q}$ arbitrare și se anulează pentru $\Delta\alpha = \Delta\hat{q} = 0$ oricare ar fi $\hat{t}$. Deci criteriul de stabilitate a mișcării parțial controlate considerate va fi dat de sistemul de inegalități

$$\begin{aligned} c &> 0, \\ \dot{b} - 2ab &> 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Inegalitatea $c > 0$ exprimă condiția legată de amortizarea aerodinamică (derivatele de rotație C_{m_q} și $C_{m_{\dot{\alpha}}}$ negative).

Cu notațiile

$$\frac{C_{L_\alpha} + C_D}{2\mu} = \nu \qquad -\frac{C_{m_\alpha}}{2i_B} = \sigma \qquad -\frac{C_{m_{\dot{\alpha}}}}{2i_B} = \tau,$$

cea de-a doua inegalitate (4.5) devine

$$\tau\dot{\hat{V}}^2 - \tau\hat{V}\ddot{\hat{V}} - 2\nu\hat{V}b < 0$$

sau încă, împărțind termen cu termen prin $-\tau\hat{V}^2$ ($\tau > 0$, deoarece $C_{m_{\dot{\alpha}}} < 0$),

$$\frac{\hat{V}\ddot{\hat{V}} - \dot{\hat{V}}^2}{\hat{V}^2} + 2\nu\frac{b}{\hat{V}} > 0.$$

Notînd $\omega = \ln \hat{V}$, avem imediat

$$\ddot{\omega} + \frac{2\nu}{\tau} b e^{-\omega} > 0 \tag{4.6}$$

sau, înlocuind b prin expresia sa în funcție de ω,

$$\ddot{\omega} - k_1 e^{\omega}\dot{\omega} + k_2 e^{\omega} > 0, \tag{4.7}$$

unde $k_1 = 2\nu$, $k_2 = \dfrac{2\nu\sigma}{\tau}$. Această inegalitate reprezintă o condiție suficientă de stabilitate. Întrucît $b > 0$ prin ipoteză, condiția (4.6) este satisfăcută dacă $\ddot{\omega} > 0$ oricare ar fi valorile lui ω și $\dot{\omega}$, sau, ceea ce revine

la același lucru, ale lui $\hat{V}$ și $\dot{\hat{V}}$. Deci pierderea stabilității în zbor frînat nu este determinată de valoarea decelerației, ci de felul cum variază aceasta : în cazul unei variații suficient de line a decelerației, caracterizată printr-o alură a curbei $\omega = f(\hat{t})$ ca cea din figura 1, stabilitatea este asigurată chiar și pentru valori ridicate ale lui $|\dot{\hat{V}}|$. Pentru ca inegalitatea (4.6) să nu aibă loc, trebuie ca derivata a doua a logaritmului vitezei adimensionale $\ddot{\omega}$ să fie negativă (fig. 2) și, în plus, să avem

$$|\ddot{\omega}| > \frac{2\nu}{\tau} b e^{-\omega}. \tag{4.8}$$

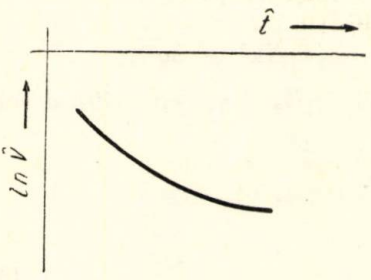


Fig. 1. — Zbor frînat ($\ddot{\omega} > 0$)

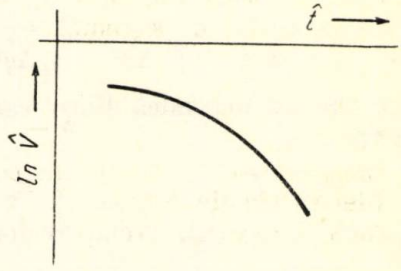


Fig. 2.— Zbor frînat ($\ddot{\omega} < 0$)

Pentru calcule estimative aproximative, inegalitatea (4.6) poate fi înlocuită prin următoarea

$$\ddot{\omega} + k e^{-\omega} > 0, \tag{4.9}$$

unde $k = \frac{2\nu b_1}{\tau}$ (b_1 este marginea inferioară a funcției b pentru $\hat{t} \geqslant \hat{t}_0$), și atunci condiția (4.8) devine

$$|\ddot{\omega}| > k e^{-\omega}. \tag{4.10}$$

Dacă $\ddot{\omega} < 0$ și, în plus, are loc inegalitatea (4.8) (sau (4.10)), zborul orizontal rectiliniu frînat poate fi instabil (fără însă a fi în mod necesar).

Notă. Am insistat în § 4.1 asupra importanței alegerii funcției lui Leapunov, întrucît metoda nu furnizează decî tcondiții suficiente. Astfel, folosind o funcție Leapunov mai îndepărtată de cea optimă, am ajuns [15] la concluzii mai pesimiste decît cele rezultate mai sus. Astfel, pentru $\dot{\hat{V}} < 0$ s-a utilizat drept funcție Leapunov forma pătratică $\Delta\alpha^2 + b\Delta\hat{q}^2$, de unde rezultă un criteriu de stabilitate care impune o margine superioară valorii absolute a decelerației, deci o condiție mai rigidă decît cea obținută mai sus.

4.4. O EVALUARE A OSCILAȚIEI INCIDENȚEI

Funcțiile b, c și $|\dot{b} - 2ab|$ fiind prin ipoteză mărginite, și anume

$$b_1 \leqslant b(\hat{t}) \leqslant b_2 \qquad b_1 > 0, \qquad b_2 > 0,$$

$$\beta_1 \leqslant |\dot{b} - 2ab| \leqslant \beta_2,$$

$$\gamma_1 \leqslant c(\hat{t}) \leqslant \gamma_2,$$

funcția Leapunov v variază în domeniul

$$b_1 \Delta\alpha^2 + \Delta\hat{q}^2 \leqslant v \leqslant b_2 \Delta\alpha^2 + \Delta\hat{q}^2, \tag{4.11}$$

iar derivata totală $\dot{v}$ pentru sistemul (4.1) poate fi majorată în felul următor :

$$\dot{v} \leqslant -\beta_1 \Delta\alpha^2 - \gamma_1 \Delta\hat{q}^2 \leqslant -\varkappa (b_2 \Delta\alpha^2 + \Delta\hat{q}^2),$$

unde $\varkappa$ este cea mai mică dintre cantitățile β_1/b_2 și γ_1, sau, ținînd seama de (4.11),

$$\dot{v} \leqslant -\varkappa v.$$

Dacă $v_0 = v(\hat{t}_0)$, avem, evident,

$$v \leqslant v_0 e^{-\varkappa(\hat{t}-\hat{t}_0)}, \tag{4.12}$$

de unde evaluarea incidenței va fi dată de semiaxa respectivă a elipsei mobile

$$b_1 \Delta\alpha^2 + \Delta\hat{q}^2 = v_0 e^{-\varkappa(\hat{t}-\hat{t}_0)},$$

adică de formula

$$|\Delta\alpha| \leqslant \sqrt{\frac{b(\hat{t}_0)}{b_1}} |\Delta\alpha_0| e^{-\varkappa/2(\hat{t}-\hat{t}_0)}. \tag{4.13}$$

În cazul particular al zborului uniform, $b = \text{const.}$ și deci $b(\hat{t}_0) = b_1$. Dacă, în plus, $\gamma_1 = c < \beta_1 / b_2 = 2a$, rezultă o evaluare valabilă, dar grosolană, anume

$$|\Delta\alpha| \leqslant |\Delta\alpha_0| e^{-c/2(\hat{t}-\hat{t}_0)},$$

amplitudinea exactă fiind $|\Delta\alpha_0| e^{-\frac{a+c}{2}(\hat{t}-\hat{t}_0)}$. Dacă, dimpotrivă, $2a \geqslant c$, rezultă evaluarea

$$|\Delta\alpha| \leqslant |\Delta\alpha_0| e^{-a(\hat{t}-\hat{t}_0)}.$$

Dacă $2a = c$, această ultimă evaluare este exactă în cazul particular clasic al sistemelor cu coeficienți constanți.

Primită la redacție la 12 aprilie 1965.

PRINCIPALELE NOTAȚII FOLOSITE

t — timpul;
V — viteza aerodinamică;
α — incidența avionului;
q — viteza unghiulară de tangaj;
D — rezistența la înaintare a avionului;
L — portanța avionului;
M — momentul de tangaj;
C_D — coeficientul de rezistență la înaintare;
C_L — coeficientul de portanță;
C_m — coeficientul de moment longitudinal;
C_{L_α} — panta instantanee a curbei C_L funcție de incidență;
C_{m_α} — coeficientul de stabilitate statică;
C_{m_q} — coeficientul de amortizare longitudinală;
$C_{m_{\dot\alpha}}$ — derivata de rotație legată de influența întîrzierii proceselor aerodinamice implicate de schimbările incidenței;
m — masa avionului;
B — momentul de inerție longitudinal al avionului;
S — suprafața de referință;
c — coarda de referință (coarda aerodinamică medie);
μ — densitatea relativă a avionului raportată la coarda de referință;
i_B — momentul de inerție longitudinal adimensional raportat la $\bar{c}$;
ρ — densitatea atmosferică.

Simbolul „Δ" (delta) precedînd simbolurile α, q etc. indică deviații induse de o perturbație ale mărimilor respective.

Simbolul „$\hat{}$" (semnul grafic al accentului circumflex) indică forma adimensională a mărimii simbolului căreia se aplică.

BIBLIOGRAFIE

1. Н. Н. Баутин, *Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости*. Ленинград — Москва, Гостехиздат, 1949.
2. A. Halanay, *Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*. Edit. Acad. R.P.R., 1963.
3. T. Hacker, *Stability of partially controlled motions of an aircraft*. J. of the Aerospace Sci., **28**, *1* (1961).
4. W. J. Duncan, *The principales of the Control and Stability of Aircrafts*. Cambridge, University Press, 1952.
5. Е. П. Гроссман, *Продольная динамическая устойчивость нейтральных самолетов*. Тр. ЦАГИ, 1935, p. 217.
6. А. А. Лебедев, Л.С.Черновровкин, *Динамика полета беспилотных летательных аппаратов*. Москва, Гостехиздат — Оборонгиз, 1962.
7. R. Bellman, *Stability Theory of Differential Equations*. New York, McGraw Hill, 1953.
8. L. Flatto, N. Levinson, *Periodic solutions of singularly perturbed differential systems*. J. Rat. Mech. Anal., **4**, p. 943—950 (1955).
9. J. K. Hale, *Functional-differential equations with parameters. Contributions to Differential Equations*, vol. I, nr. 4, p. 401—410.

10. Li Yüeh-Sheng, *The boundedness, stability and error estimate for the solutions of non-linear differential equations.* Acta Mathematica Sinica, **12** (1962) (tradus în Chinese Math., **3**, p. 34—42 (1963).
11. L. Markus, H. Yamabe, *Global stability criteria for differential systems.* Osaka Math. J., **12**, p. 305—317 (1960).
12. J. K. Hale, A. P. Stokes, *Conditions for the stability of nonautonomous differential equations.* J. Math. Anal. and. Appl., **3**, p. 50—59 (1961).
13. B. Melvill Jones, *Dynamics of Airplane* (W. F. Durand, Editor-in-Chief, *Aerodynamic Theory*, vol. V, Div. N). Berlin, J. Springer, 1935.
14. B. Etkin, *Dynamics of Flight. Stability and Control.* New York—Londra, J. Wiley & Sons, 1962 (second printing).
15. T. Hacker, *Contribuții la studiul stabilității longitudinale a avionului în evoluțiile cele mai defavorabile.* St. cerc. mec. apl., **6**, *3—4*, p. 269—297 (1955).

PROFIL DE ARIPĂ ÎN SCURGERE NEOMOGENĂ [1])

de JAN POLÁŠEK
Institutul de cercetări pentru termotehnică, Praga

În lucrare se prezintă o teorie a profilelor cu curbură mică în cîmpul de scurgere neomogen. Această teorie este dezvoltată ca o teorie „de ordinul doi", considerîndu-se coeficienții din dezvoltările pentru distribuția circulației a surselor și a grosimilor precum și coeficienții din dezvoltarea formei scheletului ca fiind „de ordinul unu", neglijîndu-se în toate relațiile numai termeni începînd cu ordinul trei. Rezultatele principale ale lucrării sînt adaptate, în capitolul 7, necesităților calculului numeric, astfel încît să fie aplicabile fără o cunoaștere mai profundă a teoriei.

NOTAȚII

c	— coarda scheletului de profil;
y_s	— ordonata scheletului de profil;
t	— distribuția grosimii a profilului (măsurată începînd de la schelet);
y_{med}	— ordonata medianei profilului;
t	— distribuția simetrică a grosimilor (măsurată de la mediană);
$x_p\ y_p$	— coordonatele punctelor de profil;
R_1	— raza de curbură a bordului de atac;
R_2	— raza de curbură a bordului de fugă;
ϑ	— variabila trigonometrică auxiliară (identică cu unghiul polar în planul complex auxiliar);
u, v	— componentele vitezei;
W_k	— viteza de pe contur;
U_0	— viteza de bază;
Γ	— circulația totală pe profil;
γ	— distribuția circulației;

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. techn.-Mécanique appliquée, 9, 3 (1964) (în limba germană).

q — distribuţia surselor ;
A_n, C_n — coeficienţii în dezvoltarea grosimii profilului ;
B_n — coeficienţii în dezvoltarea factorilor direcţiei scheletului ;
B_n — coeficienţii în dezvoltarea factorului de direcţie a medianei ;
g_n — coeficienţii în dezvoltarea distribuţiei circulaţiei ;
q_n — coeficienţii în dezvoltarea distribuţiei surselor ;
μ_n, ν_n — coeficienţii în dezvoltarea componentelor vitezei primare.

Planul complex z :

Se folosesc aceleaşi notaţii ca în planul fizic, cu deosebirea că toate mărimile se vor considera adimensionale. Lungimile vor fi reduse la jumătatea lungimii corzii ($c/2$), iar vitezele la viteza fundamentală U_0 ;

w — viteza complexă în planul z,
u_γ, v_γ — componentele vitezei induse de vîrtejuri,
u_q v_q — componentele vitezei induse de surse,
u_k v_k — componentele vitezei de pe contur.

Planul complex Z :

X, Y — coordonatele ortogonale,
X_p Y_p — coordonatele punctelor de pe profil,
$\mathfrak{W}$ — viteza complexă ;
U, V — componentele vitezei primare în plan,
U_γ V_γ — componentele vitezei induse de vîrtejuri,
U_q V_q — vitezele induse de surse,
U_k V_k — componentele vitezei de pe contur.

Planul complex ξ :

ρ, ϑ — coordonatele polare,
ε — distanţa punctului de la cercul unitar ($\varepsilon = \rho - 1$),
w_ξ — viteza complexă din planul ξ,
v_ρ v_ϑ — componentele de viteză radială şi azimutală.

1. INTRODUCERE

Ideea lui Birnbaum ca pentru calcularea scurgerii în jurul unui profil subţire să se înlocuiască aceasta printr-o distribuţie continuă de vîrtejuri s-a dovedit a fi extrem de rodnică, lucrarea originală a lui Birnbaum [1] fiind urmată de o serie de lucrări asemănătoare [2]—[6], care au adus atît îmbunătăţiri, cît şi aplicaţii la cazurile cele mai diferite, începînd cu scurgerea în jurul aripii subţiri în cîmpul de scurgere omogen, pînă la scurgerea în jurul aripii în cîmpul de scurgere neomogen sau nestaţionar şi pînă la rezolvarea palelor de turbine şi a reţelelor de turbine.

Un alt progres l-a constituit considerarea grosimii palelor, obţinută printr-o distribuţie convenabilă a surselor pe scheletul profilului.

Pentru calculul scurgerii în jurul profilelor de curbură mică se introduce o altă simplificare, descompunîndu-se vîrtejurile şi sursele pe coarda

profilului în locul scheletului. În urma acestor simplificări, calculele devin accesibile și unor persoane fără cunoștințe matematice mai profunde.

Această așa-numită teorie de ordinul întîi dă rezultate foarte bune pentru relația dintre forma unui profil infinit de subțire și distribuția circulației. Cu ocazia calculului vitezei pe contur și a influenței grosimii finite, în special în apropierea bordului de atac apar anumite dificultăți și neprecizii, pe care autorii încearcă să le diminueze, introducînd diferiți factori de corecție.

Cercetarea matematică mai riguroasă a arătat că la stabilirea relației dintre forma profilului de grosime infinit mică și distribuția circulației în cîmpul de scurgere omogen au fost neglijați, de fapt, numai termenii de „ordinul trei", deoarece termenii de „ordinul doi" dispar în mod automat (ceea ce se poate constata printr-o comparație cu rezultatele lucrării [6] pentru cazul profilului de curbură mică în cîmpul de scurgeri omogen), în timp ce în celelalte cazuri, mai ales pentru calculul distribuției de viteze de pe contur și al influenței grosimii finite a profilului, termenii neglijați de „ordinul doi" au importanță, exercitînd o influență însemnată în special în apropierea bordului de atac.

Pentru motivele expuse, în lucrarea de față vom elabora o teorie completă „de ordinul doi" pentru scurgerea în jurul profilului de curbură mijlocie și grosime nu prea mare în cîmpul de scurgere neomogen.

Lucrarea cuprinde două părți : în prima parte va fi dezvoltată teoria, pentru ca în partea a doua, din rezultatele teoretice, să se deducă formule pentru calculul numeric, aplicate apoi la rezolvarea practică a unor cazuri particulare.

Mai întîi vom calcula scurgerea în jurul unui profil simetric și al unui profil curb în cîmpul omogen și apoi scurgerea în jurul aceluiași profil dispus într-o rețea.

I. CONSIDERAȚII TEORETICE

2. PROFIL DE GROSIME INFINIT MICĂ ÎN CÎMPUL DE SCURGERI NEOMOGEN

Profilul se consideră dispus în planul complex $z = x + iy$, astfel încît coarda sa să fie pe axa x, iar originea coordonatelor să fie în mijlocul acesteia. Lungimile se consideră adimensionale și se reduc la jumătatea corzii ($c/2$). Ecuația profilului va fi

$$y = y_s(x), \quad -1 \leqq x \leqq 1, \tag{2.1}$$

unde

$$y_s(-1) = y_s(1) = 0. \tag{2.2}$$

În locul variabilei x se introduce o variabilă trigonometrică auxiliară ϑ, astfel încît

$$x = -\cos\vartheta, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi. \tag{2.3}$$

În vederea calculelor care urmează este indicat să se considere derivata funcției $y_s(x)$ sub forma unei serii trigonometrice

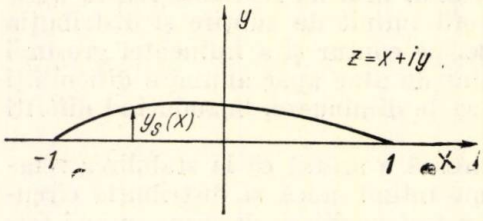


Fig. 1

$$\frac{dy_s}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\vartheta. \tag{2.4}$$

În cazul acesta, expresia formei profilului va fi

$$y_s = \frac{1}{2}\left\{B_0(1-\cos\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n-1}-B_{n+1}}{n}(1-\cos n\vartheta)\right\}. \tag{2.5}$$

În raport cu ecuațiile (2.2), coeficienții B_n trebuie să satisfacă condiția

$$B_0 = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{4m^2-1}. \tag{2.6}$$

De asemenea, vom exprima prin serii trigonometrice și componentele vitezei cîmpului de scurgere neomogen primar în punctele profilului, precum și densitatea de circulație (redusă la unitatea de lungime a corzii), a repartiției continue a firelor de vîrtejuri de pe profil, și anume :

$$u = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\mu_n \cos n\vartheta, \tag{2.7}$$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty}\nu_n \cos n\vartheta, \tag{2.8}$$

$$\gamma = 2\left(g_0 \operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin n\vartheta\right)^{2)}. \tag{2.9}$$

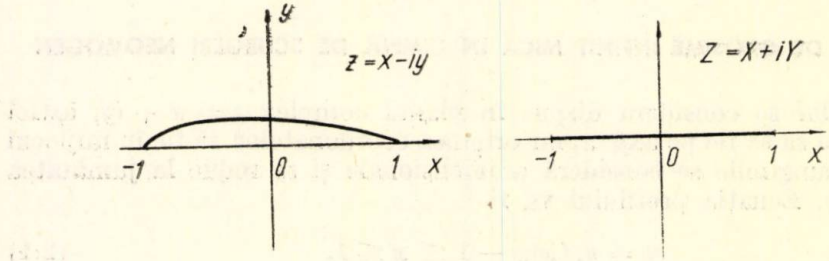


Fig. 2

Vîrtejurile și densitatea de circulație se consideră adimensionale și reduse la o viteză de bază U_0 convenabilă. Coeficienții din dezvoltările

---

2) Densitatea de circulație pe profil este $\gamma_s = \dfrac{\gamma}{[1+(dy_s/dx)^2]^{1/2}}$, conform ipotezei cu privire la ordinul de mărime al mărimilor γ și dy_s/dx diferența între γ_s și γ este de ordinul trei, astfel încît, în cadrul teoriei noastre, să putem pune $\gamma_s = \gamma$.

(2.4), (2.7), (2.8) și (2.9) să fie de ordinul întîi, și anume în sensul ca mărimile μ_0, γ_0, $n_3\, B_n$, $n_3\, \mu_n\, n_3\, \nu_n$ și $n_3\, g_0$ să fie de ordinul întîi față de 1.

Lucrarea este concepută ca o teorie de ordinul doi, în sensul că produsele a două mărimi de ordinul întîi sînt considerate peste tot ca mărimi de ordinul doi, iar produsele a trei mărimi de ordinul întîi se neglijează. Practic este suficient să se aproximeze dezvoltările trigonometrice (2.4), (2.7) și (2.8) cu poligoane trigonometrice de un grad relativ mic.

Introducem planul complex $Z = X + iY$ și funcția complexă

$$z = Z + if(Z),\text{[3]} \tag{2.10}$$

care reprezintă planul Z pe planul z, astfel încît segmentul $-1 \leqq X \leqq 1$ al axei reale din planul Z să se afle pe curba y_s din planul z. De asemenea, introducem în planul Z, pentru variabila X de pe segmentul $-1 \leqq X \leqq 1$, $Y = 0$, o variabilă trigonometrică auxiliară :

$$X = -\cos\vartheta, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi. \tag{2.11}$$

Funcția $f(Z)$ poate fi scrisă, de exemplu, sub forma

$$f(Z) = (1 - Z^2) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n Z^n. \tag{2.12}$$

Între coeficienții β_n și coeficienții B_n din dezvoltarea factorului de direcție (2.4) există următoarele relații liniare :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= B_0 - B_2 + B_4 - \ldots, \\ 2(\beta_0 - \beta_2) &= B_1 - 3B_3 + 5B_5 - \ldots, \\ -3(\beta_1 - \beta_3) &= 4B_2 - 16B_4 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2.13}$$

Toate considerațiile urmînd să fie făcute în planul Z, viteza cîmpului de scurgere primar va trebui reprezentată mai întîi din planul z în planul Z. Pentru reprezentarea vitezei primare vom avea

$$W = U - iV = (u - iv)\frac{dz}{dZ}. \tag{2.14}$$

[3]) Prin transformarea (2.10), cîmpul de scurgeri din planul z se reprezintă pe un cîmp de scurgeri oarecare din planul Z, care este o transformare a cîmpului de scurgeri din planul z, sau, — exprimînd mai simplu, „cîmp de scurgeri din planul Z".

Derivata funcției de transformare pe segmentul va fi

$$\frac{dz}{dZ} = 1 + i\frac{df}{dZ} = 1 + i\frac{dy_s}{dx}, \tag{2.15}$$

astfel încît expresiile componentelor transformatei vitezei primare pe segmentul $-1 \leqq X \leqq 1$ al axei reale din planul Z vor fi de forma

$$\begin{aligned} U &= u + v\frac{dy_s}{dx}, \\ V &= v - u\frac{dy_s}{dx}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Introducînd (24), (2.7) și (2.8), rezultă

$$\begin{aligned} U = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \cos n\vartheta + \frac{1}{2}\left(\nu_0 B_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k B_k\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} \nu_k B_{n-k} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (\nu_k B_{n+k} + \nu_{n+k} B_k)\right] \cos n\vartheta, \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} V = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n - B_n \cos n\vartheta - \frac{1}{2}\left(\mu_0 B_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k B_k\right) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} \mu_k B_{n-k} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k B_{n+k} + \mu_{n+k} B_k)\right] \cos n\vartheta. \end{aligned}$$

Viteza complexă din planul z, indusă de vîrtejurile (2.9) repartizate pe profilul (2.5), este

$$u_\gamma - iv_\gamma = \frac{i}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\gamma(x_0)\,dx_0}{z - z_0}. \tag{2.18}$$

Prin transformarea (2.12), viteza (2.18) se transformă în

$$U_\gamma - iV_\gamma = \left(1 + i\frac{df}{dZ}\right)\frac{i}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\gamma(X_0)\,dX_0}{X - X_0 + i\,[Y + f(Z) - f(X_0)]}. \tag{2.19}$$

Pe segmentul $-1 \leqq X \leqq 1$ de pe axa X avem

$$U_\gamma - iV_\gamma = \left(1 + i\frac{dy_s}{dx}\right)\frac{i}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\gamma(X_0)\,dX_0}{X - X_0 + i(y_s - y_{s0})}. \tag{2.20}$$

Expresia (2.20) se aduce la forma

$$U_\gamma - iV_\gamma = \left(1 + i\frac{dy_s}{dx}\right)\frac{i}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\gamma(X_0)\,dX_0}{(X - X_0)\left(1 + i\dfrac{dy_s}{dx} + i\dfrac{y_s - y_{s0}}{X - X_0} - i\dfrac{dy_s}{dx}\right)}, \tag{2.21}$$

în care expresia sub semnul de integrală se dezvoltă după puterile lui

$$\left\{\left(1+i\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}\left(\frac{y_s-y_{s0}}{X-X_0}-i\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}x}\right)\right\}.$$

Neglijînd în expresia obținută termenii începînd cu ordinul trei, putem scrie

$$U_\gamma - iV_\gamma = \frac{i}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[1+i\left(\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}x}-\frac{y_s-y_{s0}}{X-X_0}\right)\right]\frac{\gamma(X_0)\,\mathrm{d}X_0}{X-X_0},$$

sau, introducînd variabila ϑ conform (2.11),

$$U_\gamma - iV_\gamma = \frac{i}{2\pi}\int_0^\pi\left\{1+i\left[\sum_{n=0}^{\infty}B_n\cos n\vartheta-\frac{1}{2}\left(B_0+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n-1}-B_{n+1}}{n}\cdot\frac{\cos n\chi-\cos n\vartheta}{\cos\chi-\cos\vartheta}\right)\right]\right\}\cdot \tag{2.22}$$

$$\cdot\left\{2g_0(1+\cos\chi)+\sum_{n=1}^{\infty}g_n[\cos(n-1)-\chi\cos(n+1)\chi]\right\}\frac{\mathrm{d}\chi}{\cos\chi-\cos\vartheta}.$$

Integralele infinite din membrul al doilea al ecuației (2.22) trebuie considerate în sensul valorilor principale după Cauchy. Calculul lor a fost prezentat în mod detaliat în [6], anexa I și IV, astfel încît vom reda aici numai rezultatul final :

$$U_\gamma - iV_\gamma \pm\left(g_0\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}g_n\sin n\vartheta\right)+i\left(g_0-\sum_{n=1}^{\infty}g_n\cos n\vartheta\right)+$$

$$+\left[\frac{1}{2}B_1\left(g_0+\frac{1}{2}g_1\right)+\frac{1}{3}B_2\left(g_0+\frac{1}{2}g_2\right)+\frac{1}{2}B_3\left(g_0+\frac{1}{4}g_1\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{7}{15}B_4g_0+\frac{1}{2}B_5g_0+\dots\right]+$$

$$+\cos\vartheta\cdot\left[B_2\left(\frac{3}{4}g_0+\frac{2}{3}g_1\right)+B_3\left(g_0+\frac{1}{2}g_2\right)+\right. \tag{2.23}$$

$$\left.+B_4\left(\frac{16}{15}g_0+\frac{2}{15}g_1\right)+B_5g_0+\dots\right]+$$

$$+\cos 2\vartheta\cdot\left[B_3\left(\frac{3}{2}g_0+\frac{3}{4}g_1\right)+\frac{6}{5}B_4g_0+\frac{7}{6}B_5g_0+\dots\right]+$$

$$+\cos 3\vartheta\cdot\left[B_4\left(\frac{8}{5}g_0+\frac{4}{5}g_1\right)+\frac{4}{3}B_5g_0+\dots\right]+\cos 4\vartheta\cdot\frac{5}{3}B_5g_0+\dots$$

Semnul [+] este valabil pentru partea superioară a segmentului $-1 \leqq X \leqq 1$, iar semnul [−] pentru partea inferioară a acestui segment. Pentru a se evita scrierea celor două semne, vom considera în cele ce urmează unghiul ϑ în intervalul $< -\pi, \pi >$; valorilor pozitive ale lui ϑ le va corespunde atunci partea superioară, iar valorilor negative partea inferioară a acestui segment.

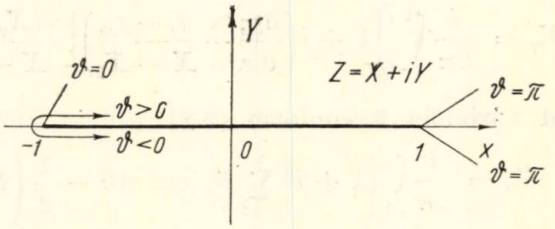


Fig. 3

Avînd în vedere că segmentul $-1 \leqq X \leqq 1$ este situat pe linia de scurgere, componenta Y a vitezei trebuie să fie egală cu zero și, în consecință,

$$V + V_\gamma = 0. \tag{2.24}$$

Introducînd în (2.24) pentru V și $V\gamma$ expresiile (2.17) și (2.23) și egalînd coeficienții cosinușilor termen cu termen, rezultă un sistem de ecuații care dă relația dintre forma profilului și distribuția circulației :

$$g_0 = -B_0 + \nu_0 - \frac{1}{2}\mu_0 B_0 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k B_k, \tag{2.25}$$

$$g_n = B_n - \nu_n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\mu_k B_{n-k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(\mu_k B_{n+k} + \mu_{n+k} B_k), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Se observă că sistemul (2.25) rezultă și din sistemul (2.11) din lucrarea [6] dacă se pune $\omega = 0$.

Viteza pe contur de pe profil în planul z se obține din componenta X a vitezei pe axa reală din planul Z, împărțind această componență la modulul $\left[1 + \left(\frac{dy_s}{dx}\right)^2\right]^{1/2}$ al funcției de transformare

$$w_s = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dy_s}{dx}\right)^2\right]^{1/2}} \cdot (U + U_\gamma). \tag{2.26}$$

Introducînd (2.4), (2.17) și (2.13) în ecuația (2.26) și limitîndu-ne la termenii de ordinul doi inclusiv, rezultă :

$$w_s = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \cos n\vartheta + \left[g_0 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin n\vartheta \right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\nu_0 B_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k B_k \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \nu_k B_{n-k} + \sum_{k=0}^{\infty} (\nu_k B_{n+k} + \nu_{n+k} B_k) \right] \cos n\vartheta -$$

$$- \frac{1}{4}\left(B_0^2 + \sum_{k=0}^{\infty} B_k^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} B_k B_{n-k} + \sum_{k=0}^{\infty} B_k B_{n+k} \right] \cos n\vartheta +$$

$$+ \left[\frac{1}{2} B_1 \left(g_0 + \frac{1}{2} g_1 \right) + \frac{1}{3} B_2 \left(g_0 + \frac{1}{2} g_2 \right) + \frac{1}{2} B_3 \left(g_0 + \frac{1}{4} g_1 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{7}{15} B_4 g_0 + \frac{1}{2} B_5 g_0 + \ldots \right] +$$

$$+ \left[B_2 \left(\frac{4}{3} g_0 + \frac{2}{3} g_1 \right) + B_3 \left(g_0 + \frac{1}{2} g_2 \right) + B_4 \left(\frac{16}{15} g_0 + \right. \right. \qquad (2.27)$$

$$\left. \left. + \frac{2}{15} g_1 \right) + B_5 g_0 + \ldots \right] \cos \vartheta +$$

$$+ \left[B_3 \left(\frac{3}{2} g_0 + \frac{3}{4} g_1 \right) + \frac{6}{5} B_4 g_0 + \frac{7}{6} B_5 g_0 + \ldots \right] \cos 2\vartheta +$$

$$+ \left[B_4 \left(\frac{8}{5} g_0 + \frac{4}{5} g_1 \right) + \frac{4}{3} B_5 g_0 + \ldots \right] \cos 3\vartheta +$$

$$+ \left[\frac{5}{3} B_5 g_0 + \ldots \right] \cos 4\vartheta + \ldots$$

Se observă că expresia (2.27) rezultă de asemenea din relația (4.5) din lucrarea [6] punînd $\omega = 0$.

3. CÎMPUL DE VITEZE AL SURSELOR REPARTIZATE PE SCHELET

Grosimea finită a profilului se ia în considerație dacă, în afara vîrtejurilor, descompunem și sursele de pe scheletul profilului. Densitatea distribuției continue a acestor surse se consideră, analog cu distribuția circulației, sub forma unei dezvoltări trigonometrice :

$$q = [1 + (\mathrm{d}y_s/\mathrm{d}x)^2]^{1/2} \quad q_s = 2 \left(q_0 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\vartheta + \right.$$

$$\left. + \bar{q}_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin n\vartheta \right), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi. \qquad (3.1)$$

Primul termen $2q_0 \operatorname{cotg} 1/2\ \vartheta$ ţine seama de rotunjimea bordului de atac, iar al doilea termen $2\ \overline{q}_0 \operatorname{tg} 1/2\ \vartheta$ de cea a bordului de fugă. În cazul profilului cu un bord de fugă ascuţit, avem $\overline{q}_0 = 0$. Debitul total al tuturor surselor distribuite pe schelet va fi

$$\int_0^s q_s \, \mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} q \, \mathrm{d}x = 2\pi\left(q_0 + \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_1\right). \tag{3.2}$$

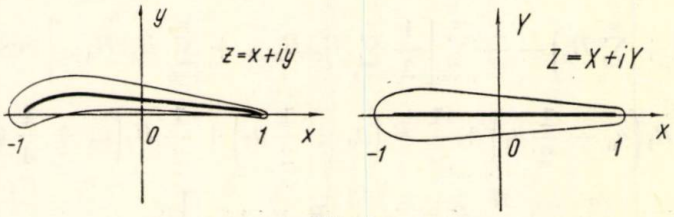


Fig. 4

Deoarece profilul este închis, debitul total al surselor trebuie să fie zero, de unde rezultă condiţia pe care trebuie să o îndeplinească primii trei coeficienţi din dezvoltare :

$$q_0 + \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_1 = 0. \tag{3.3}$$

Viteza complexă indusă de sursele distribuite pe schelet rezultă din viteza indusă de vîrtejuri, pur şi simplu înlocuind coeficienţii g_n prin q_n şi înmulţind cu factorul i (calcularea termenului cu tg 1/2 ϑ, care nu apare în distribuţia circulaţiei, este analogă cu calcularea termenului în cotg $\frac{1}{2}\vartheta$). După reprezentarea în planul Z, această viteză pe dreapta $-1 \leqq X \leqq 1$, $Y = 0$ va fi dată de expresia :

$$U_q - iV_q = q_0 - \overline{q}_0 - \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos n\vartheta - i\left(q_0 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\vartheta + \overline{q}_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin n\vartheta\right) -$$

$$- i\left\{\left[\frac{1}{2}\left(B_1 + B_3 + B_5 + \ldots\right)\left(q_0 + \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_1\right) + \right.\right.$$

$$+ \frac{1}{3}\left(B_2 + \frac{7}{5} B_4 + \ldots\right)\left(q_0 - \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_2\right) - \left.\frac{1}{8} B_3 q_1 + \ldots\right] +$$

$$+ \left[\frac{4}{3}\left(B_2 + \frac{4}{5} B_4 + \ldots\right)\left(q_0 + \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_1\right) + \left(B_3 + B_5\right)\left(q_0 - \right.\right. \tag{3.4}$$

$$- \bar{q}_0 + \frac{1}{2} q_2\Big) - \frac{2}{5} B_4 q_1 + \dots\Big] \cos\vartheta + \Big[\Big(\frac{3}{2} B_3 +$$

$$+ \frac{7}{6} B_5 + \dots\Big)\Big(q_0 + \bar{q}_0 + \frac{1}{2} q_1\Big) +$$

$$+ \frac{6}{5} B_4 (q_0 - \bar{q}_0) + \dots\Big] \cos 2\vartheta + \Big[\frac{8}{5} B_4\Big(q_0 - \bar{q}_0 + \frac{1}{2} q_1\Big) +$$

$$+ \frac{4}{3} B_5 (q_0 - \bar{q}_0) + \dots\Big] \cos 3\vartheta + \Big[\frac{5}{3} B_5 (q_0 + \bar{q}_0) + \dots\Big] \cos 4\vartheta + \dots\Big\}.$$

Mai trebuie menţionat că pe partea superioară a segmentului avem $\vartheta > 0$, iar pe partea inferioară $\vartheta < 0$. Scheletul profilului de grosime finită se defineşte ca purtător al singularităţilor (surse pozitive şi negative) şi nu este, după cum va rezulta din consideraţiile următoare, o caracteristică pur geometrică a profilului (spre deosebire de profilul de grosime infinit mică, la care scheletul este egal cu profilul), ci depinde şi de cîmpul de scurgere primar. În locul ecuaţiei (2.24), pentru profilul de grosime finită vom considera ecuaţia :

$$V + V_\gamma + \frac{1}{2}(V_{q+} + V_{q-}) = 0, \tag{3.5}$$

unde $V_q +$, respectiv $V_q -$ reprezintă valorile vitezei V_q pe partea superioară, respectiv pe partea inferioară a segmentului $-1 \leqq X \leqq 1$ al axei reale. Ecuaţia (3.5) exprimă, ca şi ecuaţia (2.4), cerinţa ca scheletul să coincidă cu linia de curent. Această condiţie este corectă numai la termenii de ordinul întîi ; la termenii de ordinul doi apar deviaţii, aşa cum se va arăta în capitolul următor, în care se va completa şi ecuaţia (3.5), ajungîndu-se la forma care să ţină seama şi de termenii de ordinul doi (4.25). Introducînd în (3.5) dezvoltările (3.17), (3.23) şi (3.4) şi egalînd coeficienţii cosinusurilor unghiului ϑ, se obţine, analog ca în (2.25), un sistem de ecuaţii. Acest sistem va fi analizat în capitolele 4 (ecuaţiile (4.25) şi (7.18), ţinîndu-se seama şi de corecţiile menţionate pentru termenii de ordinul doi.

4. RELAŢIILE DE BAZĂ PENTRU CALCULUL SCURGERII ÎN JURUL PROFILELOR DE GROSIME FINITĂ

Vom studia o formă de profil de grosime finită. Mai întîi vom cerceta profilul în planul Z şi apoi vom trece în planul z cu ajutorul ecuaţiei (2.12).

Din expresiile (2.23) şi (33.4) se vede că viteze induse de vîrtejuri şi surse cuprind termeni de ordinul întîi şi doi. Termenii de ordinul întîi

pot fi considerați ca viteze induse în planul Z de vîrtejuri și surse, distribuite pe segmentul $-1 \leqq X \leqq 1$ de pe axa reală, cu densitățile

$$\gamma = 2\left(g_0 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin n\vartheta\right), \tag{4.1}$$

$$q = 2\left(q_0 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta + \overline{q}_0 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin n\vartheta\right). \tag{4.2}$$

În scopul unei scrieri simplificate, vom adăuga termenii de ordinul doi la expresia (2.17) a cîmpului de viteze primar. Problema constă deci în determinarea relațiilor dintre forma profilului și distribuția circulațiilor și surselor pe scheletul profilului, care, în planul Z, este egală cu segmentul $-1 \leqq X \leqq 1$, $Y = 0$. Viteza cîmpului de scurgeri neomogene în care se află profilul considerat este dată de expresia :

$$U - iV = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{\mu}_n - i\tilde{\nu}_n)\cos n\vartheta, \tag{4.3}$$

unde

$$\tilde{\mu}_0 = \mu_0 + \frac{1}{2}\left(\nu_0 B_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k B_k\right) + \frac{1}{2}\left(B_1 + B_3 + B_5 + \ldots\right)\left(g_0 + \frac{1}{2} g_1\right) + \frac{1}{3}\left(B_2 + \frac{7}{5} B_4 + \ldots\right)\left(g_0 + \frac{1}{2} g_2\right) - \frac{1}{8} B_3 g_1 + \ldots,$$

$$\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{1} \nu_k B_{1-k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\nu_k B_{k+1} + \nu_{k+1} B_k\right)\right] + \frac{4}{3}\left(B_2 + \frac{4}{5} B_4 + \ldots\right)\left(g_0 + \frac{1}{2} g_1\right) + \left(B_3 + B_5 + \ldots\right)\left(g_0 + \frac{1}{2} g_2\right) - \frac{2}{5} B_4 g_1 + \ldots,$$

$$\tilde{\mu}_2 = \mu_2 + \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{2} \nu_k B_{2-k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\nu_k B_{k+2} + \nu_{k+2} B_k\right)\right] + \left(\frac{3}{2} B_3 + \frac{7}{6} B_5 + \ldots\right)\left(g_0 + \frac{1}{2} g_1\right) + \frac{6}{5} B_4 g_0 + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{4.4}$$

$$\tilde{\nu}_0 = \nu_0 - B_0 - \frac{1}{2}\left(\mu_0 B_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k B_k\right) + \frac{1}{2}\left(B_1 + B_3 + B_5 + \ldots\right)\left(q_0 + \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_1\right) + \frac{1}{3}\left(B_2 + \frac{7}{5} B_4 + \ldots\right)\left(q_0 - \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_2\right) - \frac{1}{8} B_3 q_1 + \ldots,$$

$$\widetilde{\nu}_1 = \nu_1 - B_1 - \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{1} \mu_k B_{1-k} + \sum_{k=0}^{\infty}(\mu_k B_{k+1} + \mu_{k+1} B_k)\right] + \frac{4}{3}\left(B_2 + \frac{4}{5} B_4 + \ldots\right) \cdot$$

$$\cdot\left(q_0 + \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_1\right) + \left(B_3 + B_5 + \ldots\right)\left(q_0 - \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_2\right) - \frac{2}{5} B_4 q_1 + \ldots,$$

$$\widetilde{\nu}_2 = \nu_2 - B_2 - \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{2} \mu_k B_{2-k} + \sum_{k=0}^{\infty}(\mu_k B_{k+2} + \mu_{k+2} B_k\right] + \left(\frac{3}{2} B_3 +\right.$$

$$\left. + \frac{7}{6} B_5 + \ldots\right)\left(q_0 + \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_1\right) + \frac{6}{5} B_4 (q_0 - \overline{q}_0) + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.5)$$

Pentru considerațiile care vor urma, este avantajos să introducem planul complex ξ și funcția complexă

$$Z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right). \quad (4.6)$$

Această funcție transformă cercul unitar din planul ξ în segmentul $-1 \leqq X \leqq 1$, $Y = 0$ din planul Z.

Introducînd în planul ξ coordonatele polare ρ și ϑ (fig. 5).

$$\zeta = -\rho e^{-i\vartheta} \quad (4.7)$$

și notînd

$$\rho = 1 + \varepsilon, \quad (4.8)$$

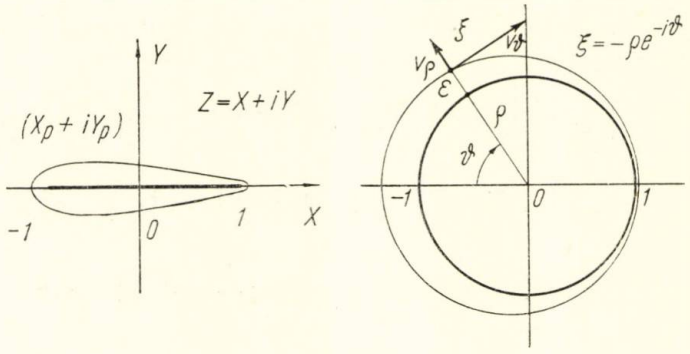


Fig. 5

unde ε este distanța punctului ξ de la cercul unitar, rezultă din (4.6) relația

$$Z = -\frac{1}{2}\left[(1 + \varepsilon)\, e^{-i\vartheta} + \frac{1}{1 + \varepsilon} e^{i\vartheta}\right] \quad (4.9)$$

sau

$$X = -\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}\right)\cos\vartheta, \tag{4.10}$$

$$Y = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\sin\vartheta. \tag{4.11}$$

Cîmpul de viteze din planul Z, format din cîmpul primar neomogen (4.3) și din cîmpul de viteze al vîrtejurilor și surselor, se scrie relativ ușor dacă e reprezentat în planul complex cu ajutorul funcției (4.6), și anume :

$$w_\zeta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)\left\{1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\tilde{\mu}_n - i\tilde{\nu}_n)\cdot\frac{1}{2}\left(\zeta^n + \frac{1}{\zeta^n}\right) + \right.$$

$$\left. + (q_0 + ig_0)\frac{2}{\zeta+1} + \overline{q}_0\frac{2}{\zeta-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(q_n + ig_n)\frac{(-1)^n}{\zeta^n}\right\}. \tag{4.12}$$

Viteza w_ζ se descompune într-o componentă radială și una azimutală.

$$v_\rho + iv_\vartheta = -w_\zeta\, e^{-i\vartheta} = -\frac{1}{2}\left(e^{-i\vartheta} - \frac{e^{i\vartheta}}{\rho^2}\right)\left\{1 + \sum_{n=0}^{\infty}(\tilde{\mu}_n - i\tilde{\nu}_n)\frac{1}{2}\left(\rho^n\, e^{-in\vartheta} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{e^{in\vartheta}}{\rho^n}\right) - (q_0 + ig_0)\frac{2}{\rho e^{-i\vartheta} - 1} - \overline{q}_0\frac{2}{\rho e^{-i\vartheta} + 1} - \sum_{n=1}^{\infty}(q_n + ig_n)\cdot\frac{e^{in\vartheta}}{\rho^n}\right\}. \tag{4.13}$$

Pe cercul unitar (ptr. $\rho = 1$) sînt date componentele vitezei cu următoarele expresii :

$$v_\rho = \sin\vartheta\left(\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{\nu}_n\cos n\vartheta - g_0 + \sum_{n=1}^{\infty}g_n\cos n\vartheta + q_0\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta + \right.$$

$$\left. + \overline{q}_0\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty}q_n\sin n\vartheta\right), \tag{4.14}$$

$$v_\vartheta = \sin\vartheta\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{\mu}_n\cos n\vartheta + g_0\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty}g_n\sin n\vartheta + \right.$$

$$\left. + q_0 - \overline{q}_0 - \sum_{n=1}^{\infty}q_n\cos n\vartheta\right). \tag{4.15}$$

Introducînd notațiile, ecuația (3.5) va fi echivalentă cu sistemul de ecuații

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_0 - g_0 &= 0,\\ \overline{\nu}_n + g_n &= 0, \qquad n = 1, 4\end{aligned} \tag{4.16}$$

astfel încît componenta radială a vitezei pe cercul unitar va avea expresia :

$$v_\rho = \sin\vartheta\left(q_0 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta + \overline{q}_0 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin n\vartheta\right), \qquad (4.17)$$

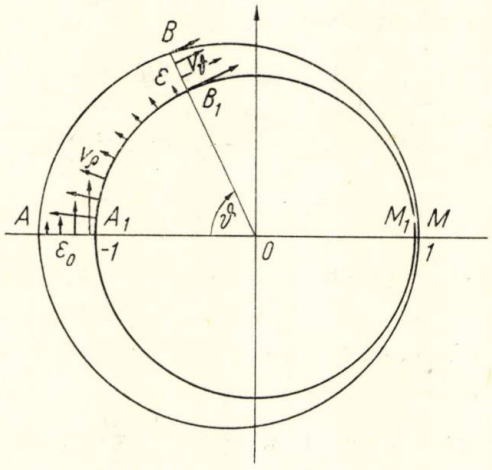


Fig. 6

ceea ce corespunde surselor din plan, distribuite pe cercul unitar cu densitatea

$$\tilde{q} = \frac{1}{2} q \sin\vartheta. \qquad (4.18)$$

Profilul din planul ζ este dat la linia închisă de curent $ABMNA$ (fig. 6), a cărei formă rezultă din condiția ca debitul total de fluid, care intră prin arcul cercului unitar $A_1 B_1$ și prin secțiunea $A_1 A$, să treacă prin secțiunea AB, arcul AB fiind situat pe linia de curent și, în consecință, componenta normală a vitezei pe acest arc fiind zero. Vom avea deci :

$$\int_0^{\vartheta} v_\rho \, d\vartheta + \int_1^{1+\varepsilon_0} v_\vartheta \, d\rho = \int_1^{1+\varepsilon} v_\vartheta \, d\rho. \qquad (4.19)$$

Valoarea primei integrale are, conform cu (4.17), următoarea expresie :

$$\int_0^{\vartheta} v_\rho \, d\vartheta = \int_0^{\vartheta} \left(q_0 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta + \overline{q}_0 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin n\vartheta\right) \sin\vartheta \, d\vartheta =$$

$$= \left(q_0 + \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_1\right)\vartheta + \left(q_0 - \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_2\right)\sin\vartheta - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{q_{n-1} - q_{n+1}}{n} \sin n\vartheta. \qquad (4.20)$$

Ţinînd seama de condiţia (3.3), termenul $\left(q_0 + \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_1\right) \vartheta$ se anulează.

Pentru calculul celorlalte integrale din (4.19), vom porni de la expresia (4.13), conform căreia valorile acestor integrale sînt date de partea imaginară a următoarei expresii :

$$\int_1^{1+\varepsilon} (v_\varrho + i v_\vartheta)\, \mathrm{d}\varrho = -\frac{1}{2}\int_1^{1+\varepsilon}\Big\{(1 + \widetilde{\mu}_0 - i\widetilde{\nu}_0)(\mathrm{e}^{-i\vartheta} - \varrho^{-2}\mathrm{e}^{i\vartheta}) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\widetilde{\mu}_n -$$

$$- i\widetilde{\nu}_n)\,[\varrho^n \mathrm{e}^{-i(n+1)\vartheta} - \varrho^{-(n+2)}\mathrm{e}^{i(n+1)\vartheta} - \varrho^{(n-2)}\mathrm{e}^{-i(n-1)\vartheta} + \varrho^{-n}\mathrm{e}^{i(n-1)\vartheta}] -$$

$$- 2(q_0 + i g_0)(\varrho^{-1} + \varrho^{-2}\mathrm{e}^{i\vartheta}) - 2\overline{q}_0(\varrho^{-1} - \varrho^{-2}\mathrm{e}^{i\vartheta}) - \sum_{n=1}^{\infty}(q_n + i g_n) \cdot$$

$$\cdot(\varrho^{-n}\mathrm{e}^{i(n-1)\vartheta} - \varrho^{-(n+2)}\mathrm{e}^{i(n+1)\vartheta})\Big\}\,\mathrm{d}\varrho =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big\{(1 + \widetilde{\mu}_0 - i\widetilde{\nu}_0)[\varepsilon \mathrm{e}^{-i\vartheta} + ((1+\varepsilon)^{-1} - 1)\mathrm{e}^{i\vartheta}] + \frac{1}{2}(\widetilde{\mu}_1 - i\widetilde{\nu}_1)\Big[\Big(\varepsilon +$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon^2\Big)\mathrm{e}^{-i2\vartheta} + \frac{1}{2}((1+\varepsilon)^{-2} - 1)\,\mathrm{e}^{i2\vartheta}\Big] + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(\widetilde{\mu}_n - i\widetilde{\nu}_n)\Big[\frac{1}{n+1}((1 +$$

$$+ \varepsilon)^{n+1} - 1)\,\mathrm{e}^{-i(n+1)\vartheta} + \frac{1}{n+1}((1+\varepsilon)^{-n-1} - 1)\,\mathrm{e}^{i(n+1)\vartheta} - \frac{1}{n-1}((1+\varepsilon)^{n-1} -$$

$$- 1)\,\mathrm{e}^{-i(n-1)\vartheta} - \frac{1}{n-1}((1+\varepsilon)^{-n+1} - 1)\,\mathrm{e}^{i(n-1)\vartheta}\Big] - 2(q_0 + i g_0)\,[\ln(1+\varepsilon) -$$

$$- ((1+\varepsilon)^{-1} - 1)\,\mathrm{e}^{i\vartheta}] - 2\overline{q}_0\,[\ln(1+\varepsilon) + ((1+\varepsilon)^{-1} - 1)\,\mathrm{e}^{i\vartheta}] - \qquad (4.21)$$

$$- (q_1 + i g_1)\Big[\ln(1+\varepsilon) + \frac{1}{2}((1+\varepsilon)^{-2} - 1)\,\mathrm{e}^{i2\vartheta}\Big] - \sum_{n=2}^{\infty}(q_n + i g_n) \cdot$$

$$\cdot\Big[-\frac{1}{n-1}((1+\varepsilon)^{-n+1} - 1)\,\mathrm{e}^{i(n-1)\vartheta} + \frac{1}{n+1}((1+\varepsilon)^{-n-1} - 1)\,\mathrm{e}^{i(n+1)\vartheta}\Big]\Big\}.$$

Mărimea ε, fiind un infinit mic de ordinul întîi, se obţine neglijînd mărimile de ordin mai mare decît doi şi ţinînd seama de ecuaţiile (4, 16) :

$$\int_1^{1+\varepsilon} v_\vartheta\, \mathrm{d}\varrho = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\sin\vartheta + \varepsilon\sin\vartheta\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{\mu}_n\cos n\vartheta +$$

$$+ q_0 - \overline{q}_0 + 2(q_0 + \overline{q}_0)\cos\vartheta - \sum_{n=2}^{\infty} q_n \cos n\vartheta + g_0\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta} + \qquad (4.22)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin n\vartheta\Big\}.$$

Pentru $\vartheta = 0$ avem

$$\int_1^{1+\varepsilon_0} v_\vartheta \, d\rho = 2 \, g_0 \varepsilon_0 \tag{4.23}$$

și pentru $\vartheta = \pi$

$$\int_1^{1+\varepsilon_\pi} v_\vartheta \, d\rho = 0. \tag{4.24}$$

Pentru $\vartheta = \pi$, membrul al doilea al ecuației (4.19), ținînd seama de (4.20) și (4.13), va fi egal cu $2 \, g_0 \, \varepsilon_0$, membrul întîi fiind egal cu zero în conformitate cu (4.24). Termenul $2 \, g_0 \, \varepsilon_0$, fiind de ordinul doi, trebuie luat în considerație în teoria noastră ; în consecință vom completa ecuația (4.6) cu niște termeni de corecție, obținînd

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_0 - g_0 + g_0 \varepsilon_0 &= 0, \\ \tilde{\nu}_1 + g_1 + g_0 \varepsilon_0 &= 0, \\ \tilde{\nu}_n + g_n &= 0, \qquad n = 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{4.25}$$

Integralei (4.20) i se aplică corecția

$$\int_0^\vartheta \Delta v_\rho \, d\vartheta = - g_0 \varepsilon_0 \int_0^\vartheta (1 + \cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = - g_0 \varepsilon_0 (1 - \cos \vartheta) - \\ - \frac{1}{4} g_0 \varepsilon_0 (1 - \cos 2\vartheta), \tag{4.26}$$

astfel încît introducem în membrul întîi al ecuației (4.19), pentru scurgerea totală pe arcul $A_1 B_1$ și prin secțiunea AA, următoarea expresie :

$$\int_1^\vartheta v_\rho \, d\vartheta + \int_1^{1+\varepsilon_0} v_\vartheta \, d\rho = \left(q_0 - \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_2\right) \sin \vartheta + \frac{1}{2} \left(q_0 + \overline{q}_0 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} q_3\right) \sin 2\vartheta - \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{q_{n-1} - q_{n+1}}{n} \sin n\vartheta + g_0 \varepsilon_0 (1 + \cos \vartheta) - \\ - \frac{1}{4} g_0 \varepsilon_0 (1 - \cos 2\vartheta) \tag{4.27}$$

Egalînd expresiile (4.22) și (4.27), obținem o relație din care se poate calcula forma profilului, adică ε funcție de unghiul ϑ. Deoarece însă ne in-

teresează în special forma profilului din planul Z, vom trece această relație, cu ajutorul ecuațiilor (4.10) și (4.11), din planul ζ iarăși în planul Z. Fie coordonatele punctelor de pe profil (X_p, Y_p) în conformitate cu (4.10) și (4.11); vom avea :

$$X_p = -\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}\right)\cos\vartheta,\quad Y_p = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\sin\vartheta. \tag{4.28}$$

Introducînd în (4.22) și (4.27) și neglijînd termenii de ordin mai mare decît doi, avem

$$+\sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin n\vartheta\Big\} = \left(q_0 - \bar{q}_0 + \frac{1}{2}q_2\right)\sin\vartheta + \frac{1}{2}\left(q_0 + \bar{q}_0 + \frac{1}{2}q_3\right)\sin 2\vartheta -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{q_{n-1}-q_{n+1}}{n}\sin n\vartheta + g_0\varepsilon_0(1+\cos\vartheta) - \frac{1}{4}g_0\varepsilon_0(1-\cos 2\vartheta); \tag{4.29}$$

$$X_p = -\left[1 + \frac{1}{2}(Y_p/\sin\vartheta)^2\right]\cos\vartheta. \tag{4.30}$$

Pentru rezolvarea ecuației (4.29) se consideră funcția Y_p sub forma unei serii trigonometrice :

$$Y_p = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\vartheta + \sum_{m=1}^{\infty}\Big\{C_{2m}(1-\cos 2m\vartheta) +$$

$$+ C_{2m+1}[\cos\vartheta - \cos(2m+1)\vartheta]\Big\}. \tag{4.31}$$

Din această ecuație rezultă pentru ε_0, conform cu (4.11),

$$\varepsilon_0\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}\right) = \lim_{\vartheta\to 0}\frac{Y_p}{\sin\vartheta} = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \tag{4.32}$$

și deci

$$\varepsilon_0 = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n + \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} nA_n\right]^2. \tag{4.33}$$

Introducînd expresiile (4.31) și (4.33) în ecuația (4.29) și egalînd coeficienții sinușilor și cosinușilor termen cu termen, rezultă două sisteme de ecuații :

$$q_0 - \bar{q}_0 + \frac{1}{2}q_2 = A_1 + A_1\left(q_0 - \bar{q}_0 + \tilde{\mu}_0 + \frac{1}{2}q_2 - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_2\right) +$$

$$+\frac{1}{2}A_2(2q_0 + 2\bar{q}_0 + \tilde{\mu}_1 + q_3 - \tilde{\mu}_3) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty} A_n(-q_{n-1}+\tilde{\mu}_{n-1}+q_{n+1}-\tilde{\mu}_{n+1})+g_0\left[2\sum_{m=1}^{\infty} C_{2m}+\sum_{m=1}^{\infty} C_{2m+1}\right]+$$

$$+g_1\left[\sum_{m=1}^{\infty} C_{2m}+\frac{1}{2}C_2\right]+\frac{1}{2}g_2\left[\sum_{m=1}^{\infty} C_{2m+1}+C_3\right]-\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty} g_n\,[C_{n-1}-C_{n+1}],$$

$$\frac{1}{2}q_0+\frac{1}{2}\overline{q}_0+\frac{1}{4}q_3=A_2+\frac{1}{2}A_1(2q_0+2\overline{q}_0+\tilde{\mu}_1+q_3-\tilde{\mu}_3)+$$

$$+A_2\left(q_0-\overline{q}_0+\tilde{\mu}_0+\frac{1}{2}q_4-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_4\right)+\frac{1}{2}A_3(2q_0+2\overline{q}_0+\tilde{\mu}_1+q_5-\tilde{\mu}_5)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=4}^{\infty} A_n(-q_{n-2}+\tilde{\mu}_{n-2}+q_{n+2}-\tilde{\mu}_{n+2})+$$

$$+g_0\left[C_2+2\sum_{n=3}^{\infty} C_n\right]+g_2\sum_{m=1}^{\infty} C_{2m}+\frac{1}{2}(g_1+g_3)\sum_{m=1}^{\infty} C_{2m+1}-\frac{1}{2}g_4\,C_2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}(g_{n+2}-g_{n-2})C_n,$$

$$-\frac{1}{6}(q_2-q_4)=A_3+\frac{1}{2}A_1(-q_2+q_4+\tilde{\mu}_2-\tilde{\mu}_4)+$$

$$+\frac{1}{2}A_2(2q_0+2\overline{q}_0+q_5+\tilde{\mu}_1-\tilde{\mu}_5)+A_3\left(q_0-\overline{q}_0+\frac{1}{2}q_6+\tilde{\mu}_0-\tilde{\mu}_6\right)+$$

$$+\frac{1}{2}A_4\,(2q_0+2\overline{q}_0+q_7+\tilde{\mu}_1-\tilde{\mu}_7)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=5}^{\infty} A_n(-q_{n-3}+q_{n+3}+\tilde{\mu}_{n-3}-\tilde{\mu}_{n+3})+g_0\left[C_3+2\sum_{n=4}^{\infty} C_n\right]+g_3\sum_{m=1}^{\infty} C_{2m}+$$

$$+\frac{1}{2}(q_2+g_4)\sum_{m=1}^{\infty} C_{2m+1}-\frac{1}{2}(g_1+g_5)\,C_2-$$

$$-\frac{1}{2}g_6\,C_3+\frac{1}{2}\sum_{n=4}^{\infty}(g_{n-3}-g_{n+3})\,C_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4.34)$$

$$(1 + q_0 - \overline{q}_0 + \widetilde{\mu}_0) \sum_{m=1}^{\infty} C_{2m+1} + (2q_0 + 2\overline{q}_0 + \widetilde{\mu}_1)\left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{2m} - \frac{1}{2} C_2\right) -$$

$$- \frac{1}{2}(q_2 - \widetilde{\mu}_2)\left(\sum_{m=7}^{\infty} C_{2m+1} - C_3\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}(q_n - \widetilde{\mu}_n)\ (C_{n-1} + C_{n+1}) + g_0\left(A_1 + 2\sum_{n=2}^{\infty} A_n\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\, g_{n+1} + A_{n+1}\, g_n) = g_0 \sum_{n=1}^{\infty} n\, A_n,$$

$$-(1 + g_0 - \overline{q}_0 + \widetilde{\mu}_0)\ C_2 + \left(q_0 + \overline{q}_0 + \frac{1}{2}\widetilde{\mu}_1\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{2m+1} - C_3\right) -$$

$$- (q_2 - \widetilde{\mu}_2)\left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{2m} - \frac{1}{2} C_4\right) - \frac{1}{2}(q_3 - \widetilde{\mu}_3)\left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{2m+1} - C_5\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{\infty}(q_n - \widetilde{\mu}_n)\ (C_{n-2} + C_{n+2}) + g_0\left(A_2 + 2\sum_{n=3}^{\infty} A_n\right) - \frac{1}{2} A_1 g_1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\, g_{n+2} + A_{n+2}\, g_n) = \frac{1}{4} g_0 \sum_{n=1}^{\infty} n\, A_n,$$

$$-(1 + g_0 - \overline{q}_0 + \widetilde{\mu}_0)\ C_3 - \left(q_0 + \overline{q}_0 + \frac{1}{2}\widetilde{\mu}_1\right)(C_2 + C_4) -$$

$$- \frac{1}{2}(q_2 - \widetilde{\mu}_2)\left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{2m+1} - C_5\right) - (q_3 - \widetilde{\mu}_3)\left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{2m} - \frac{1}{2} C_6\right) -$$

$$- \frac{1}{2}(q_4 - \widetilde{\mu}_4)\left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{2m+1} - C_7\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=5}^{\infty}(q_n - \widetilde{\mu}_n)\ (C_{n-3} + C_{n+3}) +$$

$$+ g_0\left(A_3 + 2\sum_{n=4}^{\infty} A_n\right) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\, g_{3-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\, g_{n+3} + A_{n+3}\, g_n) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4.35)$$

Adesea va fi avantajos să se înlocuiască primele două ecuații din sistemul (4.34) prin următoarele :

$$2q = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n\left\{1 + 3q_0 + \overline{q}_0 - \sum_{n=2}^{\infty} q_n + \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mu}_n\right\}, \qquad (4.36)$$

$$2\overline{q}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, nA_n\left\{1 - q_0 - 3\overline{q}_0 - \sum_{n=2}^{\infty} (1-1)^n\, q_n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \widetilde{\mu}_n\right\}. \qquad (4.37)$$

Aceste ecuații se obțin înmulțind fiecare ecuație a sistemului (4.34) cu numărul ei de ordine și adunînd apoi toate ecuațiile, o dată cu același semn și apoi cu semnul schimbat.

Primele două ecuații din sistemul (4.35) sînt combinații liniare ale celorlalte ecuații și deci nu vor fi luate în considerație în cele ce urmează. Din sistemul (4.35) mai rezultă că coeficienții C_n sînt de ordinul doi, astfel încît în sistemele (4.34) și (4.35) pot fi neglijați toți termenii în care apar coeficienții C_n înmulțiți cu vreo mărime de ordinul întîi, ca fiind de ordinul trei. În acest caz se anulează toți termenii din C_n din sistemul (4.34), astfel încît aceasta va avea un caracter pur diagonal.

5. FORMA PROFILULUI ÎN VECINĂTATEA BORDULUI DE ATAC ȘI A BORDULUI DE FUGĂ

După cum s-a menționat în capitolul precedent, coordonatele de pe axa Y a profilului au următoarea expresie :

$$Y_p = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\vartheta + \sum_{m=1}^{\infty} C_{2m} (1 - \cos 2m\vartheta) + \sum_{m=1}^{\infty} C_{2mM} [\cos \vartheta - \cos (2m+1)\vartheta], \quad -\pi \leqq \vartheta \leqq \pi, \tag{5.1}$$

iar coordonatele de pe axa X, conform cu (4.10),

$$X_p = -\left[1 + \frac{1}{2}(Y_p/\sin\vartheta)^2\right] \cos\vartheta \tag{5.2}$$

sau, introducînd ecuația (5.1) și neglijînd termenii mai mari decît doi,

$$Y_p = -\cos\vartheta \left\{1 + \frac{1}{2}A_1^2 + A_2^2 + \frac{3}{2}A_3^2 + A_1A_3 + A_1A_5 + 2A_2A_4 + \right.$$
$$+ \ldots + 2[A_1A_2 + A_1A_4 + 2A_2A_3 + \ldots]\cos\vartheta + [A_2^2 + 2A_3^2 +$$
$$+ 2A_1A_3 + 4A_2A_4 + 2A_1A_5 + \ldots]\cdot\cos 2\vartheta + 2[A_1A_4 +$$
$$\left. + A_2A_3 + \ldots]\cos 3\vartheta + [A_3^2 + 2A_2A_4 + 2A_1A_5 + \ldots]\cos 4\vartheta + \ldots\right\}. \tag{5.3}$$

Din expresiile (5.1) și (5.2) rezultă atunci unele concluzii importante asupra formei profilului în apropierea bordului de atac și al bordului de fugă.

Pentru bordul de atac, adică pentru $\vartheta = 0$, obținem

$$Y_p = 0, \quad X_p = -\left[1 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} nA_n\right)^2\right] \tag{5.4}$$

sau din (4.36)

$$Y_p = 0, \; X_p = -[1 + 2q_0^2]. \tag{5.5}$$

Fără dificultate se determină şi celelalte mărimi :

$$\frac{\mathrm{d}Y_p}{\mathrm{d}X_p} = \pm\infty, \tag{5.6}$$

precum şi raza de curbură a bordului de atac :

$$R_1 = \frac{\left[\sum_{n=1}^{\infty} nA_n\right]^2}{1 + \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} nA_n\right]^2} = 4\,q_0^2. \tag{5.7}$$

Expresia (5.7) se mai scrie şi sub forma

$$2q_0 = R_1^{1/2}\left(1 + 3\,q_0 + \overline{q}_0 - \sum_{n=2}^{\infty} q_n + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}_n\right). \tag{5.8}$$

De asemenea se poate demonstra că pentru $X_p = -1$ avem :

$$X_p = -1, \; Y_p = \pm 4q_0^2 = \pm R_1. \tag{5.9}$$

Din ecuaţiile (5.5), (5.7) rezultă că forma profilului în apropierea bordului de atac poate fi aproximată de o parabolă

$$Y_p = \pm 2q_0 2^{1/2}(X_p + 1 + 2\,q_0^2)^{1/2} = \pm R_1^{1/2}\,(2X_p + 2 + R_1)^{1/2}. \tag{5.10}$$

Analog şi pentru bordul de fugă rotunjit, adică pentru $\vartheta = \pi$, în cazul $\overline{q}_0 \neq 0$

$$Y_p = 0, \; X_p = 1 + \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, nA_n\right]^2, \tag{5.11}$$

sau cu (4.37)

$$Y_p = 0, \; X_p = 1 + 2\overline{q}_0^2 \tag{5.12}$$

şi apoi

$$\frac{\mathrm{d}Y_p}{\mathrm{d}X_p} = \pm\infty. \tag{5.13}$$

Raza de curbură a bordului de fugă :

$$R_2 = \frac{\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, nA_n\right]^2}{1 + \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, nA_n\right]^2} = 4\overline{q}_0^2 \tag{5.14}$$

sau

$$-2\overline{q}_0 = R_2^{1/2}\left[1 - q_0 - 3q_0 - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n q_n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \widetilde{\mu}_n\right]. \quad (5.15)$$

În mod analog

$$X_p = 1, \quad Y_p = \pm 4\overline{q}_0^2 = \pm R_2, \quad (5.16)$$

astfel încît forma profilului în apropierea bordului de fugă poate fi aproximată de o parabolă :

(5.17)

În cazul unui bord de fugă ascuțit, adică pentru $\vartheta = \pi$ și $\overline{q}_0 = 0$, avem

$$X_p = 1, \quad Y_p = 0 \quad (5.18)$$

și

$$\frac{\mathrm{d}Y_p}{\mathrm{d}X_p} = 0. \quad (5.19)$$

În sfîrșit, vom efectua trecerea din planul transformat Z în planul fizic z (fig. 7) :

$$z_p - z_s = Z_p - Z_s + i\,[f(Z_p) - f(Z_s)]. \quad (5.20)$$

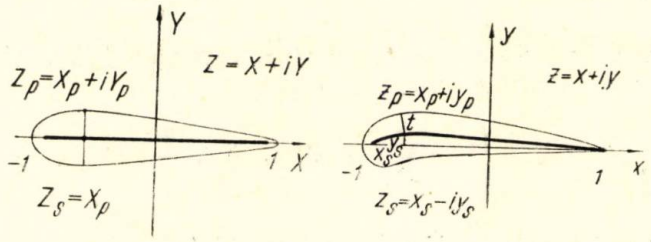


Fig. 7

Înlocuind paranteza dreaptă printr-o serie Taylor, obținem :

$$f(X_p + i\,Y_p) - f(X_p) = i\,Y_p\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} + \ldots = i\,Y_p\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}x} + \ldots \quad (5.21)$$

Deoarece Y_p și $\mathrm{d}y_s/\mathrm{d}x$ sînt de ordinul întîi, ne putem limita în (5.21) numai la primul termen ; ecuația (5.20) capătă forma :

$$x_p - x_s + i\,(y_p - y_s) = i\,Y_p\left(1 + i\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}x}\right). \quad (5.22)$$

Totodată mai avem din (2.12)

$$x_s = X_p = -\left[1 + \frac{1}{2}(Y_p/\sin\vartheta)^2\right]\cos\vartheta. \tag{5.23}$$

Separînd în ecuația (5.22) partea reală și partea imaginară, obținem :

$$x_p - x_s = -\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}x}\cdot Y_p\,,\quad y_p - y_s = Y_p, \tag{5.24}$$

ceea ce înseamnă, de fapt, că grosimea se măsoară în planul z pe normala la schelet, unde

$$t = Y_p\left[1 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{5.25}$$

Deoarece valoarea de sub radical din ecuația (5.25) diferă de unitate numai cu mărimile de ordinul doi, putem scrie în cadrul teoriei noastre

$$t = Y_p. \tag{5.26}$$

De aici rezultă că forma profilului în vecinătatea bordului de atac și de fugă din planul z este aceeași ca în planul tranformat Z.

6. DISTRIBUȚIA VITEZELOR PE CONTURUL PROFILULUI

Pentru calcularea vitezei pe contur, vom pleca de la cîmpul vitezelor din planul ξ, dat de expresia (4.12) :

$$w_\zeta = \frac{1}{2}(1 - \zeta^{-2})\left\{1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\tilde{\mu}_n - i\tilde{\nu}_n)\frac{1}{2}(\zeta^n + \zeta^{-n}) + 2(q_0 + \right.$$

$$\left. + ig_0)(\zeta + 1)^{-1} + 2\overline{q}_0(\zeta - 1)^{-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(q_n + ig_n)(-\zeta)^{-n}\right\}. \tag{6.1}$$

Din expresia (6.1) rezultă viteza pe conturul din planul Z, împărțind-o la derivata funcției de transformare (4.6)

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) \tag{6.2}$$

și introducînd pentru variabila ζ expresia

$$\zeta = -(1 + \varepsilon)\,\mathrm{e}^{-i\vartheta}, \tag{6.3}$$

unde ε este dat de relația (4.19), respectiv (4.28) și (4.29) :

$$U_K - i\,V_K = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{\mu}_n - i\tilde{\nu}_n)\,\frac{1}{2}\,[(1+\varepsilon)^n\,e^{-in\vartheta} + (1+\varepsilon)^{-n}\,e^{in\vartheta}] - (q_0 + ig_0)\cdot \frac{2}{(1+\varepsilon)\,e^{-i\vartheta}-1} - \overline{q}_0\,\frac{2}{(1+\varepsilon)\,e^{-i\vartheta}+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (q_n + ig_n)\,(1+\varepsilon)^{-n}\,e^{in\vartheta}. \tag{6.4}$$

Înlocuind în (6.4) pe $\tilde{\nu}_n$ conform cu (4.25) și neglijînd peste tot termenii de un ordin mai mare decît doi, obținem :

$$U_K - iV_K = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}_n(\cos n\vartheta - in\varepsilon \sin n\vartheta) - ig_0(1-\varepsilon_0) + ig_0\varepsilon_0\cos\vartheta - (q_0 + ig_0)\cdot \frac{(1+\varepsilon)(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) - 1}{(1+\varepsilon)(1+\cos\vartheta) + \frac{1}{2}\varepsilon^2} - q^0\,\frac{(1+\varepsilon)(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) + 1}{(1+\varepsilon)(1+\cos\vartheta) + \frac{1}{2}\varepsilon^2} + 2(q_0 + q_0)(1-\varepsilon)(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) - \sum_{n=2}^{\infty} q_n(1-n\varepsilon)(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\sin n\vartheta + in\varepsilon\cos n\vartheta). \tag{6.5}$$

Separînd partea reală de cea imaginară, apar cele două componente ale vitezei pe contur :

$$U_K = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}_n \cos n\vartheta - q_0\,\frac{(1+\varepsilon)\cos\vartheta - 1}{(1+\varepsilon)(1-\cos\vartheta) + \frac{1}{2}\varepsilon^2} - q_0\,\frac{(1+\varepsilon)\cos\vartheta + 1}{(1+\varepsilon)(1+\cos\vartheta) + \frac{1}{2}\varepsilon^2} + 2(q_0 + q_0)(1-\varepsilon)\cos\vartheta - \sum_{n=2}^{\infty} q_n(1-n\varepsilon)\cos n\vartheta + g_0\,\frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta + \frac{1}{2}\varepsilon^2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin n\vartheta, \tag{6.6}$$

$$V_K = g_0 \frac{\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)(1-\cos\vartheta) + \frac{1}{2}\varepsilon^2} + q_0 \frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta + \frac{1}{2}\varepsilon^2} +$$

$$+ q_0 \frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta + \frac{1}{2}\varepsilon^2} - 2(q_0 + q_0)\sin\vartheta + \sum_{n=2}^{\infty} q_n \sin n\vartheta -$$

$$- g_0 \varepsilon_0 (1+\cos\vartheta) + \varepsilon(\tilde{\mu}_1 + 2q_0 + 2q_0)\sin\vartheta +$$

$$+ \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} n(\tilde{\mu}_n - q_n)\sin n\vartheta - \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} n g_n \cos n\vartheta. \tag{6.7}$$

Viteza de suprafață va fi atunci

$$W_K = (U_K^2 + V_K^2)^{1/2}. \tag{6.8}$$

În afara vecinătății bordului de atac (și pentru $\bar{q}_0 \neq 0$ și în afara bordului de fugă rotunjit), viteza pe contur diferă numai foarte puțin de unitate. De aceea se pot deduce, pentru viteza pe contur din acest domeniu, dezvoltări simple. Din (6.6) și (6.7) rezultă, neglijînd termenii de un ordin mai mare decît doi :

$$U_K = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}_n \cos_n n\vartheta + q_0 - \bar{q}_0 + 2(q_0 + q_0)\cos\vartheta - \sum_{n=2}^{\infty} q_n \cos n\vartheta +$$

$$+ g_0 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin n\vartheta + \varepsilon\left[-\frac{q_0}{1-\cos\vartheta} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{q}_0}{1+\cos\vartheta} - 2(q_0 + \bar{q}_0)\cos\vartheta + \sum_{n=2}^{\infty} n q_n \cos n\vartheta \right]; \tag{6.9}$$

$$V_K = q_0 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta + \bar{q}_0 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta - 2(q_0 + \bar{q}_0)\sin\vartheta +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} q_n \sin n\vartheta - g_0 \varepsilon_0 (1+\cos\vartheta) +$$

$$+ \varepsilon\left[\sum_{n=1}^{\infty} n(\tilde{\mu}_n - q_n)\sin n\vartheta + \frac{g_0}{1-\cos\vartheta} - \sum_{n=1}^{\infty} n g_n \cos n\vartheta \right]. \tag{6.10}$$

Notînd cu φ unghiul format de tangenta la profil (fig. 8) cu axa X, obținem

$$W_K = U_K \cos\varphi + V_K \sin\varphi, \tag{6.11}$$

iar tg φ este factorul de direcție a tangentei la profil, putînd fi scris cu (4.31) și (4.34) în primă aproximație sub forma următoare :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathrm{d}Y_p}{\mathrm{d}X_p} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n A_n \operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta -$$

$$-2\sum_{m=1}^{\infty} 2m\, A_{2m}\sin\vartheta - 2\sum_{m=2}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(2m+k+1)\,A_{2m+k+1}\right]\cdot\sin k\vartheta\,; \qquad (6.12)$$

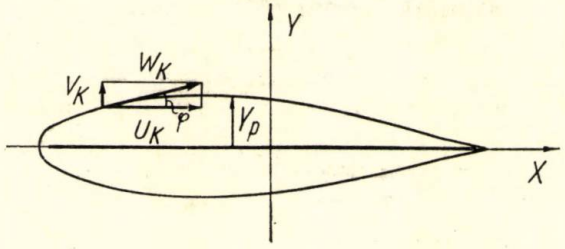


Fig. 8

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathrm{d}Y_p}{\mathrm{d}X_p} = q_0 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta + \bar{q}_0 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta - 2(q_0+\bar{q}_0)\sin\vartheta +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} q_n \sin n\vartheta\,. \qquad (6.13)$$

De aceea $\dfrac{\mathrm{d}Y_p}{\mathrm{d}X_p}$ poate fi considerat ca o mărime de ordinul întîi, iar relația pentru viteza pe contur poate fi scrisă sub forma

$$W_p = U_p\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}Y_p}{\mathrm{d}X_p}\right)^2\right] + V_p\frac{\mathrm{d}Y_p}{\mathrm{d}X_p}\,. \qquad (6.14)$$

Înlocuind și ținînd seama numai de termenii pînă la ordinul doi inclusiv, obținem :

$$W_p = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{\mu}_n\cos n\vartheta + q_0 - \bar{q}_0 + 2(q_0+\bar{q}_0)\cos\vartheta - \sum_{n=2}^{\infty} q_n\cos n\vartheta +$$

$$+ g_0\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} g_n\sin n\vartheta + \varepsilon\left[-\frac{q_0}{1-\cos\vartheta} + \frac{q_0}{1+\cos\vartheta} - \right. \qquad (6.15)$$

$$\left. - 2(q_0+\bar{q}_0)\cos\vartheta + \sum_{n=2}^{\infty} n q_n\cos n\vartheta\right] + \frac{\mathrm{d}Y_p}{\mathrm{d}X_p}\left[q_0\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta + \right.$$

$$\left. + \bar{q}_0\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta - 2(q_0+\bar{q}_0)\sin\vartheta + \sum_{n=2}^{\infty} n q_n\sin n\vartheta\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}Y_p}{\mathrm{d}X_p}\right)^2,$$

$$\varepsilon = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+n+1} \right] \cos n\vartheta \tag{6.16}$$

sau

$$\varepsilon = \left(q_0 - \bar{q}_0 + \frac{1}{3} q_2 + \frac{1}{15} q_4 + \dots \right) + \left(q_0 + \bar{q}_0 + \frac{1}{4} q_3 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{12} q_5 + \dots \right) \cos \vartheta - \left(\frac{1}{3} q_2 + \frac{2}{15} q_4 + \dots \right) \cos 2\vartheta -$$
$$- \left(\frac{1}{4} q_3 - \frac{1}{12} q_5 + \dots \right) \cos 3\vartheta - \left(\frac{1}{5} q_4 + \dots \right) \cos 4\vartheta -$$
$$- \left(\frac{1}{6} q_5 + \dots \right) \cos 5\vartheta + \dots \tag{6.17}$$

Pentru derivata $\mathrm{d}Y_p/\mathrm{d}X_p$ și pentru ε au fost date cîte două expresii. Pentru rezolvarea problemei directe se folosesc expresiile (6.12) și (6.16). Viteza pe contur va fi dată atunci de o expresie liniară în coeficienții g_n și q_n, ceea ce este important pentru calculul vitezei pe contur. Pentru rezolvarea problemei indirecte se pleacă de la distribuția aleasă a circulației (coeficienții g_n) și a surselor (coeficienții q_n), alegerea fiind determinată de necesitatea unei distribuții de viteze convenabile pe contur. De aceea trebuie să existe o posibilitate de apreciere a acestei distribuții de viteze înaintea efectuării tuturor calculelor, în care scop vom folosi iar relația (6.15), introducînd în aceasta, pentru $\mathrm{d}X_p/dX_p$ și ε, expresiile (6.13) și (6.17).

După cum am menționat mai sus, nu putem folosi expresia (6.15) pentru calculul vitezei pe contur în vecinătatea bordului de fugă rotunjit, unde viteza pe contur se calculează după formulele (6.6) pînă la (6.8). Pe bordul de atac, adică pentru $\vartheta = 0$, avem cu (6.6) și (6.7)

$$U_p - 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}_n - 2q_s \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - 1 + \varepsilon_0 \right) + \bar{q}_0 \left(1 - \frac{3}{2} \varepsilon_0 \right) - \tag{6.18}$$
$$- \sum_{n=2}^{\infty} q_n \left(1 - n\varepsilon_0 \right),$$

$$V_p = g_0 \left(\frac{2}{\varepsilon_0} + 1 - 2\varepsilon_0 \right) - \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} n g_n . \tag{6.19}$$

Introducînd în (6.18) și (6.19) conform cu (4.33),

$$\varepsilon_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n , \quad \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} n A_n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n , \tag{6.20}$$

vom obține

$$U_K = -\frac{2q_0}{\sum_{n=1}^{\infty} nA_n} + 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}_n + 3q_0 + \bar{q}_0 - \sum_{n=2}^{\infty} q_n - \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \left(\frac{5}{2} q_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} \bar{q}_0 - \sum_{m=2}^{\infty} m q_m \right), \tag{6.21}$$

$$V_K = g_0 \left(\frac{2}{\sum_{n=1}^{\infty} nA_n} - \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sum_{n=1}^{\infty} k g_k . \tag{6.22}$$

Înlocuind cu aceste expresii $\sum nA_n$ din ecuația (4.36), ele capătă forma următoare :

$$U_K = -2q_0 \left(\frac{5}{2} q_0 + \frac{3}{2} q_0 - \sum_{n=2}^{\infty} n q_n \right), \tag{6.23}$$

$$V_K = \frac{g_0}{q_0} \left(1 + 3q_0 + \bar{q}_0 - \sum_{n=2}^{\infty} n q_n + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}_n \right) - 2q_0 \sum_{n=1}^{\infty} n g_n - 3\, g_0\, q_0 . \tag{6.24}$$

Trebuie să ne dăm seama însă că termenii superior ordinului doi nu au fost considerați în expresia (4.36) pentru $\sum nA_n$, astfel încît $\sum nA_n$ însăși este o mărime de ordinul întîi. Mărimile neglijate de ordin superior se manifestă în expresia pentru valoarea reciprocă $1/\sum nA_n$ chiar la termenii de ordinul întîi și, în consecință, expresiile (6.13) și (6.14) sînt corecte numai pînă la termenii de ordinul doi. În cazul scurgerii fără circulație, ambele componente sînt egale cu zero ; în cazul scurgerii cu circulație, cele două componente sînt de ordinul doi în cazul intrării „nete" ($g=0$) și, în sfîrșit, în cazul intrării „ne-netede" U_p va fi de ordinul doi, iar V_p de ordinul întîi.

În formula (6.12), care poate fi considerată pentru calcularea vitezei pe contur pe bordul de atac, este adesea convenabilă să se înlocuiască $\sum nA_n$, în conformitate cu (5.7), prin raza de curbură a bordului de atac :

$$W_K = V_K = 2g_0 \left(R_1^{-\frac{1}{2}} - R_1^{\frac{1}{2}} \right) - R_1^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n g_n . \tag{6.25}$$

În mod analog vom avea pentru viteza pe bordul de atac rotunjit expresia

$$W_K = V_K = -\bar{q}_0 \left(g_0 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n g_n \right) = R_2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} g_0 - \sum_{n=1}^{\infty} n g_n \right). \tag{6.26}$$

Componenta X a vitezei pe conturul bordului de fugă este de un ordin mai mare decît doi şi deci neglijabilă în cadrul teoriei prezentate. Trebuie însă să ţinem seama de faptul că formula (6.26) are o semnificaţie pur teoretică, avînd în vedere că, la scurgerea reală, în apropierea bordului de fugă are loc o desprindere a stratului — limită.

Formulele pentru distribuţia vitezei pe contur au fost deduse pentru planul Z : în consecinţă, mai trebuie stabilite relaţiile pentru transformarea valorilor din planul Z în planul z. Pentru viteza din planul z vom avea :

$$w = \frac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Z}\right|} \cdot W, \tag{6.27}$$

unde $\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Z}\right|$ este egal cu valoarea absolută a derivatei funcţiei de transformare (2.10)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Z} = 1 + i\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z}. \tag{6.28}$$

Pe abscisa $-1 \leqq X \leqq 1$, $Y = 0$ avem conform cu ecuaţia (2.15),

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z} + \frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}x}, \tag{6.29}$$

iar grosimea profilului fiind mică, derivata funcţiei de transformare $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z}$ poate fi dezvoltată într-o serie Taylor

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z}\right|_{z=z_p} = \frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left(\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}x}\right)(X_p + i\,Y_p - X) + \ldots \tag{6.30}$$

Limitîndu-ne la termenii pînă la ordinul doi, putem neglija în special diferenţa $X_p - X$ şi ceilalţi termeni nescrişi, ca fiind de ordin superior ; derivata $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left(\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}x}\right)$ se poate scrie atunci sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left(\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}X} = -\sum_{n=1}^{\infty} n\,B_n\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}. \tag{6.31}$$

Introducînd în ecuaţiile (6.28) şi (6.30), obţinem

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Z} = 1 + i\sum_{n=0}^{\infty} B_n\cos n\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} n\,B_n\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}\sum_{k=1}^{\infty} A_k\sin k\vartheta. \tag{6.32}$$

Ţinînd seama deci de termenii pînă la ordinul doi inclusiv, vom introduce în ecuaţia (6.27):

$$\frac{1}{\left|\frac{dz}{dZ}\right|} = 1 - \frac{1}{2}B_0^2 - \frac{1}{4}(B_1^2 + B_2^2 + \ldots) - \left(B_0 B_1 + \frac{1}{2}B_1 B_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}B_2 B_3 + \ldots\right)\cos\vartheta - \left(\frac{1}{4}B_1^2 + B_0 B_2 + \frac{1}{2}B_1 B_3 + \ldots\right)\cos 2\vartheta -$$

$$-\left(B_0 B_3 + \frac{1}{2}B_1 B_2 + \frac{1}{2}B_1 B_4 + \ldots\right)\cos 3\vartheta - \left(\frac{1}{4}B_2^2 + B_0 B_4 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}B_1 B_3 + \ldots\right)\cos 4\vartheta - \left(B_0 B_5 + \frac{1}{2}B_1 B_4 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}B_2 B_3 + \ldots\right)\cos 5\vartheta - (A_1 B_1 + 2A_2 B_2 + \ldots)\sin\vartheta -$$

$$- (2A_1 B_2 + A_2 B_1 + 3A_2 B_3 + 2A_3 B_2 + \ldots)\sin 2\vartheta - (3A_1 B_3 +$$

$$+ 2A_2 B_2 + A_3 B_1 + \ldots)\sin 3\vartheta - (4A_1 B_4 + 3A_2 B_3 + 2A_3 B_2 +$$

$$+ A_4 B_1 + \ldots)\sin 4\vartheta + \ldots \qquad (6.33)$$

Viteza pe contur este dată de produsul expresiilor (6.8), respectiv (6.15) şi (6.33).

II. FORMULE PENTRU CALCULUL NUMERIC ŞI EXEMPLE

7. FORMULE PENTRU CALCULUL NUMERIC [4])

În capitolele precedente au fost folosite pentru generalitate pentru diferitele mărimi, dezvoltări în serii trigonometrice infinite. În cazurile practice însă este suficient să se aplice polinoame trigonometrice de un grad relativ mic. În capitolul de faţă vom indica formule pentru aplicarea practică în tehnică, în care la termenii de ordinul întîi se consideră cîţiva coeficienţi ai dezvoltărilor trigonometrice (în general nu trebuie luaţi mai mult decît şase termeni) dintre termenii de ordinul doi se păstrează numai acei termeni la care suma indicilor este mai mică sau egală cu patru.

MĂRIMI GEOMETRICE

Sistemul de coordonate se alege astfel, încît coarda scheletului să se afle pe axa x, iar originea coordonatelor în mijlocul corzii. Lungimea corzii profilului se notează cu c. În locul variabilei x se introduc pe coarda

[4]) În acest capitol, prevăzut pentru aplicaţii practice, toate mărimile sînt luate dimensionale. Pentru lungimi s-a luat ca bază lungimea C corzii scheletului, iar pentru viteze viteza U_0. Pentru aceste mărimi dimensionale, vom folosi pentru simplificarea scrierii aceeaşi notaţie ca pentru mărimile din planul complex z. Deoarece aplicarea formulelor pentru calculul numeric nu presupune în mod necesar cunoaşterea teoriei, nu există pericolul confuziei.

scheletului o variabilă trigonometrică de ecuația

$$x = -\frac{c}{2}\cos\vartheta,\ 0 \leqq \vartheta \leqq \pi. \tag{7.1}$$

Forma scheletului este dată de dezvoltarea trigonometrică :

$$\frac{dy_s}{dx} = \sum_{n=0}^{N} B_n \cos n\vartheta, \tag{7.2}$$

$$B_0 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{B_{2m}}{4m^2 - 1}.$$

Din această dezvoltare rezultă

$$y_s = \frac{c}{4}\left\{ B_0(1 - \cos\vartheta) + \sum_{n=1}^{N} \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n}(1 - \cos n\vartheta)\right\}, \tag{7.3}$$

unde

$$y_s\left(-\frac{c}{2}\right) = y_s\left(\frac{c}{2}\right) = 0. \tag{7.4}$$

Distribuția grosimilor se măsoară pe normala la schelet și este dată de dezvoltarea :

$$t = \frac{c}{2}\left\{\sum_{n=1}^{M} A_n \sin n\vartheta + \sum_{m=1}^{2} [C_{2m}(1 - \cos 2m\vartheta) + \right.$$

$$\left. + C_{2m+1}(\cos\vartheta - \cos(2m+1)\vartheta)]\right\},\ -\pi \leqq \vartheta \leqq \pi. \tag{7.5}$$

Valorile pozitive se trec pe norma spre extrados, iar cele negative spre intrados. Normala înțeapă scheletul în punctul de coordonată x dată de relația

$$x = -\frac{c}{2}\cos\vartheta\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2t}{c\sin\vartheta}\right)^2\right] \tag{7.6}$$

sau

$$x = -\frac{c}{2}\cos\vartheta\left[1 + \frac{1}{2}A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_3 + 2A_1 A_2\cos\vartheta + \right.$$

$$\left. (A_2^2 + 2A_1 A_3)\cos 2\vartheta\right]. \tag{7.7}$$

Raza de curbură a bordului de atac va fi

$$R_1 = \frac{c}{2}\left(\sum_{n=1}^{M} n A_n\right)^2, \tag{7.8}$$

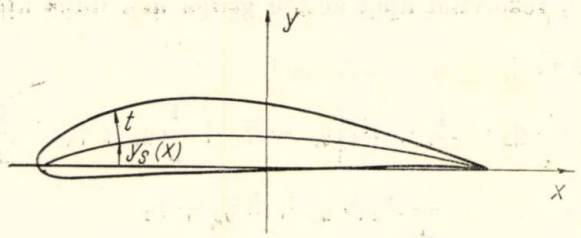


Fig. 9

iar raza de curbură a bordului de fugă

$$R_2 = \frac{c}{2}\left(\sum_{n=1}^{M} (-1)^n n A_n\right)^2. \tag{7.9}$$

Distanţa botului profilului de la punctul final al scheletului de pe bordul de atac :

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} R_1, \tag{7.10}$$

iar de pe bordul de fugă

$$\Delta_2 = \frac{1}{2} R_2. \tag{7.11}$$

MĂRIMI AERODINAMICE

Componentele cîmpului primar de viteze în locul în care se află scheletul sînt date de poligoane trigonometrice, şi anume :

$$u = U_0\left(1 + \sum_{n=0}^{N} \mu_n \cos n\vartheta\right), \quad v = U_0 \sum_{n=0}^{N} \nu_n \cos n\vartheta. \tag{7.12}$$

Distribuţia circulaţiei şi a surselor pe schelet este dată de asemenea de poligoame trigonometrice :

$$\gamma = 2U_0\left(g_0 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\vartheta + \sum_{n=1}^{N} g_n \sin n\vartheta\right), \tag{7.13}$$

$$q = 2U_0\left[q_0 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\vartheta + \overline{q}_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta - 2(q_0 + \overline{q}_0)\sin\vartheta + \sum_{n=2}^{M-1} q_n \sin n\vartheta\right]. \tag{7.14}$$

Relaţia dintre mărimile geometrice şi cele aerodinamice este dată de un sistem de ecuaţii liniare neomogene între coeficienţii mărimilor geometrice A_n, B_n şi C_n şi coeficienţii mărimilor aerodinamice g_n, q_n, μ_n şi ν_n. Pentru rezolvare este avantajos să se descompună acest sistem în trei grupe de ecuaţii, rezolvînd apoi aceste grupe una după alta.

Prima grupă

$$q_0 - \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_2 = A_1 + A_1\left(q_0 - \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_2 + \mu_0 - \frac{1}{2} \mu_2\right) + \\ + \frac{1}{2} A_2 (2 q_0 + 2 \overline{q}_0 + \mu_1),$$

$$\frac{1}{2} q_0 + \frac{1}{2} \overline{q}_0 + \frac{1}{4} q_3 = A_2 + \frac{1}{2} A_1 (2q_0 + 2\overline{q}_0 + q_3 + \mu_1 - \mu_3) + \\ + A_2 (q_0 - \overline{q}_0 + \mu_0) + \frac{1}{2} A_3 (2q_0 + 2\overline{q}_0 + \mu_1),$$

$$-\frac{1}{6} (q_2 - q_4) = A_3 - \frac{1}{2} A_1 (q_2 - \mu_2) + \frac{1}{2} (A_2 + A_4) (2q_0 + \\ + 2\overline{q}_0 + \mu_1) + A_3 (q_0 - \overline{q}_0 + \mu_0),$$

$$-\frac{1}{8} (q_3 - q_5) = A_4 - \frac{1}{2} A_1 (q_3 - \mu_3) - \frac{1}{2} A_2 (q_2 - \mu_2) + \\ + \frac{1}{2} A_3 (2q_0 + 2\overline{q}_0 + \mu_1) + A_4 (q_0 - \overline{q}_0 + \mu_0),$$

$$-\frac{1}{2n} (q_{n-1} - q_{n+1}) = A_n, \quad n \geqq 5. \tag{7.15}$$

Este mai indicat să se folosească, în locul acestor două ecuaţii ale acestei grupe, următoarele :

$$2q_0 = \left\{\sum_{n=1}^{M} n A_n\right\}\left\{1 + 3q_0 + \overline{q}_0 - \sum_{n=2}^{4} q_n + \sum_{n=0}^{4} \mu_n\right\}, \tag{7.16}$$

$$2\overline{q}_0 = \left\{\sum_{n=1}^{M} (-1)^n n A_n\right\}\left\{1 - q_0 - 3\overline{q}_0 - \sum_{n=2}^{4} (-1)^n q_n + \sum_{n=0}^{4} (-1)^n \mu_n\right\}. \tag{7.17}$$

Grupa a doua

$$g_0 = -B_0 + \nu_0 + g_0 \sum_{n=1}^{M} n A_n - B_0 \mu_0 - \frac{1}{2} B_1 \mu_1 - \frac{1}{2} B_2 \mu_2 + \\ + \frac{1}{3} B_2\left(g_0 - \overline{q}_0 + \frac{1}{2} q_2\right) + \frac{1}{4} B_3 (q_0 + \overline{q}_0) + \frac{7}{15} B_4 (q_0 - \overline{q}_0),$$

$$g_1 = B_1 - \nu_1 - g_0 \sum_{n=1}^{M} n A_n + B_0 \mu_1 + B_1\left(\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_2\right) + \frac{1}{2} B_2 \mu_1 -$$

$$- B_3 (q_0 - \bar{q}_0) - \frac{4}{5} B_4 (q_0 + \bar{q}_0),$$

$$q_2 = B_2 - \nu_2 + B_0 \mu_2 + \frac{1}{2} B_1 (\mu_1 + \mu_3) + B_2 \mu_0 - \frac{6}{5} B_4 (q_0 - \bar{q}_0),$$

$$g_3 = B_3 - \nu_3 + B_0 \mu_3 + \frac{1}{2} B_1 \mu_2 + \frac{1}{2} B_2 \mu_1 + B_3 \mu_0, \tag{7.18}$$

$$g_4 = B_4 - \nu_4 + B_0 \mu_4 + \frac{1}{2} B_1 \mu_3 + \frac{1}{2} B_2 \mu_2 + \frac{1}{2} B_3 \mu_1 + B_4 \mu_0,$$

$$g_n = B_n - \nu_n, \quad n \geqq 5.$$

Grupa a treia

$$C_2 = -\frac{1}{4} g_0 \sum_{n=1}^{4} n A_n + g_0 \left(A_2 + 2 \sum_{n=3}^{4} A_n\right) - \frac{1}{2} g_1 (A_1 - A_3) + \frac{1}{2} g_3 A_1,$$

$$C_3 = g_0 (A_3 + 2 A_4) - \frac{1}{2} g_1 A_2 - \frac{1}{2} g_2 A_1, \tag{7.19}$$

$$C_4 = g_0 A_4 - \frac{1}{2} g_1 A_3 - \frac{1}{2} g_2 A_2 - \frac{1}{2} g_3 A_1.$$

Toate cele trei grupe au termenii cei mai mari în diagonală principală, putînd fi rezolvate deci ușor, de exemplu, prin metoda aproximațiilor succesive, în cele mai multe cazuri vor fi suficiente primele două aproximații.

PROBLEMA DIRECTĂ (A DOUA PROBLEMĂ PRINCIPALĂ) A TEORIEI PROFILELOR

În rezolvarea problemei directe se caută distribuția circulației și a surselor (adică coeficienții g_n și q_n) pentru profilul aflat într-un cîmp primar dat. Din distribuția circulației și a surselor găsite prin calcul se determină apoi circulația totală și distribuția vitezelor pe conturul profilului.

Scheletul profilului neavînd o caracteristică pur geometrică, ci depinzînd și de cîmpul primar, se pornește la rezolvarea problemei directe de la linia mediană a profilului, ținînd totodată seama și de faptul că majoritatea acestor profile au fost generate prin suprapunerea profilului simetric corespunzător pe linia mediană respectivă.

Începutul liniei mediane se află la distanța $\Delta_1 = \frac{1}{2} R_1$ de la bordul de atac (fig. 10), iar punctul ei final pe bordul de fugă, respectiv la distanța de $\Delta_2 = \frac{1}{2} R_2$ în cazul bordului de fugă rotunjit. Pentru această

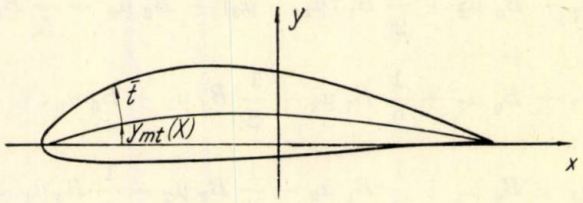


Fig. 10

linie mediană se determină coeficienții $\overline{B}_n$ ai dezvoltării trigonometrice a derviatei, după cum urmează :

$$\frac{\mathrm{d}y_{mt\vartheta}}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=0}^{N} \overline{B}_n \cos n\vartheta. \tag{7.20}$$

Apoi se determină coeficienții A_n ai distribuției simetrice a grosimilor

$$\bar{t} = \frac{c}{2} \sum_{n=1}^{M} A_n \sin n\vartheta, \quad x = -\frac{c}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\bar{t}}{c \sin \vartheta}\right)^2\right] \cos \vartheta. \tag{7.21}$$

Avînd în vedere că corecția asimetrică a distribuției grosimilor (coeficienții C_n din (7.5)) sînt de ordinul doi, se poate alege pentru schelet următoarea curbă :

$$y_s = y_{mt} - \frac{c}{2}\left[C_2(1-\cos 2\vartheta) + C_3(\cos \vartheta - \cos 3\vartheta) + C_4(1-\cos 4\vartheta)\right]. \tag{7.22}$$

Valorile coeficienților care se introduc în sistemul (7.18) vor fi atunci

$$\begin{aligned} B_0 &= \overline{B}_0 - 2C_3, \\ B_1 &= \overline{B}_1 - 4(C_2 + 2C_4), \\ B_2 &= \overline{B}_2 - 6C_3, \\ B_3 &= \overline{B}_3 - 8C_4, \\ B_n &= \overline{B}_n, \quad n \geqq 4, \end{aligned} \tag{7.23}$$

unde coeficienții C_n sînt dați de expresiile (7.19). Rezolvînd sistemele (7.15) și (7.18), se obțin valorile coeficienților g_n și q_n. Circulația totală va fi :

$$\Gamma = \pi c\, U_0 \left(g_0 + \frac{1}{2} g_1\right). \tag{7.24}$$

Distribuția vitezelor pe conturul profilului în domeniul din afara bordului de atac rotunjit (iar în cazul bordului de fugă rotunjit și în afara acestui bord de fugă) este dată de următoarea relație :

$$w_K = \frac{U_0}{\left|\frac{dz}{dZ}\right|}\left\{1 + \sum_{n=0}^{N} \widetilde{\mu}_n \cos n\vartheta + q_0 - q_0 + 2(q_0 + q_0)\cos\vartheta - \sum_{n=2}^{M} q_n \cos n\vartheta + \right.$$

$$+ g_0 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta + \sum_{n=1}^{N} g_n \sin n\vartheta + \varepsilon\left[\frac{-q_0}{1-\cos\vartheta} + \frac{q_0}{1+\cos\vartheta} - 2(q_0+q_0)\cos\vartheta + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{4} n q_n \cos n\vartheta \right| + \frac{dY_p}{dX_p}\left[q_0 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta + q_0 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta - 2(q_0+q_0)\sin\vartheta + \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{n=2}^{4} q_n \sin n\vartheta - \frac{1}{2}\frac{dY_p}{dX_p}\right]\right\}, \tag{7.25}$$

unde

$$\widetilde{\mu}_0 = \mu_0 + \nu_0 B_0 + \frac{1}{2}\nu_1 B_1 + \frac{1}{2}\nu_2 B_2 + g_0\left(\frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{3}B_2 + \frac{1}{2}B_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{7}{15}B_4\right) + \frac{1}{4}g_1\left(B_1 + \frac{1}{2}B_3\right) + \frac{1}{6}g_2 B_2,$$

$$\widetilde{\mu}_1 = \mu_1 + \nu_0 B_1 + \nu_1\left(B_0 + \frac{1}{2}B_2\right) + \frac{1}{2}\nu_2 B_1 + g_0\left(\frac{4}{3}B_2 + B_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{16}{15}B_4\right) + \frac{2}{3}g_1 B_2,$$

$$\widetilde{\mu}_2 = \mu_2 + \nu_0 B_2 + \frac{1}{2}\nu_1 B_1 + \nu_2 B_0 + \frac{1}{2}\nu_3 B_1 + g_0\left(\frac{3}{2}B_3 + \frac{6}{5}B_4\right) + \frac{3}{4}g_1 B_3,$$

$$\widetilde{\mu}_3 = \mu_3 + \nu_0 B_3 + \frac{1}{2}\nu_1 B_2 + \frac{1}{2}\nu_2 B_1 + \nu_3 B_0 + \frac{8}{5}g_0 B_4,$$

$$\widetilde{\mu}_0 = \mu_4 + \nu_0 B_4 + \frac{1}{2}\nu_1 B_3 + \frac{1}{2}\nu_2 B_2 + \frac{1}{2}\nu_3 B_1 + \nu_4 B_0, \tag{7.26}$$

$$\widetilde{\mu}_n = \mu_n,\ n \geqq 5;$$

$$\varepsilon = A_1 + A_3 + 2(A_2 + A_4)\cos\vartheta + 2A_3\cos 2\vartheta + 2A_4\cos 3\vartheta; \tag{7.27}$$

$$\frac{dY_p}{dX_p} = \left(\frac{R_1}{2c}\right)^{1/2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta - \left(\frac{R_2}{2c}\right)^{1/2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta - 2(2A_2 + 4A_4)\sin\vartheta -$$

$$- 6A_3\sin 2\vartheta - 8A_4\sin 3\vartheta; \tag{7.28}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Z}\right| = 1 + \frac{1}{2}B_0^2 + \frac{1}{4}(B_1^2 + B_2^2) + \left(B_0 B_1 + \frac{1}{2}B_1 B_2\right)\cos\vartheta + \left(\frac{1}{4}B_1^2 + \right.$$

$$\left. + B_0 B_2 + \frac{1}{2}B_1 B_3\right)\cos 2\vartheta + \left(B_0 B_3 + \frac{1}{2}B_1 B_2\right)\cos 3\vartheta +$$

$$+ \left(\frac{1}{4}B_2^2 + B_0 B_4 + \frac{1}{2}B_1 B_3\right)\cos 4\vartheta + (A_1 B_1 + 2A_2 B_2)\sin\vartheta +$$

$$+ (2A_1 B_2 + A_2 B_1)\sin 2\vartheta + (3A_1 B_3 + 2A_2 B_2 + A_3 B_1)\sin 3\vartheta . \tag{7.29}$$

În vecinătatea bordului de atac rotunjit și a bordului de fugă rotunjit $\left(|\vartheta| < \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6} < |\vartheta| \leqq \pi\right)$, unde apar devieri de la relația (7.25), este indicat să se calculeze viteza de contur după formula

$$w_K = \frac{U_0}{\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Z}\right|} \cdot (U_K^2 + V_K^2)^{1/2}, \tag{7.30}$$

unde

$$U_p = 1 + \sum_{n=0}^{N} \tilde{\mu}_n \cos n\vartheta + q_0 - \bar{q}_0 + 2(q_0 + \bar{q}_0)\cos\vartheta - \sum_{n=0}^{M} q_n \cos n\vartheta +$$

$$+ \frac{g_0 \sin\vartheta}{1 - \cos\vartheta + \frac{1}{2}\varepsilon^2} + \sum_{n=1}^{N} g_n \sin n\vartheta + \varepsilon\left[\frac{-q_0}{1 - \cos\vartheta + \frac{1}{2}\varepsilon^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{q}_0}{1 + \cos\vartheta + \frac{1}{2}\varepsilon^2} - 2(q_0 + \bar{q}_0)\cos\vartheta + \sum_{n=2}^{4} n q_n \cos n\vartheta\right], \tag{7.31}$$

$$V_p = \frac{g_0 \sin\vartheta}{1 - \cos\vartheta + \frac{1}{2}\varepsilon^2} + \frac{\bar{q}_0 \sin\vartheta}{1 + \cos\vartheta + \frac{1}{2}\varepsilon^2} - 2(q_0 + \bar{q}_0)\sin\vartheta +$$

$$+ \sum_{n=2}^{M} q_n \sin n\vartheta - g_0 \sum_{n=1}^{N} n A_n (1 + \cos\vartheta) + \varepsilon\left[(\tilde{\mu}_1 + 2q_0 + 2\bar{q}_0)\sin\vartheta + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{4} n(\tilde{\mu}_n - q_n)\sin n\vartheta + \frac{q_0}{1 - \cos\vartheta + \frac{1}{2}\varepsilon^2} - \sum_{n=1}^{4} n g_n \cos n\vartheta\right]. \tag{7.32}$$

Viteza de pe bordul de atac va fi

$$w = \frac{U_0}{1 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{4} B_n\right)^2}\left[\left(\frac{R_1}{2c}\right)^{-\frac{1}{2}} g_0 - \left(\frac{2R_1}{c}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{4} n\, g_n\right]. \tag{7.33}$$

PROBLEMA INDIRECTĂ (PRIMA PROBLEMĂ FUNDAMENTALĂ) A TEORIEI PROFILELOR

Problema indirectă în adevăratul sens al cuvîntului constă în calculul formei profilului din distribuţia dată a vitezelor de pe contur. Problema nu va fi rezolvată aici în acest sens cu totul general, ci se va calcula forma profilului introdus în cîmpul de scurgeri primar neomogen dacă se cunoaşte coarda scheletului, precum şi distribuţia surselor şi a vîrtejurilor.

Expresiile pentru componentele vitezei primare în punctele profilului căutat rezultă din dezvoltarea în serie Taylor a componenţelor vitezei primare din vecinătatea corzii scheletului. În calcule se iau în consideraţie apoi numai primii termeni ai acestor dezvoltări. În locul lui (7.12) se va scrie :

$$w = U_0\left[1 + \sum_{n=0}^{N}\left(\mu'_n + \frac{\partial \mu'_n}{\partial y} y_s\right)\cos n\vartheta\right], \tag{7.34}$$

$$v = U_0\left[\sum_{n=0}^{N}\left(\nu'_n + \frac{\partial \nu'_n}{\partial y} y_s\right)\cos n\vartheta\right]. \tag{7.35}$$

Valorile coeficienţilor μ'_n, ν'_n, $\frac{\partial \mu'_n}{\partial y}$ şi $\frac{\partial \nu'_n}{\partial y}$ se obţin din valorile componenţilor vitezei şi din derivatele acestora în punctele corzii.

Notaţia cu (′) a fost introdusă pentru a se deosebi aceşti coeficienţi μ'_n şi ν'_n de coeficienţii μ_n şi ν_n ai dezvoltărilor componentelor vitezei primare calculate direct pe profil (7.21). Ţinînd seama de (7.3) şi de condiţia (7.2), va fi atunci :

$$\mu_0 = \mu'_0 + \frac{c}{8}\frac{\partial \mu'_0}{\partial y}\left(B_1 - \frac{1}{2}B_3\right) + \frac{c}{24}\frac{\partial \mu'_1}{\partial y}B_2 - \frac{c}{16}\frac{\partial \mu'_2}{\partial y}B_1,$$

$$\mu_1 = \mu'_1 + \frac{c}{6}\frac{\partial \mu'_0}{\partial y}\left(\frac{1}{2}B_2 - \frac{1}{5}B_4\right) + \frac{c}{16}\frac{\partial \mu'_1}{\partial y}B_1 - \frac{c}{16}\frac{\partial \mu'_3}{\partial y}B_1,$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - \frac{c}{8}\frac{\partial \mu'_0}{\partial y}(B_1 - B_3) + \frac{c}{8}\frac{\partial \mu_2}{\partial y}B_1,$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - \frac{c}{12}\frac{\partial \mu'_0}{\partial y}(B_2 - B_4) - \frac{c}{16}\frac{\partial \mu'_1}{\partial y}\left(B_1 - \frac{1}{2}B_3\right) +$$

$$+ \frac{c}{24}\frac{\partial \mu'_2}{\partial y}B_2 + \frac{c}{8}\frac{\partial \mu'_3}{\partial y}B_1,$$

$$\mu_4 = \mu_4' - \frac{c}{16}\frac{\partial \mu_0'}{\partial y} B_3 - \frac{c}{24}\frac{\partial \mu_1'}{\partial y} B_2 - \frac{c}{16}\frac{\partial \mu_2'}{\partial y} B_1,$$

$$\mu_5 = \mu_5' - \frac{c}{20}\frac{\partial \mu_0'}{\partial y} B_4 - \frac{c}{32}\frac{\partial \mu_1'}{\partial y} B_3 - \frac{c}{24}\frac{\partial \mu_2'}{\partial y} B_2 - \frac{c}{16}\frac{\partial \mu_3'}{\partial y} B_1,$$

$$\mu_n = \mu_n', \quad n \geqq 6. \tag{7.36}$$

$$\nu_0 = \nu_0' + \frac{c}{8}\frac{\partial \nu_0'}{\partial y}\left(B_1 - \frac{1}{2} B_3\right) + \frac{c}{24}\frac{\partial \nu_1'}{\partial y} B_2 - \frac{c}{16}\frac{\partial \nu_2'}{\partial y} B_1,$$

$$\nu_1 = \nu_1' + \frac{c}{6}\frac{\partial \nu_0'}{\partial y}\left(\frac{1}{2} B_2 - \frac{1}{5} B_4\right) + \frac{c}{16}\frac{\partial \nu_1'}{\partial y} B_1 - \frac{c}{16}\frac{\partial \nu_3'}{\partial y} B_1,$$

$$\nu_2 = \nu_2' - \frac{c}{8}\frac{\partial \nu_0'}{\partial y}(B_1 - B_3) + \frac{c}{8}\frac{\partial \nu_2'}{\partial y} B_1,$$

$$\nu_3 = \nu_3' - \frac{c}{12}\frac{\partial \nu_0'}{\partial y}(B_2 - B_4) - \frac{c}{16}\frac{\partial \nu_1'}{\partial y}\left(B_1 - \frac{1}{2} B_3\right) +$$

$$+ \frac{c}{24}\frac{\partial \nu_2'}{\partial y} B_2 + \frac{c}{8}\frac{\partial \nu_3'}{\partial y} B_1,$$

$$\nu_4 = \nu_4' - \frac{c}{16}\frac{\partial \nu_0'}{\partial y} B_3 - \frac{c}{24}\frac{\partial \nu_1'}{\partial y} B_2 - \frac{c}{16}\frac{\partial \nu_2'}{\partial y} B_1,$$

$$\nu_5 = \nu_5' - \frac{c}{20}\frac{\partial \nu_0'}{\partial y} B_4 - \frac{c}{32}\frac{\partial \nu_1'}{\partial y} B_3 - \frac{c}{24}\frac{\partial \nu_2'}{\partial y} B_2 - \frac{c}{16}\frac{\partial \nu_3'}{\partial y} B_1,$$

$$\nu_n = \nu_n', \quad n \geqq 6. \tag{7.37}$$

Expresiile (7.36) și (7.37) se aplică numai acolo unde coeficienții μ_n și ν_n apar în termenii de ordinul întîi. În termenii de ordinul doi se va pune numai (7.35)

$$\mu_n = \mu_n', \quad \nu_n = \nu_n'. \tag{7.38}$$

Mai trebuie menționat că coeficienții B_n, care se obțin prin rezolvarea sistemului (7.18), trebuie să satisfacă condiția (7.2); de aceea în sistemul (7.18) vom scrie peste tot

$$B_0 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{B_{2m}}{4m^2 - 1}. \tag{7.39}$$

De aici rezultă că, la alegerea distribuției circulației, coeficientul g_0 nu este arbitrar, ci rezultă din rezolvarea sistemului (7.18).

Cu această pregătire se poate trece la rezolvarea sistemelor (7.15), (7.18) și (7.19). După calcularea coeficienților A_n, B_n și C_n se determină apoi forma scheletului cu ajutorul ecuațiilor (7.1) și (7.3) și distribuția

grosimilor cu ajutorul ecuațiilor (7.5) și (7.6). Circulația totală și distribuția vitezelor pe conturul profilului se calculează în conformitate cu ecuațiile (7.24) — (7.30), analog ca la problema directă.

După cum am menționat mai sus, distribuția vitezelor pe contur este decisivă pentru rezolvarea problemei indirecte.

De aceea se va stabili cel puțin încă o expresie aproximativă pentru viteza pe contur, corespunzătoare distribuției alese a vîrtejurilor și surselor.

Această expresie se obține din cele menționate mai sus, ținînd seama în acestea numai de termenii de ordinul întîi. În domeniul din afara bordului de atac rotunjit, viteza pe contur va fi

$$w_K = U_0 \left\{1 + \sum_{n=0}^{N} \mu'_n \cos n\vartheta + q_0 - q_0 + 2(q_0 + \overline{q}_0)\cos\vartheta - \sum_{n=2}^{M} q_n \cos n\vartheta + \right.$$

$$\left. + g_0 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\vartheta + \sum_{n=1}^{N} g_n \sin n\vartheta \right\}. \tag{7.40}$$

Pe bordul de atac viteza va fi

$$W_K = \frac{g_0}{q_0}, \tag{7.41}$$

unde coeficientul g_0 este dat de relația

$$g_0 = \nu'_0 - \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{g_{2m} + \nu'_{2m}}{4m^2 - 1} \tag{7.42}$$

Este indicat să se aprecieze distribuția vitezelor pe conturul profilului după formulele (7.40) — (7.42) în fiecare caz, înaintea operațiilor de calcul, pentru a se elimina apriori acele distribuții de circulații și surse care ar duce la profile nefavorabile din punctul de vedere al tehnicii scurgerii. Pe de altă parte, este posibil să se folosească formulele (7.40) — (7.42) pentru alegerea coeficienților g_n și q_n (cel puțin în prima aproximație) la calculul profilului din distribuția de viteze dată pe contur.

8. EXEMPLE

Utilitatea teoriei elaborate va fi ilustrată acum pe trei exemple de aplicații practice.

8.1. Profilul simetric în cîmpul de scurgere omogen

Ca un prim exemplu, vom arăta mersul operațiilor pentru un profil NACA modificat. Forma profilului este indicată de tabela de coordonate (tabela 1). Cu ajutorul analizei armonice se stabilesc coeficienții A_n ai distribuției gosimilor pentru acest profil (vezi ecuația (7.21)).

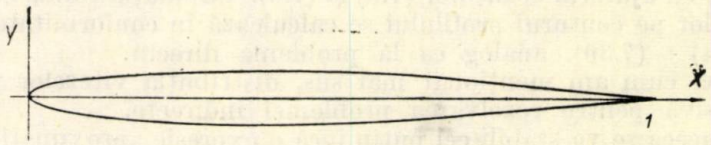


Fig. 11

Tabela 1

X = distanţa bordului de atac redusă Y = grosimea profilului redusă

X	$10^2\,Y$	X	$10^2\,Y$	X	$10^2\,Y$
0	0	0,250	4,040	0,751	2,401
0,007	0,854	0,329	4,278	0,822	1,749
0,030	1,671	0,414	4,309	0,884	1,177
0,067	2,422	0,501	4,108	0,933	0,749
0,117	3,082	0,588	3,683	0,970	0,438
0,177	3,630	0,672	3,084	1,000	0

Deoarece este vorba de un profil simetric, toţi coeficienţii B_n (vezi ecuaţia (7.20)) vor fi egali cu zero. Ţinînd seama de ecuaţia (7.19), coeficienţii C_n vor fi

$$A_1 = 0{,}0753 \qquad A_2 = 0{,}0192 \qquad A_3 = -0{,}0063,$$

$$A_4 = 0{,}0002, \qquad A_5 = 0{,}0008 \qquad A_6 = -0{,}0002,$$

$$\sum_{n=1}^{6} n A_n = 0{,}0987 \qquad \sum_{n=1}^{6} (-1)^n n A_n = -0{,}0226$$

$$C_2 = -0{,}017\ g_0 \quad -0{,}041\ g_1 \quad +0{,}038\ g_3,$$

$$C_3 = -0{,}006\ g_0 \quad -0{,}010\ g_1 \quad -0{,}038\ g_3,$$

$$C_4 = \quad 0{,}003\ g_1 \quad -0{,}010\ g_2 \quad 0{,}038\ g_3$$

Vitezele se reduc la componenta x a cîmpului de viteze primar omogen, astfel că, conform cu ecuaţia (7.12),

$$u = U_\infty, \quad v = U_\infty \operatorname{tg} \alpha_\infty,$$

unde α_∞ este unghiul de incidenţă.

În continuarea calculelor vom introduce parametrul unghiului de incidenţă $K = \operatorname{tg} \alpha_\infty$. Toţi coeficienţii μ_n şi γ_n din dezvoltările (7.12) sînt egali cu zero, cu excepţia lui ν_0, pentru care avem

$$\gamma_0 = K.$$

Aceste valori se introduc apoi în sistemele de ecuații (7.15) (7.18), care se rezolvă în raport cu coeficienții căutați ai distribuției vîrtejurilor și surselor :

$$g_0 = 1{,}093\ K\,;\ g_1 = 0{,}040\ K\,;\ g_2 = 0{,}047\ K\,;\ g_3 = 0{,}002\ K\,;$$

$$q_0 = 0{,}0544\,;\ \bar{q}_0 = -0{,}0107\,;\ q_2 = 0{,}0344\,;\ q_3 = 0{,}0075\,;$$

$$q_4 = -\,0{,}0083\,;\ q_5 = 0{,}0021\,;\ q_6 = -\,0{,}0004.$$

Ținînd seama de (7.24), circulația totală va fi

$$\frac{\Gamma}{c\,U_\infty} = 3{,}371\ K.$$

Distribuția vitezelor pe conturul profilului se obține introducînd în ecuațiile (7.25) — (7.33) $\alpha_\infty = 0°$ și $2°$ și este reprezentată în figura 12.

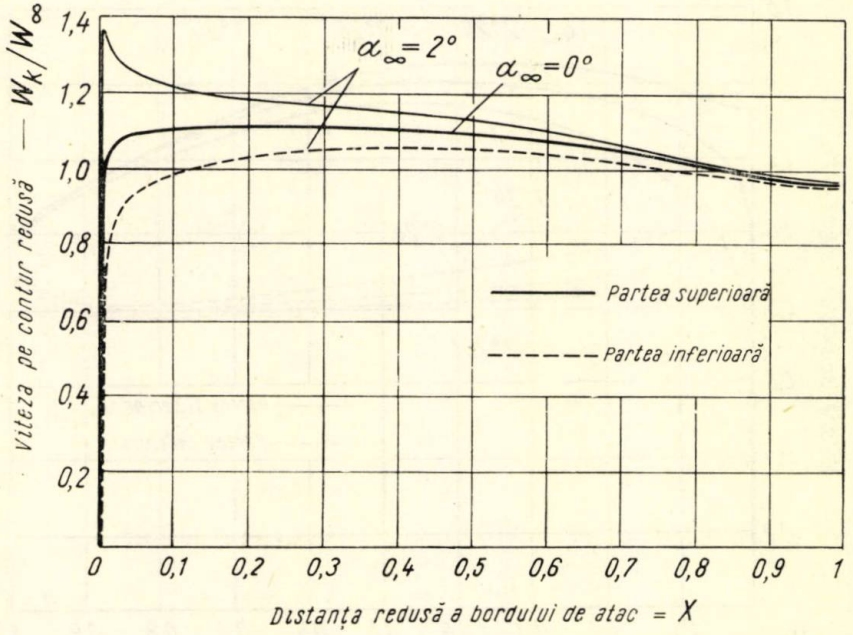


Fig. 12

Distribuția vitezelor este raportată în figura 12 la viteza totală a cîmpului de scurgeri primare $W_\infty = U_\infty\,(1 + K^2)^{1/2}$.

8.2. Profilul curb în cîmpul de scurgere omogen

Fie al doilea exemplu de scurgerea în jurul unui profil curbat, generat prin suprapunerea profilului simetric mai sus menționat pe o linie mediană de profil în formă de arc de cerc. Unghiul la centru al liniei mediane fie $\omega = 29°32'$.

Pentru linia mediană în formă de arc de cerc, coeficienţii din dezvoltarea (7.20) sînt daţi de următoarele expresii :

$$\overline{B}_1 = \sin\frac{\omega}{2} + \frac{3}{8}\sin^3\frac{\omega}{2} + \frac{15}{16}\sin^5\frac{\omega}{2} + \ldots,$$

$$\overline{B}_3 = \frac{1}{8}\sin^3\frac{\omega}{2} + \frac{15}{128}\sin^5\frac{\omega}{2} + \ldots,$$

$$\overline{B}_5 = \frac{3}{128}\sin^5\frac{\omega}{2} + \ldots,$$

$$\overline{B}_{2n} = 0.$$

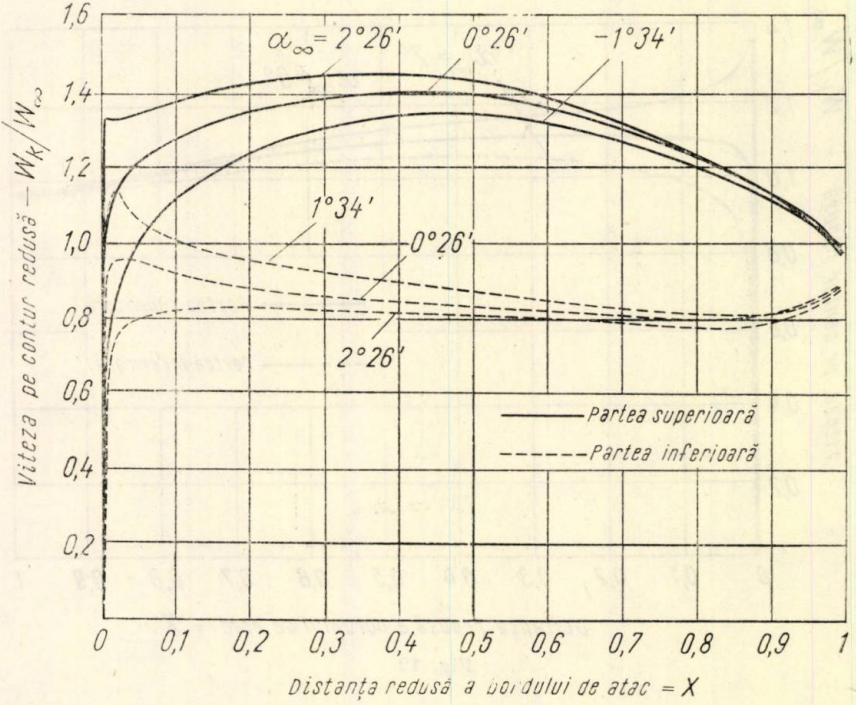


Fig. 13

În exemplul considerat, numai doi dintre coeficienţii $\overline{B}_n$ sînt diferiţi de zero :

$\overline{B}_1 = 0{,}2613$ şi $\overline{B}_3 = 0{,}0022$.

Continuarea operaţiilor este complet analogă cu cele din exemplul precedent, astfel încît vom indica numai rezultatele.

Circulația totală va fi

$$\frac{\Gamma}{c\,U_\infty} = 0{,}4590 + 3{,}371\ K,$$

iar distribuția vitezelor pe conturul profilului este redată în figura 13, și anume pentru $\alpha_\infty = 0°$, 26′, ceea ce corespunde unei intrări fără șoc, și apoi pentru $\alpha_\infty = -1°$, 34′ și 2°26′.

8.3 Profilul curb dispus în rețea

În sfîrșit, vom calcula scurgerea din jurul profilului din exemplul precedent, aflat într-o rețea (fig. 4). Pasul rețelei (s/c) și unghiul de așezare (1) al rețelei fie $s/c = 0{,}904$; $\lambda = 34°30'$.

Scurgerea în jurul profilului în rețea se consideră drept scurgere în jurul unui profil izolat în cîmpul de scurgeri primar neomogen [7].

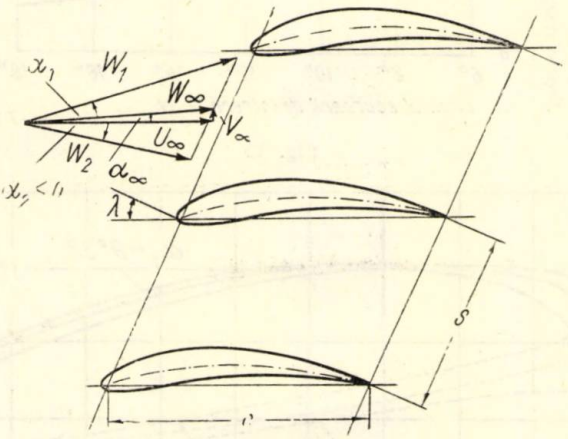


Fig. 14

Neomogenitatea scurgerii primare (viteze induse) este creată de celelalte profile din rețea.

Ca viteză de referință se alege componenta x ($U\infty$) a vitezei de translație (W_∞) ; viteza de translație se definește ca media vectorială a vitezelor de intrare și ieșire (W_1, W_2).

Coeficienții μ_n și ν_n din dezvoltări sînt dați de următoarele expresii (vezi [8]) :

$$\mu_0 = -0{,}325\ g_0 - 0{,}168\ g_2 + 0{,}006\ g_4 + 0{,}235\ q_0 - 0{,}235\ \overline{q}_0 + 0{,}120\ q_2,$$

$$\mu_1 = 0{,}650\ g_0 + 0{,}368\ g_1 - 0{,}046\ g_3 - 0{,}009\ q_0 - 0{,}009\ q_0 - 0{,}007\ q_3,$$

$$\mu_2 = 0{,}085\ g_0 + 0{,}047\ g_2 - 0{,}004\ g_4 + 0{,}009\ q_0 - 0{,}009\ \overline{q}_0 + 0{,}011\ q_2,$$
$$\mu_3 = -0{,}021\ g_0 - 0{,}015\ g_1 + 0{,}003\ g_3 + 0{,}014\ q_0 + 0{,}014\ \overline{q}_0 + 0{,}008\ q_3,$$
$$\mu_4 = -0{,}006\ g_0 - 0{,}002\ g_2 - 0{,}005\ q_0 + 0{,}005\ \overline{q}_0 - 0{,}004\ q_2,$$
$$\mu_5 = 0{,}002\ g_0 + 0{,}001\ g_1,$$
$$\nu_0 = K - 0{,}235\ g_0 - 0{,}120\ g_2 + 0{,}003\ g_4 - 0{,}325\ q_0 + 0{,}325\ \overline{q}_0 - 0{,}168\ q_2$$
$$\nu_1 = 0{,}470\ g_0 + 0{,}230\ g_1 + 0{,}007\ g_3 - 0{,}085\ q_0 - 0{,}085\ \overline{q}_0 - 0{,}046\ q_3,$$
$$\nu_2 = -0{,}009\ g_0 - 0{,}013\ g_2 + 0{,}008\ g_4 + 0{,}085\ q_0 - 0{,}085\ \overline{q}_0 + 0{,}047\ q_2,$$
$$\nu_3 = -0{,}009\ g_0 + 0{,}002\ g_1 - 0{,}008\ g_3 + 0{,}009\ q_0 + 0{,}009\ \overline{q}_0,$$
$$\nu_4 = 0{,}005\ g_0 + 0{,}004\ g_2 - 0{,}006\ q_0 + 0{,}006\ \overline{q}_0 - 0{,}002\ q_2,$$
$$\nu_5 = 0{,}001\ g_0 - 0{,}001\ g_1.$$

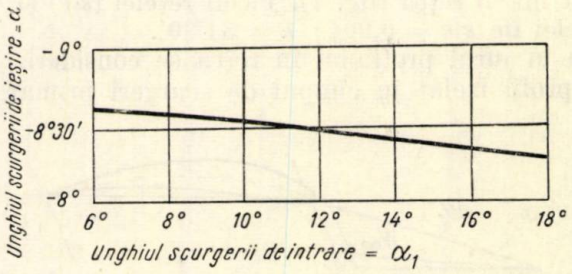


Fig. 15

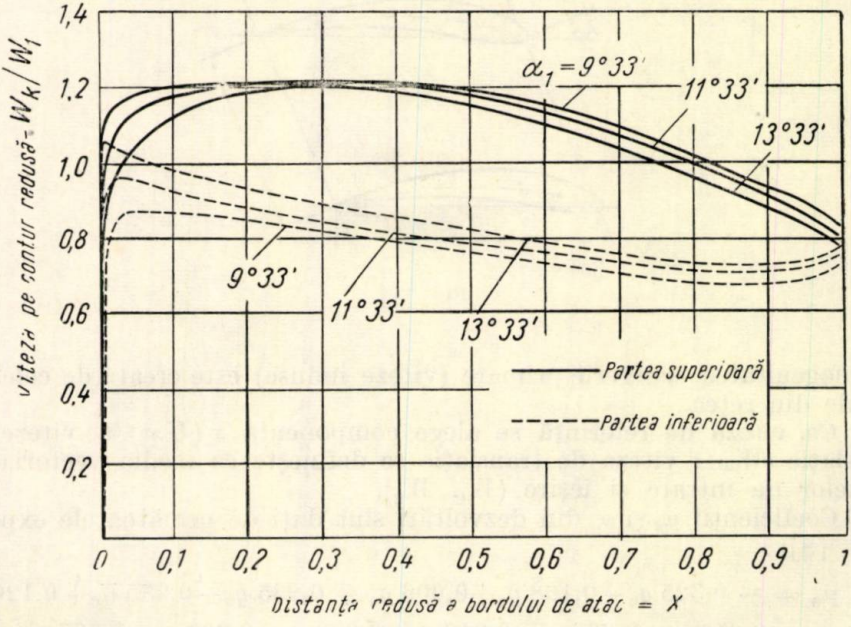


Fig. 16

Continuarea operațiilor decurge analog ca în exemplele precedente. Dintre rezultatele numerice indicăm numai unghiul de ieșire α_2 (fig. 15) și distribuția de viteze pe conturul profilului.

Distribuția de viteze este reprezentată în figura 16 pentru intrarea fără șoc $\alpha_1 = 11°33'$ și apoi pentru $\alpha_1 = 9°33'$ și $13°33'$. În figura 16 distribuția de viteze este raportată la viteza de intrare.

ÎNCHEIERE

În lucrare se prezintă o teorie a profilelor cu curbură mică în cîmpul de scurgere neomogen. Această teorie este dezvoltată ca o teorie „de ordinul doi", considerîndu-se coeficienții din dezvoltările pentru distribuția circulației a surselor și a grosimilor, precum și coeficienții din dezvoltarea formei scheletului ca fiind „de ordinul unu", neglijîndu-se în toate relațiile numai termeni începînd cu ordinul trei.

Rezultatele principale ale lucrării sînt adaptate în capitolul 7 necesităților calculului numeric, astfel încît să fie aplicabile fără o cunoaștere mai profundă a teoriei. Acest fapt este foarte important, deoarece pentru stabilirea relațiilor se presupune cunoașterea teoriei funcțiilor variabile complexe și a transformării conforme, în timp ce pentru calculul numeric este suficientă, în general, cunoașterea dezvoltării funcțiilor în serii trigonometrice (analiza armonică) și a rezolvării sistemelor de ecuații neomogene literare, deci cunoștințele de care dispune orice tehnician.

Sistemele de ecuații liniare au o formă deosebit de convenabilă pentru calculul numeric, deoarece termenii cei mai mari apar totdeauna în diagonala principală. De aceea se recomandă metoda aproximațiilor succesive, care în astfel de cazuri asigură o rezolvare rapidă chiar în cazul sistemelor cu mai multe necunoscute.

Avînd în vedere că în tehnică se întîlnesc astfel de sisteme foarte des și în cele mai variate situații, teoria a fost construită într-o formă cu totul generală fără să se vizeze cazuri concrete special, ca : scurgerea omogenă în jurul profilelor aerodinamice, scurgerea în jurul profilelor în apropierea pămîntului, scurgerea rețelelor de pale drepte și radiale, scurgerea în jurul palelor directoare etc.

Pentru toate aceste cazuri pot fi elaborate formule de calcul pe baza teoriei prezentate, care să respecte caracteristicile specifice ale cazului respectiv, ceea ce duce la alte simplificări ale operațiilor de calcul. Pentru nevoile tehnice, cea mai importantă este aplicarea la scurgerile în jurul rețelelor de pale nu prea groase, de curbură nu prea mare, atît în scurgerea subsonică incompresibilă, cît și în cea compresibilă, așa cum s-a arătat în exemplul (8.3).

Formulele indicate în capitolul 7 sînt destinate atît pentru calculele cu mașina electrică, cît și pentru cel cu rigla. Totodată se pretează foarte bine și la programarea pe mașini electronice de calcul, la care timpul de lucru pentru calcularea completă a unui profil sau a unei rețele de pale se reduce la un minim.

Exemplele menţionate în capitolul 8 au fost calculate cu ajutorul maşinii electronice de calcul ZUSE—23.

Rezultatele obţinute pot fi generalizate şi pentru profile nu prea groase, dar de curbură mare, în felul în care cum a fost rezolvată în [6] scurgerea în jurul unui profil subţire, dar cu curbura mare, în cîmpul de scurgere neomogen. Această generalizare nu a fost inclusă în lucrarea de faţă, în primul rînd pentru că nu au o mare însemnătate şi, în al doilea rînd, pentru că astfel de generalizare ar fi fost în dezavantajul clarităţii expunerii întregii lucrări.

Primit la redacţie la 14 octombrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. W. Birnbaum, *Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie.* Z. angew. Math., 1923, **3**, 390.
2. J. Allen, *General theory of airfoil sections having arbitrary shape or pressure distribution,* NACA Rep., 1945, 833.
3. F. Riegels, I. *Mitteilung.* Ing. Archiv, 1948, **16**, 373: II. *Mitteilung.* Ing. Archiv, 1949, **17**, 94: *Berichtigung.* Ing. Archiv, 1950, **18**, 329.
4. E. Souczek, *Der Tragflügel in der nicht homogenen Strömung.* Oest. Ing. Arch., 1949, **3**, 396—404.
5. E. Truckenbrodt, *Die Berechnung der Profilform bei vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung.* Ing. Arch., 1951, **19**, 365—377.
6. J. Polášek, *Tenký profil v nehomogenním proudovém poli* (Dünnes Profil im inhomogenen Strömungsfeld). Aplikace mat., 1956, **1**, 44—58, 119—135.
7. — *Zur Berechnung der Potentialströmung für Schaufelgitter mit stark gewölbten dünnen Profilen.* 1960, **40**, Sonderheft, T 147—T 148.
8. — *Berechnung von Koeffizienten induzierter Geschwindigkeiten für Schaufelgitter mit schwach gewölbten Profilen.* Aplikace matem., 1961, **6**, 418—462.

ÎN LEGĂTURĂ CU INFLUENȚA "REZERVEI DE STABILITATE STATICĂ" ASUPRA STABILITĂȚII AUTOMOBILULUI FRÎNAT

de AUREL P. STOICESCU
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București

531.2

În lucrare se studiază comportarea automobilului frînat în următoarele cazuri :
a) frînele nu sînt reglate corect ;
b) coeficienții de aderență ai părților din cale pe care rulează roțile de pe o parte și de pe alta a automobilului sînt diferiți, roțile de pe partea corespunzătoare coeficientului de aderență mai mic fiind blocate ; în ambele situații, roțile de direcție sînt menținute în poziție fixă, corespunzătoare mersului în linie dreaptă.
Se determină pentru fiecare dintre aceste cazuri deplasarea laterală a centrului de greutate al automobilului, precum și rotirea automobilului în jurul axei verticale ce trece prin centrul său de greutate.
Pe un exemplu numeric se urmărește influența rezervei de stabilitate statică asupra stabilității automobilului frînat în condițiile cazului (b), ajungîndu-se la concluzia că rezerva de stabilitate statică nu poate constitui un criteriu al stabilității automobilului frînat.

Comportarea automobilului în mers este influențată de elasticitatea transversală a pneurilor, astfel că traiectoria centrului său de greutate diferă de aceea a centrului de greutate al unui automobil identic prevăzut cu roți rigide. Cînd roțile de direcție sînt în poziție neutră, sub acțiunea forțelor laterale, deși reacțiunile tangențiale ale solului la roți n-au atins limita de aderență, traiectoria centrului de greutate nu va fi dreapta care ar corespunde poziției date a roților dacă automobilul ar avea roți rigide.

Forțele laterale care acționează asupra automobilului pot fi date de înclinarea transversală a căii, de vîntul lateral sau de neregularitățile căii de rulare.

De asemenea, asupra traiectoriei influențează și momentul care apare în planul căii ca o consecință a reacțiunilor tangențiale diferite

la roţile de pe o parte şi de alta a automobilului. Cînd se frînează automobilul, această situaţie poate fi întîlnită în următoarele cazuri :

a) reglajul frînelor nu este corespunzător, realizîndu-se astfel momente de frînare diferite la roţile din stînga şi din dreapta (coeficientul de aderenţă este acelaşi pe calea de rulare) ;

b) coeficienţii de aderenţă ai părţilor din cale pe care rulează roţile de pe o parte şi de pe alta a automobilului sînt diferiţi, iar roţile de pe partea corespunzătoare coeficientului de aderenţă mai mic se blochează (frînele sînt reglate corect) ;

c) reglajul frînelor nu este corespunzător, coeficienţii de aderenţă sînt diferiţi pentru cele două părţi ale căii şi roţile de pe partea cu coeficientul de aderenţă mai mic sînt blocate.

În cele ce urmează vom examina devierea laterală a automobilului frînat în condiţiile date de cazurile (a) şi (b) amintite mai sus şi ale cărui roţi de direcţie sînt menţinute în poziţie fixă corespunzătoare mersului în linie dreaptă. Apoi, pe un exemplu numeric, în condiţiile cazului (b), se va urmări influenţa rezervei de stabilitate statică asupra devierii automobilului frînat.

Se face presupunerea că frînarea are loc pe un drum orizontal şi fără neregularităţi.

Ceea ce interesează în cazul de faţă este poziţia pe care o va avea automobilul după un interval de timp egal cu timpul de reacţie al conducătorului din momentul în care automobilul începe să devieze, deoarece după acest interval de timp poziţia automobilului ar mai putea fi readusă la cea normală prin modificarea poziţiei roţilor de direcţie în cazul cînd devierea nu este prea mare.

1. ECUAŢIA DE MIŞCARE A AUTOMOBILULUI FRÎNAT ŞI DETERMINAREA POZIŢIEI SALE CÎND FRÎNELE NU SÎNT REGLATE CORECT (CAZUL A)

1.1. ECUAŢIA DIFERENŢIALĂ DE MIŞCARE ŞI INTEGRAREA EI

Poziţia automobilului este determinată prin coordonatele centrului de greutate C şi unghiul θ (vezi fig. 1).

În figura 1 sînt indicate forţele de inerţie şi o parte din forţele exterioare care acţionează asupra automobilului. Forţa de inerţie este dată prin cele două componente T şi N aplicate în centrul de greutate, pe direcţia axei longitudinale a automobilului, respectiv pe direcţia normalei la această axă.

Se demonstrează că [1]

$$N = m(v\omega - \dot{v}_n), \tag{1}$$

$$T = m(\dot{v} + \omega v_n), \tag{2}$$

în care

m reprezintă masa automobilului, $kgf.s^2.m^{-1}$,

v — componenta vitezei centrului de greutate pe direcția axei longitudinale, $m.s^{-1}$,

ω — viteza unghiulară a mișcării automobilului, $\frac{rad}{s}$.

Forțele exterioare sînt :

X_1', X_2' — reacțiunile orizontale ale solului, paralele cu axa longitudinală a automobilului, la roțile de pe partea dreaptă, pentru roata din față, respectiv spate, kgf ;

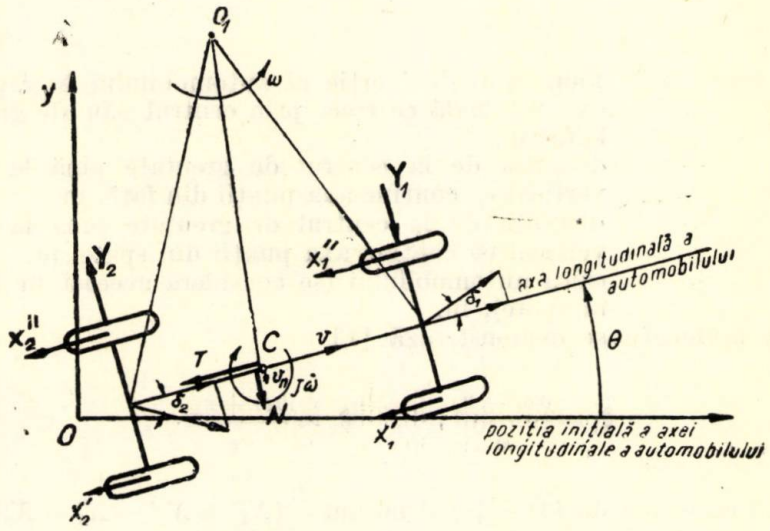


Fig. 1

X_1'', X_2'' — reacțiunile orizontale ale solului, paralele cu axa longitudinală a automobilului, la roțile de pe partea stîngă, pentru roata din față, respectiv spate, kgf ;

Y_1, Y_2 — reacțiunile orizontale ale solului, normale pe axa longitudinală a automobilului, la roțile din față, respectiv spate, kgf ;

R_a — rezistența aerului, kgf (R_a nu este indicată pe figură).

Frînele sînt dereglate în așa fel, încît este satisfăcută condiția $X_1'' + X_2'' > X_1' + X_2'$.

Se pot scrie relațiile

$$Y_1 = c_1 \delta_1, \quad Y_2 = c_2 \delta_2, \tag{3}$$

în care :

δ_1, δ_2 reprezintă unghiurile de deviere ale roților punții din față, respectiv spate, rad.

c_1, c_2 — coeficienții de rezistență la deviere ai pneurilor punții din față, respectiv spate, $kgf.rad^{-1}$.

Prin aplicarea principiului lui d'Alembert, ţinînd seama de relaţiile (1) şi (2), se obţin ecuaţiile

$$m(\omega v_n + \dot{v}) = -(R_a + X_1' + X_1'' + X_2' + X_2''), \tag{4}$$

$$m(\omega v - \dot{v}_n) = Y_2 - Y_1, \tag{5}$$

$$J\dot{\omega} = -(Y_1 a + Y_2 b) + \frac{B}{2}(X_1'' + X_2'' - X_1' - X_2'), \tag{6}$$

în care :

J reprezintă momentul de inerţie al automobilului în raport cu axa verticală ce trece prin centrul său de greutate. kgf.s^2.m,

a — distanţa de la centrul de greutate pînă la planul vertical ce conţine axa punţii din faţă, m,

b — distanţa de la centrul de greutate pînă la planul vertical ce conţine axa punţii din spate, m,

B — calea automobilului (se consideră aceeaşi în faţă şi în spate), m.

De asemenea se demonstrează [1]

$$\delta_1 = \frac{a\omega - v_n}{v}, \qquad \delta_2 = \frac{b\omega + v_n}{v}. \tag{7}$$

Ţinînd seama de (3) şi (7) şi notînd $\frac{B}{2}(X_1'' + X_2'' - X_1' - X_2') = M_f$, relaţiile (5) şi (6) se scriu

$$m\omega v - m\dot{v}_n = (c_1 + c_2)\frac{v_n}{v} + (c_2 b - c_1 a)\frac{\omega}{v}, \tag{5'}$$

$$J\dot{\omega} = M_f + (c_1 a - c_2 b)\frac{v_n}{v} - (c_1 a^2 + c_2 b^2)\frac{\omega}{v}. \tag{6'}$$

Notăm $c_1 + c_2 = \alpha$, $c_2 b - c_1 a = \beta$,

$$c_1 a^2 + c_2 b^2 = \gamma. \tag{8}$$

Eliminînd pe v_n între (5') şi (6'), cu notaţiile (8) se obţine

$$m\beta\omega v^2 + \alpha J v\dot{\omega} - m\beta v\dot{v}_n = \alpha M_f v + (\beta^2 - \alpha\gamma)\omega. \tag{9}$$

Prin derivarea relaţiei (6') în raport cu timpul se obţine

$$J\ddot{\omega}v + J\dot{\omega}\dot{v} = v\frac{\mathrm{d}M_f}{\mathrm{d}t} M_f\dot{v} - \beta\dot{v}_n - \gamma\dot{\omega}. \tag{6''}$$

Eliminînd pe $\dot{v}_n$ între (6″) și (10), se obține relația

$$\ddot{\omega} + \left(\frac{\alpha}{mv} + \frac{\gamma}{Jv} + \frac{\dot{v}}{v}\right)\dot{\omega} + \left(\frac{\beta}{J} + \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{Jmv^2}\omega = \frac{\dot{M}_f}{J} + \left(\frac{\dot{v}}{vJ} + \frac{\alpha}{Jmv}\right)M_f. \quad (10)$$

Însă $\alpha\gamma - b^2 = (c_1 + c_2)(c_1a^2 + c_2b^2) - (c_2b - c_1a)^2 = c_1c_2L^2$,

unde $L = a + b$.

Deci, în final, ecuația care dă viteza unghiulară este

$$\ddot{\omega} + \left(\frac{\alpha}{mv} + \frac{\gamma}{Jv} + \frac{\dot{v}}{v}\right)\dot{\omega} + \left(\frac{\beta}{J} + \frac{c_1c_2L^2}{Jmv^2}\right)\omega = \frac{\dot{M}_f}{J} + \left(\frac{\dot{v}}{vJ} + \frac{\alpha}{Jmv}\right)M_f. \quad (11)$$

Această ecuație a fost dedusă în ipoteza că $\beta \neq 0$. În cazul cînd $\beta = 0$, ecuația diferențială care dă viteza unghiulară se obține direct din relația (6′) și este

$$\dot{\omega} + \frac{\gamma}{Jv}\omega = \frac{M_f}{J}. \quad (12)$$

Se observă că în (11), în afară de ω, $\dot{\omega}$ și $\ddot{\omega}$, mai intră v și $\dot{v}$, care sînt de fapt și ele funcții de timp necunoscute. Pentru a obține o ecuație diferențială în care să intre numai ω cu derivatele sale, este necesar să se folosească și ecuația (4); în acest fel este posibil a elimina între cele trei relații pe v_n, $\dot{v}_n$, v și $\dot{v}$. În acest caz însă se obține o ecuație diferențială foarte complicată, care nu poate fi integrată cu ușurință.

Avînd în vedere faptul că durata de timp în care se studiază mișcarea este relativ mică și că viteza de la care se începe frînarea are valori relativ mari, se poate considera că, practic, viteza rămîne constantă în tot acest interval și egală cu viteza inițială. Sau se poate considera o viteză medie mai mică decît cea inițială și calculată pentru un anumit interval de timp ca și cînd automobilul frînat s-ar deplasa în linie dreaptă ($\dot{v}$ avînd valoarea constantă și calculată în aceleași condiții). Ținînd seama de observațiile de mai sus, ecuațiile (11) și (12) le vom considera cu coeficienți constanți.

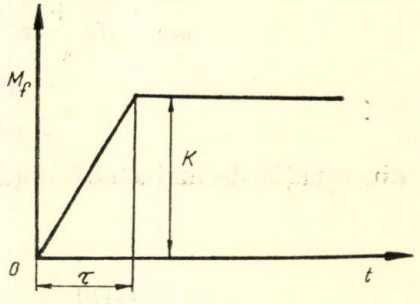


Fig. 2

Pentru găsirea soluțiilor ecuațiilor diferențiale (11) și (12), este necesar a cunoaște, în afară de coeficienții respectivi, și funcția $M_f(t)$.

Este cunoscut faptul că forța de frînare are o alură de variație asemănătoare cu cea din figura 2, considerînd ca origine a timpului momentul în care începe să crească forța de frînare. Timpul τ după care forța de frînare atinge valoarea maximă depinde de tipul instalației de frînare și are valorile 0,1 — 1 s [2]. Din examinarea expresiei momentului din

planul căii M_f rezultă că acesta va fi o funcție a cărei reprezentare grafică este dată în figura 2. Deci

$$M_f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\tau} K, & t \in [0, \tau], \\ K, & t \in [\tau, \infty), \end{cases} \tag{13}$$

unde $K = \frac{B}{2}(X''_{1\max} + X''_{2\max} - X'_{1\max} - X'_{2\max})$, maximul fiind realizat pentru o anumită forță de apăsare pe pedala de frînă. Sau se poate folosi o altă exprimare mai comodă, și anume

$$K = \eta \frac{B}{2} F_f,$$

în care :

F_f reprezintă forța de frînare realizată de sistemul de frînare, kgf,

η — coeficientul de dereglare al frînelor ($0 \leqslant \eta \leqslant 1$) [4].

Aplicînd transformata Laplace în ambii membrii ai ecuației (11) și ținînd seama că la $t = 0$, ω, $\dot{\omega}$, și M_f sînt nule, rezultă

$$p^2 \Omega(p) + \left(\frac{\alpha}{mv} + \frac{\gamma}{Jv} + \frac{\dot{v}}{v}\right) p\,\Omega(p) + \left(\frac{\beta}{J} + \frac{c_1 c_2 L^2}{Jmv^2}\right) \Omega(p) =$$

$$= \frac{1}{J} p\, \mathfrak{L} M_f(t) + \left(\frac{\dot{v}}{v} \cdot \frac{1}{J} + \frac{\alpha}{Jmv}\right) \mathfrak{L}\, M_f(t),$$

în care $\Omega(p) = \mathfrak{L}\, \omega(t)$.

Notînd

$$\frac{\alpha}{mv} + \frac{\gamma}{Jv} + \frac{\dot{v}}{v} = 2A, \qquad \frac{\beta}{J} + \frac{c_1 c_2 L^2}{Jmv^2} = B, \tag{14}$$

$$\frac{\dot{v}}{vJ} + \frac{\alpha}{Jmv} = C,$$

din ecuația de mai sus se obține

$$\Omega(p) = \frac{\frac{p}{J} + C}{p^2 + 2Ap + B} \cdot \mathfrak{L} M_f(t). \tag{15}$$

Înainte de a trece la calculul lui $\omega(t)$ este necesar să facem cîteva observații. Funcția definită de (13) este, evident, o funcție originală [6]. Totuși trebuie să avem în vedere că pe cele două intervale ea este definită

prin funcţii de expresii diferite. De aceea expresia lui $\omega(t)$ va fi obţinută astfel :

$$\omega(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \dfrac{\left(\dfrac{p}{J}+c\right)e^{pt}}{p^2+2Ap+B}\cdot \mathfrak{L}\left(\dfrac{kt}{\tau}\right)dp, & t\in[0,\ \tau], \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \dfrac{\left(\dfrac{p}{J}+c\right)e^{pt}\cdot \mathfrak{L}M_f(t)}{p^2+2Ap+B}\cdot dp, & t\in[\tau,\ \infty), \end{cases} \tag{16}$$

în care, pentru calculul transformatei Laplace a funcţiei $\dfrac{Kt}{\tau}$, aceasta se consideră definită pe semiaxa pozitivă, iar $M_f(t)$ este dat de (13).
Sau încă

$$\omega(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \dfrac{k\left(\dfrac{p}{J}+c\right)e^{pt}}{\tau p^2(p^2+2Ap+B)}\,dp, & t\in[0,\ \tau], \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \dfrac{k\left(\dfrac{p}{J}+c\right)e^{pt}(1-e^{-p\tau})}{\tau p^2(p^2+2Ap+B)}\,dp & t\in[\tau,\ \infty]. \end{cases} \tag{17}$$

Rezerva de stabilitate statică este definită de relaţia [3]

$$R.S. = \frac{c_2}{c_1+c_2} - \frac{a}{L},$$

care se mai poate scrie

$$R.S. = \frac{\beta}{(c_1+c_2)L}.$$

Să considerăm ecuaţia $p^2+2Ap+B=0$. Din (14) se observă că întotdeauna $A>0$, iar $B\leqslant 0$, aceasta depinzînd de valoarea lui β. Se vor deosebi situaţiile concentrate în tabela 1 şi în care viteza critică este dată de relaţia $v_{cr} = L\sqrt{-\dfrac{c_1c_2}{\beta m}}$.

Cazul $B>0$. Vom examina acest caz în situaţia că rădăcinile ecuaţiei amintite sînt imaginare şi cu părţile reale negative. Este util a ne ocupa la început de integrala a doua din relaţiile (17). Această integrală revine la calculul următoarelor integrale :

$$\mathcal{J}_1 = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left(\dfrac{p}{J}+c\right)e^{p(t-\tau)}}{p^2(p^2+2Ap+B)}\,dp, \quad \mathcal{J}_2 = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left(\dfrac{p}{J}+c\right)e^{pt}}{p^2(p^2-2Ap+B)}\,dp. \tag{18}$$

Integrala $\mathcal{J}_1$ se calculează aplicînd teorema reziduurilor, polii funcției de sub integrală fiind $p_{1,2} = 0$, $p_{3,4} = -A \pm i\lambda$, în care $\lambda = \sqrt{B - A^2}$. Integrala $\mathcal{J}_2$ se calculează ușor, observînd că $\mathcal{J}_2 = \lim_{\tau \to 0} \mathcal{J}_1$.

Trecînd peste calculele elementare, se obține

$$\omega(t) = \frac{KC}{B} + \frac{K}{\tau} \cdot \frac{e^{-At}}{\tau\lambda(x^2 + 4A\lambda^2)} [M \sin \lambda t + N \cos \lambda t -$$

$$- Me^{A\tau} \sin \lambda(t - \tau) - e^{A\tau} N \cos \lambda(t - \tau)],$$

în care $x = A^2 - \lambda^2$, $M = (CJ - A)\varkappa - 2A\lambda^2$,

$$N = 2(CJ - A)\lambda A + \lambda\varkappa.$$

Ținînd seama de notațiile de mai sus, după transformări rezultă

$$\omega(t) = \frac{KC}{B} + \frac{K}{\tau} \cdot \frac{e^{-A\tau}}{J\lambda B^2} \{[A(CJA - B) - CJ\lambda^2] \sin \lambda t +$$

$$+ \lambda(2ACJ - B) \cos \lambda t - [A(CJ - B) - CJ\lambda^2] e^{A\tau} \sin \lambda(t - \tau) - \quad (19)$$

$$- e^{A\tau} \lambda(2ACJ - B) \cos \lambda(t - \tau)\}$$

pentru $t \in [\tau, \infty)$.

Prima integrală din relațiile (17) se calculează ușor folosind pe $\mathcal{J}_2$ dat de (18). Se obține astfel

$$\omega(t) = \frac{K}{\tau J} \cdot \frac{B - 2ACJ}{B^2} + \frac{K}{\tau} \cdot \frac{C}{B} t + \frac{K}{\tau J} \cdot \frac{e^{-A\tau}}{\lambda B^2} [\lambda(2ACJ - B) \cos \lambda t +$$

$$+ (CJA^2 - AB - CJ\lambda^2 A) \sin \lambda t] \quad (20)$$

pentru $t \in [0, \tau]$.

Cazul $B = 0$. În această situație, polii funcțiilor de sub integrală sînt

$$p_{1,2,3} = 0; \quad p_4 = -2A.$$

Se obține în final expresia

$$\omega(t) = \frac{K}{J} \cdot \frac{2AJCt + 2A - JC + JCA\tau}{4A^2} - \frac{K(JC - 2A)}{4A^2 J} \cdot \frac{1 - e^{+2A\tau}}{2A\tau} \cdot e^{-2At} \quad (21)$$

pentru $t \in [\tau, \infty]$.

Pentru calculul primei integrale din (17) este util să procedăm într-un mod asemănător celui de la cazul precedent. Rezultă

$$\omega(t) = \frac{K}{\tau} \left(\frac{C}{2A} t^2 + \frac{4A - JC}{4JA^2} t - \frac{-2A + JC}{8JA^3} \cdot e^{-2At} - \frac{2A - JC}{8JA^3} \right) \quad (22)$$

pentru $t \in [0, \tau]$.

Cazul $B < 0$. Polii funcției de sub integrală vor fi $p_{1,2} = 0$; $p_{3,4} = -A \pm \mu$, unde $\mu = \sqrt{A^2 - B}$. Ținînd seama de aceleași observații, rezultă

$$\omega(t) = \frac{K}{J}\left[\frac{CJ}{B} + \frac{e^{(-A+\mu)\tau} - 1}{2\tau\mu(-A+\mu)^2} \cdot (-A + \mu + JC)\, e^{(-A+\mu)t} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-(A+\mu)\tau} - 1}{2\tau\mu(A+\mu)^2} \cdot (A + \mu JC)\, e^{-(A+\mu)t}\right],$$

$$t \in [\tau, \infty), \tag{23}$$

$$\omega(t) = \frac{K}{\tau J}\left[\frac{B - 2AJC}{B^2} + \frac{C}{B}t + \frac{(-A+\mu+JC)}{2\mu(-A+\mu)^2} \cdot e^{(-A+\mu)t} + \right.$$

$$\left. + \frac{A + \mu - JC}{2\mu(A+\mu)^2} \cdot e^{-(A+\mu)t}\right] \quad \text{pentru } t \in [0, \tau]. \tag{24}$$

Cazul $\beta = 0$. În această situație, ecuația diferențială care dă pe $\omega(t)$ este (12). Utilizînd transformata Laplace, rezultă

$$\omega(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{K}{J\tau} \cdot \frac{1 - e^{-p\tau}}{p^2\left(p + \frac{\gamma}{Jv}\right)} \cdot e^{pt}\, dp \qquad t \in [\tau, \infty).$$

Aplicînd aceleași metode ca mai sus, rezultă

$$\omega(t) = \frac{Kv}{\gamma}\left(1 + \frac{1 - e^{\frac{\gamma}{vJ}\tau}}{\frac{\gamma\tau}{vJ}} \cdot e^{-\frac{\gamma}{vJ}t}\right) \text{ pentru } t \in [\tau, \infty], \tag{25}$$

$$\omega(t) = \frac{K}{\tau}\left(\frac{v}{\gamma}t + \frac{v^2 J}{\gamma} \cdot e^{-\frac{\gamma}{Jv}t} - \frac{v^2 J}{\gamma}\right) \text{ pentru } t \in [0, \tau]. \tag{26}$$

1.2. *Determinarea poziției automobilului*

Unghiul $\theta(t)$ se determină ușor :

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t)\, dt,$$

în care $\omega(t)$ are expresiile care au fost calculate mai sus.

Dacă v_y este viteza lui C pe direcția axei y (vezi fig. 1), se poate scrie

$$v_y = v \sin \theta - v_n \cos \theta. \tag{27}$$

Ținînd seama că θ are valori mici, deplasarea se calculează astfel:

$$y = v \int_0^t \theta(t)\,dt - \int_0^t v_n(t)\,dt. \tag{28}$$

Considerînd și relațiile (6′) și (8), rezultă

$$y = v \int_0^t \theta(t)\,dt + \frac{vJ}{\beta}\,\omega(t) + \frac{\gamma}{\beta}\,\theta(t) - \frac{v}{\beta}\,M_f(t). \tag{29}$$

Calculul lui $\theta(t)$ și $\int_0^t \theta\,dt$ nu prezintă nici o dificultate, așa cum se constată din examinarea expresiilor lui $\omega(t)$.

Evident, în cazul cînd $\beta = 0$, relația (29) nu este valabilă. În această situație este necesară utilizarea relației (28) și deci trebuie să cunoaștem funcția $v_n(t)$. În cele ce urmează vom determina tocmai această funcție.

Din relațiile (5′) și (8) rezultă

$$\dot{v}_n + \frac{\alpha}{mv} v_n = v\omega. \tag{30}$$

Așa cum s-a procedat și pînă acum, rezultă

$$v_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{v\,\Omega(p)\,e^{pt}}{p + \frac{\alpha}{mv}} \cdot dp \tag{31}$$

în care $\Omega(p)$ este dat de (12), căreia în prealabil i s-a aplicat transformata Laplace. În final rezultă

$$v_n = kv^3 \left[\frac{m}{\alpha\gamma} + \frac{1 - e^{\frac{\gamma}{Jv}\tau}}{\frac{\tau\gamma^2}{Jv}\left(\frac{\alpha}{m} - \frac{\gamma}{J}\right)} \cdot e^{-\frac{\gamma}{Jv}t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - e^{\frac{\gamma}{Jv}\tau}}{\frac{\tau\alpha}{mv}\left(\frac{\gamma}{J} - \frac{\alpha}{m}\right)\frac{\alpha}{mv}} \cdot e^{-\frac{\gamma}{Jv}t} \right] \text{ pentru } t \in [\tau, \infty), \tag{32}$$

$$v_n = \frac{vK}{\tau J}\left[\frac{t\dfrac{\alpha\gamma}{Jmv^2} - \left(\dfrac{\alpha}{mv} + \dfrac{\gamma}{Jv}\right)}{\dfrac{\alpha^2}{m^2v^2}\cdot\dfrac{\gamma^2}{J^2v^2}} + \frac{e^{-\frac{\gamma}{Jv}t}}{\dfrac{\gamma^2}{J^2v^2}\left(\dfrac{\alpha}{mv} - \dfrac{\gamma}{Jv}\right)} + \frac{e^{-\frac{\alpha}{mv}t}}{\dfrac{\alpha^2}{m^2v^2}\left(\dfrac{\gamma}{Jv} - \dfrac{\alpha}{mv}\right)}\right]$$

pentru $t \in [0, \tau]$. (33)

Expresia deplasării laterale, ținînd seama de (30), se mai scrie

$$\gamma = v\int_0^t \theta(t)\,dt + \frac{mv}{\alpha}v_n(t) - \frac{v^2}{m}\theta(t), \tag{34}$$

în care $v_n(t)$ are expresiile calculate mai sus.

2. ECUAȚIA DE MIȘCARE A AUTOMOBILULUI FRÎNAT ȘI DETERMINAREA POZIȚIEI SALE CÎND COEFICIENȚII DE ADERENȚĂ SÎNT DIFERIȚI PE CELE DOUĂ PĂRȚI ALE CĂII (CAZUL B)

2.1. ECUAȚIA DE MIȘCARE ȘI INTEGRAREA EI

Presupunem că automobilul este deja frînat în momentul în care intră pe calea de rulare cu caracteristicile arătate la cazul (b).

Prin urmare, în momentul cînd roata din dreapta, de pildă, intră pe partea din cale cu coeficientul de aderență mai mic și se blochează, momentul din planul căii M_f prezintă un salt pînă la o valoare dată. După un timp Δt intră pe aceeași parte din cale și roata din spate și se blochează; momentul M_f va prezenta încă un salt pînă la o altă valoare.

Ținînd seama că Δt este foarte mic în cazul vitezelor mari și că valoarea lui M_f numai după blocarea roții din față este relativ mică, $y(\Delta t)$ și $\theta(\Delta t)$ se pot neglija (constatare care poate fi făcută și cu un calcul direct).

Ca atare se va lua ca origine a timpului momentul în care se blochează și roata din spate, considerînd că în acel moment M_f prezintă un salt de la zero pînă la o valoare K care se va determina ($y(0) = 0$, $\theta(0) = 0$).

Pentru a scrie ecuația de mișcare, se observă că situația aceasta este asemănătoare cu cea examinată la punctul 1. Trebuie să se țină seama însă că roțile din dreapta sînt blocate și, prin urmare, ele nu mai preiau reacțiunile orizontale normale pe axa longitudinală a automobilului. Deci

$$Y_1 = 0{,}5\,c_1\delta_1, \quad Y_2 = 0{,}5\,c_2\,\delta_2. \tag{35}$$

Prin urmare, se va obține o ecuație asemănătoare cu (11), în care c_1 și c_2 se vor înlocui cu $0{,}5\ c_1$ și, respectiv, $0{,}5\ c_2$.

Adică

$$\ddot{\omega} + 2A'\dot{\omega} + B'\omega = \frac{\dot{M}_f}{J} + C'M_f, \tag{36}$$

în care $2A' = \frac{\alpha'}{mv} + \frac{\gamma'}{Jv} + \frac{\dot{v}}{v}$, $B' = \frac{B'}{J} + \frac{0{,}25\, c_1 c_2 L^2}{Jmv^2}$, $C' = \frac{\dot{v}}{vJ} + \frac{\alpha'}{Jmv}$

$$\alpha' = 0{,}5(c_1 + c_2), \quad \beta' = 0{,}5(c_2 b - c_1 a), \quad \gamma' = 0{,}5(c_1 a^2 + c_2 b^2) \tag{37}$$

În cazul cînd $\beta = 0$, se obține

$$\dot{\omega} + \frac{\gamma'}{Jv} \cdot \omega = \frac{M_f}{J}. \tag{38}$$

Pentru integrarea ecuației diferențiale (36) sînt valabile aceleași observații ca cele de la § 1. Bineînțeles, în acest caz trebuie ținut seama că M_f este o funcție-„treaptă". În ce privește coeficienții ecuației $p^2 + 2A'p + B' = 0$, rămîn valabile aceleași concluzii care au fost concentrate în tabela 1, cu observația că v_{cr} trebuie înlocuit cu $0{,}707\, v_{cr}$. Atît *R.S.*, cît și v_{cr} se definesc în același mod ca în § 1, ele fiind mărimi ce se definesc independent de condițiile în care se află automobilul.

Pentru găsirea soluțiilor ecuației (36) se poate proceda exact ca în § 1. Însă se pot utiliza rezultatele din acest paragraf folosind observația că funcția-„treaptă" se obține din funcția reprezentată în figura 2, făcînd $\tau \to 0$.

Dacă se notează cu $\omega_1\ (t, \tau)$ viteza unghiulară în condițiile de la 1, definită pentru $t \in [\tau, \infty)$, și cu $\omega_2(t)$ viteza unghiulară în condițiile de la 2, vom avea

$$\omega_2(t) = \lim_{\tau \to 0} \omega_1(t_1, \tau).$$

Bineînțeles, pentru a obține expresia reală a vitezei unghiulare va trebui ca în rezultatul obținut să înlocuim pe A, B, C respectiv cu A', B' și C'. Ca exemplu vom considera cazul $B' > 0$, rădăcinile fiind imaginare. Plecînd de la relația (19), se observă ușor că se ajunge la calculul următoarelor limite :

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\sin \lambda t - e^{A\tau} \sin \lambda (t - \tau)}{\tau}, \quad \lim_{\tau \to 0} \frac{\cos \lambda \tau - e^{A\tau} \cos \lambda (t - \tau)}{\tau},$$

ale căror nedeterminări se înlătură aplicînd regula lui Hospital. Rezultă în final, după înlocuirea cu A', B', C' și λ', următoarea expresie :

$$\omega(t) = \frac{KC'}{B'} + \frac{K e^{-A't}}{J \lambda' B'} [(B' - A'C'J) \sin \lambda' t - \lambda' C' J \cos \lambda' t]. \tag{39}$$

Pentru celelalte cazuri se procedează în același mod ca mai sus, formulele obținîndu-se aproape direct.

2.2. DETERMINAREA POZIȚIEI AUTOMOBILULUI

Evident, se vor aplica aceleași formule generale ca la 1.2, iar $\omega(t)$ va fi dat de relațiile (39) și de cele obținute în modul arătat la 2.1.

În expresia lui $y(t)$ intră $\theta(t)$ și $\int_0^t \theta(t)\, dt$, a căror determinare nu prezintă dificultăți, fiind necesară calcularea unor integrale de forma $\int_0^t e^{ax}\, dx$, $\int_0^t e^{ax} \sin bx\, dx$, $\int_0^t e^{ax} \cos bx\, dx$.

Se pot obține expresii literale pentru $\theta(t)$ și $\int_0^t \theta(t)\,dt$, după care se calculează coeficienții numerici care intră în expresia lui $y(t)$, după care să se efectueze integrările corespunzătoare.

2.3. DETERMINAREA LUI K

Roțile din dreapta fiind blocate, reacțiunile vor fi

$$\begin{aligned} X_1' &= 0{,}5\ \varphi_a' Z_1\,, \\ X_2' &= 0{,}5\ \varphi_a' Z_2\,, \end{aligned} \tag{42}$$

în care:

φ_a' reprezintă coeficientul de aderență la alunecare al părții din dreapta a căii,

Z_1, Z_2 — reacțiunile normale ale solului la roțile din față, respectiv spate, kgf.

Prin urmare,

$$K = \frac{B}{2}\left[0{,}5\,F_f - 0{,}5\ \varphi_a'\,(Z_1 + Z_2)\right]$$

(s-a considerat că frînarea se face cu decuplarea motorului, iar influența momentelor de inerție ale roților s-a neglijat).

Ținînd seama că $Z_1 + Z_2 = G_a$, unde G_a este greutatea automobilului, rezultă

$$K = 0{,}25\ B\,(F_f - \varphi_a'\,G_a)\,. \tag{42}$$

3. DETERMINAREA REACȚIUNILOR ORIZONTALE ALE SOLULUI LA ROȚILE AUTOMOBILULUI, NORMALE PE AXA SA LONGITUDINALĂ

Determinarea acestor reacțiuni este necesară, întrucît în acest fel este posibil a se stabili cînd are loc deraparea.

Plecînd de la relațiile (3) și ținînd seama de (7) și (6′), rezultă

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{c_1}{\beta}\left[(a\beta + \gamma)\frac{\omega}{v} + J\dot{\omega} + M_f\right] \\ Y_2 &= \frac{c_2}{\beta}\left[(b\beta - \gamma)\frac{\omega}{v} - J\dot{\omega} - M_f\right] \text{ pentru } \beta \neq 0. \end{aligned} \tag{43}$$

În relațiile de mai sus se vor înlocui expresiile lui ω determinate la punctele precedente. În cazul cînd $\beta = 0$, se obține

$$Y_1 = \frac{c_1}{v}\,(a\omega - v_n),\quad Y_2 = \frac{c_2}{v}\,(b\omega + v_n)\,. \tag{44}$$

În aceste relații se vor înlocui expresiile lui ω și v_n, care au fost determinate mai înainte pentru cazul cînd $\beta = 0$.

Din analiza expresiilor obținute se observă că, oricare ar fi condițiile în care se frînează automobilul și oricare ar fi caracteristicile sale, reacțiunile Y_1 și Y_2 rămîn tot timpul finite (t fiind finit). În [4] se trage concluzia eronată că ω, $\dot{\omega}$, Y_1 și Y_2 tind către infinit atunci cînd $v = v_{cr}$ (oricare ar fi t). Aceasta se explică prin faptul că în [4] s-a studiat mișcarea în regim permanent.

4. APLICAȚIE NUMERICĂ

Vom examina comportarea a două autoturisme frînate în condițiile de la (b). Unul dintre autoturisme are rezerva de stabilitate statică pozitivă (virare insuficientă), iar celălalt are rezerva de stabilitate statică negativă (virare în exces). Este de observat că, de regulă, același autoturism este caracterizat prin virare insuficientă cînd este neîncărcat și prin virare în exces atunci cînd este încărcat [5].

Intervalul de timp în care se studiază mișcarea este, așa cum s-a mai amintit, timpul de reacție al conducătorului, care se va lua $t_r = (0{,}2 - 0{,}5)$ s [3].

Automobilul cu $R.S. > 0$

Autoturismul are următoarele date caracteristice

$G_a = 2\,500$ kgf, $J = 205$ kgf.m.s^2, $c_1 = c_2 = 5\,000$ kgf.rad^{-1},

$L = 3{,}0$ m, $a = 0{,}45$ L, $b_0 = 0{,}55$ L, $B = 1{,}6$ [m].

Presupunem că $v = 28$ m.s$^{-1} \simeq 100 \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, iar $\dot{v} = -4$ m.s^{-2}. Admițînd un coeficient de rezistență la rulare $f = 0{,}018$, un factor de rezistență al aerului de $0{,}08$ kgf.s^2.m^{-2} și $\varphi'_a = 0{,}30$, rezultă $F_f = 965$ kgf, $K = 86$ kfg.m.

Mai rezultă: $\alpha' = 5\,000$ kgf.rad^{-1}, $\beta' = +750 \dfrac{\text{kgf}}{\text{rad}} \cdot \text{m}$,

$\gamma' = 11\,350 \dfrac{\text{kgf}}{\text{rad}} \cdot \text{m}^2$, $A' = 1{,}28$ m.s^{-1}, $B' = 4{,}18$ s^{-2},

$C' = 2{,}62.10^{-2}$ kgf^{-1}.m^{-1}.s^{-3}, $\lambda' = 1{,}59$ s^{-1}, $R.S. = +0{,}025$.

Se obțin următoarele expresii:

$$\begin{aligned}
\omega(t) &= 5{,}34.10^{-2} + 0{,}15\, e^{-1{,}28t}(1{,}15 \sin 1{,}59\, t - 0{,}230 \cos 1{,}59\, t),\\
\theta(t) &= 5{,}34.10^{-2} t + 0{,}055 - e^{-1{,}28t}(0{,}065 \sin 1{,}59\, t + 0{,}054 \cos 1{,}59\, t),\\
y(t) &= 0{,}72\, t^2 - 0{,}91\, t + e^{-1{,}28t}(12{,}35 \sin 1{,}59\, t - 2{,}10 \cos 1{,}59\, t) + 2{,}10.
\end{aligned} \tag{45}$$

Automobilul cu $R.S. < 0$

Aceleași date ca în cazul precedent, dar poziția centrului de greutate este alta: $a = 0{,}55$ L, $b = 0{,}45$ L.

Rezultă: $\alpha' = 5\,000 \dfrac{\text{kgf}}{\text{rad}}$, $\beta' = -750$ kgf.m.rad^{-1}, $\gamma' = 11\,350 \dfrac{\text{kgf}}{\text{rad}} \cdot \text{m}^2$,

$A' = 1{,}28$ s^{-1}, $B' = -1{,}38$ s^{-2}, $C' = 2{,}62.10^{-3}$ kgf^{-1}.m^{-1}.s^{-3}, $\mu' = 1{,}75$ s^{-1},

$K = 86$ kgf.m., $v_{cr} = 34{,}2$ m.s^{-1}, $v > 0{,}707\, v_{cr} = 24{,}2$ m.s^{-1}, $R.S. = -0{,}025$.

Se obțin următoarele expresii:

$$\omega(t) = -0{,}16 + 0{,}236\ e^{0{,}47\,t} - 0{,}073\ e^{-3{,}03\,t},$$
$$\theta(t) = -0{,}16\,t + 0{,}5\ e^{0{,}47\,t} + 0{,}024\ e^{-3{,}03\,t} - 0{,}524, \qquad (46)$$
$$y(t) = -2{,}16\,t^2 - 8{,}72\,t - 18{,}43 + 19{,}4\ e^{0{,}47\,t} - 0{,}950\ e^{-3{,}03\,t}.$$

S-au reprezentat grafic funcțiile $\theta(t)$ și $y(t)$, pentru ambele automobile, în figurile 3 și 4.

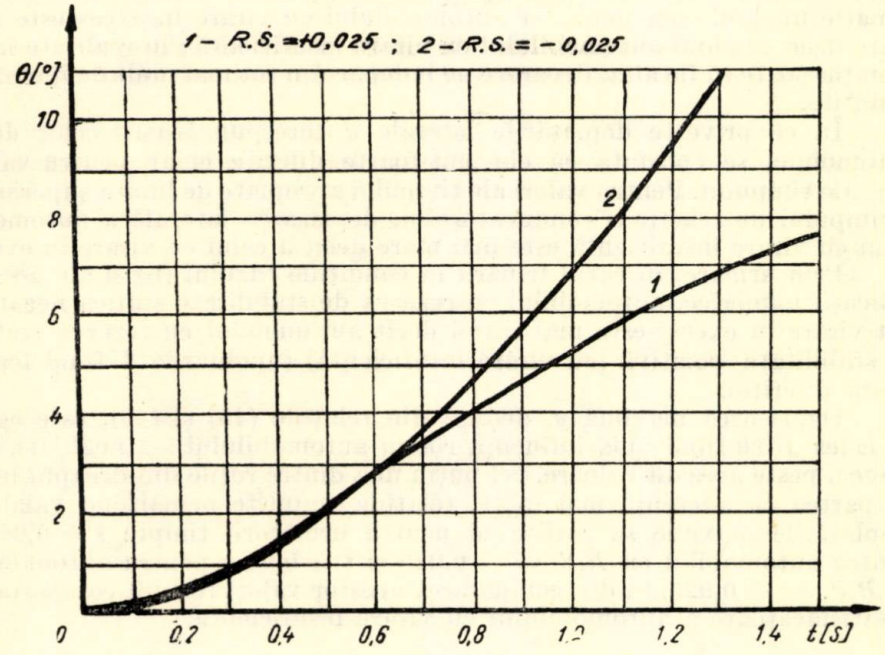


Fig. 3

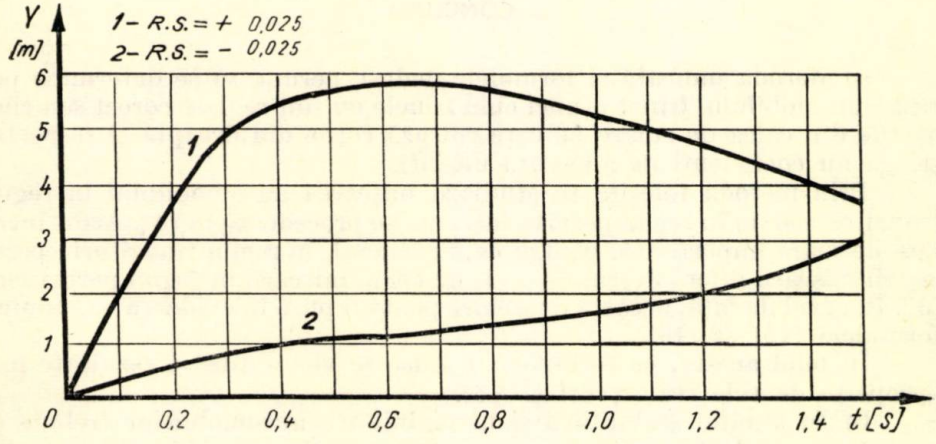


Fig. 4

Examinînd aceste curbe, se constată că, pentru valori ale timpului apropiate de limita superioară a timpului de reacție al conducătorului, θ are valori relativ mici, iar unghiurile corespunzătoare celor două autoturisme diferă foarte puțin. În condițiile de față, formulele deduse permit calculul mărimilor θ și y pentru valori ale timpului pînă la 1,0 s, deoarece se mai păstrează cu suficientă exactitate ipotezele admise (sin $\theta \simeq \theta$, cos $\theta \simeq 1$, $v \simeq$ const.). Diferența dintre unghiurile corespunzătoare celor două automobile are valori mari pentru $t > 1{,}0$ s. Se observă că în această situație unghiul corespunzător automobilului cu virare în exces este mai mare decît unghiul automobilului cu virare insuficientă ; în realitate însă, situația poate să fie alta, deoarece ne îndepărtăm tot mai mult de ipotezele amintite.

În ce privește deplasările laterale y corespunzătoare celor două automobile, se constată că ele sînt foarte diferite chiar pentru valori mici ale timpului. Pentru valori ale timpului apropiate de limita superioară a timpului de reacție a conducătorului, deplasarea laterală a automobilului cu virare insuficientă este mai mare decît a celui cu virare în exces.

Prin urmare, în cazul frînării în condițiile cazului (b) și ale acestei aplicații numerice, automobilul cu rezerva de stabilitate statică negativă (cu virare în exces) este mai stabil decît automobilul cu rezerva statică de stabilitate pozitivă (cu virare insuficientă) (unghiurile θ fiind foarte puțin diferite).

Deplasarea maximă y, dedusă din relațiile (45) și (46), este egală cu calea B (θ fiind mic, influența rotirii automobilului s-a neglijat), deoarece, peste această valoare, cel puțin una dintre roțile din dreapta intră pe partea cu aderență mai mare, relațiile amintite nemaifiind valabile. Deplasările maxime se realizează pentru următorii timpi : $t = 0{,}085$ s pentru automobilul cu $R.S. = -0{,}025$ și $t = 0{,}98$ s pentru automobilul cu $R.S. = +0{,}025$. Și din compararea acestor valori rezultă comportarea nesatisfăcătoare a automobilului cu virare insuficientă.

5. CONCLUZII

a) Metoda indicată și formulele deduse permit să se determine poziția automobilului frînat atunci cînd frînele nu sînt reglate corect sau cînd părțile din calea de rulare pe care rulează roțile din dreapta și respectiv stînga au coeficienți de aderență diferiți.

Prin metoda folosită se studiază mișcarea automobilului în regim tranzitoriu și nu în regim permanent, cum se procedează în [4]. Acest lucru este de mare importanță, pentru că, în general, în regim tranzitoriu parametrii mișcării diferă destul de mult de cei ai mișcării în regim permanent [3]. În cazul de față, această deosebire poate fi pusă în evidență examinînd formulele (45) și (46).

În felul acesta, cu formulele deduse se vor obține și rezultate mai apropiate de cele reale (vezi și § 3).

b) În studiul stabilității și maniabilității automobilelor trebuie să se țină seama de timpul de reacție al conducătorului. Mărimea acestuia

determină gradul de închidere al ciclului de dirijare și posibilitatea legăturii reciproce între calitățile dinamice ale automobilului și acțiunile conducătorului în timpul proceselor tranzitorii [3].

Exemplul și rezultatele din § 4 subliniază importanța timpului de reacție în problema stabilității automobilului frînat.

c) În general, stabilitatea mișcării automobilului se apreciază cu ajutorul rezervei de stabilitate statică. Astfel, mișcarea automobilului cu

Tabela nr. 1

	Are loc cînd	Rădăcinile ecuației $p^2 + 2Ap + B = 0$ sînt:
$B > 0$	sau $R.S. > 0$, oricare ar fi v sau $R.S. < 0$, pentru $v < v_{cr}$	sau imaginare cu părțile reale negative. sau reale și negative.
$B = 0$	R.S. < 0, pentru $v = v_{cr}$	una nulă și una reală negativă
$B < 0$	$R.S. < 0$, pentru $v > v_{cr}$	reale și de semn contrar.

rezerva de stabilitate statică pozitivă este stabilă oricare ar fi viteza sa de deplasare, iar mișcarea automobilului cu rezerva de stabilitate statică negativă este stabilă pentru viteze mai mici decît viteza critică și nestabilă pentru o viteză egală sau mai mare decît aceasta [3].

Conform celor de mai sus, examinînd tabela 1 și formulele deduse, rezultă că în cazul mișcării stabile componenta tranzitorie a lui $\omega(t)$ se anulează cînd $t \to \infty$, iar în cazul mișcării instabile această componentă tinde către infinit cînd $t \to \infty$. Numai cunoașterea rezervei de stabilitate statică și a vitezei nu permit însă a se aprecia dacă ω și în special θ și y sînt mai mari pentru automobilul cu virare în exces decît pentru automobilul cu virare insuficientă, pentru valori ale timpului mai mici decît limita timpului de reacție al conducătorului. Acest lucru este confirmat de rezultatele obținute în § 4.

Ca atare, rezerva de stabilitate statică nu poate constitui un criteriu al stabilității mișcării automobilului în toate situațiile în care acesta se poate găsi, în speță atunci cînd este frînat.

Primită la redacție la 12 aprilie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Е. А. Чудаков, *Избранные труды*. Москва, Академия Наук СССР, 1961.
2. C. Ghiulai, *Mecanica automobilului*. București, Edit. tehnică, 1965.
3. * * * *Управляемость и устойчивость автомобиля. Сборник статей* (перевод с английского), Москва, Машгиз, 1963.
4. J. Odier, *Contribution à l'étude de l'instabilité en freinage des véhicules automobiles*. Ingénieurs de l'Automobile (S.I.A.), *10* (1960).
5. Д. П. Великанов, *Эксплуатационные качества автомобилей*. Москва, Автотрансиздат, 1962.
6. Ion Gh. Șabac, *Curs de matematici superioare — capitole speciale*. Vol. II. București, Litografia Învățămîntului, 1956.
7. C. Ghiulai, A. Stoicescu, *Au sujet de la stabilité de l'automobile au freinage*. Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București, **XXVII**, *3*, mai-iunie (1965).

NOTE

EFORTURILE DINAMICE ÎN CABLURILE INSTALAȚIILOR DE EXTRACȚIE CU ROATA MOTOARE ÎN REGIM TRANZITORIU

de I. N. CONSTANTINESCU și A. V. DARABONT
Institutul de mine Petroșeni

539.4

Se dă o metodă de calcul pentru determinarea eforturilor dinamice care apar în cablul de extracție în fazele de accelerare și de frînare a instalației, ținînd seama de greutatea și de elasticitatea cablului, precum și de viteza de propagare a undei de șoc.
Pentru simplificarea studiului se fac o serie de ipoteze cu privire la turnul și la cablul de extracție. Fenomenele tranzitorii se studiază în două etape. Formulele deduse sînt utile în vederea unei dimensionări juste a cablului. Metoda de calcul propusă este exemplificată printr-un exemplu numeric.

Se știe că în general perioada unei extracții se împarte în trei faze :
— faza de accelerare, în care colivia pornește de la viteza zero și ajunge la viteza maximă ;
— faza de regim, în care colivia se deplasează cu viteza constantă ;
— faza de frînare, în care viteza coliviei scade de la valoarea maximă la zero.

Ne propunem să determinăm eforturile dinamice care apar în cablu în fazele de accelerare și de frînare, ținînd seama de greutatea și de elasticitatea cablului, precum și de viteza de propagare a undei elastice.

Pentru simplificarea studiului vom face următoarele ipoteze :
— construcția (turnul de extracție) care susține roata motoare este absolut rigidă ;
— rigiditatea cablului se consideră constantă în tot timpul procesului tranzitoriu ;
— nu există alunecare între cablu și căptușala roții motoare ; accelerația și decelerația se găsesc sub limitele peste care cablul începe să alunece pe roata motoare.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 21 NR. 2 P. 615–618 BUCUREȘTI 1966

Considerăm sistemul din figura 1, unde m_1 și m_2 sînt masele celor două colivii împreună cu încărcăturile și m_0 este masa redusă la periferia roții motoare a tuturor elementelor în mișcare de rotație (rotorul motorului, reductorul).

În cazul accelerării asupra masei m_0 acționează forța de accelerare

$$F = F_m + Q_2 - Q_1, \tag{1}$$

unde F_m este forța motoare, $Q_1 = m_1 g + q g L_1$, $Q_2 = m_1 g + q g L_2$, L_1 și L_2 lungimile celor două ramuri ale cablului, q masa unității de lungime de cablu.

Tensiunea în capătul superior al cablului (pentru $z = L_1$), datorită oscilațiilor proprii, se determină cu relația

$$S_1(L_1 t) = F \sum_{i=1}^{\infty} M_i (C_i \sin \omega_i t + D_i \cos \omega_i t), \tag{2}$$

unde

$$M_i = -\frac{2(\sin \theta_i + \beta \cdot \theta_i \cos \theta_i)}{\theta_i (1 + \beta^2 \theta_i^2) + \frac{\beta^2 \theta_i^2 - 1}{2} (\sin^2 \theta_i + 2\beta \theta_i \sin 2\theta_i)}, \tag{3}$$

$$C_i = -\frac{\theta_i (\alpha + \beta)}{1 + \theta_i^2 \alpha^2}; \quad D_i = \theta_i \left[\frac{\alpha \theta_i (\alpha + \beta)}{1 + \alpha^2 \theta_i^2} - \beta \sin \theta_i - \frac{1 - \cos \theta_i}{\theta_i} \right], \tag{4}$$

θ_i — număr propriu care se determină cu relația

$$\operatorname{tg} \theta_i = \frac{(\alpha + \beta) \theta_i}{\alpha \beta \theta_i^2 - 1}, \tag{5}$$

ω_i — pulsația proprie a sistemului, $\omega_i = \dfrac{c \theta_i}{L_1}$,

$$\text{iar } \beta = \frac{m_1}{q L_i}.$$

Tensiunea în cablu datorită oscilațiilor forțate va fi

$$S_2(L_1, t) = F \sum_{i=1}^{\infty} N_i (1 - \cos \omega_i t), \tag{6}$$

unde

$$N_i = \frac{(\beta^2 \theta_i^2 - 1) \sin 2\theta_i - 2\beta \theta_i \cos 2\theta_i}{\theta_i (1 + \beta^2 \theta_i^2) + \frac{\sin 2\theta_i}{2} (\beta^2 \theta_i^2 - 1) + 2\beta \theta_i \sin 2\theta_i}. \tag{7}$$

Tensiunea rezultantă în capătul superior al cablului (pentru $z = L_1$) se obține sumînd ecuațiile (2) și (6):

$$S(L_1, t) = F \sum_{i=1}^{\infty} [M_i C_1 \sin \omega_i t + (M_i D_i - N_i) \cos \omega_i t + N_i] + Q_1. \tag{8}$$

În cazul sistemelor reale, seria (8) este rapid convergentă. De aceea, pentru calculele aproximative, pentru determinarea valorii maxime a tensiunii S, ne putem limita la primul termen al seriei.

Timpul corespunzător maximului primului termen al seriei se poate exprima sub forma

$$t_1 = \frac{1}{\omega_1} \operatorname{arc\,tg} \frac{M_1 C_1}{M_1 D_1 - N_1}, \tag{9}$$

iar valoarea maximă a tensiunii

$$S_{\max}(L_1, t_1) \cong F\left[\sqrt{M_1^2 C_1^2 + (M_1 D_1 - N_1)^2} + N_1\right] + Q_1. \tag{10}$$

În calculele practice pentru determinarea forței F se pot folosi următoarele expresii :

— în cazul accelerării :

$$F = F_a = \frac{M_m i}{R} \eta + g\,[m_2 - m_1 + q(L_2 - L_1)], \tag{11}$$

unde M_m este momentul de pornire al motorului, i raportul de transmisie, R raza roții motoare, η randamentul transmisiei ;

— în cazul frînării :

$$F = F_f = \frac{M_f \cdot i}{R\eta} + \tag{12}$$

$$+ g\,[m_2 - m_1 + q(L_2 - L_1)],$$

unde M_f este momentul transmis de frînă la axa motorului.

Coeficientul auxiliar este

$$\alpha = \psi \frac{GD^2 i^2}{4g R^2 q L_1}, \tag{13}$$

unde GD^2 reprezintă momentul de impuls al tuturor maselor care se rotesc împreună cu axul motorului, ψ coeficient care ține seama de masa arborelui, transmisiei și roții motoare ($\psi = 1,1, \ldots, 1,15$).

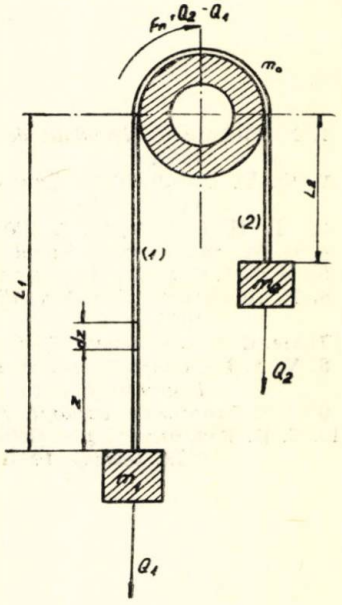


Fig. 1

Pentru exemplificare considerăm o instalație de extracție având următoarele caracteristici : greutatea coliviilor și a încărcăturii lor $G_1 = 7\,000$ kgf, $G_2 = 3\,000$ kgf, puterea motorului $P = 250$ CP, turația $n = 585$ rot/min, $GD^2 = 96$ kgf m^2, factorul momentului de pornire $\frac{M_{\max}}{M_n} = 2,7$ m, diametrul roții motoare $D = 2\,000$ mm, raportul de transmisie $i = 30$, diametrul cablului $d = 30$ mm, greutatea unui metru liniar de cablu 3,1 kgf/ml, aria secțiunii

BUDAPESTI MŰSZAKI FŐISKOLA KÖNYVTÁRA 1955

transversale $\Omega = 3{,}42$ cm^2, înălțimea de extracție $L_1 = 900$ m, lungimea ramurii (2) a cablului $L_2 = 40$, momentul de frînare $M_f = 400$ kgf/m, randamentul transmisiei $\eta = 0{,}8$.

Efectuîndu-se calculele obținem : momentul nominal al motorului $M_n = 306$ kgfm, momentul maxim de pornire $M_{max} = 825$ kgfm, forța de accelerare $F_a = 13\,140$ kgf, forța de frînare $F_f = 8\,340$ kgf, masa unității de lungime de cablu $q = 0{,}315$ kgf s^2/m^2, coeficienții auxiliari $\alpha = 8{,}54$, $\beta = 2{,}51$, $\theta_1 = 1{,}085$, constantele $M_1 = -0{,}265$, $N_1 = 0{,}514$, $C_1 = -0{,}139$, $D_1 = -1{,}795$, tensiunea maximă în cablu în cazul accelerării $S_{amax} = 18\,240$ kgf, pentru care corespunde coeficientul de suprasarcină 1,865, tensiunea maximă în cablu în cazul frînării $S_{fmax} = 15\,140$ kgf, cu coeficientul de suprasarcină 1,55.

În concluzie se constată deci că pentru o justă evaluare a tensiunilor dinamice din cablurile instalațiilor de extracție este necesar să se țină seama de greutatea proprie a cablului, de elasticitatea sa și de viteza de propagare a undei elastice. Determinarea acestor tensiuni este de o deosebită importanță în regimurile tranzitorii (accelerare și frînare).

Primită la redacție la 25 august 1965; o nouă versiune la 23 octombrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. N. Brădeanu, *Instalații de extracție miniere*. București, Edit. didactică și pedagogică, 1964.
2. Ф. В. Флорински, *Динамика шахтного подъемного каната*. Москва, Углетехиздат, 1955.
3. Г. Н. Савин, О. А. Горошко, *Динамика нити переменной длины*. Киев, 1962.
4. G. W. von Santen, *Vibrations mecaniques*. Paris, Bibliotheque technique Philips, 1957.
5. М. С.Коморов, *Динамика грузоподъемных машин*. Москва — Киев, Машгиз, 1962.
6. N. Teodorescu, *Curs de ecuațiile fizicii matematice*. București, Edit. didactică și pedagogică, 1963.
7. Gr. C. Moisil, *Ecuațiile fizicii matematice*. București, 1959.
8. V. A. Lazarian, *Cu privire la aplicarea coordonatelor generalizate la cercetarea oscilațiilor longitudinale în tije*. Transjeldorizdat, 1948.
9. S. P. Timoșenko, *Oscilații*. Fizmatghiz, 1959.
10. S. D. Ponomariov, ș. a. *Calculul de rezistență în construcția de mașini*. Vol. 3, București, Edit. tehnică, 1964.

ASUPRA BAZELOR FIZICE ALE PROCESELOR DE FRECARE ŞI UNGERE

I. FRECAREA USCATĂ

de Al. NICA

Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

539.6

În lucrare se trec în revistă diversele teorii emise pentru a se explica fenomenele de frecare a corpurilor cu o mişcare relativă. Se accentuează în mod deosebit aspectele legate de teoriile moderne elaborate în această direcţie, adică teoria adeziunii şi a frecării ca rezultat a deformaţiilor plastice. În măsura în care acest lucru este posibil, se dau şi relaţiile cantitative dezvoltate în cadrul acestor teorii. Evident, caracterul mai mult empiric al cercetărilor în acest domeniu limitează posibilităţile dezvoltării matematice, rezultatele obţinute bazîndu-se în special pe încercări experimentale. Complexitatea fenomenelor explică în mare măsură această situaţie, însă importanţa deosebită — ştiinţifică şi aplicativă — a fenomenelor de frecare determină încercări experimentale tot mai ample, dublate de dezvoltări teoretice din ce în ce mai cuprinzătoare.

Fenomenele de frecare sînt prezente oriunde există o mişcare relativă între două corpuri. Deşi indispensabilă în tehnică, ca şi în viaţa de toate zilele, oamenii de ştiinţă şi tehnicienii depun eforturi considerabile pentru reducerea frecării.

Într-adevăr, dacă la cuplaje, frîne etc. problema constă în mărirea pe cît posibil a frecărilor, în cazul tuturor tipurilor de lagăre, sisteme piston-cilindru, transmisii etc. problema constă în micşorarea pe cît posibil a frecărilor, pentru a se evita, pe de o parte, pierderile inutile de energie şi, pe de altă parte, consecinţa imediată şi nedorită a frecării, uzura.

Pentru atingerea acestui ultim scop, ştiinţa modernă a căutat, pe de o parte, să pătrundă în intimitatea proceselor de frecare şi uzură pentru

cunoaşterea mecanismului lor de producere şi, pe de altă parte, să dezvolte sisteme, metode şi soluţii constructive cît mai eficace în vederea reducerii la minimum a frecărilor şi a uzurii în organele de maşini. Pentru o corectă înţelegere a principiilor funcţionale şi de calcul ale sistemelor de ungere, este necesară în primul rînd cunoaşterea fenomenelor de frecare, generatoare de căldură, în vederea limitării şi evacuării acestei călduri, prin lubrifianţi de calitate şi în cantităţi corespunzătoare.

Fenomenele de frecare au constituit de altfel, o veche preocupare atît a practicienilor, cît şi a oamenilor de ştiinţă, şi trebuie remarcat faptul că, deşi problema frecării corpurilor solide s-a născut o dată cu activitatea tehnică a omenirii, iar unele legi fundamentale a căror valabilitate nu este total contestată nici astăzi au fost enunţate cu secole în urmă, înţelegerea mecanismului intim al fenomenelor de frecare este încă abia la început. De la Hire, cu mai bine de două secole şi jumătate în urmă, a presupus existenţa asperităţilor la suprafaţa corpurilor, atribuindu-le lor apariţia forţei de frecare, necesare pentru deformare sau dislocarea acestor asperităţi în procesul de mişcare relativă a corpurilor. În prezent, existenţa asperităţilor, chiar în cazul planului de clivaj al unui cristal izolat, care constituie cea mai netedă suprafaţă fizică, este un fapt dovedit experimental. Într-adevăr, deşi extraordinar de mici (de ordinul a $1 \div 2 \cdot 10^{-8}$ cm), ele totuşi au fost puse în evidenţă de reflecţia fasciculelor moleculare de pe planurile de clivaj ale cristalelor izolate de clorură de litiu [1].

Primele experienţe cunoscute privind frecarea au fost realizate de Leonardo da Vinci, care a ajuns la concluzia că forţa de frecare este proporţională cu sarcina şi independentă de suprafaţa de contact.

Amontons a redescoperit aceste legi (1699), constatînd totodată că valoarea coeficientului de frecare, adică a raportului dintre forţa de frecare şi sarcina aplicată, are în general valoarea 0,3. Această valoare este, de altfel, acceptată şi în prezent pentru oţeluri şi alte materiale similare în condiţiile obişnuite de frecare uscată. Mai tîrziu, Coulomb (1781), verificînd aceste observaţii, a făcut distincţia netă între frecarea statică şi cea cinematică. Totodată, Coulomb a emis ipoteza că frecarea se datorează întrepătrunderii asperităţilor de pe suprafeţe şi că, în general, frecarea reprezintă lucrul necesar pentru depăşirea vîrfurilor asperităţilor. În consecinţă, cu cît asperităţile sînt mai mari, cu atît ar rezulta şi frecări mai mari şi invers. Dacă această explicaţie este relativ mulţumitoare pentru suprafeţe rugoase, deşi în mod evident nu explică disiparea de energie, ea este absolut inacceptabilă în cazul suprafeţelor cu un grad foarte înaintat de prelucrare, la care se constată o puternică aderenţă reciprocă însoţită de rezistenţe mari în cazul frecării uscate.

Reiese că forţele de adeziune moleculare joacă un rol important în procesele de frecare, la distanţe mici de separare forţele moleculare determinînd o aderenţă puternică între suprafeţele curate (uneori acestea chiar se sudează) şi procesul de alunecare este, în consecinţă, mult îngreuiat. Deşi Coulomb luase în consideraţie posibilitatea ca frecarea să depindă de adeziunea moleculară dintre suprafeţe, el a abandonat această ipoteză, găsind că frecarea nu depinde de mărimea suprafeţelor în contact. După ce Ewing (1892) a semnalat posibilitatea ca forţele de frecare să depindă

de interacţiunea forţelor moleculare, în timp ce suprafeţele au o alunecare relativă, Tomlinson (1929) publică o teorie a frecării uscate, de un real interes. Teoria sa a fost dezvoltată pe baza forţelor de atracţie intermoleculară şi este în bun acord cu rezultatele experimentale proprii, precum şi cu cele obţinute în general [2].

În figura 1 se reprezintă schematic ideea care stă la baza acestei teorii : molecula D este în echilibru faţă de molecula I cînd pentru distanţa l_1 forţa de atracţie este în echilibru cu cea de repulsie pentru cele două molecule considerate. Pentru fier, de exemplu, distanţa $l_1 = 3 \cdot 10^{-8}$ cm ; dacă intervine şi molecula II, efectul atracţiei reciproce va fi neglijabil atîta timp cît distanţa l_2 este mare în raport cu l_1, dar cînd molecula II va trece prin dreptul moleculei D suficient de aproape pentru ca forţele de atracţie şi repulsie să fie sensibile, se vor constata vibraţii şi încălziri ca urmare a energiei absorbite de molecula D, atrasă şi apoi respinsă de molecula II.

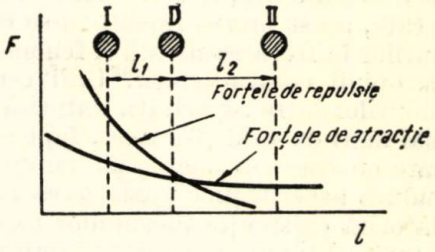


Fig. 1

Totodată, Tomlinson stabileşte o relaţie pentru coeficientul de frecare depinzînd de proprietăţile elastice ale corpurilor alunecînd unul faţă de altul :

$$f = 1{,}07 \cdot 10^4 (\psi_1 + \psi_{II})^{2/3}, \qquad (1)$$

în care $\psi = \dfrac{3E + 4G}{G(3E + G)}$, E fiind modulul de elasticitate longitudinal, iar G modulul de elasticitate transversal pentru fiecare material.

Beare şi Bowden au observat (1935) unele perturbaţii care însoţesc fenomenele de frecare şi care se extind în material pe o distanţă corespunzătoare cîtorva mii de atomi, ceea ce i-a condus la opinia că trebuie luate în consideraţie şi proprietăţile de structură a materialelor.

S-a emis totodată ipoteza că forţa de frecare dintre două corpuri metalice în contact, fără ungere, s-ar datora în primul rînd forfecării sudurilor formate de asperităţile suprafeţelor cu mişcare relativă, unde în timpul deplasărilor (mai ales cu viteze relative mari) iau naştere temperaturi foarte ridicate ; chiar în cazul unor viteze de alunecare reduse, deci a unor creşteri de temperatură neglijabile, sînt posibile suduri între asperităţi datorită presiunilor locale ridicate.

Bowden, Leben şi Tabor au ajuns apoi la concluzia că frecarea uscată este un fenomen discontinuu, sudurile succesive şi distrugerea lor intermitentă determinînd fluctuaţii importante a forţelor de frecare şi a temperaturii suprafeţelor, constatîndu-se ulterior că şi suprafaţa de contact poate avea fluctuaţii similare. Într-adevăr, cu aparatura utilizată de Bowden şi Leben (1939) se puteau determina forţele de frecare prin rezilienţă, ceea ce permitea să se detecteze fluctuaţii de foarte scurtă durată în mărimea acestor forţe, iar mişcarea de alunecare a piesei mobile era filmată,

ceea ce a permis să se observe caracterul discontinuu al mişcării, care consta dintr-o succesiune de opriri şi de alunecări (*stick-slip*). Totodată măsurătorile de temperatură a suprafeţelor au arătat fluctuaţii avînd aceeaşi frecvenţă ca şi alunecările succesive ale părţii mobile. Caracterul discontinuu al mişcării s-a păstrat şi în cazul ungerii cu ulei mineral, dispărînd cînd s-au utilizat lubrifianţi polari cu catene lungi. Toate aceste observaţii au condus la concluzia că în cazul alunecării relative a două suprafeţe metalice diferite, se formează suduri care în procesul de alunecare sînt forfecate, acest proces repetîndu-se cu o anumită frecvenţă. Mecanismul sudurilor în frecarea uscată şi fenomenul de alunecare discontinuă au condus la opinii contradictorii. Unii cercetători au pus la îndoială existenţa sudurilor între asperităţi, datorită faptului că nu au detectat temperaturi mai mari de 45°C [3]. Acest fapt s-a putut datora vitezelor mici de alunecare cu care s-a lucrat, iar pe de altă parte trebuie subliniat faptul că, sudura asperităţilor poate avea loc şi la temperatura mediului ambiant, datorită existenţei presiunilor mari de contact. De altfel, sudura la rece a metalelor neferoase este practicată în prezent pe scară industrială [2]. Block (1940) a demonstrat că fenomenul de *stick-slip* se poate evita nu numai prin utilizarea unui lubrifiant la limită corespunzător, ci şi prin controlul rigidităţii mecanismului de acţionare a aparatului, a vibraţiilor părţii mobile şi a vitezei de alunecare.

A devenit astfel evident că aceste oscilaţii de relaxare (*stick-slip*) nu însoţesc în mod obligator orice mişcare de alunecare, ci depind şi de alţi factori în afara fenomenului de frecare propriu-zis. Continuînd investigaţiile, Bowden şi Leben (1940) au constatat cu ajutorul unui osciograf catodic, chiar în cazul unor suprafeţe de alunecare rigide, fluctuaţii importante a temperaturii şi rezistenţei la înaintare. O asperitate a profilului microscopic a suprafeţelor poate să aibă o oscilaţie de relaxare afectînd întregul cuplu de frecare, prin amorsarea unor fluctuaţii a temperaturii locale şi a rezistenţei la înaintare. În acest caz, temperatura medie datorită frecării pe o anumită suprafaţă limitată poate să aibă o fluctuaţie neperiodică, deşi valoarea ei maximă nu va coincide în mod necesar cu valoarea maximă care poate apărea local la asperitatea respectivă.

Schnurmann şi Warlow (1942) au dezvoltat o teorie a frecării bazată pe influenţa forţelor electrostatice, care pot avea valori importante în cazul existenţei unui film subţire de lubrifiant cu bune proprietăţi dielectrice : în acest caz, sarcinile statice nu se pot scurge, ci se acumulează, datorită deplasării relative a corpurilor (fig. 2).

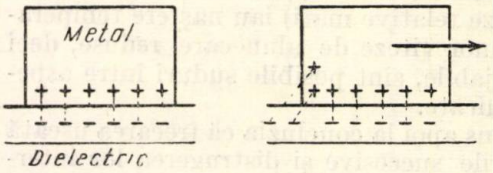


Fig. 2

S-a estimat că în cazul existenţei unor oscilaţii de relaxare puternice (*stick-slip*) se poate atribui influenţei forţelor electrostatice pînă la 30% din totalul forţelor de frecare [1].

Aceste observaţii, precum şi cercetări experimentale recente, au condus la concluzia că frecarea este un fenomen prea complicat pentru a fi ex-

plicată în întregime cu ajutorul unui singur mecanism, complexitatea fenomenelor fizice făcînd totodată dificilă şi tratarea cantitativă, matematică. Ernst şi Merchant (1940) au propus ca forţa de frecare să fie considerată drept rezultanta forţelor necesare pentru forfecarea sudurilor remarcate de Beare şi Bowden şi a forţei necesare să se ridice asperităţile uneia dintre suprafeţe peste asperităţile celeilalte, deci

$$F = F_f + F_a, \tag{2}$$

F fiind forţa totală de frecare în direcţia deplasării, F_f cota necesară pentru forfecarea sudurilor, iar F_a cota necesară pentru depăşirea asperităţilor (fig. 3).

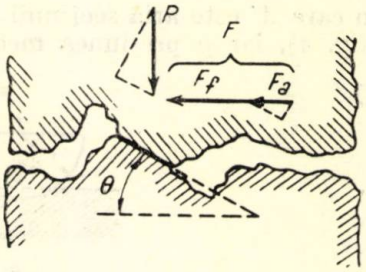


Fig. 3

Dacă se presupune că suprafaţa reală de contact este stabilită de deformaţiile plastice, rezultă

$$P = AH, \tag{3}$$

P fiind sarcina normală pe suprafaţe, A suprafaţa reală de contact în planul mişcării, iar H duritatea de suprafaţă la presiunea medie de deformaţie a celui mai puţin dur dintre metale.

Deoarece

$$F_f = A\tau, \tag{4}$$

τ reprezentînd rezistenţa specifică la forfecare a celui mai moale dintre metale, va rezulta pentru coeficientul de frecare, definit ca raportul dintre forţa de frecare paralelă cu suprafaţa aparentă de contact şi forţa normală pe această suprafaţă, următoarea expresie :

$$f = \frac{F_f}{P} + \frac{F_a}{P} = \frac{\tau}{H} + \frac{F_a}{P}. \tag{5}$$

Pentru echilibru (fig. 3),

$$P \sin \theta = F_a \cos \theta, \tag{6}$$

deci

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F_a}{P}, \tag{7}$$

θ fiind unghiul mediu de înclinare a asperităţilor faţă de direcţia de deplasare. Rezultă

$$f = \frac{\tau}{H} + \operatorname{tg} \theta, \tag{8}$$

al doilea termen din partea dreaptă a acestei relaţii prezentînd importanţă doar în cazul suprafeţelor foarte rugoase.

Bowden şi Tabor [4] consideră că, pe lîngă forţa necesară pentru forfecarea asperităţilor F_f, a doua componentă a forţei totale de frecare F

ar trebui să se considere forţa necesară pentru îndepărtarea asperităţilor metalului mai moale de către metalul mai dur, F_f avînd expresia

$$F_p = A'p, \tag{9}$$

în care A' este aria secţiunii frontale a urmei lăsate în metalul mai moale (fig. 4), iar p presiunea medie necesară pentru obţinerea acestei urme.

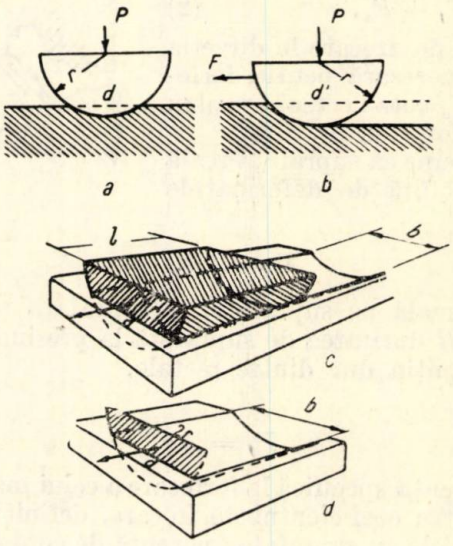


Fig. 4

Notînd prin b lăţimea urmei şi prin r raza de curbură a piesei mobile, rezultă că $A' \cong \frac{1}{12} \cdot \frac{b^3}{r}$ [4], deci

$$F_p = \frac{b^3}{12r} p, \tag{10}$$

iar forţa totală de frecare va fi dată de relaţia

$$F = F_f + F_p = A\tau + A'p. \tag{11}$$

Pentru cazul considerat mai sus (fig. 4 *a*, *c*), expresia lui F va fi

$$F = \tau lb + \frac{b^3}{12r} p, \tag{12}$$

dat fiind că suprafaţa proiectată $l.b$ poate fi considerată drept cea supusă forfecării.

Se poate elimina din forţa totală de frecare cota dată de forfecări, prin considerarea unui penetrator cilindric de lungime zero (lamă, fig. 4 *b*, *d*) în care caz

$$F = F_p = \frac{b^3}{12r} p. \tag{13}$$

În cercetările experimentale realizate în vederea demonstrării validităţii acestor ecuaţii, piesa mobilă din oţel a avut succesiv forma unei emisfere, a unui cilindru şi a unei lame, iar suprafaţa plană pe care aluneca era din indiu; vitezele de alunecare au fost reduse, astfel încît creşterea temperaturii datorită frecării nu a fost importantă [4].

O primă constatare, în acord cu relaţia (13), este că forţa de frecare datorită îndepărtării metalului moale în cazul utilizării unei piese mobile în formă de lamă (fig. 4 *b*, *d*) este proporţională cu cubul lăţimii urmei (b^3); cu toată nesiguranţa în legătură cu sensul fizic exact al presiunii p, rezultatele experimentale au arătat că forţa de frecare F_p se poate calcula în raport cu datele geometrice ale piesei mobile şi cu un factor p, care este de acelaşi ordin de mărime cu limita de curgere a materialului mai moale.

În figura 5 se reprezintă forţa de frecare F în raport cu lăţimea urmei lăsate de piesa mobilă în metalul mai moale pentru trei forme geometrice ale acesteia; sferă, cilindru şi lamă, toate din oţel şi avînd aceeaşi rază de curbură. După cum este firesc, pentru aceeaşi lăţime a urmei cele mai reduse frecări se constată în cazul piesei mobile în formă de lamă, cînd forţele datorate forfecării sudurilor sunt nule. Sfera se plasează între lamă şi cilindru, ultimul prezentînd forţa de frecare maximă datorită existenţei

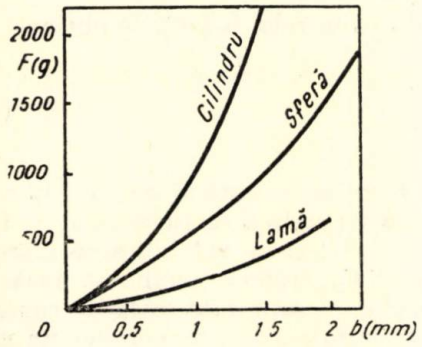


Fig. 5

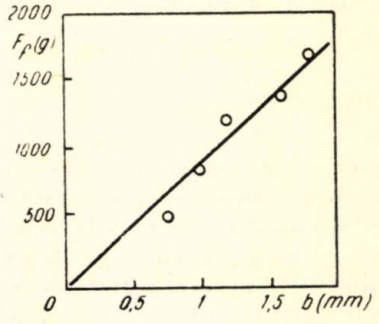


Fig. 6

forfecărilor maxime. Diferenţa dintre curbele 1 şi 3 reprezintă tocmai cota datorită forfecărilor F_f din forţa totală de frecare, iar din relaţia (12) rezultă că ar trebui să fie proporţională cu b.

Din figura 6, în care se reprezintă $F_f = F - F_p$, se vede că şi acest aspect este confirmat de datele experimentale, şi din panta curbei se obţine pentru τ valoarea 225 g/mm^2.

Luînd acum în considerație atît relația (8) cît și relația (11), rezultă pentru coeficientul de frecare expresia [3]

$$f = \frac{\tau}{H} + p' + \operatorname{tg}\theta, \tag{14}$$

în care $p' = \frac{F_p}{P}$ este forța de frecare datorită îndepărtării metalului moale raportată la forța normală. Scriind această relație, se presupune fie că asperitățile piesei mobile vor crea șanțuri în metalul mai moale, fie că se vor ridica deasupra asperităților celeilalte suprafețe dacă aceasta prezintă o duritate nu cu mult inferioară.

Dacă se reconsideră acum legile Amontons-Coulomb privind frecarea, se vor putea stabili limitele lor de valabilitate. Într-adevăr, relația care dă suprafața reală de contact A [4]

$$A = \frac{P}{\sigma_c} \tag{15}$$

arată că aceasta este independentă de suprafața aparentă de contact. Cînd efectul de îndepărtare a metalului mai moale este redus, întreaga forță de frecare poate fi atribuită ruperii sudurilor dintre asperități, rezultînd

$$F = A\tau, \tag{16}$$

adică independența forței de frecare față de suprafața aparentă de contact, deci prima lege a lui Amontons.

Dacă se înlocuiește A prin expresia sa în relația (16), se obține

$$F = P\frac{\tau}{\sigma_c}, \tag{17}$$

care exprimă proporționalitatea dintre forța de frecare și încărcarea normală dintre suprafețe, adică independența virtuală a coeficientului de frecare față de încărcare : a doua lege, care își păstrează valabilitatea într-un domeniu larg de condiții experimentale [4]. Trebuie subliniat însă că valabilitatea acestei legi depinde de faptul dacă suprafața reală de contact crește sau nu cu sarcina : atunci cînd suprafața reală de contact nu mai crește proporțional cu sarcina (de exemplu cînd între cele două suprafețe cu mișcare relativă se interpune un strat metalic subțire sau cînd unul dintre metale este foarte moale), această lege nu mai este respectată. Rezultă necesitatea de a se considera suprafața reală de contact.

Comparînd expresia coeficientului de frecare dat de legile Amontons-Coulomb

$$f = \frac{P}{F} \tag{18}$$

cu relaţia (17), rezultă

$$f = \frac{\tau}{\sigma_c}, \tag{19}$$

adică coeficientul de frecare este egal cu raportul dintre forţa de forfecare a sudurilor dintre asperităţi şi limita de curgere a celui mai moale dintre metale. Deoarece forfecările au loc în masa metalului mai moale, rezultă că τ este cel corespunzător acestuia.

În consecinţă, f devine o funcţie dependentă numai de proprietăţile fizice ale metalului mai moale şi, cum acestea nu mai pot varia independent, se explică faptul că f îşi păstrează valoarea în domenii foarte largi de condiţii experimentale, rămînînd în general între limitele $0{,}6 \div 1{,}2$ [4].

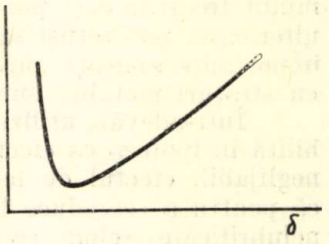


Fig. 7

O privire de ansamblu a aspectelor prezentate va conduce la concluzia că rugozităţile suprafeţelor în mişcare relativă au un efect nefavorabil prin mărirea frecărilor datorită joncţiunilor dintre asperităţi şi ruperii lor, agravînd deci uzura, iar pe de altă parte au un efect favorabil, micşorînd acţiunea de atracţie moleculară dintre suprafeţe. Există deci pentru fiecare grup de suprafeţe o rugozitate optimă, pentru care coeficientul de frecare prezintă valoarea minimă (fig. 7); această rugozitate optimă depinde de natura materialelor şi orice modificare a sa într-un sens sau altul va conduce la mărirea frecărilor.

Totodată, din mecanismul frecării uscate prezentat rezultă consecinţele pe care aceasta le are asupra uzurii. Astfel, după cum s-a specificat, forfecarea sudurilor dintre asperităţi sau a bazei asperităţilor metalului mai moale în cazul cînd forţele de atracţie moleculară dintre cele două metale sînt puternice conduc la apariţia particulelor de uzură, care, la rîndul lor, pot agrava acest proces. Cînd sudurile, respectiv smulgerile de material afectează porţiuni importante din suprafeţele în frecare, avariile acestora pot fi grave, găsindu-ne astfel în prezenţa fenomenului de gripaj. Creşterile de temperatură rezultînd din mărirea frecărilor accelerează acest fenomen.

Teoria frecării prin adeziune, expusă în cele de mai sus, poate fi supusă următoarelor critici: în general, valorile obţinute pentru coeficientul de frecare sînt prea scăzute; nu este suficient explicată variaţia coeficientului de frecare cu viteza; în fine, nu este întotdeauna clar cum se pot forma suduri între asperităţi atunci cînd sînt prezente straturi de oxizi sau alte substanţe contaminante.

Pe de altă parte, s-a constatat că particulele de uzură se deformează plastic şi chiar se distrug, ceea ce l-a determinat pe F. T. Barwell să dezvolte o teorie a frecării plecînd de la acest fenomen, bazat mai ales pe unele lucrări ale lui E. Rabinowicz [5]. Se presupune în felul acesta că planul în care are loc deformarea plastică este paralel cu direcţia mişcării, rezultanta tensiunilor fiind înclinată faţă de el cu 45°. Dacă singura forţă care

acționează pe lîngă forța normală este aceea de frecare în planul de alunecare, rezultă că acestea două sînt egale și deci $f = 1$. Autorii invocă în sprijinul acestei teorii faptul că pentru oțelul curat alunecînd pe oțel de asemenea curat, se găsesc pentru coeficientul de frecare valori apropiate de unitate ; atunci cînd valoarea coeficientului de frecare este mai redusă, acest fapt se explică prin existența unui film de substanțe contaminante (oxizi etc.) sau a unor efecte elastohidrodinamice.

Considerațiile emise pînă în prezent privind explicarea mecanismului frecării, deși poate încă incomplete și susceptibile de dezvoltări ulterioare, pot totuși să explice o serie de fenomene și să conducă la importante aplicații practice. Astfel se poate explica și realiza ungerea cu straturi metalice subțiri.

Într-adevăr, utilizînd pentru forța de frecare relația $F = A \cdot \tau$ (stabilită în ipoteza că efectul de îndepărtare a materialului mai moale este neglijabil, efectul de forfecare a sudurilor fiind preponderent), rezultă că pentru a se reduce la minimum frecările dintre suprafețele metalice nelubrificate trebuie ca atît suprafața de contact A, cît și rezistența la forfecare τ să fie minime. Cu majoritatea metalelor însă, acest lucru nu este posibil, căci, așa cum reiese și din figura 8, atunci cînd unul dintre

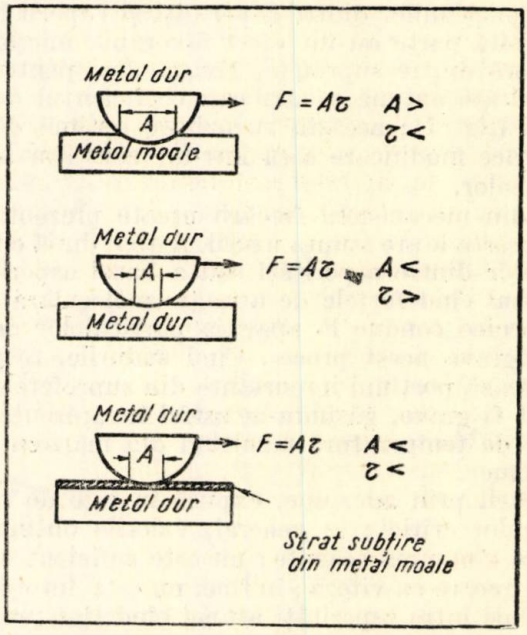


Fig. 8

metale este moale, deci τ are o valoare redusă, rezultă A mare, și, cînd ambele metale sînt dure, A este mic, dar τ ia valori importante și F păstrează, în consecință, valori ridicate.

O excepție o constituie materialele solide anizotrope, care sînt capabile să suporte sarcini normale importante, însă au o rezistență la forfe-

care redusă în cazul forţelor tangenţiale ; această situaţie se poate întîlni în cazul lubrifianţilor solizi, lamelari de exemplu, însă metalele avînd o anizotropie redusă nu pot îndeplini această condiţie. De altfel, acesta este motivul pentru care coeficientul de frecare a majorităţii metalelor este de acelaşi ordin de mărime.

Se pot obţine totuşi frecări reduse chiar în cazul metalelor, depunîndu-se un strat subţire dintr-un metal moale pe o suprafaţă de sprijin dintr-un metal dur (fig. 8). În felul acesta se combină rezistenţa la forfecare redusă a metalului moale cu o suprafaţă de contact mică, deoarece stratul de bază dur nu va permite o deformare puternică sub acţiunea sarcinii, astfel încît produsul $A.\tau$ va avea o valoare minimă.

Experienţe realizate cu depuneri de indiu, plumb şi cupru pe metale mai dure, au condus la numeroase constatări interesante privind mecanismul frecării în acest caz. S-a putut stabili astfel că stratul din metal moale determină un coeficient de frecare cu atît mai redus, cu cît este mai subţire, însă grosimea lui nu trebuie să coboare sub 10^{-5} cm, deoarece în acest caz filmul încetează să mai fie eficace. Pe de altă parte, cu cît filmul de metal moale este mai gros şi mai bine fixat faţă de stratul de bază, cu atît poate suporta sarcini mai mari fără să fie străpuns şi uzura sa este mai redusă. În consecinţă, grosimea optimă a filmului va consta dintr-un compromis între aceste efecte contradictorii, trebuind să fie suficient de mare pentru a nu fi expulzat rapid, însă nu exagerată, pentru a se menţine frecarea la un nivel minim.

Totodată, încercările privind influenţa temperaturii au arătat că frecările se reduc pe măsură ce temperatura creşte, însă cresc brusc atunci cînd se atinge punctul de topire al metalului care constituie stratul lubrifiant. Astfel, în cazul acoperirilor cu indiu, coeficientul de frecare a scăzut la jumătate în intervalul de temperaturi între 20 şi 155°C, pentru ca după această valoare să crească brusc. Scăderea coeficientului de frecare cu creşterea temperaturii pînă la un punct, se explică prin reducerea rezistenţei de forfecare a stratului fără să fie influenţată valoarea lui A, deoarece încărcarea este preluată de stratul de bază dur, mai puţin sensibil din punctul de vedere al proprietăţilor mecanice la creşterea temperaturilor. Odată atins însă punctul de topire al metalului moale, filmul nu mai rezistă la sarcina normală, fiind străpuns.

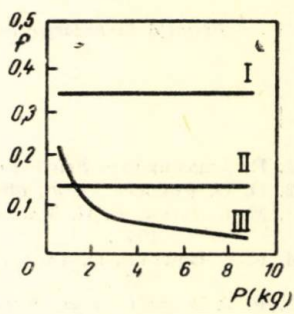


Fig. 9

Cercetări experimentale menite să verifice în ce măsură este respectată legea lui Amontons-Coulomb privind variaţia coeficientului de frecare cu sarcina au arătat că, în timp ce atît pentru suprafeţe din oţel fără ungere, cît şi pentru suprafeţe din oţel lubrificate cu ulei mineral (curba I, respectiv curba II, fig. 9) coeficientul de frecare nu variază cu sarcina, pentru suprafeţe din oţel, dintre care una acoperită cu un strat subţire de indiu avînd o grosime de aproximativ $4 \cdot 10^{-4}$ cm, coeficientul de frecare scade cu creşterea sarcinii (curba III).

Explicația rezultă imediat din cele expuse mai sus : în timp ce în cazul oțelului fără ungere, ca și în cazul oțelului lubrificat cu ulei mineral, suprafața pe care are loc contactul metalic crește proporțional cu sarcina, în prezența unei acoperiri cu un strat subțire de indiu creșterea acestei suprafețe cu sarcina este redusă, în consecință și creșterea forței de frecare este de asemenea redusă, cu o micșorare corespunzătoare a coeficientului de frecare.

Din unele puncte de vedere, comportarea filmelor metalice subțiri este asemănătoare cu aceea a filmelor de lubrifiant obișnuit : astfel se constată o reducere substanțială a frecării, procesul de alunecare este lin și suprafețele metalice de bază sînt protejate. De asemenea, în cursul procesului de frecare stratul subțire de lubrifiant metalic este îndepărtat, ca și în cazul unui lubrifiant obișnuit, însă mult mai repede. În fine, o altă asemănare constă în creșterea frecării o dată cu atingerea punctului de topire al lubrifiantului metalic, așa cum se constată și în cazul hidrocarburilor solide folosite ca lubrifianți.

Există însă și deosebiri esențiale : un film de lubrifiant obișnuit poate fi eficace chiar în cazul unei grosimi de numai o moleculă sau două, pe cînd un strat metalic este eficace drept lubrifiant numai dacă depășește în grosime 10^{-6} cm (adică aproximativ 30 de straturi atomice). În fine, o deosebire fundamentală constă, după cum s-a specificat, în nerespectarea legii Amontons-Coulomb privind variația coeficientului de frecare în cazul straturilor metalice subțiri. Este de menționat că lubrificația cu straturi metalice subțiri și-a găsit un cîmp larg de aplicații în tehnică, de exemplu la ambutisarea adîncă a oțelului. Aplicațiile acestui gen de ungere pot fi numeroase, dat fiind că se pot obține coeficienți de frecare reduși, ca și în cazul celor mai buni lubrifianți la limită (de exemplu cu un strat subțire de indiu $f = 0{,}04$), ceea ce îl recomandă acolo unde condițiile de lucru interzic utilizarea lubrifianților obișnuiți.

Primită la redacție la 15 noiembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. R. Schnurmann, *Friction and Wear*, Wear, *5*, 1 (1962).
2. D. D. Fuller, *Theory and Practice of Lubrication for Engineers*, New York, Wiley, 1956.
3. M. C. Shaw, F. E. Macks, *Analysis and Lubrication of Bearings*. New York, Graw Hill, 1949.
4. P. F. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids*. Oxford University Press, 1954.
5. F. T. Barwell, *Some Further Thoughts on the Nature of Boundary Lubrication*. Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl. **11**, *3* (1966).

DIN ISTORIA ŞTIINŢEI ŞI TEHNICII ROMÂNEŞTI [1)]

SPIRU HARET — PROFESOR

de acad. prof. VICTOR VÂLCOVICI

Mecanica, disciplina care în ţara noastră a cunoscut în timpul din urmă o frumoasă dezvoltare, se poate mîndri cu munca primului său pionier, Spiru C. Haret. Cu aproape 90 de ani în urmă, acest mare învăţat, care-şi trecuse doctoratul la Sorbona, a pus bazele unui curs modern de mecanică raţională ca profesor la Universitatea din Bucureşti.

Născut la Iaşi în februarie 1851, în condiţii materiale foarte modeste, el îşi începe facultatea în toamna anului 1869, iar peste trei ani devine licenţiat în ştiinţele fizico-matematice. I se propune de către ministrul instrucţiunii o catedră de matematici în învăţămîntul secundar. Haret preferă, totuşi, o bursă pentru studii la Paris, ceea ce i se decerne în toamna anului 1874.

Ca subiect de teză, Haret este întîmpinat de o interesantă problemă de mecanică cerească : sînt sau nu invariabile axele mari ale orbitelor planetare solare? E vorba de acţiunea perturbatoare din problema celor trei corpuri, de efectele ei asupra axei mari a orbitei unei planete oarecare. Problema preocupase pe matematicieni de seamă, pentru că rezolvarea ei cerea eforturi serioase.

Marele Lagrange demonstrase încă din 1776, deci cu un secol mai înainte, aşa-numita teoremă a „invariabilităţii axelor mari", teoremă care consta doar din confirmarea lipsei termenului de gradul I în seria reprezentînd axa mare, o serie dezvoltată după puterile masei perturbatoare raportată la masa Soarelui. Poisson, simţind insuficienţa demonstraţiei, încearcă în 1808 să arate că şi ceilalţi termeni (de gradul II, III etc.) ai seriei sînt nuli ; el reuşeşte pentru termenul de gradul II.

Fără a se mai continua cercetarea, lumea matematică a început a crede că toţi ceilalţi termeni ai seriei sînt nuli.

În această atmosferă apare în 1878 teza de doctorat a lui Haret, în care se demonstrează că în seria de puteri reprezentînd axa mare există un termen de gradul III diferit de zero. Rezultatul produce senzaţie. El este comentat foarte viu în toate cercurile ştiinţifice.

[1)] Prezentată la Conferinţa de mecanică, Bucureşti, septembrie 1965.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 21 NR. 2 P. 631–635 BUCUREŞTI 1966

Henri Poincaré, în cunoscuta sa operă *Leçons de Mécanigue céleste*, apărută în 1905, explică acest rezultat al lui Haret în felul următor. S-a demonstrat că termeni de gradul al doilea *secolari* nu există; însă pot exista termeni de gradul II *periodici*, adică multiplicați cu un sin sau cos. Făcînd dezvoltarea în serie a funcției trigonometrice, se poate obține un termen *secular* de gradul III, prin o atare dezvoltare, din termenul de gradul II astfel dezvoltat.

Care-i adevărul definitiv în privința variabilității axei mari?

Atîta timp cît ne conducem numai după nulitatea termenilor seriei derivate, nu avem dreptul să conchidem la invariabilitatea axelor. Se poate spune deci că rezultatul lui Haret este o serioasă și justificată amenințare pentru existența celebrei teoreme a „invariabilității axelor mari".

Reîntors de la Paris, Haret este numit direct, în vîrstă de numai 27 de ani, profesor de mecanică la Universitatea din București pe data de 1 aprilie 1878. El a continuat să țină prelegerile de mecanică pînă în 1911, cînd s-a retras de la catedră pe motive de sănătate.

Cursul lui era împărțit în două. Prima parte, cinematica și statica, se făcea în anul al doilea de studiu; ultima parte, dinamica, era rezervată anului al treilea de studiu. În această ultimă parte, Haret făcea de obicei, pe lîngă dinamica punctului și a solidului, noțiuni de hidrostatică și de hidrodinamică.

L-am avut ca profesor în anul școlar 1906—1907. Eram în anul al treilea al facultății, în anul ultim; facultatea avea pe atunci trei ani de studiu, după care urma un examen de *licență în matematică*. Cursul de mecanică din anul al doilea, cinematica și statica, l-am făcut cu profesorul D. Bungețianu, suplinitor.

În anul al treilea, profesorul Haret ne-a servit prelegerile de dinamică cu o punctualitate exemplară. Mi-aduc aminte că orele sale coincideau cu acelea de geometrie analitică ale profesorului Gh. Țițeica, așa încît cei doi profesori, ambii foarte punctuali, se întîlneau la ore fixe în cancelarie și făceau împreună cei cîțiva pași din cancelarie pentru a ajunge în sălile respective de curs, care erau de altfel așezate pe același coridor.

Profesorul Haret apărea în sala de curs totdeauna corect îmbrăcat, dar modest : un adevărat intelectual. Cu o voce moderată, egală, își ducea lecția pînă la capăt, făcînd necontenit uz de tablă. Era de o claritate minunată și de o rigoare la fel. Îi plăcea să scruteze studenții cu privirea pentru a-și da seama în oarecare măsură de gradul lor de pătrundere. Și, atunci cînd i se părea că n-a izbutit să se facă înțeles pe deplin, revenea. Metoda lui de expunere era aproximativ aceea a tratatului lui Sturm.

Despre felul cum ar fi conceput Haret hidrostatica și hidrodinamica nu pot spune nimic. Căci către sfîrșitul anului, cînd ar fi trebuit să fie atacată mecanica mediilor continue, Haret este solicitat să preia portofoliul „Instrucțiunii și al Cultelor", pentru a treia oară în viața sa, așa că părăsește catedra, lăsînd în locul său pe profesorul Paul Coculescu.

Totuși, chiar în același an am mai avut prilejul unui contact personal cu ministrul Haret, numai în scris, e drept.

Îmi luasem licența și deci aveam dreptul să ocup prin suplinire una dintre numeroasele catedre libere de matematici din învățămîntul secun-

dar. La cererea mea scrisă, ministerul îmi răspunde dîndu-mi suplinirea unei catedre dintr-un oraș îndepărtat de provincie. Colegii mei, care toți găseau că am fost nedreptățit, mă îndeamnă să-i scriu ministrului o scrisoare personală de protest, ceea ce am și făcut. A doua zi m-am pomenit chemat la telefon la minister. Mă primește secretarul general al ministerului, un om politic însemnat pe vremea aceea. L-am găsit în intimă consfătuire cu directorul învățămîntului secundar, avînd în mînă scrisoarea pe care i-o trimisesem eu ministrului.

— Te-am chemat, îmi spune el, ca să-ți comunic o schimbare : ești numit nu la Caracal, ci în București, la Seminarul Central, ca profesor de matematici.

Am plecat satisfăcut de la minister.

Haret era un om drept : el nu putea suferi ca nedreptatea să hotărască de soarta cuiva, un adevăr pe care am avut ocazia să-l verific din nou la scurt interval după aceea. În primăvara anului 1908, dînd examenul de capacitate ca profesor de liceu, mă pomenesc împins în rîndul al doilea din locul de prim clasificat, de un profesor mai vechi care trecuse acum numai o corigență. Colegii mei erau indignați, căci toți erau împinși în jos cu cîte un grad.

— Nu se poate, spun ei, ne prezentăm la ministru cu protestul nostru.

Ceea ce am și făcut.

— D-ta ai pretenția să fii clasificat înaintea tuturor, se adresează ministrul către acel profesor mai vechi, care era și el prezent. Pentru ce?

— Pentru că aparțin unei formații mai vechi, răspunde el.

— Da. Dar d-ta te-ai rupt de seria la care aparțineai, iar acum aparții acestei noi serii, și anume la finele ei.

Astfel spiritul de dreptate al ministrului a găsit soluția justă, care ne-a mulțumit pe toți ; singurul nemulțumit a fost profesorul corigent !

Înainte de a părăsi țara pentru a pleca în străinătate pentru studii, am mai avut o dată prilejul de a fi primit de ministrul Haret. Dădusem examenul de bursă, în urma căruia fusesem proclamat reușit de către comisia compusă de prof. D. Emmanuel, E. Pangrati și Gh. Țițeica. Ministrul a ținut să-mi adreseze un ultim cuvînt. M-a întrebat mai întîi care e specialitatea pe care mi-am ales-o pentru studii. La răspunsul pe care i l-am dat : mecanica, ministrul Haret m-a aprobat și m-a încurajat, spunîndu-mi între altele că crede că în curînd va ieși la pensie și că dorința lui ar fi ca eu să-i pot succeda la catedră.

I-am mai spus că, urmînd indicațiile comisiei de examen, mă voi duce mai întîi în Germania.

— Bine faci că te duci pentru studii în Germania, îmi spune ministrul. De acolo ne vei putea aduce idei noi în mecanică.

Cuvintele sale m-au însoțit tot timpul studiilor în Germania. Am căutat necontenit să deslușesc în cele ce învățam partea cu adevărat nouă, considerînd-o ca o contribuție originală a științei germane.

Dar Spiru Haret era nu numai un matematician de seamă. El era mai cu seamă un „om" în înțelesul nobil al acestui cuvînt, îmbrăcat cu cele mai frumoase calități omenești. Era mai întîi un mare democrat. Iubea poporul și îi apăra interesele.

Haret pune bazele unei serioase organizații a cooperativelor țărănești pe țară, în scopul de a scoate țărănimea din starea de mizerie în care se găsea. Obștile sătești și băncile populare sînt opera lui conceptuală. El dorea în mod sincer să ajungă la emanciparea țăranilor de sub jugul economic pe care li-l impusese marea proprietate. Lupta cu mijloace civilizate contra analfabetismului și pentru împroprietărirea țăranilor. Din cauza atitudinii sale consecvent democrate a fost acuzat de unii reacționari că el ar fi provocat mișcările țărănești din 1907. A fost numit chiar „revoluționar".

De fapt Haret a fost tot timpul vieții sale preocupat de problemele sociale și de soluționarea lor. În opera sa *Mecanica socială*, el a încercat să schițeze o matematicizare a sociologiei, luînd drept model știința mecanicii. Îmi face impresia că învățămîntul, de la cel primar pînă la cel universitar, este privit de Haret ca reprezentînd domeniul axiomatic al sociologiei sale. Prin învățămînt se creează factorul „axioma de bază" al doctrinei sociale. De aceea Haret acordă o importanță principală învățămîntului oficial, factorul prin care încearcă să conducă tot fenomenul social, pornind de la condiții inițiale potrivite.

Învățămîntul primar a avut precădere în munca lui Haret. Pornind de la constatarea socială că în 1904 nu frecventau școala primară decît 41% din toți copiii de școală, el își îndrumează pașii către o luptă cu mijloace active, creatoare, disprețuind pe cele penalizante (amenzi etc.), care se dovediseră ineficiente. Haret pornește o campanie masivă de clădire de localuri de școli, de înzestrarea lor cu mobilier și material didactic, de tipărire de cărți școlare ieftine, de ajutoare de haine și de cărți copiilor săraci. Pune în același timp un accent deosebit pe obligațiile de misionar cultural al învățătorului în scopul ridicării culturale și morale a satului.

Dar reforma cea mai răsunătoare și mai plină de consecințe din vremea aceea este, fără îndoială, transformarea învățămîntului secundar, pe care o realizează Spiru Haret în anii 1899 și 1902 : liceul vechi cu 7 clase este înlocuit de un liceu trifurcat cu 8 clase. Prin această reformă epocală, elevii sînt împărțiți în trei categorii, ținîndu-se seama de aptitudinile lor naturale. Se poate spune, fără nici o teamă de exagerare, că tineretul românesc este astfel condus oficial pe calea naturală a dezvoltării sale intelectuale. Învățămîntul științific, în special acela al matematicii, capătă astfel o amploare foarte folositoare, și anume tocmai în vîrsta cea mai potrivită pentru asimilarea lui.

Nici învățămîntul superior nu este neglijat în marea reformă a lui Haret. Acest învățămînt, care trebuie să fie, pe de o parte, „centrul cultural al țării", cum spunea el, nu trebuie, pe de alta, să facă abstracție de „nevoile, aspirațiile și împrejurările țării". Acestea sînt cuvintele lui Haret. Se poate spune că Haret a găsit de pe atunci expresia potrivită pentru formula de actualizare a învățămîntului superior.

Se vede clar că Haret merită numele de „omul școlii".

El a lucrat toată vremea pe numeroase terenuri, nu numai pe unul singur. Dar toate liniile sale de lucru concură spre același punct: „binele și ridicarea mulțimii".

A fost veșnic activ, cu mare folos pentru țară. Așa că în 1911, cînd își ia concediu de la catedră după 34 de ani de multiplă activitate, poate spune cu cugetul împăcat nu numai că și-a făcut pe deplin datoria, dar că lasă în urma sa creații trainice atît în știință, cît și în construcția socială a progresului intelectual, material și moral al maselor.

Haret se săvîrșește din viață în decembrie 1912, aproape de împlinirea celui de al 62-lea an al vieții sale.

RECENZII

Ing. A. OPREAN, ing. V. MARIN, ing. V. MORARU, *Sistemele hidrostatice ale mașinilor-unelte și preselor*, Edit. tehnică, 1965, p. 554

Calitățile acționării hidraulice față de alte sisteme de acționare ale lanțurilor cinematice din diverse mașini au dus la o răspîndire crescîndă a acestora.

Desigur, sistemele de acționare mecanică formate cu elemente rigide se manifestă prin siguranță, simplitate, precizie în mecanismele de reglare ale lanțurilor cinematice, ceea ce le face de neînlocuit în unele transmisii ale mașinilor unelte. Dar variatoarele continue de turații, ca și elementele mecanice de automatizare, au posibilități limitate. Acționarea electrică, larg utilizată în mașinile-unelte grele, prezintă în același domeniu al variatoarelor complicații gabarite mari etc. față de cele hidraulice. Aparatajul electric de automatizare rămîne însă foarte răspîndit. Acționarea pneumatică are avantaje la obținerea turațiilor ridicate, dar prin marea compresibilitate a aerului și a variației de presiune se obțin variații mari ale vitezelor de lucru.

Avantajele și dezavantajele diferitelor sisteme de acționare sînt numeroase, dar fiecare sistem își are domeniul său de utilizare, în care avantajele sale le depășesc pe ale altora. De aceea apariția acestei lucrări în domeniul acționărilor hidraulice prezintă deosebit interes atît pentru documentarea de specialitate, cît și pentru rezolvarea problemelor respective la cerințele tehnicii moderne.

Lucrarea cuprinde 14 capitole judicios organizate pe problemele privind construcția, calculul și proiectarea sistemelor hidraulice pentru acționarea mașinilor-unelte și a preselor. Primul capitol, generalități asupra sistemelor de acționare hidraulică, cuprinde principii de funcționare, avantajele și dezavantajele, clasificarea și sistematizarea sistemelor de acționare și de comandă, care de altfel prezintă problemele acestei lucrări. Al doilea capitol cuprinde mediul hidraulic cu proprietățile sale fizico-chimice. Capitolele 3 și 4 se referă la generatoarele hidraulice și la motoarele hidraulice. Descrierile diferitelor pompe cu debit constant și reglabil, ca și a motoarelor rectilinii sau rotative, sînt însoțite de explicații funcționale și de calcule, de proiectare, analizîndu-se diferiți parametri și coeficienți caracteristici : debit, forțe de lucru coeficienți de pulsație, materiale, condiții tehnologice, randamente etc. Capitolele 5 și 6 se ocupă de problemele construcției și calculului aparatajului de comandă pentru distribuție și reglare (distribuitoare, inversoare, supape, drosele, stabilizatoare, relee etc.) și ale aparatajului auxiliar (conducte, filtre, acumulatoare, elemente de etanșare etc.).

În capitolele 7—11 sînt redate funcțiile sistemelor hidraulice ale mașinilor-unelte, sistemele hidraulice ale mașinilor universale, automate, semiautomate, agregate și linii automate, descriindu-se funcționarea diverselor mașini de rectificat, de broșat, de rabotat, honuit, găurit, de frezat, prese, sisteme de copiat hidraulice, comandă după program, diverse instalații pentru acționarea mașinilor agregate și linii automate. Ultimele capitole, 12—14, prevăd calculul

sistemelor de acționare hidraulică relative la diverși parametri (putere, dimensiuni, forțe, presiuni, debite), problemele practice ale sistemelor de acționare hidraulică a mașinilor unelte, calculul și proiectarea într-o linie automată.

Tratarea și rezolvarea problemelor acestei lucrări se face la un nivel superior. Diverse capitole sînt însoțite de exemple numerice de calcul, cuprind multe figuri și tabele și prezintă indicații prețioase pentru aplicarea rezultatelor în problemele concrete de proiectare sau de construcție a mașinilor cu aparataj hidraulic. Cuprinzînd la început problemele generale în legătură cu funcționarea și cu calculul sistemelor hidraulice, autorii analizează în ultima parte schemele sistemelor de automatizare și de reglare automată și diverse mașini-unelte universale și agregate.

Avînd un bogat material, lucrarea acoperă pe deplin problemele domeniului respectiv, care sînt rezolvate sub o formă clară, riguros teoretic. Totodată, lucrarea este apropiată de realizările practice. Ea poate fi utilizată cu succes în institutele de proiectare și în întreprinderile constructoare de mașini, adresîndu-se studenților, tehnicienilor și inginerilor de specialitate.

Chr. Pelecudi

A.S.M.E.-A.S.L.E. International Lubrication Conference, Washington, October 13—16/1964. Transactions of the basic Engineering, vol. 87, series D, No. 3, September 1965

În acest număr, consacrat lucrărilor incluse în programul Conferinței internaționale de lubrificație, care a avut loc în octombrie 1964 la Washington, sînt prezentate peste treizeci de lucrări referitoare la principalele aspecte din domeniul ungerii, frecării și uzurii, constituind astfel o cuprinzătoare imagine a preocupărilor și a rezultatelor obținute în ultimul timp pe plan internațional în domeniul amintit.

O grupare a lucrărilor nu este ușoară, dată fiind diversitatea lor; se pot cita însă, ca o categorie aparte, lucrări legate de problemele recent ridicate de progresul tehnic, și anume lubrificația magnetohidrodinamică: *Magnetohydrodynamic Squeeze Film Bearings* (Lagăre magnetohidrodinamice, cu mișcare de apropiere și depărtare a suprafețelor) de F. T. Dodge, J. F. Osterle și W. T. Rouleau, comportarea mediilor nenewtoniene: *On the Mechanics of Non-Newtonian Media* (Asupra mecanicii mediilor nenewtoniene) de N. Tipei; ungerea în regim turbulent: *A Linearized Turbulent Lubrication Theory* (O teorie liniarizată a lubrificației în regim turbulent) de Chung-Wah Ng și C. H. T. Pan. În aceeași categorie se pot cita și numeroasele lucrări legate de problemele lubrificației cu gaze: *On the Behaviour of Gas-Lubricated Journal Bearings Subjected to Sinusoidally Time-Varying Loads* (Asupra comportării lagărelor circulare lubrificate cu gaze, supuse unor încărcări variabile sinusoidale) de J. S. Ausman; *On Hydrodynamic Instability of Gas-Lubricated Journal-Bearings* (Asupra instabilității hidrodinamice a lagărelor circulare lubrificate cu gaze) de V. N. Constantinescu; *Theory of Externally Pressurized Circular Thrust Porous Gas Bearings* (Teoria lagărelor circulare axiale lubrificate cu gaze sub presiune din exterior de H. Mori, T. Yabe și T. Ono etc.

Pe lîngă aspectele teoretice noi pe care le dezvoltă, comparate cu datele experimentale atunci cînd este posibil, aceste lucrări se remarcă și prin perspectivele unor aplicații practice deosebit de interesante.

De o atenție deosebită s-au bucurat în cadrul lucrărilor prezentate și aspectele legate de calculul lagărelor, căutîndu-se soluții mai exacte problemelor dificile, incomplet sau nesa-

tisfăcător rezolvate pînă în prezent. Din această categorie de lucrări se pot cita : *Dynamically Loaded Journal Bearings* : *Mobility Method of Solution* (Metoda mobilității de rezolvare pentru lagărele circulare încărcate dinamic) de J. F. Booker ; *Design and Performance of Gas-Pressurized, Spherical, Space-Simulator Bearings* (Proiectarea și caracteristicile lagărelor sferice, lubrificate cu gaze sub presiune pentru simulatoarele spațiale) de D. F. Wilcock ; *Contributions to the Determination of the Real Clearance in Sliding Bearings* (Contribuții la determinarea jocului real în lagărele cu alunecare) de Al. Nica etc. O caracteristică comună acestor lucrări este prezentarea relațiilor efective de calcul, cu exemple de aplicatii, chiar de ordin constructiv unde a fost posibil.

Un interes special îl prezintă de asemenea lucrările legate de fenomenele de ungere combinată de rostogolire și alunecare, ungerea angrenajelor, ungerea rulmenților, caracteristicile ungerii la limită, fenomenele de uzură și combaterea lor. Dintre lucrările tratînd aceste aspecte se pot aminti : *A Numerical Solution for the Pressure, Temperature and Film Thickness Between Two Infinitely Long, Lubricated Rolling and Sliding Cylinders, Under Heavy Loads* (O soluție numerică pentru presiuni, temperaturi și grosimea stratului lubrifiant între doi cilindri de lungime infinită, cu mișcare de rostogolire și de alunecare, supuși la sarcini mari) de H. S. Cheng și B. Sternlicht ; *The Measurement of Surface Temperatures on Gear Teeth* (Măsurarea temperaturilor la suprafața dinților angrenajelor) de G. Niemann și G. Lechner ; *Fretting Corrosion Caused by Vibration with Rolling Bearings Stationary* (Coroziunea de fretaj produsă de vibrații ale lagărelor cu role staționare) de H. Pitroff ; *Effect of Oxidation on Boundary Friction of Steel in Hydrocarbon Media and Critical Friction Duties Under which Cold and Hot Seizure (or Welding) Develop* (Efectul oxidării asupra frecării la limită a oțelului în medii de hidrocarburi și cu sarcini de frecare critice la care poate apare gripajul (sau suduri) la cald și la rece) de G. V. Vinogradov, I. V. Korepova, I. I. Podolski și N. T. Pavlovskaia ; *Calculation of Wear Rate* (Calculul gradientului de uzură) de I. V. Kraghelski.

Limitările de spațiu nu au permis citarea decît a unora dintre lucrările prezentate, care, la rîndul lor, au fost supuse unei severe selecții, dar nu se pot omite din această prezentare lucrările tratînd aspectele chimice ale lubrificației, de exemplu lucrarea *Chemical Modification of Friction Surfaces* (Modificarea chimică a suprafețelor în frecare) de P. I. Sanin, E. S. Șepeleva, A. O. Mannik și B. V. Kleimenov, și o interesantă trecere în revistă a literaturii de specialitate pe anul 1963 (sub redacția lui M. B. Peterson).

În încheiere este de subliniat aportul deosebit adus de școala românească de lubrificație, prin trei lucrări, la această amplă și actuală trecere în revistă a realizărilor din domeniul ungerii și frecării alături de cercetătorii din S.U.A., U.R.S.S., Japonia, R.F.G., R.P. Polonă și Anglia.

H. Pascal

С. Н. Кожевников, Я. И. Есипенко, Я. М. Расчин, Механизмы (Mecanisme). Издательство Машиностроение, Москва, 1965, 1 060 p., 2 030 fig.

La creerea mașinilor complexe moderne, și îndeosebi a mașinilor automate sau a liniilor automate, este necesar să se elaboreze un proces tehnologic rațional, cu care ocazie se proiectează diferite mecanisme. Cartea de față prezintă caracteristicile și schemele cinematice sau constructive a 2 030 de mecanisme, scheme care pot folosi constructorilor de mașini la rezolvarea problemelor complexe ce le stau în față.

Capitolul I cuprinde date asupra cinematicii și dinamicii mecanismelor. Începînd cu definirea noțiunilor de element și de cuplă cinematică, se prezintă apoi relațiile de determinare

a gradului de mobilitate al lanțurilor cinematice. Trecîndu-se la cinematica mecanismelor plane formate din bare, se tratează determinarea pozițiilor elementelor și construirea traiectoriilor diverselor puncte, diagramele cinematice, determinarea grafică a vitezelor și accelerațiilor. Apoi, în cadrul cinematicii mecanismelor spațiale, se studiază aceleași probleme. În final se dau și cîteva date privind dinamica mașinilor : forțele care acționează în mașini, calculul forțelor în cazul mecanismelor plane formate din bare, frecarea în cuplele cinematice, reducerea maselor și a forțelor, randamentul, neuniformitatea mersului mașinilor și calculul volantului, echilibrarea mecanismelor și a mașinilor.

Capitolul II, intitulat „Elemente, cuple cinematice și mecanisme formate din bare", ne prezintă 313 scheme asupra elementelor, cuplelor cinematice și mecanismelor plane și spațiale, terminînd cu grupa mecanismelor elicoidale.

Capitolul III are ca obiect roțile dințate ; după o scurtă prezentare a elementelor geometrice ale unei danturi, se indică cîteva dintre curbele folosite ca profil la prelucrarea roților dințate, precum și scheme ale diverselor tipuri de roți și angrenări existente, plane și spațiale. Apoi se dau scheme de construcție a mecanismelor cu roți dințate, atît în cazul transmisiilor simple, cît și a transmisiilor epiciclice, a reductoarelor planetare, a mecanismelor epiciclice reversibile și a mecanismelor de comandă a cutiilor de viteză planetare, a sistemelor de însumare și de compensare a mecanismelor de avans. Exemplele se încheie cu prezentarea de mecanisme întrebuințate la mașinile de ridicat, folosite pentru transmiterea mișcării elementelor cu axe mobile și mecanisme complexe.

Mecanismele cu camă sînt prezentate în capitolul IV. După o expunere generală a lor se indică modul de alegere a dimensiunilor mecanismelor cu camă și a metodelor de construire a profilelor camelor, în final analizîndu-se o serie de scheme cinematice.

Capitolul V se ocupă de transmisii prin fricțiune, variatoare de viteză și, în legătură cu acestea, de frîne ; se indică un număr mare de variante constructive.

În capitolul VI se studiază cuplajele, atît cele continue, cît și cele comandate (cu gheare, cu discuri sau conuri de fricțiune etc.) și cu autocomandă, dîndu-se de asemenea un număr mare de scheme constructive.

Capitolul VII se ocupă de mecanismele cu mișcare discontinuă a elementului condus, folosite mult în construcția mașinilor automate și semiautomate. Se cercetează mecanismele cu clichet, mecanismele de ancoraj, mecanismele cu cruce de Malta. Sînt prezentate apoi scheme ale mecanismelor cu opriri, în componența cărora intră lanțuri cinematice articulate, cu came și cu roți dințate.

În capitolul VIII se tratează mecanismele cu cursă reglabilă, mecanismele de compensare și egalizare, precum și diferite dispozitive cu scopuri variate.

Capitolul IX dă cîteva date teoretice și apoi scheme constructive pentru mecanismele cu ghidaj, mecanisme pentru transformarea mișcării de rotație în mișcare de translație sau de balans, mecanisme reversibile și mecanisme pentru executarea de cuplări și decuplări automate.

Lucrarea tratează și mecanismele pentru executarea operațiilor matematice (capitolul X), unde sînt descrise schemele sistemelor pentru trasarea diferitelor curbe, mecanisme de însumare și de înmulțire, mecanisme pentru realizarea funcțiilor trigonometrice, planimetre, integratoare, analizoare armonice etc.

Capitolul XI face obiectul mecanismelor și al mașinilor cu acțiune vibratorie ; analizîndu-se ecuațiile diferențiale specifice, se dau apoi scheme de vibratoare, de mașini și de mecanisme cu acțiune vibratorie, precum și mijloace de eliminare a vibrațiilor mecanismelor și mașinilor.

În capitolul XII se descriu exemple de legături elastice, indicîndu-se moduri de executare conform diferitelor cerințe.

În capitolul XIII sînt prezentate mecanismele de comandă pentru alimentarea automatelor cu material în formă de bară sau de bandă, pentru orientarea semifabricatelor, limitatoare, mecanisme folosite la alimentarea buncherelor, dispozitive de transportat și auxiliare, pentru controlul și sortarea fabricatelor, dozatoare pentru materiale solide și fluide. Toate acestea își găsesc o largă aplicativitate în industrie, în cadrul diverselor mașini automate sau linii tehnologice automate.

În ultimul capitol al cărții (capitolul XIV), autorii se ocupă de mecanismele cu transmisii hidraulice și pneumatice și cu aparatura de comandă corespunzătoare : arbori de distribuție și de comandă, relee de presiune, de timp, de viteză, regulatoare și scheme de comandă de la distanță.

Este folosit un material bibliografic bogat, cuprinzînd un număr de 68 de titluri din literatura sovietică de specialitate.

Lucrarea, făcînd o fundamentare teoretică și o sistematizare a diferitelor scheme cinematice de mecanisme care pot fi folosite în construcția de mașini, prezintă inginerilor, tehnologilor și proiectanților o sursă bogată de inspirație în vederea alegerii soluțiilor optime.

Radu C. Bogdan și *Tudor-Vasile Huncher*

С. Н. Кожевников, Динамика машин с упругими звеньями (Dinamica mașinilor cu elemente elastice), Издательство академии Наук Украинской ССР Киев, 1961, 160 p., 54 fig

Problemele de dinamică a mașinilor sînt în momentul de față de mare însemnătate, întrucît în industrie apar tot mai des agregate mecanice gigantice, ceea ce implică, în afara unor importante forțe tehnologice, existența unor forțe de inerție apreciabile. Aceste probleme devin încă și mai acute, cînd se trece la automatizarea operațiilor mașinii. În calculele care se fac pentru proiectarea mașinilor, cît și în exploatarea lor trebuie să se țină de asemenea cont de faptul că mecanismele componente au în general mai multe grade de mobilitate și că elementele lor sînt elastice. De aceea adevăratele legi de mișcare și încărcările trebuie determinate ținînd cont și de elasticitatea elementelor. În sensul acesta, lucrarea lui S. Kojevnikov tratează unele aspecte legate de dinamica mașinilor cu elemente elastice, cuprinzînd opt capitole.

Capitolul I, „Privire asupra funcționării sistemelor dinamice cu elemente elastice", trece în revistă principalele probleme ce vor fi tratate, precum și oamenii de știință care le-au studiat.

Capitolul II, „Tipuri de încărcări care acționează în procesul de funcționare al mașinilor grele", clasifică în primul rînd sarcinile tehnologice din mașinile metalurgice, care pot avea următoarele caractere : încărcări care cresc în timp după legi oarecare, încărcări care se schimbă după legi date, încărcări periodice, încărcări care au un caracter autooscilator, încărcări cu impulsuri.

Apoi sînt date noțiuni asupra momentului motor, ecuații de calcul, iar în partea a treia sînt prezentate bazele calculului dinamic al mașinilor grele.

Capitolul III, „Compunerea schemelor de calcul", în prima parte face considerații generale asupra metodelor de lucru. Apoi tratează reducerea maselor, reducerea forțelor și a momentului forțelor, reducerea rigidității, indicînd formulele necesare calculului. Se indică metode de determinare a lungimii reduse a arborilor elastici, precum și de reducere a masei lor.

În capitolul IV, „Dinamica proceselor tranzitorii", se stabilesc ecuațiile proceselor dinamice tranzitorii pentru mașinile ce au o înșiruire de mase în componența lor. Se face întîi acest lucru pentru cazul cînd se obține un grup de sisteme de ecuații caracteristice, al căror membru drept este o funcție de timp. Apoi se studiază ecuațiile caracteristice pentru un sistem omogen, care apare de obicei la mașinile din industria grea. În paragraful IV se revine asupra aceloraș i ecuații în cazul acționării cu un moment de-a lungul direcției de deplasare, cazul mașinilor de laminat. Întrucît procesele tranzitorii în mecanismele mașinilor grele depind de variațiile momentului forțelor datorită elasticității care acționează asupra organului de lucru, fapt ce se răsfrînge asupra electromotorului, se tratează interacțiunea dintre eforturile ce iau naștere în cuplele elastice ale mecanismelor și existența electromotorului. Legile de variație ale momentului motor în timp se pot stabili prin rezolvarea acestor ecuații. În încheierea capitolului se consideră și cazul cînd nu există o variație în timp a momentului forțelor datorită elasticității.

Capitolul V, „Rezolvarea generală a sistemului de ecuații diferențiale pentru momentul forțelor datorită elasticității în cazul sistemelor liniare", începe prin a indica modul general de rezolvare a sistemelor omogene de ecuații diferențiale care descriu variația momentului forțelor datorită elasticității și domeniile de aplicare ale acestor ecuații. Se tratează și cîteva probleme concrete :

— determinarea eforturilor în cuplele elastice care apar în procesul de îndepărtare a încărcăturilor cu caracter constant în cazul prezenței unor eforturi slabe în cupla elastică ;

— determinarea încărcărilor în elementele elastice ale suporturilor mobile ale blumingurilor și laminoarelor de degroșare pentru brame.

În continuare, autorul studiază rezolvarea ecuațiilor diferențiale în cazul acționării unui moment al forțelor exterioare în funcție de timp. Un interes deosebit în analizarea lucrului mașinilor grele îl constituie rezolvarea acestor ecuații diferențiale în cazul particular al neuniformității, în fazele tranzitorii apărînd un efect de încărcare suplimentară. Se presupune că asupra fiecărei mase a sistemului acționează momentul forțelor exterioare, care este funcție de timp.

Urmează apoi considerații asupra determinării efectului dinamic al sistemului de momente care variază liniar funcție de timp.

În încheierea capitolului se rezolvă sistemul de ecuații diferențiale neomogene pentru o transmisie liniară în cazul acționării cu un motor electric asincron.

Capitolul VI, „Dinamica mecanismelor care au transmisii elastice în lanțurile mecanice ramificate sau închise", reia ecuațiile diferențiale pentru cazul cînd definesc eforturile ce iau naștere în elementele unui lanț mecanic închis. Indicîndu-se genurile de mașini în care se întîlnesc asemenea lanțuri cinematice, se arată schemele lor simplificate și apoi modul în care se conduce calculul pentru determinarea influenței elasticității elementelor componente.

Următorul capitol, „Eforturile dinamice în sistemele cu jocuri în cuplele cinematice", tratează influența acestor jocuri din articulațiile mașinilor, care lucrează în regim tranzitoriu sau în procese nestabile. Se cercetează apoi comportarea sistemelor cu legături elastice ce au asemenea jocuri și comportarea sistemelor elastice cu mase dispersate.

În încheierea lucrării, în capitolul VII, „Folosirea mașinilor matematice cu acțiune continuă pentru cercetarea dinamică a liniilor de forță ale mașinilor grele", se tratează care sînt elementele unei instalații de modelare, necesară cercetării proceselor dinamice în mașini și principalele scheme electrice pentru amplificatoarele respective, blocurile electrice pentru stabilirea coeficienților proceselor continue și tranzitorii, scheme electrice pentru modelarea electromotorului. Ca exemplu se prezintă cercetarea pe model a modului de comportare a unei linii principale la mașinile de laminat.

Bibliografia cuprinde un număr de 45 de titluri.

Lucrarea lui S. Kojevnikov prezintă interes pentru munca științifică, indicînd liniile principale de studiu în cercetarea influenței elasticității elementelor mecanismelor componente ale mașinilor.

Tudor-Vasile Huncher

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория упругости (Teoria elasticității), ed. a 3-a, corectată și completată, Изд. Наука, Москва, 1965, 204. p.

Această lucrare reprezintă volumul VII dintr-un tratat, devenit clasic, de fizică teoretică; autorii, oameni de știință de renume mondial (primul dintre ei este laureat al Premiului Nobel), au izbutit să cuprindă acest capitol de mecanică teoretică în cadrul fizicii într-o formă deosebit de elegantă.

De obicei teoria elasticității este studiată de matematicieni, punîndu-se accentul în special pe problemele cu caracter matematic; prezentarea ei în cadrul fizicii teoretice este de aceea bine venită. Actualmente, legarea cîmpului de deformații de cîmpul termic și de cîmpul electromagnetic este din ce în ce mai importantă, studiul problemelor în ansamblul lor, sub forma ecuațiilor cuplate, fiind astfel o necesitate.

Într-o ediție anterioară, teoria elasticității era prezentată în cadrul unui volum de mecanică a mediilor continue deformabile; acum ea face obiectul unui volum separat, cuprinzînd și un capitol de teoria dislocațiilor.

Lucrarea este împărțită în cinci capitole.

Capitolul I cuprinde ecuațiile fundamentale ale teoriei elasticității (tensorii tensiune și deformație, termodinamica deformației, legea lui Hooke). Se deduc ecuațiile generale de echilibru și se dau soluții pentru unele probleme fundamentale. Menționăm luarea în considerare a proprietăților elastice ale cristalelor.

Studiul barelor și plăcilor este cuprins în capitolul II. Remarcăm torsiunea și încovoierea barelor drepte sau curbe, precum și unele probleme de stabilitate ale acestora. Placa plană este considerată atît supusă la încovoiere, cît și supusă la o stare de tensiune plană. În toate aceste cazuri se rezolvă diferite probleme la limită. Se dau și unele noțiuni cu privire la plăcile curbe subțiri.

În capitolul III se prezintă un studiu al undelor elastice. După ce se ocupă de propagarea undelor elastice într-un mediu izotrop și în cristale, autorii trec la cazul undelor de suprafață de tip Rayleigh. Se consideră de asemenea vibrațiile barelor și ale plăcilor, ca și unele tipuri de oscilații anarmonice.

Capitolul IV cuprinde unele rezultate din teoria dislocațiilor. Se pun astfel în evidență cîmpurile de deformație generate de dislocații, precum și deplasarea acestora. Cu această ocazie se fac și unele considerații privitoare la fisurile ce pot apărea în interiorul corpurilor elastice.

În capitolul V se prezintă noțiuni în legătură cu conductibilitatea termică și cu viscozitatea solidelor deformabile.

Cu toată concizia prezentării și cu toate că nu au putut fi cuprinse toate aspectele acestui capitol al mecanicii solidelor deformabile, lucrarea prezintă un real interes atît pentru fizicienii care vor să se informeze în această direcție, cît și pentru specialiști.

P. P. Teodorescu

M. T. HUBER, *Pisma* (Opere), vol. I, 1964, 176 p.; vol. II, 1956, 564 p.; vol. III, 1957, 504 p., vol. IV, 1954, 376 p.; vol. V, 1954, 358 p., Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Profesorul Maksymilian Tytus Huber (1872—1950) a fost unul din precursorii școlii poloneze de mecanică a solidelor deformabile și, poate, cel mai strălucit dintre aceștia. În afara unui tratat de teorie a elasticității de o certă valoare științifică, lui i se datoresc multe lucrări de cercetare. Este suficient să amintim faptul că numele lui este legat de una dintre cele mai importante teorii de rezistență a materialelor și de una dintre teoriile de plasticitate. De asemenea tot lui M. T. Huber i se datorește primul studiu concret de problemă la limită pentru un corp anizotrop (placă plană ortotropă). De aceea publicarea operei științifice a acestui renumit mecanician de către un comitet al Academiei poloneze de științe, în frunte cu profesorii W. Nowacki și W. Olszak, este bine venită.

Volumul I cuprinde o scurtă biografie a lui M. T. Huber și o trecere sistematică în revistă a activității lui în diferite domenii: teoria elasticității, teoria plăcilor, mecanică generală, construcții inginerești, construcții de beton armat, construcții masive etc. Se arată apoi modul în care a participat M. T. Huber la diferite congrese și conferințe și se dă o listă a lucrărilor pe care le-a publicat (17 cărți și 229 de articole).

În volumul al II-lea sînt cuprinse lucrările din domeniul teoriilor de rezistență a materialelor, teoriei elasticității, teoriei plăcilor și staticii sistemelor elastice. Menționăm astfel introducerea energiei de deformație drept criteriu de rezistență a materialelor, cu diferite aplicații, în special pentru probleme de contact. De asemenea se remarcă o lucrare interesantă privind barele curbe de secțiune eliptică. Problemele plăcilor ortotrope sînt tratate pe larg, luîndu-se în considerare atît ortotropia de material cît și plăcile plane cu nervuri sau alte tipuri de ortotropie constructivă. Se reproduc apoi lucrări de statică a grinzilor metalice alcătuite din profile laminate sau de statică a grinzilor metalice compuse. Prezintă interes, de asemenea, unele articole de flambaj al barelor drepte și de valoare a plăcilor plane. Sînt studiate și unele cazuri de flambaj lateral al barelor drepte.

Articolele de mecanică generală, construcții inginerești, construcții de beton armat, drumuri, construcții de mașini, construcții aeronautice sînt cuprinse în volumul al III-lea. În general, în acest volum se găsesc aplicații ale teoriei la diferite probleme puse de practică. Menționăm, de asemenea, preocupările lui M. T. Huber în legătură cu utilizarea unui limbaj științific corect și introducerea unor termeni de specialitate în limba polonă.

Ultimele două volume cuprind tratatul de teorie a elasticității scris de autor. Acesta reprezintă o lucrare interesantă, de sine stătătoare, rod atît al unei informații bibliografice bogate, cît și al unei deosebite activități de cercetare științifică; menționăm că aici sînt cuprinse cele mai importante probleme pe care le pune acest capitol al mecanicii solidelor deformabile, tratarea avînd un caracter profund original.

Fiecare volum este însoțit de un indice de nume și un indice de probleme.

Publicarea operelor lui M. T. Huber este deosebit de utilă, ele constituind un material prețios pentru cercetătorii din domeniul mecanicii solidelor deformabile.

P. P. Teodorescu

F 2557

3

TOMUL 22
1 9 6 6

1967 AUG

STUDII ȘI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. **E. CARAFOLI** — *redactor responsabil*
Acad. **D. DUMITRESCU** — *redactor responsabil adjunct*
Prof. **I. ANTON,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. **AVRAM CONSTANTIN,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Acad. **ȘT. BĂLAN,**
Prof. **GH. MANEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. **CR. MATEESCU,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Ing. **N. PATRAULEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. **N. TIPEI,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. **RADU VOINEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Conf. **RADU C. BOGDAN** — *secretar de redacție.*

In țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134–135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Redacția : **București,**

str. Const. Mille 15, tel. 14.89.07

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 22, nr. 3 1966

SUMAR

STUDII

Pag.

E. CARAFOLI şi C. BERBENTE, Determinarea presiunilor şi caracteristicilor aerodinamice ale aripilor delta în curent supersonic-hipersonic moderat 647

D. MATEESCU, Scurgerea supersonică în jurul aripilor poligonale subţiri şi de grosime simetrică 675

V. P. ŞIDLOVSKI, Despre formularea problemelor în teoria scurgerii, în jurul corpurilor încărcate electric, a unui curent de gaz ionizat foarte rarefiat 693

T. HACKER, Asupra problemei comenzilor optimale ale avioanelor cu decolare şi aterizare la verticală 699

N. TIPEI şi H. PASCAL, Efectele micro- şi macrogeometriei suprafeţelor asupra presiunii în lubrificaţia tridimensională. I. Suprafeţe plane 721

GH. VASILCA, Unele influenţe ale procesului de alunecare asupra suprafeţelor metalice. I. Suprafeţe stanate 731

T. OROVEANU, Asupra unei clase de scurgeri prin mediile poroase cu permeabilitate variabilă 745

I. ILIUC, Aspecte ale frecării în regim-limită studiate pe un cuplu cu trei contacte liniare 755

GH. SILAŞ şi H. J. KLEPP, Metoda aproximativă pentru studiul vibraţiilor neliniare conservative 767

V. PETCU, Mecanisme de rupere exacte şi aproximative în calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat 781

I. VLAD şi D. N. NESTORESCU, Studiul analitic al sistemelor de reglare extremală pentru avansul sapei în cazul forajului cu turbina la adîncimi mari 805

CHR. PELECUDI şi I. SAVA, Asupra analizei şi sintezei unitare a mecanismelor cu cuple superioare 831

I. SZÉKELY şi T. MUREŞAN, Regimuri de funcţionare ale mecanismelor cu elemente rigide multipoziţionale 853

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

D. PAVELESCU, Metode de calcul la uzură şi utilizarea în construcţia de maşini . . 861

RECENZII 879

St. cerc. mec. apl., Tom. 22, Nr. 3, P. 645—888, Bucureşti, 1966

1989
F
2557

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratlelltár
39/1967

DETERMINAREA PRESIUNILOR ŞI CARACTERISTICILOR AERODINAMICE ALE ARIPILOR DELTA ÎN CURENT SUPERSONIC-HIPERSONIC MODERAT[1])

de E. CARAFOLI şi C. BERBENTE

533

Se extinde o formulă unitară pentru distribuţia de presiuni dedusă anterior, care include atît expansiunea, cît şi compresiunea şi este valabilă pe întregul regim de viteze supersonic-hipersonic moderat, la cazul mişcărilor tridimensionale în jurul aripilor delta. Formulele obţinute sînt funcţii numai de viteza de perturbaţie axială în primă aproximaţie, care este determinată în teoria mişcărilor conice. Comparaţiile cu experienţa atît în ceea ce priveşte distribuţia de presiuni, cît şi caracteristicile aerodinamice ale aripilor delta cu borduri de atac supersonice confirmă rezultatele teoretice.

1. EFECTUL DERIVEI ASUPRA DISTRIBUŢIEI DE PRESIUNI DUPĂ UNDA DE ŞOC

Într-o lucrare anterioară [1] am stabilit, pe baza teoriei undelor de şoc oblice, următoarea formulă pentru calculul presiunilor pe profile aerodinamice în curent supersonic-hipersonic moderat:

$$\frac{C_p}{m^2 \sin^2 \tau} = \frac{\gamma+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2 + \frac{4}{K^2}} = \frac{\gamma+1}{2} + \frac{2}{K}\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 K^2}, \quad (1)$$

[1]) Publicată şi în „Rev. roum. sci. teh. — Mécanique Appliquée", **11**, *3* (1966) (în limba engleză).

unde C_p este coeficientul de presiune, τ derivaţia curentului, pozitivă în cazul compresiunii şi negativă în cazul expansiunii, γ raportul căldurilor specifice, iar

$$K = mM_\infty \sin\tau, \quad \left(m = \frac{M_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\right) \tag{2}$$

reprezintă parametrul de similaritate pentru întregul regim de viteze supersonic-hipersonic moderat. Am notat cu M_∞ numărul Mach al curentului neperturbat.

Formula (1) poate fi aplicată atît timp cît undele de şoc sînt ataşate la bordul de atac ascuţit al profilului.

În alte lucrări [2], [3] am utilizat această formulă pentru calculul caracteristicilor aerodinamice ale profilelor în curent supersonic-hipersonic moderat, rezultatele obţinute pe cale teoretică fiind în bună concordanţă cu datele experimentale.

În cele ce urmează ne propunem să arătăm că formula (1) poate fi extinsă la calculul distribuţiei de presiuni pe aripile de anvergură finită. În acest scop vom stabili mai întîi influenţa derivei asupra distribuţiei de presiuni în cazul aripii de anvergură infinită.

Să considerăm o placă plană indefinită, al cărei bord de atac AA face unghiul χ cu normala la direcţia curentului neperturbat U_∞ (fig. 1). Fie τ_n unghiul diedrului format de placă cu planul determinat de muchia AA şi direcţia curentului. Componentele vitezei U_∞ pe direcţia bordului de atac şi după normala la aceasta sînt, respectiv,

$$U_n = U_\infty \cos\chi, \quad U_l = U_\infty \sin\chi, \tag{3}$$

Dacă neglijăm frecarea, componenta laterală U_l nu are nici un efect, iar componenta normală U_n este deviată cu unghiul τ_n, legat prin relaţia

$$\tau_n \cos\chi = \tau \tag{4}$$

de *deviaţia* τ definită anterior (fig. 1).

Pe de altă parte, se poate vedea uşor că numărul Mach al componentei normale este

$$M_n = \frac{U_n}{a_\infty} = \frac{U_\infty}{a_\infty}\cos\chi = M_\infty \cos\chi. \tag{5}$$

Notînd

$$K = m_n M_n \sin\tau_n, \quad m_n = \frac{M_n}{\sqrt{M_n^2 - 1}}, \tag{6}$$

coeficientul de presiune C_{pn} raportat la viteza U_n va fi dat de formula (1)

$$\frac{C_{pn}}{m_n^2 \sin^2\tau_n} = \frac{\gamma+1}{2} + \frac{2}{K_n}\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 K_n^2}. \tag{7}$$

Să observăm acum că, pe de o parte, avem

$$C_{pn} = \frac{p - p_\infty}{p_\infty} \frac{2}{\gamma M_n^2} = \frac{C_p}{\cos^2 \chi}, \tag{8}$$

iar pe de altă parte expresiile (6) devin succesiv

$$m_n^2 = \frac{M_n^2}{M_n^2 - 1} = \frac{M_\infty^2 \cos^2 \chi}{M_\infty^2 \cos^2 \chi - 1} = \frac{M_\infty^2}{M_\infty^2 - 1} \frac{1}{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \chi}{M_\infty^2 - 1}} = \frac{m^2}{\lambda^2}, \tag{9}$$

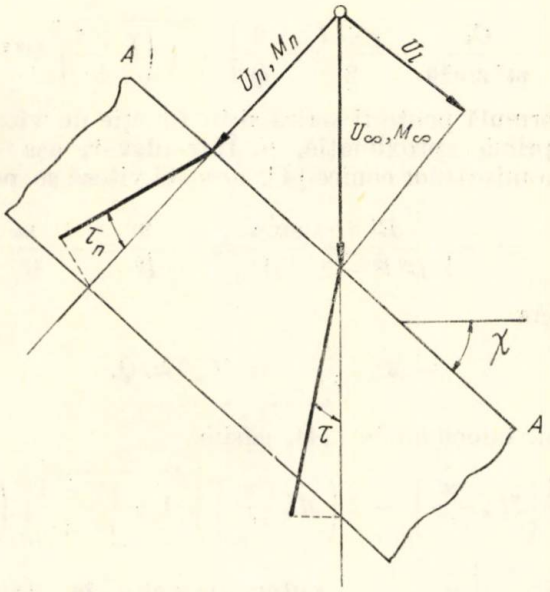


Fig. 1

$$K_n = \frac{m}{\lambda} M_\infty \sin \tau = \frac{K}{\lambda}, \quad (\sin \tau \approx \tau_n \cos \chi \approx \cos \chi \sin \tau_n), \tag{9'}$$

unde am pus

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \chi}{B^2}} = \frac{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{Bl} \quad (B = \sqrt{M_\infty^2 - 1},\ l = \operatorname{ctg} \chi). \tag{10}$$

Cu aceste notații vom putea scrie formula coeficientului de presiune C_p raportat la viteza U_∞ în funcție de τ:

$$\frac{\lambda^2 C_p}{m^2 \sin^2 \tau} = \frac{\gamma + 1}{2} + \frac{2\lambda}{K} \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 \frac{K^2}{\lambda^2}}. \tag{11}$$

Observăm că totul se petrece ca şi cum în locul deviaţiei τ intervine o *deviaţie echivalentă* θ, avînd expresia

$$\sin\theta \approx \theta = \frac{\tau}{\lambda} \approx \frac{\sin\tau}{\lambda}, \tag{12}$$

cu ajutorul căreia se poate defini un *parametru de similaritate echivalent*,

$$Q = M_\infty m \sin\theta = M_\infty m \frac{\sin\tau}{\lambda} = \frac{K}{\lambda}, \tag{13}$$

astfel încît formula (11) devine

$$\frac{C_p}{m^2\sin^2\theta} = \frac{\gamma+1}{2} + \frac{2}{Q}\sqrt{1+\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 Q^2}. \tag{14}$$

Această formulă poate fi scrisă şi în funcţie de viteza de perturbaţie axială, în primă aproximaţie, u. Într-adevăr, aşa cum se ştie din teoria generală a mişcărilor conice [4], această viteză se poate scrie astfel:

$$\frac{u}{U_\infty} = -\frac{Bl}{\sqrt{B^2l^2-1}}\frac{\sin\tau}{B} \approx -\frac{\theta}{B} = -\frac{m}{M_\infty}\theta, \tag{15}$$

de unde deducem

$$-M_\infty^2\frac{u}{U_\infty} = m M_\infty \theta \approx Q. \tag{16}$$

Cu acestea, înlocuind în (14), găsim

$$M_\infty^2 C_p = \frac{\gamma+1}{2}\left(M_\infty^2\frac{u}{U_\infty}\right)^2 - 2\left(M_\infty^2\frac{u}{U_\infty}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2\left(M_\infty^2\frac{u}{U_\infty}\right)^2}. \tag{17}$$

Dacă $\left|M_\infty^2\frac{u}{U_\infty}\right| < \frac{4}{\gamma+1}$, putem dezvolta în serie radicalul, iar expresia (17) devine

$$M_\infty^2 C_p = -2\left(M_\infty^2\frac{u}{U_\infty}\right) + \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\left(M_\infty^2\frac{u}{U_\infty}\right)^2 - \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2\left(M_\infty^2\frac{u}{U_\infty}\right)^3, \tag{18}$$

$$C_p = -2\frac{u}{U_\infty} + \frac{\gamma+1}{2}M_\infty^2\left(\frac{u}{U_\infty}\right)^2 - \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 M_\infty^4\left(\frac{u}{U_\infty}\right)^3. \tag{18'}$$

Vom presupune că C_p este o funcţie numai de u şi că pierderile de presiune prin undele de şoc sînt neglijabile. Aceste formule vor fi utilizate în aceste presupuneri pentru calculul caracteristicilor aripilor delta. Într-adevăr, pe o *aripă delta cu borduri de atac supersonice* avînd o incidenţă constantă, formulele de mai sus se aplică întocmai pe porţiunea din afara conului Mach. Situaţia din interiorul conului Mach va fi examinată ulterior.

2. APLICAȚII LA ARIPI CONICE CU BORDURI SUPERSONICE

Să extindem formula (17) la o aripă conică cu borduri supersonice a cărei incidență variază după o funcție omogenă de ordinul zero (fig. 2). În punctul P de pe generatoarea OP, care reprezintă muchia unui diedru elementar, curentul suferă deviația $\mathrm{d}\tau^*$ și trece în P' pe generatoarea infinit vecină OP'. *Deviația echivalentă elementară*, $\mathrm{d}\theta^*$ va fi dată de formula (12)

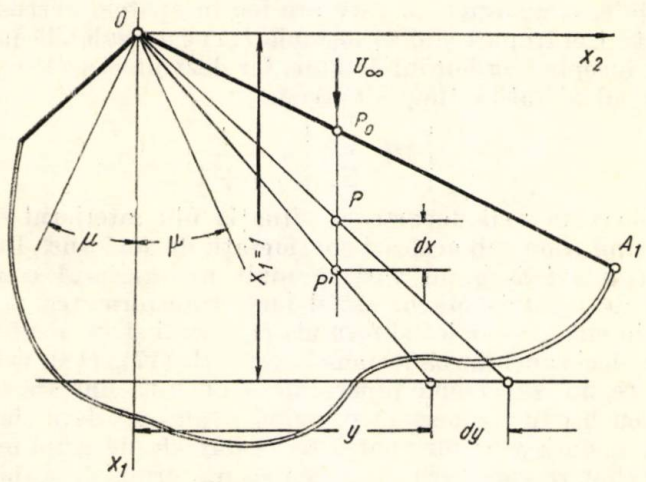


Fig. 2

$$\mathrm{d}\theta^* = \frac{\mathrm{d}\tau^*}{\lambda^*}, \quad \left(\lambda^* = \frac{\sqrt{B^2y^2-1}}{By}, \; y = \frac{x_2}{x_1}\right), \tag{19}$$

unde τ^* și λ^* variază în funcție de y.

Deviația echivalentă totală rezultă ușor, integrînd de la P_0 la P:

$$\theta^* = \theta_0^* + \int_{\tau_0^*}^{\tau^*} \frac{\mathrm{d}\tau^*}{\lambda^*} = \theta_0^* - \int_{y}^{1} \frac{\mathrm{d}\tau^*}{\mathrm{d}y} \frac{By\,\mathrm{d}y}{\sqrt{B^2y^2-1}}. \tag{20}$$

Pe de altă parte, din teoria mișcărilor conice [4] avem

$$\frac{\mathrm{d}u}{U_\infty} = -\frac{\mathrm{d}\tau^*}{B} \frac{By}{\sqrt{B^2y^2-1}} = -\frac{m}{M_\infty}\mathrm{d}\theta^*, \quad \frac{u}{U_\infty} = -\frac{m}{M_\infty}\theta^*, \tag{21}$$

deci u se formează în același fel cu θ^*, iar formulele (17) și (18) sînt perfect valabile și în cazul aripilor conice cu borduri supersonice.

Să considerăm acum cazul unei mișcări conice de ordinul n, pentru care viteza de perturbație axială u a fost dedusă în lucrări anterioare [4]. La bordul de atac are loc o transformare prin unda de șoc sau de

expansiune pentru care formula (17) este local valabilă, deoarece în punctele de pe acest bord condiţiile curentului sînt similare cu cele în care a fost stabilită această formulă.

Datorită variaţiei de pantă în lungul bordului de atac, unda va avea o intensitate variabilă şi, în consecinţă, mişcarea va fi influenţată de conurile Mach de pe linia bordului.

Dacă presupunem că pierderile datorite undei de şoc de la intrare sînt neglijabile, transformarea care are loc în spatele acestei unde poate fi considerată izentropică şi deci formula (17) este valabilă în orice punct de pe aripă începînd cu bordul de atac, iar dezvoltarea (18) poate fi utilizată pentru calcule atîta timp cît avem

$$\left| M_\infty^2 \frac{u}{U_\infty} \right| < \frac{4}{\gamma + 1}. \tag{22}$$

Să observăm mai departe că situaţia din interiorul conului Mach din vîrful aripii cade sub aceleaşi consideraţii de mai sus. De fapt, viteza de perturbaţie axială u nu variază mult în interiorul conului faţă de valoarea sa de pe linia Mach, astfel încît transformarea poate fi considerată tot timpul izentropică şi formula (17) va fi şi în acest caz valabilă.

Putem deci conchide că formulele generale (17), (18), valabile pentru mişcări în regim supersonic-hipersonic moderat, sînt aplicabile pentru orice aripă cu borduri supersonice, avînd avantajul de a depinde numai de viteza u, dedusă anterior pentru toate formele de aripi uzuale.

În continuare vom verifica în ce măsură formulele stabilite concordă cu datele experimentale.

3. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE ALE DISTRIBUŢIEI DE PRESIUNI PE ARIPI DELTA CU BORDURI SUPERSONICE

În vederea comparaţiei formulelor teoretice obţinute cu rezultatele experienţelor efectuate de diverşi autori, vom da mai multe diagrame care indică o bună concordanţă între teorie şi experienţă.

O observaţie importantă trebuie făcută în legătură cu *stratul-limită* care schimbă panta locală pe aripă. De aceea trebuie efectuate corecţii care să ţină seama de aceste efecte datorite frecării. Dacă notăm cu δ grosimea stratului-limită, se poate defini o *grosime de înlocuire* δ^* cu ajutorul expresiei

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho_y u_y}{\rho U}\right) dy, \tag{23}$$

unde u_y este viteza în stratul-limită, iar U viteza la frontiera acestuia (fig. 3).

Se poate arăta că pe o placă plană paralelă cu curentul δ^* are expresia

$$\delta^* = 1.72\,(1 + 0{,}277\,M^2)\,x\left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{-1/2}, \tag{24}$$

unde M este numărul Mach al curentului general, iar ν viscozitatea cinematică. Rezultă o pantă suplimentară $\Delta\tau$ datorită stratului:

$$\Delta\tau = \frac{d\delta^*}{dx} = 0{,}86\,(1 + 0{,}277\,M^2)\left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{-1/2}. \qquad (25)$$

Pentru aplicații la aripi, M va reprezenta numărul Mach după compresiune sau expansiune departe în aval, unde grosimea stratului este

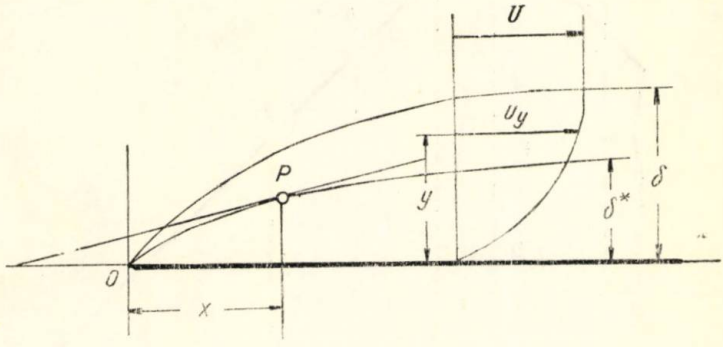


Fig. 3

constantă (teoretic la infinit). Venind apoi în sens invers spre bordul de atac, panta va crește din ce în ce, astfel încît într-un punct la distanța x de bord va avea valoarea dată de (25).

Această schemă corespunde unei aripi cu pantă constantă, dar ea poate fi utilizată pentru găsirea pantei suplimentare pe o aripă de o

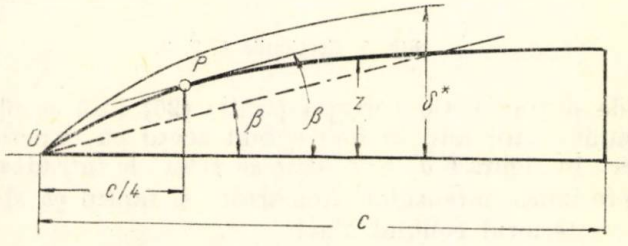


Fig. 4

formă oarecare. În acest scop vom presupune că într-o secțiune oarecare paralelă cu U_∞ (fig. 4) panta stratului-limită nu diferă mult față de cazul unei plăci avînd incidența β egală cu panta tangentei în punctul P situat la un sfert din coarda locală c față de bord. Această aproximație nu poate introduce erori mari, cu atît mai mult cu cît este vorba de termeni corectivi.

Aripa delta cu pantă constantă, $M_\infty = 7.35$ (fig. 5). Am considerat o aripă delta de grosime simetrică, avînd deriva bordurilor de 45° și o

pantă constantă egală cu 5.4°. Se reproduc presiunile măsurate în diverse secţiuni (fig. 5), la diverse incidenţe ∞ şi un număr Mach mare, $M_\infty = 7.35$.

La un asemenea număr Mach, stratul-limită modifică substanţial

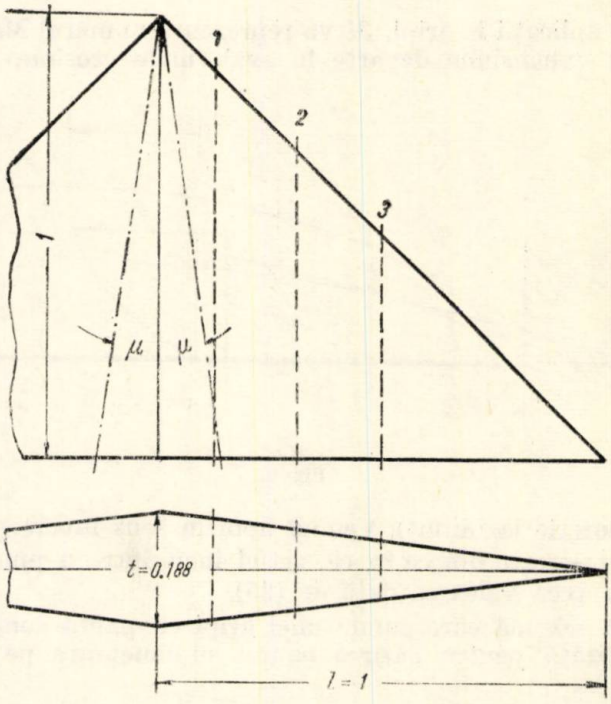


Fig. 5. Secţiunile 1, 2, 3.

coeficientul de presiune. Cu corecţia pantei (25) însă se obţine variaţia reală a presiunii, care este în foarte bun acord cu experienţa [5], aşa cum se observă în figura 6 *a*, *b*, *c*, care se referă la intradosul aripii unde are loc compresiunea curentului. Remarcăm şi faptul că sînt confirmate aspectele din interiorul conului Mach.

În figura 7 *a*, *b*, *c*, diagramele similare pentru extradosul aripii indică o concordanţă bună cu experienţa în cazul compresiunii la unghiul $\alpha_c = 5.4° - 3°$ (fig. 7 *a*) şi abateri în cazul expansiunii (fig. 7 *b*, *c*) care cresc cu unghiul de expansiune $\alpha_e = \alpha - 5.4°$. Acest lucru este datorat stratului-limită, care se îngroaşă foarte mult în acest caz, aşa cum arată fotografiile luate de diverşi experimentatori [5]. Într-adevăr, considerînd, spre exemplu, panta stratului-limită de 1,75 ori mai mare faţă de valoarea dată de formula (27), concordanţa cu experienţa se realizează din nou (fig. 7 *b*, *c*, linia continuă, subţire).

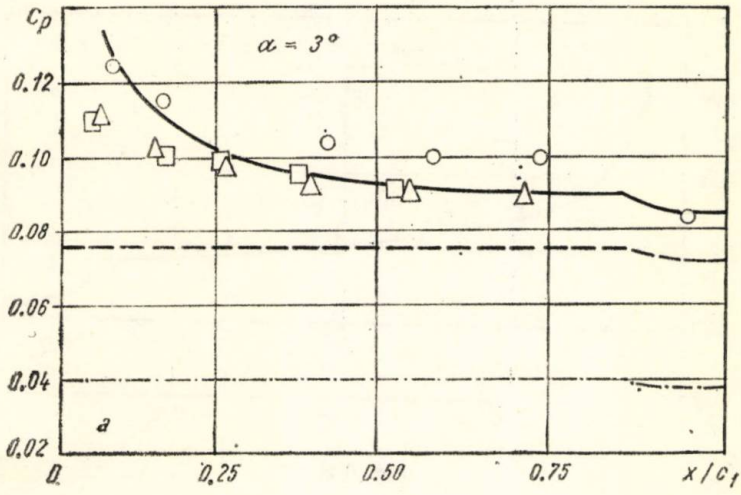

c_p
$\alpha = 3°$
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
a
0
0.25
0.50
0.75
x/c_1

Fig. 6 *a*.

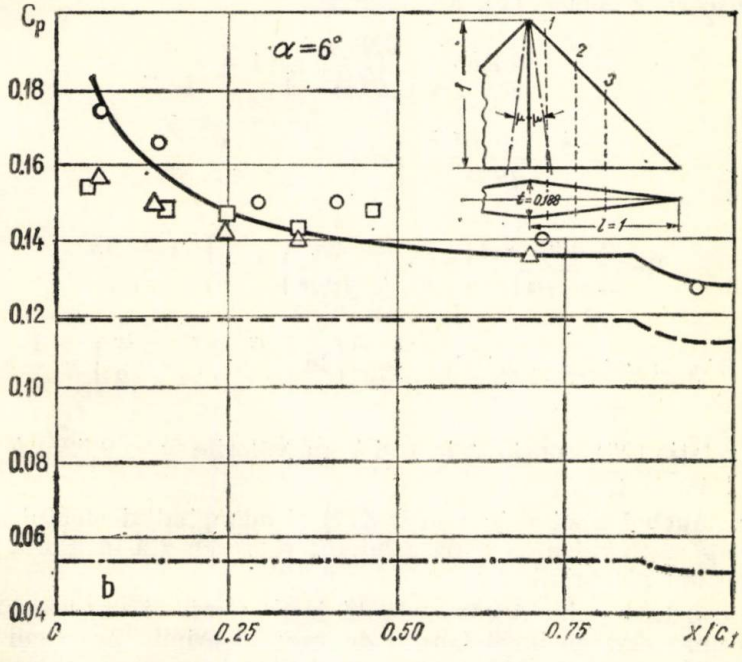

C_p
$\alpha = 6°$
0.18
0.16
0.14
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
b
1
2
3
$t = 0.188$
$l = 1$
0
0.25
0.50
0.75
x/c_1

Fig. 6 *b*.

Aripa delta cu directrice parabolică, $M_\infty = 4$. Am considerat o aripă de grosime simetrică a cărei suprafaţă conică este generată de o directrice

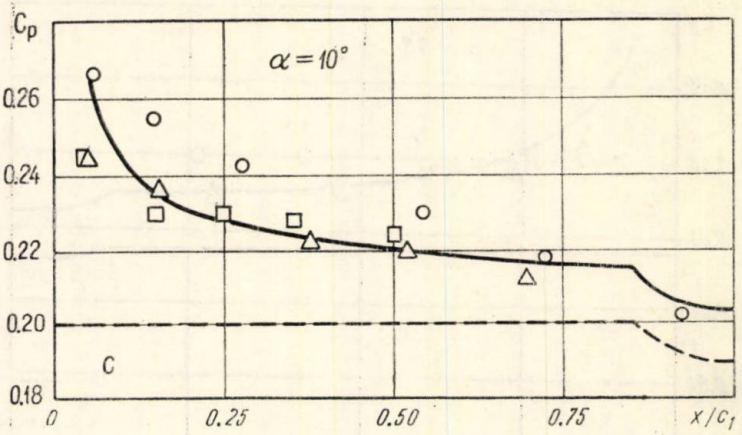


Fig. 6 *c*.

parabolică (fig. 8). În acest caz, viteza axială pe aripă u, dedusă din teoria mişcărilor conice [4], are expresia

$$\frac{u}{U_\infty} = -\operatorname{Re}\frac{2}{\pi}\frac{0{,}95\,\tau_0\,l}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}\left[1 + \frac{a}{B^2 l^2} + \frac{b\,(2 - B^2 l^2)}{B^4 l^4}\right]\cos^{-1}\sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2 (l^2 - y^2)}} +$$

$$+ \operatorname{Re}\frac{2}{\pi}\frac{0{,}95\,\tau_0\,l}{B^2 l^2}\left\{2\left(a + \frac{2b}{B^2 l^2}\right)\operatorname{ch}^{-1}\sqrt{\frac{1 + By}{2By}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{1 - B^2 y^2}\left[\left(a + (2 + B^2 y^2)\,\frac{b}{B^2 l^2}\right)\left(\ln\sqrt{\frac{l^2 - y^2}{y^2}} - i\,\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\,b\right]\right\}. \quad (26)$$

În relaţia (26), constantele a şi b au valorile $a = 0{,}525$, $b = 0{,}575$, iar $B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$.

Introducînd apoi u în relaţia (17) şi adăugînd şi efectul stratului-limită, se găseşte valoarea reală a lui C_p, reprezentată în figura 9 pentru patru secţiuni ale aripii.

Se constată o bună concordanţă între teorie şi experienţă [6], cu excepţia punctelor de lîngă bordul de fugă al aripii, unde curentul expandează brusc, producînd o scădere de presiune care se transmite în amonte prin stratul-limită.

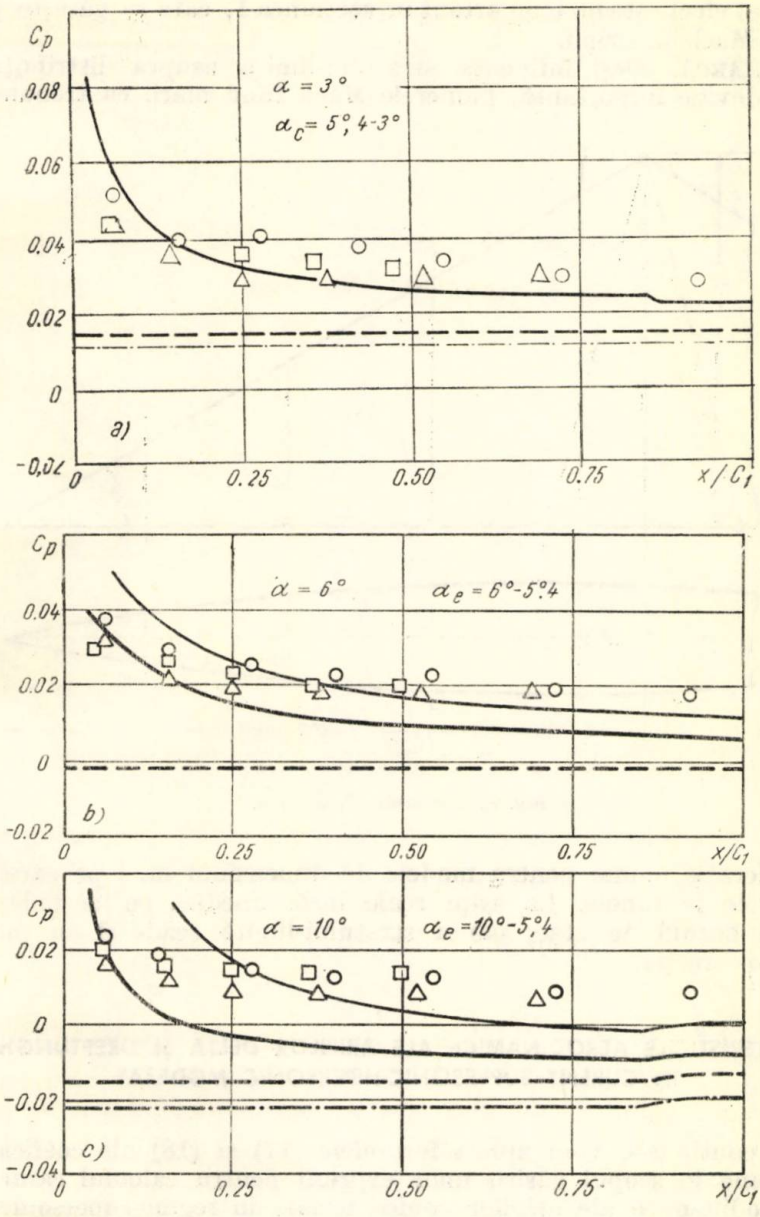


Fig. 7 *a*, *b*, *c*.

— — — Formula prezentă
——— Formula prezentă cu efectul stratului limită
—·— Teoria lineară
O △ □ Experienţă în secţiunile 1, 2, 3
Suprafaţă superioară, $M_\infty = 7.35$

Acest efect este mai important în secţiunea 1, care se găseşte parţial în conul Mach al aripii.

REMARCĂ. Deşi influenţa stratului-limită asupra distribuţiei de presiuni devine importantă, numerele Mach fiind mari, ea trebuie luată

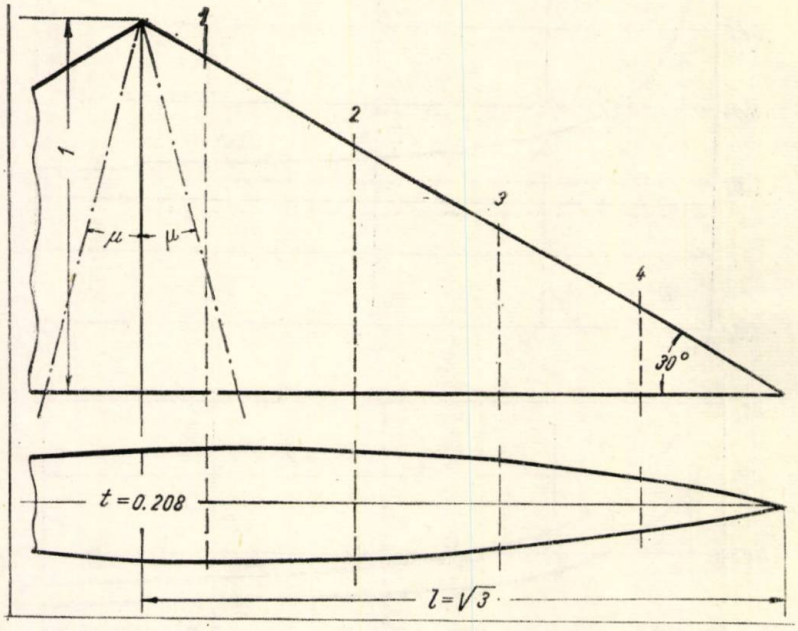


Fig. 8. Secţiunile 1, 2, 3, 4.

în consideraţie numai pentru modele de dimensiuni mici pe care se fac experienţele în tunele. La aripi reale însă, imediat ce ne îndepărtăm puţin de bordul de atac, panta stratului-limită scade şi nu mai este necesară o corecţie.

4. CARACTERISTICILE AERODINAMICE ALE ARIPILOR DELTA ŞI DREPTUNGHIULARE ÎN CURENT SUPERSONIC-HIPERSONIC MODERAT

În continuare vom aplica formulele (17) şi (18) ale coeficientului de presiune în scopul găsirii unor expresii pentru calculul caracteristicilor aerodinamice ale aripilor conice uzuale în regim supersonic-hipersonic moderat.

Să considerăm o aripă groasă pe care delimităm un element de suprafaţă $dx_1\, dx_2$ (fig. 10).

Pe acest element se exercită presiunea $(p - p_\infty)$, al cărei coeficient C_p este dat de (17) sau, pentru calculul pe un contur continuu, de (18).

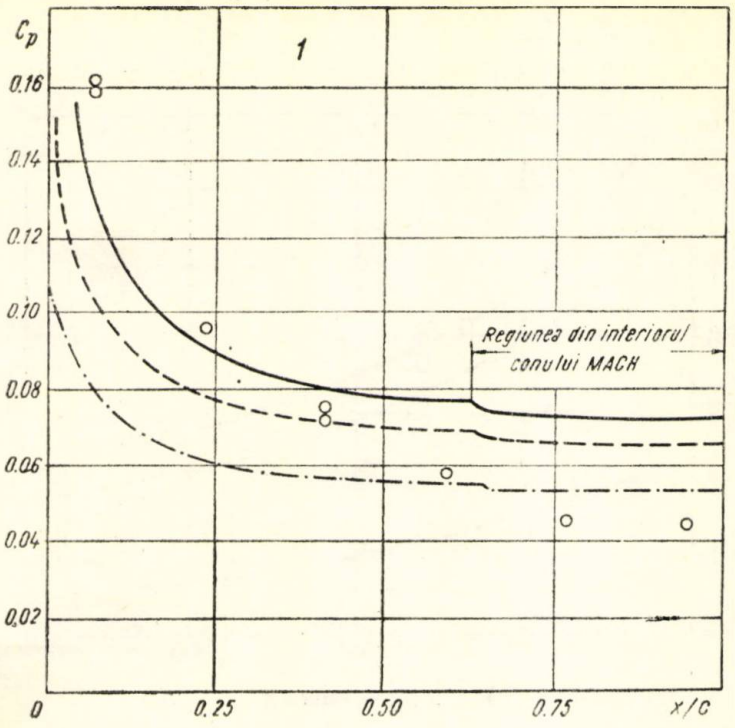


Fig. 9 *a*. Secțiunea 1.

– – – Formula prezentă
——— Formula prezentă cu efectul stratului limită
—·— Teoria liniară
O Experiențe ; $M_\infty = 4$

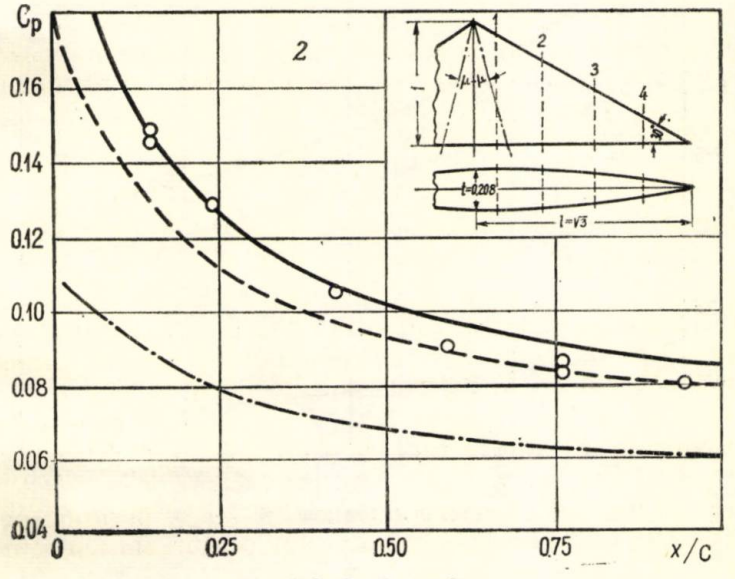


Fig. 9 *b*. Secțiunea 2.

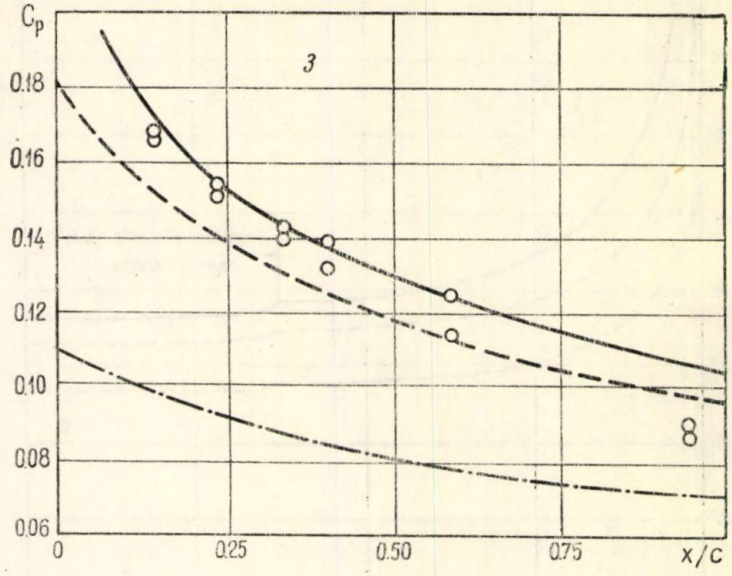


Fig. 9 *c*. Secțiunea 3.

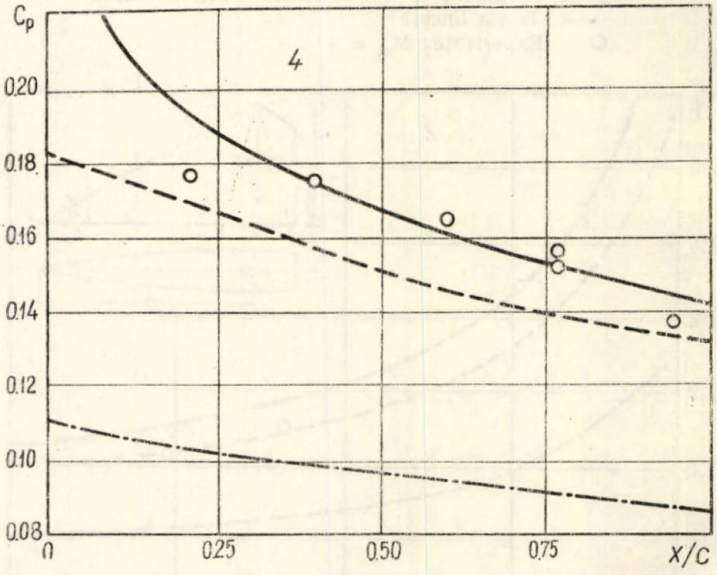


Fig. 9 *d*. Secțiunea 4.

În expresiile caracteristicilor intervin termeni în viteza axială u, u^2, u^3 și viteza verticală w. Pentru cazul mișcărilor omogene de ordinul n de care ne ocupăm, vom scrie

$$w = \sum_{m=1}^{n-1} x_1^{m-1} w_{m-1,\,q}\, y^q\,; \quad u^k = \left(\sum_{n=1}^{n-1} x_1^{n-1}\, u_{n-1} \right)^k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{27}$$

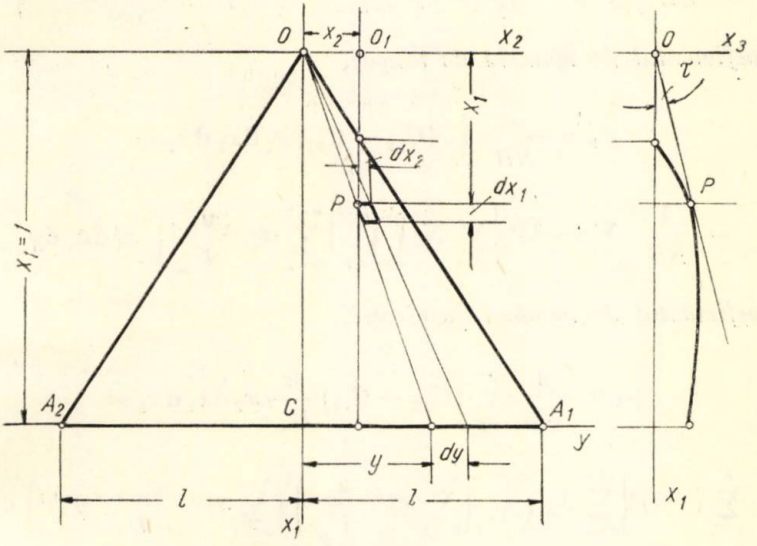


Fig. 10

Mai departe, notînd cu C_{p1} și C_{p2} coeficienții de presiune pe extradosul și intradosul aripii, vom putea scrie succesiv:

Coeficientul de portanță,

$$C_l = \frac{1}{S} \int_S (C_{p2} - C_{p1})\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 =$$

$$= \frac{1}{S} \sum_{p=1}^{2} (-1)^p \left\{ \sum_{k=1}^{3} N_k \int_0^1 \int_{-l}^{l} \left(\sum_{n=1}^{n-1} x_1^{n-1} \frac{u_{n-1}}{U_\infty} \right)^k x_1\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}y \right\}; \tag{28}$$

Coeficientul de rezistență,

$$C_d = \frac{1}{S} \int_S (C_{p2} - C_{p1}) \frac{w}{U_\infty}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 =$$

$$= \frac{1}{S} \sum_{p=1}^{2} (-1)^p \left\{ \sum_{k=1}^{3} N_k \int_0^1 \int_{-l}^{l} \left(\sum_{n=1}^{n-1} x_1^{n-1} \frac{u_{n-1}}{U_\infty} \right)^k \left(\sum_{m=1}^{n-1} x_1^m \frac{w_{m-1,\,q}}{U_\infty} \right) y^q\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}y \right\}; \tag{29}$$

Coeficientul de moment de ruliu,

$$\mu_1 = \frac{1}{SH}\int_S (C_{p2} - C_{p1})\, x_2\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 =$$

$$= \frac{1}{SH}\sum_{p=1}^{2}(-1)^p \left\{\sum_{k=1}^{3} N_k \int_0^1 \int_{-l}^{l} \left(\sum_{n=1}^{n-1} x_1^{n-1}\, \frac{u_{n-1}}{U_\infty}\right)^k x_1^2\, \mathrm{d}x_1\, y\, \mathrm{d}y\right\}; \qquad (30)$$

Coeficientul de moment de tangaj,

$$\mu_2 = \frac{1}{SH}\int_S (C_{p2} - C_{p1})\, x_1\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 =$$

$$= \frac{1}{SH}\sum_{p=1}^{2}(-1)^p \left\{\sum_{k=1}^{3} N_k \int_0^1 \int_{-l}^{l} \left(\sum_{n=1}^{n-1} x_1^{n-1}\, \frac{u_{n-1}}{U_\infty}\right)^k x_1^2\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}y\right\}; \qquad (31)$$

Coeficientul de moment de giraţie,

$$\mu_3 = \frac{1}{SH}\int_S (C_{p2} - C_{p1})\, \frac{w}{U_\infty}\, x_2\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 =$$

$$= \frac{1}{SH}\sum_{p=1}^{2}(-1)^p \left\{\sum_{k=1}^{3} N_k \int_0^1 \int_{-l}^{l} \left(\sum_{n=1}^{n-1} x_1^{n-1}\, \frac{u_{n-1}}{U_\infty}\right)^k \left(\sum_{m=1}^{n-1} x_1^{m+1}\, \frac{w_{m-1,\,q}}{U_\infty}\, y^{q+1}\right) \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y\right\}, \qquad (32)$$

unde $p = 1$, 2 corespunde intradosului şi, respectiv, extradosului, S este suprafaţa aripii, H este o înălţime de referinţă, iar N_k sînt coeficienţii expresiei (18 *b*)

$$N_1 = -2,\ N_2 = \frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2,\ N_3 = -\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 M_\infty^4. \qquad (33)$$

Aplicaţii la aripa delta cu pantă constantă. Am considerat o aripă în formă de pană, cu panta constantă de ambele părţi ale planului de simetrie $x_1 o x_2$. Pe axa aripii, la $x_1 = 1$, grosimea totală ε este egală chiar cu panta (fig. 11).

Dacă planul de simetrie $x_1 o x_2$ are incidenţa α, atunci deviaţia curentului este

$$\tau = \frac{\varepsilon}{2} \pm \alpha, \qquad (34)$$

unde semnul (+) corespunde intradosului, iar semnul (−) extradosului. Pe porţiunea din afara conului Mach, viteza axială de perturbaţie este constantă şi se poate utiliza formula exactă (17).

În interiorul conului Mach vom utiliza dezvoltarea (18), luînd pentru viteza axială expresia determinată anterior [4]:

$$\frac{u}{U_\infty} = \mathrm{Re}\left[-\frac{2\tau Bl}{\pi B\sqrt{B^2 l^2 - 1}}\left(\cos^{-1}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-By)}{2B(l-y)}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cos^{-1}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+By)}{2B(l+y)}}\right] = \mathrm{Re}\left[-\frac{2\tau Bl}{\pi B\sqrt{B^2 l^2 - 1}} \cos^{-1}\sqrt{\frac{1-B^2y^2}{B^2(l^2-y^2)}}\right]. \tag{35}$$

Efectuînd calculele, după cîteva simplificări se obţin succesiv caracteristicile:

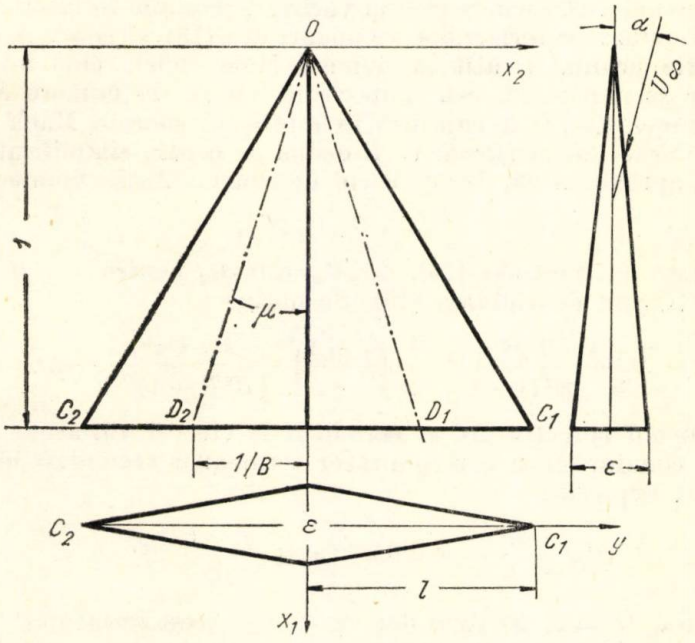


Fig. 11

Coeficientul de portanţă are următoarea expresie:

$$C_l = \frac{l}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}\left[(\varepsilon + 2\alpha) R_1 - (\varepsilon - 2\alpha) R_2\right] - \frac{4\alpha}{B}\left(\frac{Bl}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}} - 1\right) +$$

$$+ \frac{(\gamma+1) M_\infty^2 \alpha \varepsilon l^2}{B^2 l^2 - 1} - \Delta C_l, \tag{36}$$

unde am pus

$$R_1 = \sqrt{1+\left(\frac{\gamma+1}{8}\right)^2 \frac{M_\infty^4(\varepsilon+2\alpha)^2 l^2}{B^2 l^2 - 1}}, \quad R_2 = \sqrt{1+\left(\frac{\gamma+1}{8}\right)^2 \frac{M_\infty^4(\varepsilon-2\alpha)^2 l^2}{B^2 l^2 - 1}}, \tag{37}$$

$$\Delta C_l = \alpha(\gamma+1) M_\infty^2 \left[\varepsilon a_2 + \frac{\gamma+1}{32} M_\infty^2 (4\alpha^2 + 3\varepsilon^2) a_3\right], \tag{37'}$$

$$a_k = \frac{2l^{k-1}}{45 B (B^2 l^2 - 1)^{k/2}} \left[19 - 3\left(\frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{1}{Bl}\right)^k - 16\left(\frac{2}{\pi}\cos^{-1}\sqrt{\frac{3}{4B^2 l^2 - 1}}\right)^k\right] \quad (k = 2,\ 3). \tag{37''}$$

Termenul ΔC_l include efectul variaţiei presiunii în interiorul conului Mach corespunzător termenilor secundari din (18) u^2 şi u^3. Acest termen este practic neglijabil, atît la numere Mach mici, cînd întreg efectul termenilor secundari nu este important, cît şi la numere Mach mari, cînd porţiunea de aripă cuprinsă în interiorul conului Mach este mică.

Coeficientul de rezistenţă va fi dedus pe o cale simplificată, aplicînd o formulă aproximativă, dar suficient de exactă. Astfel vom scrie

$$C_d = C_{d0} + \alpha C_l, \tag{38}$$

unde C_l este dat mai sus (36), iar C_{d0} este C_d pentru $\alpha = 0$ şi poate fi calculat utilizînd dezvoltarea (18). Se obţine

$$C_{d0} = \frac{\varepsilon^2}{B} + \frac{\gamma+1}{8}\frac{M_\infty^2 l^2 \varepsilon^3}{B^2 l^2 - 1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{8}\right)^2 \frac{M_\infty^4 l^3 \varepsilon^4}{(B^2 l^2 - 1)^{3/2}} - \Delta C_d + C_{dl}, \tag{39}$$

unde termenul corectiv ΔC_{d0}, care include efectul variaţiei presiunii în interiorul conului Mach corespunzător termenilor secundari u^2 şi u^3, are următoarea expresie:

$$\Delta C_{d0} = \frac{\varepsilon^3}{8}(\gamma+1) M_\infty^2 \left(a_2 + \frac{\gamma+1}{16} M_\infty^2 \varepsilon a_3\right), \tag{40}$$

coeficienţii a_k ($k = 2,\ 3$) fiind daţi de (37''). Acest termen este neglijabil, aşa cum s-a arătat mai sus. Termenul C_{dl} este datorat expandării bruşte a curentului la bordul de ieşire. Această depresiune este dificil de calculat, dar se poate pune sub forma

$$C_{pl} = -\frac{2\nu}{\gamma M_\infty^2}, \tag{41}$$

unde coeficientul ν este aproape egal cu unitatea. În aceste condiţii avem

$$C_{dl} = \frac{2\varepsilon\nu}{\gamma M_\infty^2}. \tag{42}$$

Aripa delta dublu conică. Să considerăm o aripă delta dublu conică avînd o grosime maximă relativă ε în vîrful G (fig. 12). Pe porțiunea OC_1 GC_2 a aripii, viteza de perturbație axială este u_0, corespunzătoare mișcării conice cu vîrful în O și are expresia (35). Pe suprafața GC_1C_2,

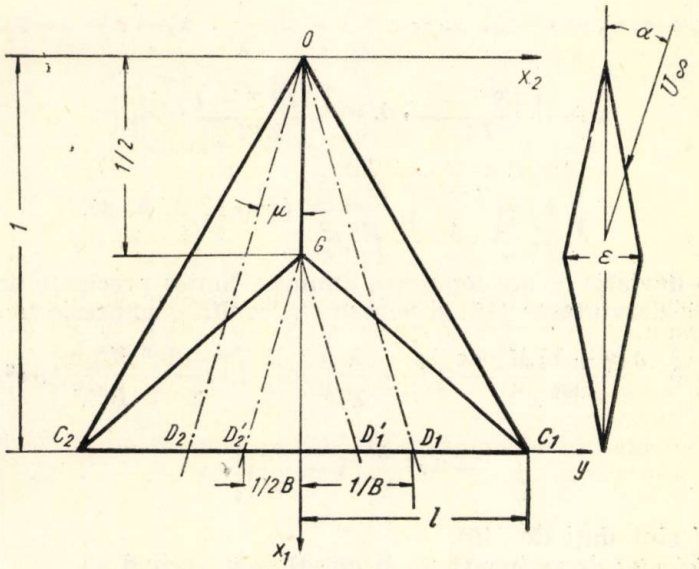


Fig. 12

viteza de perturbație axială se obține adăugînd la u_0 componenta u_G datorită mișcării conice cu vîrful în G:

$$u_G = \mathrm{Re}\left[-\frac{2\tau_G}{\pi B} \frac{2Bl}{\sqrt{4B^2l^2-1}} \cos^{-1} \sqrt{\frac{1-4B^2y^2}{4B^2(l^2-y^2)}} \right]. \tag{43}$$

Deviația curentului pentru prima și a doua mișcare conică sînt, respectiv,

$$\tau_0 = \varepsilon \pm \alpha; \quad \tau_G = -2\varepsilon, \tag{44}$$

unde semnul (+) corespunde intradosului, iar semnul (−) extradosului aripii.

Pe porțiunea de aripă situată în afara conului Mach folosim formula închisă (17), iar în interiorul conului folosim dezvoltarea (18). Vom considera contribuțiile fiecărei porțiuni plane pe care presiunea este constantă dacă nu ținem cont de efectele conurilor Mach, pe care le vom include, ca mai sus, în termeni separați. Cu aceste considerații și neglijînd efectul variației presiunii în conurile Mach corespunzător termenilor secundari u^2 și u^3, obținem succesiv caracteristicile:

Coeficientul de portanţă are expresia

$$C_l = \frac{1}{\lambda B}\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k-1}\alpha_k R_k - \frac{4\alpha}{B}\left(\frac{1}{\lambda}-1\right) - \frac{2(\gamma+1)M_\infty^2\,\alpha\varepsilon}{B^2 y^2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda'}\right), \quad (45)$$

unde

$$\alpha_1 = \varepsilon+\alpha,\ \alpha_2 = \varepsilon-\alpha,\ \alpha_3 = \varepsilon+\alpha-2\varepsilon\frac{\lambda}{\lambda'},\ \alpha_4 = \varepsilon-\alpha-2\varepsilon\frac{\lambda}{\lambda'}, \quad (46)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{B^2l^2-1}}{Bl},\ \lambda' = \frac{\sqrt{4B^2l^2-1}}{2Bl},\ R_k =$$

$$= \sqrt{1+\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2\frac{M_\infty^4\,\alpha_k^2}{B^2\lambda^2}}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4). \quad (46')$$

Dacă deviaţia τ nu depăşeşte anumite limite precizate anterior, se poate aplica dezvoltarea (18) şi pentru C_l rezultă o expresie mai simplă:

$$C_l = \frac{4\alpha}{B} + \frac{2(\gamma+1)M_\infty^2\,\alpha\varepsilon}{B^2\lambda^2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda'}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2\frac{M_\infty^4\,\alpha}{B^3\lambda^3}\left[3\varepsilon^2+\alpha^2-\right.$$

$$\left.-6\varepsilon^2\frac{\lambda}{\lambda'}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda'}\right)\right], \quad (47)$$

unde λ, λ' sînt daţi de (46).

Coeficientul de rezistenţă va fi determinat scriind că

$$C_d = C_{d0} + \alpha C_l, \quad (48)$$

unde C_l este dat de formulele (45) sau (47), iar coeficientul de rezistenţă la $\alpha=0$ (C_{d0}) va fi calculat cu ajutorul formulei (29). Se obţine în acest fel

$$C_{d0} = \frac{8\varepsilon^2}{3\pi B\lambda}\left[\frac{\lambda}{\lambda'}\left(\pi-\cos^{-1}\frac{1}{2Bl}\right)+\cos^{-1}\frac{1}{Bl}\right] +$$

$$+\frac{2(\gamma+1)M_\infty^2\,\varepsilon^3}{B^2\lambda\lambda'}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda'}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2\frac{M_\infty^4\,\varepsilon^4}{B^3\lambda^2\lambda'}\left(3-\frac{6\lambda}{\lambda'}+\frac{4\lambda^2}{\lambda'^2}\right). \quad (49)$$

Verificări experimentale. În figurile 13 şi 14 sînt date comparativ curbele teoretice ale coeficienţilor C_l şi C_d şi valorile experimentale ale acestora pentru o aripă delta dublu conică la $M_\infty = 6{,}9$ [7].

Pentru coeficientul de rezistenţă a fost adăugat şi efectul frecării, estimat de experimentatori la valoarea $C_F = 0.0028$.

De asemenea a fost adăugat efectul stratului-limită, care este mai important la unghiuri mici de incidenţă.

Din diagrame se constată o foarte bună concordanţă între teorie şi experienţă pînă la incidenţe destul de mari ($\alpha = 16°$). Rezultă că, aşa cum am presupus, viteza de perturbaţie axială, obţinută în primă aproxi-

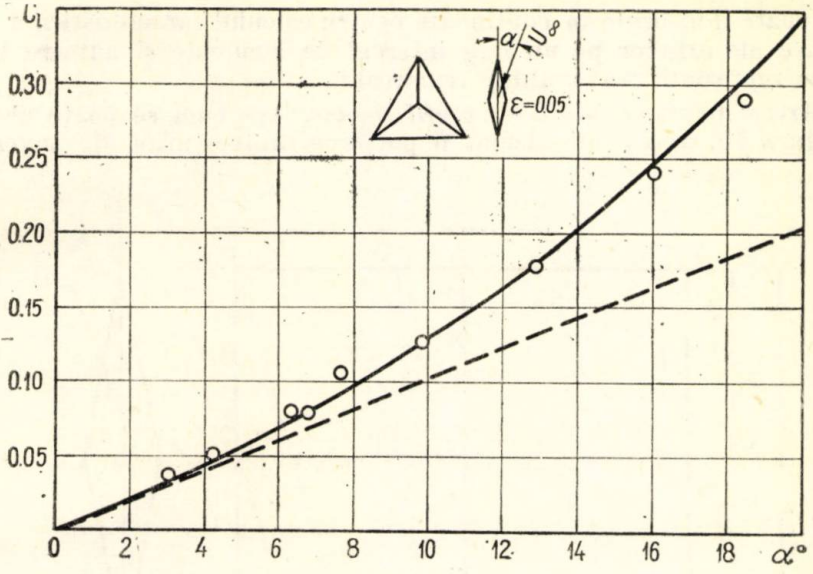


Fig. 13

——— Formula prezentă
– – – Teoria liniară
o Experienţă ; $M_\infty = 6.9$

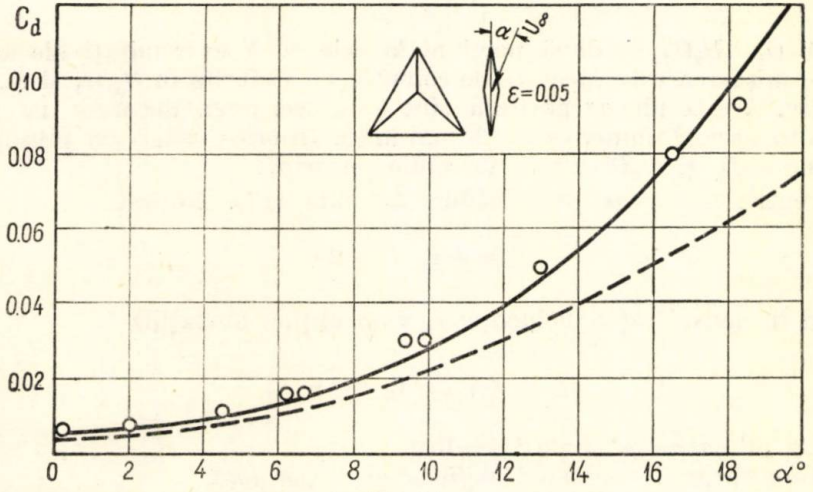


Fig. 14

——— Formula prezentă cu frecare
– – – Teoria liniară
o Experienţă ; $M_\infty = 6.9$

maţie poate fi utilizată în continuare pentru calculul caracteristicilor aerodinamice ale aripilor pe un larg interval de incidenţe şi numere Mach, ceea ce reprezintă un avantaj remarcabil.

Aripa dreptunghiulară cu profil rombic. Aşa cum se poate observa din figura 15, avem de calculat o porţiune dintr-o aripă de anvergură

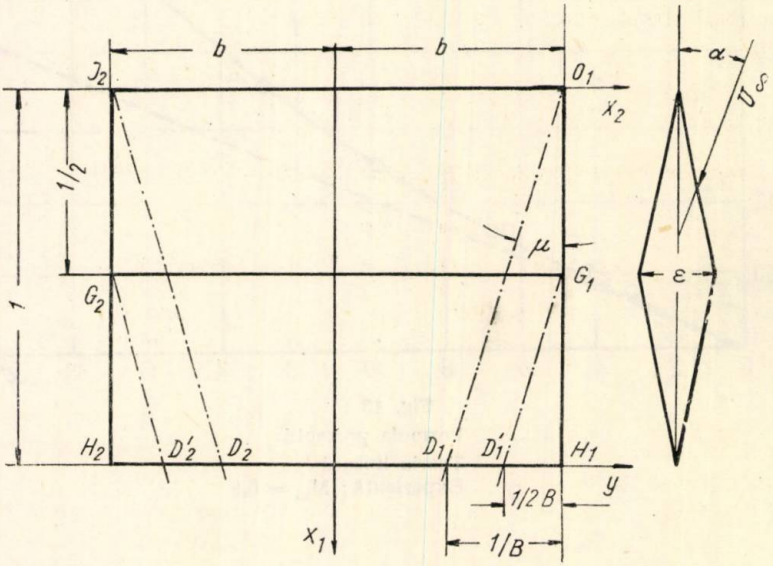


Fig. 15

infinită $O_1D_1D_2O_2$ şi două porţiuni la cele două extremităţi ale aripii, pe care mişcarea este afectată de conurile cu vîrfurile în O_1, G_1 şi O_2, G_2, respectiv. Aceste ultime porţiuni sînt de obicei mici, deoarece ne interesează în special numerele Mach mai mari. În orice caz, vom presupune că liniile O_1D_1 şi O_2D_2 nu se întretaie pe aripă.

Pentru acurateţe vom utiliza formula (17). Notînd

$$\gamma = \pm\varepsilon, \quad \Gamma = 2\varepsilon \tag{50}$$

şi luînd în consideraţie incidenţa α, vom obţine deviaţiile

$$\tau_1 = \gamma + \alpha, \quad \tau_2 = \gamma - \alpha, \tag{51}$$

respectiv pe extrados şi pe intrados.

Vom obţine în acest fel *coeficientul de portanţă*,

$$C_l = \frac{2}{B}\left[(\varepsilon+\alpha)R_1 - (\varepsilon-\alpha)R_2\right] - \frac{\alpha}{bB^2}, \tag{52}$$

unde am pus

$$R_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 \frac{M_\infty^4 (\varepsilon+\alpha)^2}{B^2}}, \quad R_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 \frac{M_\infty^4 (\varepsilon-\alpha)^2}{B^2}}. \tag{53}$$

Dacă în locul formulei (17) se utilizează dezvoltarea (18) a lui C_p, coeficientul de portanţă capătă expresia

$$C_l = \frac{4\alpha}{B}\left(1 - \frac{1}{4bB}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2 \frac{M_\infty^4 \alpha (\alpha^2 + 3\varepsilon^2)}{B^3}. \tag{54}$$

Coeficientul de rezistenţă poate fi pus sub forma simplificată

$$C_d = C_{d0} + \alpha C_l, \tag{55}$$

unde C_l este dat de (52) sau (54), iar C_{d0} are expresia

$$C_{d0} = \frac{4\varepsilon^2}{B}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 \frac{M_\infty^4 \varepsilon^2}{B^2}\right]. \tag{56}$$

În expresiile de mai sus ale coeficienţilor C_l şi C_{d0} am neglijat efectul variaţiei presiunii în interiorul conului Mach, corespunzător termenilor u^2 şi u^3, ceea ce este posibul, aşa cum s-a arătat mai sus.

Verificări experimentale. Formulele de mai sus au fost comparate cu experienţele făcute cu o aripă dreptunghiulară cu profilul rombic la $M_\infty = 6.9$ [7], la incidenţe mari, condiţii în care se impune aplicarea formulei pentru coeficientul de presiune C_p în curent supersonic-hipersonic moderat.

Din figurile 16 şi 17, care reprezintă respectiv variaţia coeficienţilor C_l şi C_d cu incidenţa α, se observă o bună concordanţă între teorie şi experienţă pînă la unghiuri mari de atac ($\alpha = 16°$). La valoarea lui C_d calculată a fost adăugat coeficientul de frecare ($C_F = 0{,}0028$) şi efectul stratului-limită, care introduce un adaos de presiune $C_{pl} \approx 0{,}0010$, corecţii care se resimt numai la incidenţe mici.

Aripa delta cu profil dublu parabolic. Dacă notăm cu grosimea maximă relativă, cota Z a unui punct P de pe suprafaţa aripii este dată de relaţia

$$Z = 2\frac{\varepsilon}{l}(1 - x_1)(x_1 l \mp x_2), \tag{57}$$

unde semnul $(-)$ se referă la bordul drept, iar semnul $(+)$ la bordul stîng al aripii (fig. 18). Dacă aripa are şi o incidenţă α, atunci viteza verticală w pe extrados va avea expresia

$$w = \left(-\alpha + \frac{\partial Z}{\partial x_1}\right) U_\infty = (-\alpha + 2\varepsilon) U_\infty - \frac{2\varepsilon}{l}(2x_1 l \mp x_2) U_\infty, \tag{58}$$

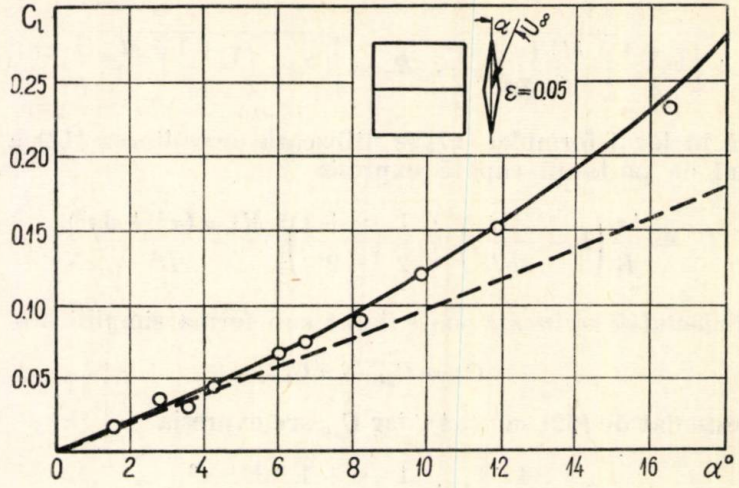


Fig. 16

——— Formula prezentă
– – – Teoria liniară
o Experienţă ; $M_\infty = 6.9$

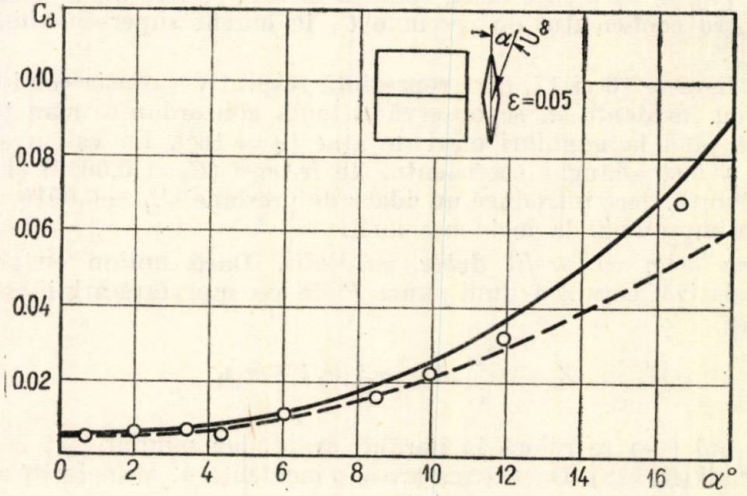


Fig. 17

——— Formula prezentă cu frecare
– – – Teoria liniară
o Experienţă ; $M_\infty = 6.9$

deci mişcarea poate fi descompusă în două:

— o scurgere de ordinul $n = 1$, avînd

$$w_\infty = (2\varepsilon \pm \alpha)\, U_\infty, \tag{59}$$

unde semnul (+) se referă la extrados, iar semnul (—) la intrados;

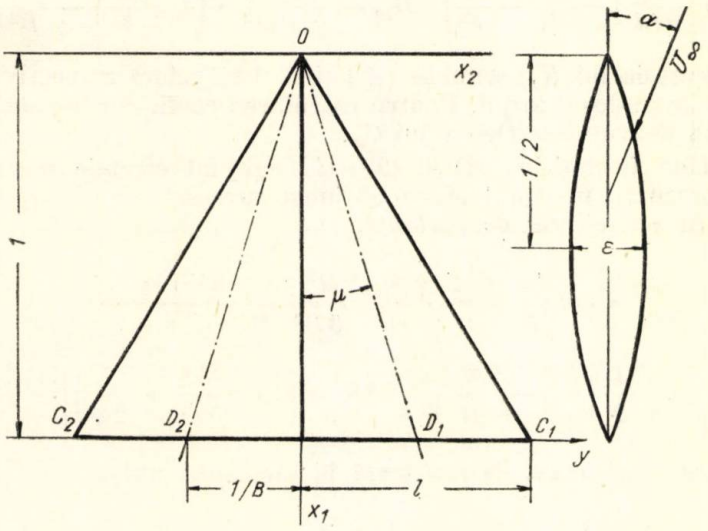


Fig. 18

— o scurgere de ordinul $n = 2$, avînd

$$\frac{w}{x_1} = -\frac{2\varepsilon}{l}(2l \mp y)\, U_\infty, \quad \left(w_{10} = -4\varepsilon U_\infty,\ w_{01} = \pm 2\frac{\varepsilon}{l} U_\infty\right), \tag{60}$$

unde semnul (—) se referă la porţiunea aripii cu $x_1 > 0$, iar semnul (+) la porţiunea aripii cu $x_1 < 0$.

Funcţiile $\mathcal{U}_0$ şi $\mathcal{U}_1$ corespunzînd vitezelor de perturbaţie axială pentru mişcarea de ordinul $n = 1$ şi respectiv, $n = 2$, au următoarele expresii pe aripă:

$$\mathcal{U}_0 = K_{10} \cos^{-1} \sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2 (l^2 - y^2)}}, \tag{61}$$

$$\mathcal{U}_1 = K_{20} \cos^{-1} \sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2 (l^2 - y^2)}} + K_{21}\, y \cos^{-1} \sqrt{\frac{l^2 (1 - B^2 y^2)}{l^2 - y^2}} +$$

$$+ D_{20} \sqrt{\frac{1 - B^2 y^2}{B^2}}. \tag{61'}$$

unde constantele au fost determinate anterior [4] şi au expresiile

$$K_{10} = -\frac{2(2\varepsilon \pm \alpha) U_\infty}{\pi B \lambda}, \quad K_{20} = \frac{4\varepsilon U_\infty}{\pi B}\left(\frac{3}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^3}\right), \tag{62}$$

$$K_{21} = \frac{2\varepsilon U_\infty}{\pi B l}\left(-\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^3}\right), \quad D_{20} = \frac{4\varepsilon U_\infty}{\pi B l \lambda^2}, \quad \left(\lambda = \sqrt{1 - \frac{1}{B^2 l^2}}\right). \tag{62'}$$

În expresia lui K_{10} semnele (+) şi (−) se referă respectiv la intradosul şi la extradosul aripii. Pentru calcularea coeficienţilor aerodinamici vom utiliza dezvoltarea (18) a lui C_p.

Aplicînd formulele (28) şi (29) şi neglijînd efectele secundare ale variaţiei presiunii în conul Mach obţinem succesiv:

Pentru *coeficientul de portanţă*,

$$C_l = \frac{4\alpha}{B} + \frac{2(\gamma+1) M_\infty^2 (3 - 4\lambda^2) \alpha\varepsilon}{3B^2 \lambda^4} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2 \frac{M_\infty^4 \alpha}{B^3 \lambda^3}\left[\alpha^2 + \varepsilon^2\left(10 - \frac{11}{\lambda^2} + \frac{7}{2\lambda^4}\right)\right]. \tag{63}$$

Pentru *coeficientul de rezistenţă* la incidenţă nulă,

$$C_{d0} = \frac{8\varepsilon^2}{3B}\left[\left(1 + \frac{1}{2\lambda^2}\right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{2}{\pi\lambda}\cos^{-1}\frac{1}{Bl} - \frac{1}{\pi B l}\right] +$$

$$+ \frac{2(\gamma+1) M_\infty^2 \varepsilon^3}{15 B^2 \lambda^2}\left(3 - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(\frac{5}{\lambda^2} - 6\right) + \frac{2}{15}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 \frac{M_\infty^4 \varepsilon^4}{B^3 \lambda^3}\left(3 -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(\frac{17}{\lambda^4} - \frac{48}{\lambda^2} + 40\right). \tag{64}$$

În concluzie, formulele teoretice sînt în bună concordanţă cu experienţele pe întregul regim de viteze supersonic-hipersonic moderat atît în ceea ce priveşte distribuţia de presiuni, cît şi caracteristicile aerodinamice. În cazul distribuţiei de presiuni sînt confirmate şi aspectele din interiorul conului Mach al aripii.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *On a unitary formula for compression-expansion* in *supersonic-hypersonic flow*, Revue de Mécanique Appliquée, **VII**, *5* (1962).
2. E. Carafoli, C. Berbente, *Aerodynamic characteristics of profiles in supersonic-hypersonic flow in the case of neglecting the pressure losses due to shock waves*, Revue de Mécanique Appliquée, **VIII**, *5* (1963).

3. E. Carafoli, C. Berbente, *Determination of the characteristics of profiles in supersonic-hypersonic flow, considering the pressure losses through shock waves*, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de Mécanique Appliquée, **IX**, *5* (1964).
4. E. Carafoli, *High-Speed Aerodynamics*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1956.
5. G. P. Wilby, *An experimental and theoretical investigation at high Mach numbers*, FFA Report 91, 1962.
6. M. Landahl, G. Drougge, B. Beverly, *Theoretical and experimental investigation of second-order supersonic wingbody interference*, JAS, *9* (1960).
7. C. H. McLellan, *Exploratory wind-tunnel investigation of wings and bodies at* $M_\infty = 6.9$, JAS, **18** (1951).

SCURGEREA SUPERSONICĂ ÎN JURUL ARIPILOR POLIGONALE SUBȚIRI ȘI DE GROSIME SIMETRICĂ [1)]

de DAN MATEESCU

Lucrarea are drept scop studiul aripilor poligonale subțiri și de grosime simetrică în regim supersonic prin utilizarea metodei analogiei hidrodinamice elaborată de prof. E. Carafoli pentru studiul aripilor în scurgeri conice și conice de ordin superior. După ce se stabilesc expresiile generale ale vitezei axiale de perturbație pentru cazul cînd viteza verticală este dată pe aripă sub forma unei sume de polinoame omogene de diferite ordine, ca exemplu de calcul se determină distribuția de presiuni și portanța unor aripi poligonale subțiri de formă uzuală, avînd incidența dată sub forma unor polinoame omogene de ordin unu și doi.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

În această lucrare ne propunem ca, utilizînd metoda analogiei hidrodinamice elaborată de prof. E. Carafoli pentru studiul aripilor în scurgeri conice și conice de ordin superior [1], [2], [3], [4], să determinăm distribuția de presiuni în vederea stabilirii caracteristicilor aerodinamice pentru aripile poligonale subțiri și de grosime simetrică în regim supersonic.

Să considerăm pentru aceasta o aripă poligonală ca cea din figura 1, avînd o formă generală din care pot fi deduse prin particularizare diferitele forme de aripi utilizate în aviația supersonică. Să mai considerăm

[1)] Publicată și în „Rev. roum sci. teh. — Mécanique Appliquée", **11**, *3* (1966) (în limba engleză).

ST. CERC. MEC. APL., TOM 22 NR. 3 P. 675–692 BUCUREȘTI 1966

de asemenea că pe extradosul acestei aripi viteza verticală w (deci și incidența sau panta aripii) este dată sub forma generală a unei sume de polinoame omogene de diferite ordine

$$w = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{n-1} (\pm 1)^k \, w_{n-k-1,\,k} \, x_1^{n-k-1} \, x_2^k, \tag{1}$$

unde semnul plus (+) se referă la $x_2 > 0$, iar semnul minus (−) la $x_2 < 0$, presupunînd astfel că incidența sau panta aripii sînt distribuite simetric față de axa Ox_1.

Ca și în cazul aripii unghiulare, vom avea pe întreg planul Ox_1x_2 din afara aripii, datorită simetriei sau respectiv antisimetriei scurgerii față de acest plan, condițiile

$$w = 0, \tag{2}$$

pentru cazul aripii poligonale de grosime simetrică, sau

$$u = 0, \tag{3}$$

pentru cazul aripii poligonale subțiri.

Ținînd seama de aceste condiții care trebuie satisfăcute pe aripă și în afara ei, vom putea considera în ipoteza micilor perturbații că scurgerea în jurul unei aripi poligonale de grosime simetrică avînd forma din figura 1 poate fi obținută prin suprapunerea următoarelor mișcări în jurul unor aripi triunghiulare fictive de grosime simetrică:

a) Mișcarea, corespunzătoare conului Mach generat de vîrful O, în jurul aripii triunghiulare fictive $OA_1'A_2'$, pe extradosul căreia viteza verticală w este dată de relația (1).

b) Mișcarea, corespunzătoare conului Mach generat de vîrful F, în jurul aripii triunghiulare fictive FC_1C_2, pe extradosul căreia viteza verticală w^F este

$$w^F = -w = -\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{n-1} (\pm 1)^k w_{n-k-1,\,k} \, (X_1+1)^{n-k-1} \, x_2^k =$$

$$= -\sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} (\pm 1)^k \, X_1^{m-k-1} \, x_2^k W_{m-k-1,\,k} = -\sum_{m=1}^{N} X_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} (\pm 1)^k \, W_{m-k-1,\,k} \, Y^k, \tag{4}$$

unde X_1, x_2 sînt coordonatele unui sistem de referință avînd originea în F, definit prin relațiile

$$X_1 = x_1 - 1, \quad x_2 = x_2, \quad \left(Y = \frac{x_2}{X_1} = \frac{x_2}{x_1 - 1} \right) \tag{5}$$

unde am notat

$$W_{m-k-1,\,k} = \sum_{n=m}^{N} C_{n-k-1}^{m-k-1} \, w_{n-k-1,\,k}. \tag{6}$$

c) Mișcarea, corespunzătoare conului Mach generat din vîrful O_1, în jurul aripii triunghiulare fictive $O_1A_1'C_1$, pe extradosul căreia viteza

verticală w^I este

$$w^I = -w = -\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1} w_{n-k-1,\,k}\,(\xi_1+h)^{n-k-1}\,(\xi_2+b)^k = \\ = -\sum_{m=1}^{N}\sum_{\varkappa=0}^{m-1}\beta_{m-\varkappa-1,\,\varkappa}\,\xi_1^{m-\varkappa-1}\xi_2^{\varkappa} = -\sum_{m=1}^{N}\xi_1^{m-1}\sum_{\varkappa=0}^{m-1}\beta_{m-\varkappa-1,\,\varkappa}\,\eta^{\varkappa}, \tag{7}$$

unde ξ_1, ξ_2, sînt coordonatele unui sistem de referinţă avînd originea în O_1, definit prin relaţiile

$$\xi_1 = x_1 - h, \quad \xi_2 = x_2 - b, \quad \left(\eta = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{x_2-b}{x_1-h}\right), \tag{8}$$

unde am notat prin $\beta_{m-\varkappa-1,\,\varkappa}$

$$\beta_{m-\varkappa-1,\,\varkappa} = \sum_{n=m}^{N}\sum_{k=\varkappa}^{n-1} C_{n-k-1}^{m-\varkappa-1}\,C_k^{\varkappa}\,h^{n-k-(m-\varkappa)}\,b^{k-\varkappa}\,w_{n-k-1,\,k}\,. \tag{9}$$

d) Mişcarea, corespunzătoare conului Mach generat de vîrful O_2, în jurul aripii triunghiulare fictive $O_2A_2'C_2$, pe extradosul căreia viteza verticală este $w^{II} = -w$; datorită simetriei aripii, această mişcare este simetrică faţă de axa Ox_1 cu mişcarea precedentă corespunzătoare vîrfului O_1, astfel încît nu va mai trebui tratată în mod special.

Vom observa acum că toate mişcările de mai sus reprezintă de fapt superpoziţia unor scurgeri conice de diferite ordine, începînd de la scurgerea conică de ordin unu şi pînă la cea de ordin N, care vor putea fi tratate prin metodele cunoscute [4].

În mod asemănător, ţinînd seama de condiţiile (1) şi (3), scurgerea supersonică în jurul unei aripi poligonale subţiri avînd forma din figura 1 şi definită prin condiţia (1) poate fi considerată ca suprapunerea următoarelor mişcări în jurul unor aripi unghiulare fictive:

a) Mişcarea, corespunzătoare conului Mach din vîrful O, în jurul aripii triunghiulare subţiri $OA_1'A_2'$, definită prin viteza verticală w dată de relaţia (1). Viteza axială de perturbaţie pentru această mişcare, pe care o vom nota prin u^O, va putea fi dedusă prin metodele cunoscute [4];

b) Mişcarea în jurul aripii fictive FC_1C_2, considerată ca fiind continuată printr-o placă plană, fără incidenţă, pînă în afara conului Mach-din vîrful F, în ipoteza că acest con intersectează aripa reală. Această mişcare este caracterizată prin condiţiile la limită

$$u^F = -u^O, \tag{10}$$

pe porţiunea FC_1C_2, şi

$$w^F = 0, \tag{11}$$

pe placa plană fără incidenţă din afara porţiunii FC_1C_2, unde prin u^F şi w^F am notat viteza axială şi, respectiv, cea verticală de perturbaţie din această mişcare. Această mişcare corespunde problemei mixte a unei aripi triunghiulare cu bordurile supersonice avînd dată incidenţa ($w^F = 0$) pe porţiunile extremale, iar pe porţiunea centrală distribuţia de presiune

($u^F = -u^O$). Dînd acestei din urmă condiţii la limită o reprezentare polinominală adecvată, şi această mişcare poate fi soluţionată prin metodele cunoscute [7].

Dacă conul Mach din vîrful F nu intersectează aripa ($\mu < \delta$), efectul acestei mişcări asupra aripii poligonale considerate este nul şi deci în acest caz nu va mai fi luată în consideraţie.

c) Mişcarea, corespunzătoare conului Mach din vîrful O_1, în jurul aripii triunghiulare subţiri $O_1A_1'C_1$, continuată în afara liniei O_1C_1 (spre stînga) printr-o placă plană fără incidenţă; această mişcare corespunde de asemenea unei probleme mixte şi este definită prin condiţiile la limită

$$u^I = -u^O, \tag{12}$$

pe porţiunea $O_1A_1'C_1$, şi

$$w^I = 0, \tag{13}$$

pe porţiunea corespunzătoare plăcii plane fără incidenţă, unde am notat prin u^I şi w^I vitezele axială şi verticală de perturbaţie.

d) O mişcare, corespunzătoare vîrfului din O_2, care este simetrică faţă de axa Ox_1 cu mişcarea din vîrful O_1.

Cînd unul dintre conurile Mach cu vîrfurile în O, F, O_1 sau O_2 intersectează vreunul dintre bordurile aripii, atunci se formează în acest punct de intersecţie un nou con Mach şi mişcarea din interiorul său trebuie adăugată la cele menţionate mai sus.

Pentru exemplificarea acestui fenomen, denumit „reflecţia" conului Mach, să considerăm cazul cînd conul Mach din vîrful F intersectează bordul O_1C_1 în punctul M. În acest caz, prin superpoziţia celor patru mişcări de mai sus rămîne totuşi nesatisfăcută condiţia (3) pe porţiunea $MM'C_1$, deoarece pe această porţiune u^F nu este nul. Rezultă deci că pentru a satisface şi această condiţie va trebui să luăm în consideraţie şi mişcarea din interiorul conului Mach din vîrful M, definită prin condiţiile

$$u^M = -u^F, \tag{14}$$

pe porţiunea $MM'C_1$, şi

$$w^M = 0, \tag{15}$$

pe porţiunea din stînga acesteia pînă în afara conului Mach din M. Reîntîlnim deci o nouă problemă mixtă, care poate fi soluţionată prin metodele cunoscute, după cum am arătat şi la punctul (b).

Deoarece însă efectul acestei mişcări care apare în urma „reflecţiei" conului Mach în M (care poate aduce după sine alte reflecţii succesive pe celelalte borduri ale aripii) este destul de mic şi afectează în general porţiuni mici din suprafaţa aripii, vom neglija acest efect în cele ce urmează.

Prin descompunerile de mai sus, scurgerea supersonică în jurul unei aripi poligonale a fost redusă la studiul unor probleme de mişcări conice de ordin superior, pe care ne propunem să le soluţionăm în cele

ce urmează, utilizînd metoda analogiei hidrodinamice [4]. În acest scop vom utiliza următoarele notaţii şi formule uzuale, pe care le-am folosit şi în alte lucrări [5], [6]:

U_∞ — viteza curentului neperturbat,

a_∞ — viteza sunetului în condiţiile curentului neperturbat,

$M_\infty = \dfrac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach,

$B = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \mu}$ — unde μ este unghiul Mach,

h, f, b, b_1 — caracteristicile geometrice ale aripii poligonale definite în figura 1, în funcţie de care l, L, l_1, h_1 se definesc prin relaţiile

$$l = \frac{b}{h}, \quad L = \frac{b_1}{f}, \quad l_1 = \frac{b_1 - b}{f}, \quad h_1 = 1 + f - h; \tag{16}$$

$Ox_1x_2x_3$, $FX_1x_2x_3$, $O_1\xi_1\xi_2x_3$ — sisteme triortogonale de coordonate legate prin relaţiile (5) şi (8), la care axele Ox_1, FX_1 şi $O_1\xi_1$ sînt paralele cu viteza curentului superturbat U_∞, iar axele Ox_3, Fx_3, O_1x_3 sînt normele pe planul aripii $(O_1x_1x_2)$;

$x = \varphi + i\,\vartheta$ — plan auxiliar complex utilizat în lucrările anterioare, definit prin transformarea

$$\varphi = \frac{y}{1 - B^2 z^2}, \quad \vartheta = \frac{z\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2 z^2}, \quad \left(y = \frac{x_2}{x_1}, \ z = \frac{x_3}{x_1}\right); \tag{17}$$

pe aripă $(x_3 = 0)$ se observă că avem

$$\operatorname{Re} x = y; \tag{18}$$

X, ξ — plane auxiliare complexe, obţinute prin transformări analoge cu (17), care vor fi utilizate pentru studiul mişcărilor corespunzătoare vîrfurilor F şi O_1. Pe aripă $(x_3 = 0)$ vom avea, analog cu (18),

$$\operatorname{Re} X = Y \qquad \left(Y = \frac{x_2}{X_1} = \frac{x_2}{x_1 - 1}\right), \tag{19}$$

$$\operatorname{Re} \xi = \eta \qquad \left(\eta = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{x_2 - b}{x_1 - h}\right); \tag{19'}$$

u, v, w — vitezele de perturbaţie după axele Ox_1, Ox_2, Ox_3 din mişcarea în jurul aripii poligonale considerate,

u^O, v^O, w^O; u^F, v^F, w^F; u^I, v^I, w^I; u^{II}, v^{II}, w^{II} — vitezele de perturbaţie din mişcările corespunzătoare vîrfurilor O, F, O_1, O_2,

$x_1^{n-1} u_{n-1}^O$, $X_1^{n-1} u_{n-1}^F$, $\xi_1^{n-1} u_{n-1}^I$ — vitezele axiale de perturbație din mișcările conice de ordin n corespunzătoare vîrfurilor din O, F, O_1, care pot fi exprimate în planele x, X și, respectiv, ξ sub forma complexă

$$x_1^{n-1} u_{n-1}^O = x_1^{n-1} \operatorname{Re} \mathcal{U}_{n-1}^O,\quad X_1^{n-1} u_{n-1}^F = X_1^{n-1} \operatorname{Re} \mathcal{U}_{n-1}^F,\quad \xi_1^{n-1} u_{n-1}^I = \xi_1^{n-1} \operatorname{Re} \mathcal{U}_{n-1}^I. \tag{20}$$

2. DETERMINAREA VITEZEI AXIALE DE PERTURBAȚIE

Cazul aripii poligonale de grosime simetrică. Ținînd seama de cele arătate mai sus, viteza axială de perturbație pe aripa poligonală considerată poate fi exprimată sub forma

$$u = u^O + u^F + u^I + u^{II}, \tag{21}$$

în care u^O, u^F, u^I, u^{II} sînt vitezele axiale de perturbație din mișcările definite mai sus, corespunzătoare vîrfurilor O, F, O_1, O_2, pe care ne propunem să le determinăm în continuare, utilizînd metoda analogiei hidrodinamice [4].

Mișcarea corespunzătoare vîrfului O. După cum am arătat mai sus, această mișcare reprezintă o superpoziție de mișcări conice de diferite ordine, începînd de la 1 și pînă la N, în jurul unei aripi delta de grosime simetrică, astfel încît pentru viteza axială de perturbație u^O vom putea scrie

$$u^O = \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} u_{n-1}^O = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \mathcal{U}_{n-1}^O, \tag{22}$$

în care, ținînd seama de simetria mișcării,

$$\mathcal{U}_{n-1}^O = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{K_{n,q}^O}{\sqrt{1-B^2 l^2}} x^q \left[\operatorname{arcgh} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^q \operatorname{arcgh} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(l+x)}} \right] + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} Q_{n,2q}^O x^{2q} \operatorname{arcgh} \sqrt{\frac{1}{B^2 x^2}} + \tag{23}$$

$$+ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} D_{n,2q}^O x^{2q} \sqrt{1-B^2 x^2},$$

unde am notat prin $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$ și $E\left(\frac{n-2}{2}\right)$ cel mai mare întreg conținut în $\frac{n-1}{2}$, respectiv $\frac{n-2}{2}$. Constantele $K_{n,q}^O$, $Q_{n,2q}^O$, $D_{n,2q}^O$ se determină

din condițiile

$$\operatorname{Im}(-1)^{n-k-1}\left(\int_{\sigma} x^{n-k-2}\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{\mathrm{d}^n\,\mathcal{U}^0_{n-1}}{\mathrm{d}x^n}\,\mathrm{d}x=\frac{(n-1)!}{C^k_{n-1}}\,w_{n-k-1,k}\right., \tag{24}$$

$$\operatorname{Im}(-1)^{n-k-1}\left(\int_{\gamma} x^{n-k-2}\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{\mathrm{d}^n\mathcal{U}^0_{n-1}}{\mathrm{d}x^n}\,\mathrm{d}x=-\frac{(n-1)!}{C^k_{n-1}}[1+(-1)^k]\,w_{n-k-1,k}\right., \tag{24'}$$

$$\left[\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{\mathrm{d}^p\,\mathcal{U}^0_{n-1}}{\mathrm{d}x^p}\right]_{x=\pm\frac{1}{B}}=0\,,\qquad (p=1,2,\ldots,n-1), \tag{24''}$$

cele două integrale fiind efectuate pe cîte un semicerc σ și, respectiv, γ, de rază foarte mică în jurul bordului A_1 ($x=l$) și, respectiv, în jurul originii ($x=0$).

Vom observa că, în cazul bordurilor supersonice $\left(l>\frac{1}{B}\right)$, expresia (23) își păstrează valabilitatea, după cum s-a mai arătat, cu mențiunea că în acest caz va trebui să se țină seama de relația cunoscută

$$\frac{\operatorname{argch}\Theta}{\sqrt{1-B^2l^2}}=\frac{\operatorname{arc\,cos}\Theta}{\sqrt{B^2l^2-1}}\,. \tag{25}$$

Mișcarea corespunzătoare vîrfului F. După cum se vede cu ușurință din (4), și această mișcare reprezintă o superpoziție de mișcări conice de diferite ordine în jurul unei aripi delta de grosime simetrică, astfel încît vom putea scrie pentru viteza axială de perturbație u^F

$$u^F=\sum_{n=1}^{N}X_1^{n-1}\,u^F_{n-1}=\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{N}X_1^{n-1}\,\mathcal{U}^F_{n-1}, \tag{26}$$

unde

$$\mathcal{U}^F_{n-1}=\sum_{q=0}^{n-1}\frac{K^F_{n,q}}{\sqrt{1-B^2L^2}}\,X^q\left[\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-BX)}{2B(L-X)}}+\right.$$

$$+(-1)^q\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1+BX)}{2B(L+X)}}+\sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}Q^F_{n,2q}\,X^{2q}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1}{B^2X^2}}+ \tag{27}$$

$$\left.+\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)}D^F_{n,2q}\,X^{2q}\sqrt{1-B^2X^2}\right.\,.$$

Constantele $K^F_{n,q}$, $Q^F_{n,2q}$, $D^F_{n,2q}$ se vor determina din condiții analoge cu condițiile (14), care se obțin înlocuind în acestea $\mathcal{U}^0_{n-1}$, x și $w_{n-k-1,k}$, respectiv prin $\mathcal{U}^F_{n-1}$, X și $W_{n-k-1,k}$. Dacă conul Mach din vîrful F nu intersectează aripa ($\mu<\delta$), atunci pe aripă $u^F=0$.

Mișcarea corespunzătoare vîrfului 0_1. Și această mișcare reprezintă, după cum se vede din (7), o superpoziție de mișcări conice de diferite

ordine în jurul unei aripi triunghiulare de grosime simetrică, astfel că vom putea scrie

$$u^I = \sum_{n=1}^{N} \xi_1^{n-1} u_{n-1}^I = \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{N} \xi_1^{n-1} \mathcal{U}_{n-1}^I, \tag{28}$$

în care, ținînd seama că aripa prezintă un bord de atac în $\xi = l$ și un bord de fugă în $\xi = l_1$,

$$\mathcal{U}_{n-1}^I = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{K_{n,q}^I}{\sqrt{1-B^2 l^2}} \xi^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-B\xi)}{2B(l-\xi)}} + \\ + \sum_{q=0}^{n-1} \frac{G_{n,q}^I}{\sqrt{1-B^2 l_1^2}} \xi^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-B\xi)}{2B(l_1-\xi)}} + \sum_{q=0}^{n-2} D_{n,q}^I \xi^q \sqrt{1-B^2\xi^2}. \tag{29}$$

Constantele $K_{n,q}^I$, $G_{n,q}^I$, $D_{n,q}^I$ se determină din condiții analoge cu (24), (24'), în care se înlocuiesc $\mathcal{U}_{n-1}^O$, x, $w_{n-k-1,k}$, respectiv prin $\mathcal{U}_{n-1}^I$, ξ, $\beta_{n-k-1,k}$, și în care integrala din (24) va fi efectuată în jurul bordurilor noii aripi, adică $\xi = l$ și, respectiv, $\xi = l_1$.

În ceea ce privește mișcarea corespunzătoare vîrfului O_2, datorită simetriei aripii, viteza axială u^{II} se poate deduce cu ușurință din u^I.

Cazul aripii poligonale subțiri. În mod asemănător, pentru viteza axială de perturbație în jurul aripii poligonale subțiri se va ajunge, dacă neglijăm reflexiile conurilor Mach, la aceeași expresie (21) ca în cazul aripii de grosime simetrică, în care u^O, u^F, u^I, u^{II} pot fi determinate într-un mod analog.

Vom observa însă că, în cazurile cînd aripa subțire are unul dintre borduri subsonice, scurgerea în jurul ei devine greu de studiat chiar în cazul aripii triunghiulare datorită fenomenului separării scurgerii la bordurile de atac și al apariției unui sistem complex de vîrtejuri.

Pentru acest motiv, în cele ce urmează ne vom ocupa numai de cazul aripilor poligonale subțiri avînd bordurile supersonice. În acest caz însă mișcarea corespunzătoare vîrfului F nu influențează cu nimic scurgerea în jurul aripii poligonale considerate, astfel încît vom putea scrie pentru viteza axială de perturbație

$$u = u^O + u^I + u^{II}. \tag{30}$$

Mișcarea corespunzătoare vîrfului O. Și în acest caz mișcarea reprezintă o superpoziție de mișcări conice de diferite ordine, astfel că viteza axială u^O va fi dată de aceeași relație (22), în care însă

$$\mathcal{U}_{n-1}^O = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{K_{n,q}^O}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}} x^q \left[\arccos \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}} + \right. \\ \left. + (-1)^q \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(l+x)}} \right] + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} Q_{n,2q}^O x^{2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B^2 x^2}} + \\ + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{3}\right)} D_{n,2q}^O x^{2q} \sqrt{1-B^2 x^2}. \tag{31}$$

Constantele $K^0_{n,q}$, $Q^0_{n,2q}$, $D^0_{n,2q}$ se determină aplicînd aceleaşi condiţii (24).

Mişcarea corespunzătoare vîrfului O_1. Viteza axială u^I va fi dată de aceeaşi relaţie (28) ca în cazul aripii de grosime simetrică, în care însă

$$\mathcal{U}^I_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{K^I_{n,q}}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}\, \xi^q \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-B\xi)}{2B(l-\xi)}} + \\ + \sum_{q=0}^{n-1} \frac{G^I_{n,q}}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}\, \xi^q \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-B\xi)}{2B(l_1-\xi)}} + \sum_{q=0}^{n-2} D^I_{n,q}\, \xi^q \sqrt{1 - B^2\xi^2}. \tag{32}$$

Determinarea constantelor $K^I_{n,q}$, $G^I_{n,q}$, $D^I_{n,q}$ se face în acelaşi mod ca în cazul aripii de grosime simetrică.

3. DETERMINAREA DISTRIBUŢIEI DE PRESIUNI ŞI A PORTANŢEI UNOR ARIPI POLIGONALE SUBŢIRI DE FORMĂ UZUALĂ

Ca exemplu de calcul să determinăm expresiile vitezei axiale de perturbaţie, deci şi distribuţia de presiuni, deoarece

$$C_p = -2\frac{u}{U_\infty}, \tag{33}$$

precum şi portanţa unor aripi poligonale subţiri de formă uzuală.

Ţinînd seama de simetria aripii şi notînd prin S suprafaţa unei jumătăţi de aripă, coeficientul de portanţă va fi dat de relaţia

$$C_l = \frac{4}{SU_\infty}\int_S u\,\mathrm{d}S, \tag{34}$$

unde elementul de suprafaţă $\mathrm{d}S$ poate fi exprimat în cele trei sisteme de coordonate sub forma

$$\mathrm{d}S = x_1\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y = X_1\mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}Y = \xi_1\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\eta. \tag{35}$$

Deoarece viteza axială de perturbaţie este dată în general de relaţia (21), vom putea scrie pentru coeficientul de portanţă, remarcînd din nou simetria aripii,

$$C_l = C_l^0 + C_l^F + C_l^I, \tag{36}$$

unde

$$C_l^0 = \frac{4}{SU_\infty}\iint_S u^0\, x_1\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y, \tag{37}$$

$$C_l^F = \frac{4}{SU_\infty}\iint_{FMC_1} u^F\, X_1\,\mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}Y, \tag{37'}$$

$$C_l^I = \frac{4}{SU_\infty}\iint_{O_1H_1C_1} u^I\xi_1\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\eta. \tag{37''}$$

Ţinînd seama de relaţiile (22) şi (28) şi observînd că pentru cazul aripilor poligonale subţiri de care ne ocupăm în această lucrare ($\delta > \mu$) mişcarea din vîrful F nu produce nici un efect asupra aripii şi deci

$$C_l^F = 0, \tag{38}$$

va rezulta pentru coeficientul de presiune expresia

$$C_l = C_l^o + C_l^I = \sum_{n=1}^{N} (C^o_{l.\,n-1} + C^I_{l.\,n-1}), \tag{39}$$

unde

$$C^o_{l.\,n-1} = \mathrm{Re}\,\frac{4}{SU_\infty} \iint_S x_1^n \, \mathcal{U}^o_{n-1} \, dx_1 \, dy, \tag{40}$$

$$C^I_{l.\,n-1} = \mathrm{Re}\,\frac{4}{SU_\infty} \iint_{O_1H_1C_1} \xi_1^n \, \mathcal{U}^I_{n-1} \, d\xi_1 \, d\eta. \tag{40'}$$

Să calculăm acum cu ajutorul acestor relaţii coeficientul de portanţă pentru unele forme uzuale de aripi subţiri care se deduc prin particularizare din aripa poligonală studiată mai sus.

Aripa în săgeată. Să considerăm aripa în săgeată din figura 2, care se poate obţine din aripa de formă generală din figura 1, făcînd

$$h = 1+f, \; h_1 = 0, \; l = \frac{b}{1+f}, \left(L = \frac{b_1}{f}\right), \tag{41}$$

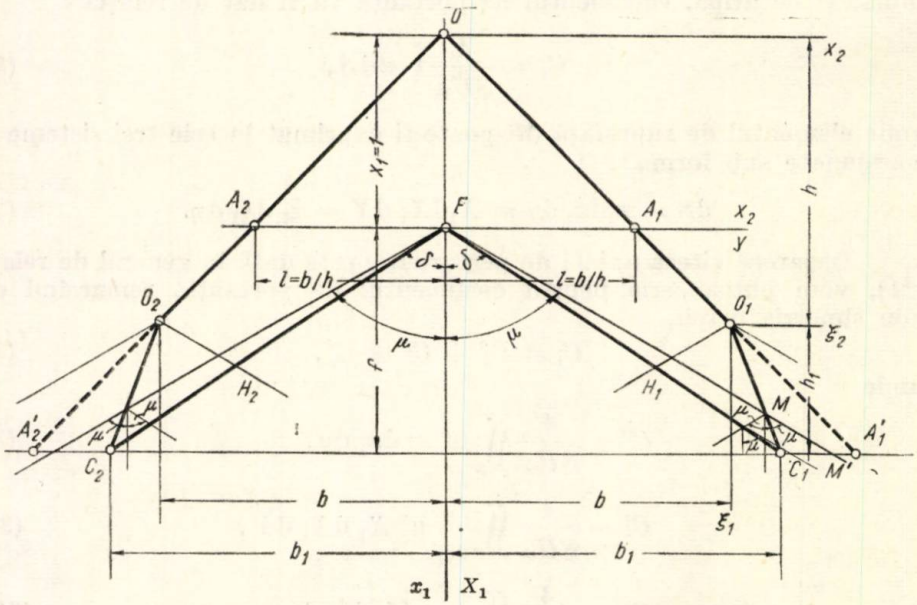


Fig. 1

avînd incidenţa α dată sub forma

$$\alpha = -\frac{w}{U_\infty} = -\frac{1}{U_\infty}[w_{00} + x_1\ (w_{10} \pm [y\ w_{01})]\ , \tag{42}$$

care se poate deduce din relaţia (1) punînd $N = 2$.

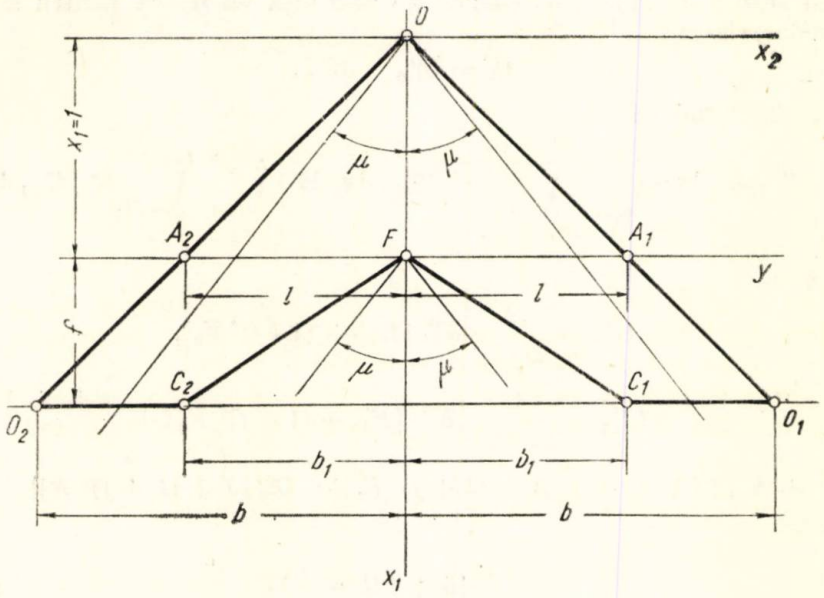


Fig. 2

Este uşor de văzut că pentru această aripă vom avea

$$u = u^o = \mathrm{Re}\,(\mathcal{U}_0^o + x_1\,\mathcal{U}_1^o), \tag{43}$$

unde

$$\mathcal{U}_0^o = \frac{K_{10}^0}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}\left[\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1-Bx)}{2\,B\,(l-x)}} + \arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1+Bx)}{2\,B\,(l+x)}}\right], \tag{44}$$

$$\mathcal{U}_1^o = \frac{K_{20}^0 + K_{21}^0\,x}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1-Bx)}{2\,B\,(l-x)}} + \tag{44'}$$

$$+ \frac{K_{20}^o - K_{21}^o\,x}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1+Bx)}{2\,B\,(l+x)}} + D_{20}^o\sqrt{1 - B^2 x^2},$$

în care

$$K_{10}^o = -\frac{2\,w_{00}\,l}{\pi}, \tag{45}$$

$$K_{20}^{o}=\frac{2l}{\pi}\,\frac{(2-B^2l^2)\,w_{10}+l\,w_{01}}{B^2l^2-1},\quad K_{21}^{o}=-\frac{2}{\pi}\,\frac{w_{10}+B^2l^3\,w_{01}}{B^2l^2-1},\tag{45'}$$

$$D_{20}^{o}=-\frac{2}{\pi}\,\frac{l\,(w_{10}+l\,w_{01})}{B^2l^2-1}.\tag{45''}$$

Ţinînd seama de (43), coeficientul de portanţă va fi dat pentru această aripă de relaţia

$$C_l=C_{l.0}^{o}+C_{l.1}^{o},\tag{46}$$

unde, observînd că

$$\iint_S x_1^n\,\mathcal{U}_{n-1}^{o}\,dx_1\,dy=\int_{x_1=0}^{x_1=\frac{L}{L-y}}\int_{y=0}^{y=\frac{b_1}{1+f}} x_1^n\,\mathcal{U}_{n-1}^{o}\,dx_1\,dy+\int_{x_1=0}^{x_1=1+f}\int_{y=\frac{b_1}{1+f}}^{y=l} x_1^n\,\mathcal{U}_{n-1}^{o}\,dx_1\,dy,\tag{47}$$

vom avea

$$C_{l.0}^{o}=\frac{2}{SU_\infty}\,K_{10}^{o}\,[E_{20}+(1+f)^2F_0],\tag{48}$$

$$C_{l.1}^{o}=\frac{4}{3SU_\infty}\,\{K_{20}^{o}\,[E_{30}+(1+f)^3F_0]+$$
$$+K_{21}^{o}\,[L\,(E_{31}-E_{21})+(1+f)^3F_1]+D_{20}^{o}\,[P+(1+f)^3R]\}\tag{48'}$$

unde

$$S=\frac{1}{2}\,[b+f\,(b-b_1)]\tag{49 a}$$

$$E_{t,q}=\mathrm{Re}\,\frac{L^t}{(t-1)\sqrt{B^2l^2-1}}\left\{\left[\left(\frac{1+f}{(1+f)\,L-b_1}\right)^{t-1}-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(L-l)^{t-1}}\right]\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+f-Bb_1)}{2B\,[(1+f)\,l-b_1]}}+(-1)^q\left[\left(\frac{1+f}{(1+f)\,L-b_1}\right)^{t-1}-\tag{49 b}$$
$$-\frac{1}{(L+l)^{t-1}}\left]\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+f+Bb_1)}{2B\,[(1+f)\,l+b_1]}}-\frac{1}{2}\left[\frac{1+(-1)^q}{L^{t-1}}-\frac{1}{(L-l)^{t-1}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{(L+l)^{t-1}}\right]\arccos\frac{1}{Bl}\right\}+\frac{L^t}{2(t-1)}\sum_{p=1}^{t-1}\left[\frac{1}{(L-l)^{t-p}}+\frac{(-1)^q}{(L+l)^{t-p}}\right]I_p,$$

$$P=\frac{L^3}{2}\left\{\mathrm{Re}\,(1+f)\sqrt{\frac{(1+f)^2-B^2b_1^2}{[(1+f)L-b_1]^2}}-\frac{1}{L^2}+B^2L\,I_2-B^2I_1\right\},\tag{49 c}$$

$$I_1=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\sqrt{B^2L^2-1}}\left\{2\arccos\sqrt{\frac{(1+BL)\,(1+f-Bb_1)}{2\,B\,[(1+f)\,L-b_1]}}-\arccos\frac{1}{BL}\right\},\tag{49 d}$$

$$I_2 = \frac{1}{B^2L^2-1}\left[B^2 L I_1 + \frac{1}{L} - \operatorname{Re}\frac{\sqrt{(1+f)^2 - B^2 b_1^2}}{(1+f)L - b_1}\right], \tag{49 e}$$

$$F_0 = \operatorname{Re}\left\{\left(l - \frac{b_1}{1+f}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+f-Bb_1)}{2B[(1+f)l-b_1]}} + \right.$$

$$\left. + \left((l+\frac{b_1}{1+f}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+f+Bb_1)}{2B[(1+f)l+b_1]}} + \frac{1}{B}\sqrt{B^2l^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{Bb_1}{1+f}\right)\right\}, \tag{49 f}$$

$$F_1 = \operatorname{Re}\frac{1}{2}\left\{\left[l^2 - \frac{b_1^2}{(1+f)^2}\right]\left[\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+f-Bb_1)}{2B[(1+f)l-b_1]}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+f+Bb_1)}{2B[(1+f)l+b_1]}}\right] + \frac{l}{B}\sqrt{B^2l^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{Bb_1}{1+f}\right)\right\}, \tag{49 g}$$

$$R = \operatorname{Re}\frac{1}{2B}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{Bb_1}{1+f} - \frac{Bb_1}{1+f}\sqrt{1 - \frac{B^2b_1^2}{(1+f)^2}}\right]. \tag{49 h}$$

În cazul cînd $\frac{Bb_1}{1+f} > 1$, la extragerea părții reale din expresiile de mai sus trebuie să se țină seama de relațiile

$$\operatorname{Re}\left[\arcsin Bx\right]_{Bx=By>1} = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Re}\left[\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}}\right]_{Bx=By>1} = 0,$$
$$\operatorname{Re}\left[\sqrt{1-B^2x^2}\right]_{Bx=By>1} = 0. \tag{50}$$

Aripa în coadă de rîndunică. Pentru aripa în coadă de rîndunică din figura 3, care se obține din aripa precedentă prin particularizarea

$$b_1 = b, \left(l = \frac{b}{1+f}, L = \frac{b}{f}\right), \tag{51}$$

viteza axială de perturbație va fi dată de aceleași relații (43) și (44), iar coeficientul de portanță se poate calcula cu aceleași relații (46) și (48), în care însă vom avea în acest caz

$$F_0 = F_1 = R = 0, \tag{52}$$

iar $E_{l,a}$ și P se vor obține introducînd în relațiile (49) particularizarea (51).

Aripa dublu trapezoidală. Să considerăm aripa dublu trapezoidală din figura 4, a cărei incidență este dată de relația

$$\alpha = -\frac{w}{U_\infty} = -\frac{w_{00}}{U_\infty}. \tag{53}$$

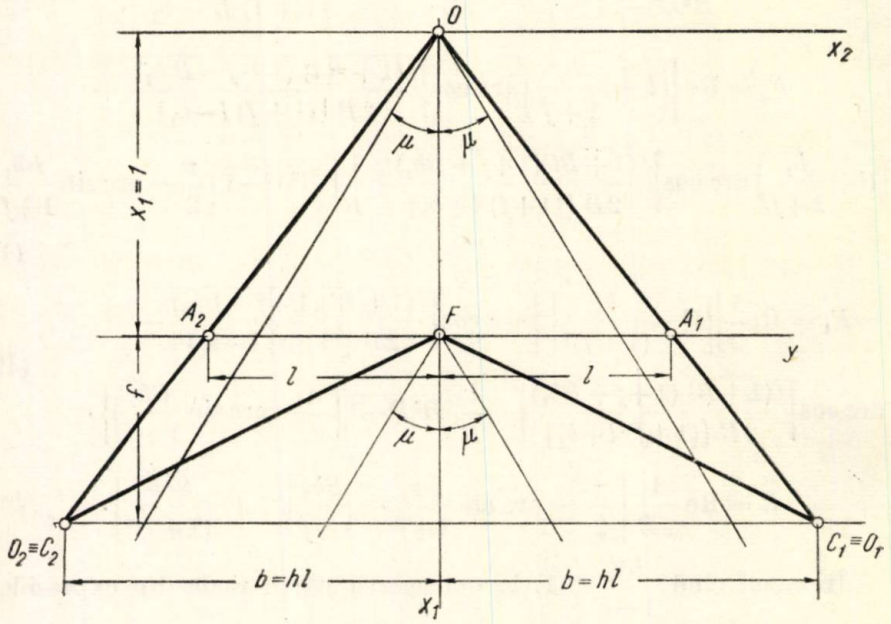

O
X2
X1=1
μ
μ
A2
F
A1
y
f
l
l
μ
μ
O2≡C2
C1≡O1
b=hl
b=hl
X1

Fig. 3

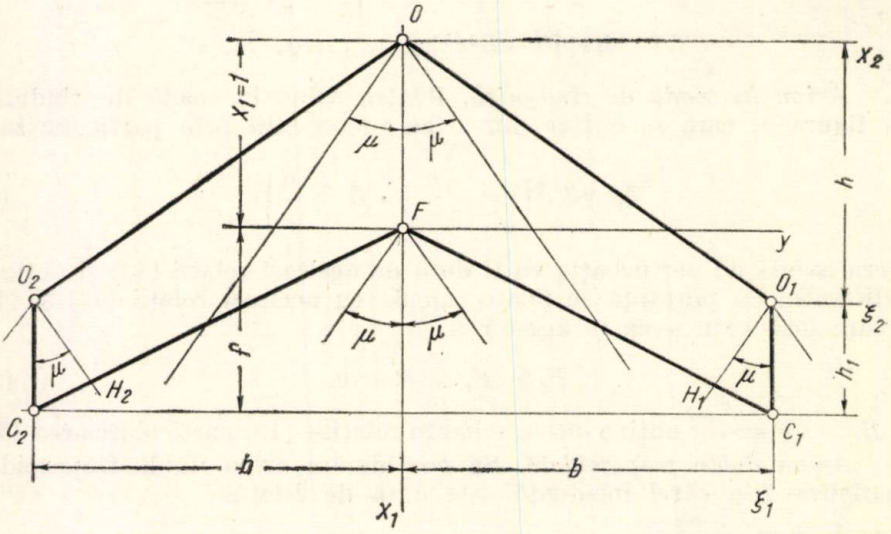

O
X2
X1=1
μ
μ
h
F
y
O2
O1
ξ2
μ
μ
μ
μ
f
H2
H1
h1
C2
C1
b
b
X1
ξ1

Fig. 4

Viteza axială corespunzătoare acestei aripi va fi de forma

$$u = u^o + u^I + u^{II}, \quad (u^o = \operatorname{Re} \mathcal{U}_0^o,\ u^I = \operatorname{Re} \mathcal{U}_0^I), \tag{54}$$

în care U_0^o are aceeaşi expresie (44), în timp ce U_0^I va avea expresia

$$\mathcal{U}_0^I = -\frac{K_{10}^o}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}} \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl)\,\xi}{\xi - l}}, \left(K_{10}^o = -\frac{2\, w_{00}\, l}{\pi}\right); \tag{55}$$

în ceea ce priveşte viteza axială u^{II}, aceasta se poate deduce cu uşurinţă, dată fiind simetria mişcării, din u^I.

Pentru calculul coeficientului de portanţă, vom folosi relaţia

$$C_l = C_l^o + C_l^I, \tag{56}$$

în care

$$C_l^o = \operatorname{Re} \frac{4}{S U_\infty} \left[\int_{x_1=0}^{x_1=\frac{L}{L-\nu}} \int_{y=0}^{y=\frac{b}{1+f}} x_1\, \mathcal{U}_0^o\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y + \int_{x_1=0}^{x_1=\frac{b}{\nu}} \int_{y=\frac{b}{1+f}}^{y=l} x_1\, \mathcal{U}_0^o\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y \right] =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{2 K_{10}^o}{S U_\infty \sqrt{B^2 l^2 - 1}} \left\{ \frac{(1+f)\, l - b}{L - l} \left[b \left(\frac{L}{l} - 1 \right) - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{L^2}{(1+f) L - b} \right] \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1+f-Bb)}{2B\,[(1+f)\, l - b}} + \frac{(1+f)\, l + b}{L + l} \left[b \left(\frac{L}{l} + 1 \right) + \right. \tag{57}$$

$$\left. + \frac{L^2}{(1+f) L - b} \right] \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1+f+Bb)}{2B\,[(1+f)\, l + b]}} + \frac{l^2 L}{L^2 - l^2} \arccos \frac{1}{Bl} +$$

$$+ \frac{L^3}{L^2 - l^2} \frac{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{\sqrt{B^2 L^2 - 1}} \left[2 \arccos \sqrt{\frac{(1+BL)(1+f-Bb)}{2B\,[(1+f)\, L - b]}} - \arccos \frac{1}{BL} \right],$$

$$C_l^I = \operatorname{Re} \frac{4}{S U_\infty} \int_{\xi_1=0}^{\xi_1=\frac{h_1 L}{L-\eta}} \int_{\eta=-\frac{1}{B}}^{0} \xi_1\, \mathcal{U}_0^I\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\eta = \tag{57'}$$

$$= -\frac{K_{10}^o}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}} \frac{\pi h_1^2}{S U_\infty} \frac{L}{L - l} \left[L \sqrt{\frac{l(Bl+1)}{L(BL+1)}} - l \right].$$

unde

$$S = \frac{(1+h_1)\, b}{2} = \frac{(2+f-h)\, b}{2}, \quad (b = hl = f L). \tag{58}$$

Aripa pentagonală. Pentru aripa pentagonală din figura 5, avînd incidenţa $\alpha = -\frac{w_{00}}{U_\infty}$, viteza axială de perturbaţie va fi dată de aceeaşi expresie (54) ca în cazul aripii dublu trapezoidale.

În ceea ce privește coeficientul de portanță, acesta este dat de relația (56), în care însă

$$C_l^o = \mathrm{Re}\frac{2K_{10}^o}{lSU_\infty\sqrt{B^2l^2-1}}\left[-(l-b)^2\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bb)}{2B(l-b)}}+\right.$$
$$\left.+(l+b)^2\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bb)}{2B(l+b)}}+\frac{\sqrt{B^2l^2-1}}{B}\arcsin Bb\right], \tag{59}$$

$$C_l^I = -\frac{K_{10}^o}{\sqrt{B^2l^2-1}}\frac{\pi h_1^2}{SU_\infty}\left[\sqrt{l\left(\frac{1}{B}+l\right)}-l\right], \tag{59'}$$

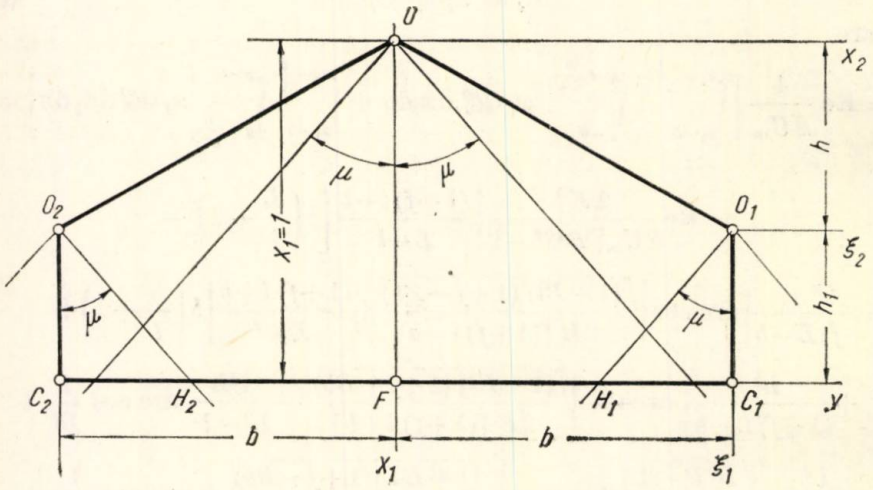


Fig. 5

unde

$$S = \frac{(2-h)b}{2} = \frac{(1+h_1)b}{2}. \tag{60}$$

Aripa dreptunghiulară. Să considerăm acum aripa dreptunghiulară din figura 6 având incidența $\alpha = -\frac{w_{00}}{U_\infty}$ și să observăm că în acest caz mișcarea corespunzătoare vîrfului O despre care am vorbit mai sus devine o mișcare plană. Vom avea astfel pentru viteza axială de perturbație

$$u = u^o + u^I + u^{II}, \tag{61}$$

unde u^o, corespunzător mișcării plane, va avea expresia

$$u^o = -\frac{w_{00}}{B}, \tag{62}$$

în timp ce expresia lui u^I se poate deduce din (55) făcînd pe l să tindă către infinit ($l \to \infty$), obținînd astfel

$$u^I = \mathrm{Re}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{w_{00}}{B}\,\arccos\sqrt{-B\xi}\,. \tag{63}$$

Făcînd pentru u^{II} aceeași observație referitoare la simetria aripii, coeficientul de portanță va fi dat de aceeași relație (56), unde

$$C_l^0 = -\frac{4\,b\,w_{00}}{BSU_\infty} = \frac{4\alpha}{B}, \tag{64}$$

$$C_l^I = \frac{w_{00}}{B^2\,S\,U_\infty} = -\frac{\alpha}{B^2 b}\,. \tag{64'}$$

Aceste expresii își păstrează valabilitatea și în cazul cînd conurile Mach din vîrfurile O_1 și O_2 se intersectează pe aripă (fig. 6), deoarece, dată fiind simetria aripii, efectul mișcării corespunzătoare vîrfului O_1 asupra porțiunii MH_1F este echivalent cu cel al mișcării corespunzătoare vîrfului O_2 asupra porțiunii MH_2F.

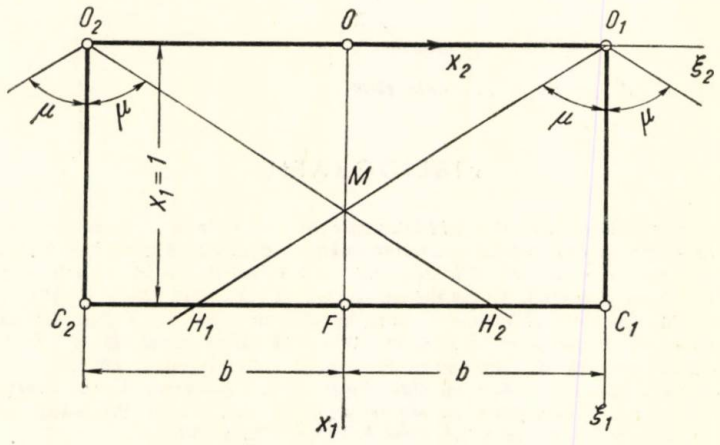


Fig. 6

Aripa trapezoidală. În cazul unei aripi trapezoidale ca cea din figura 7, avînd incidența $\alpha = -\dfrac{w_{00}}{U_\infty}$, viteza axială de perturbație va fi dată de asemenea de relația (61), în care u^0 are expresia (62), în timp ce u^I are expresia

$$u^I = \mathrm{Re}\,\frac{2w_{00}}{\pi B}\left[\arccos\sqrt{\frac{1-B\xi}{2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}\,\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-B\xi)}{2B(l_1-\xi)}}\right]. \tag{65}$$

Coeficientul de portanţă al acestei aripi este dat de relaţia (56), în care însă

$$C_l^0 = -\frac{2(b+b_1)w_{00}}{BSU_\infty} = -\frac{4w_{00}}{BU_\infty} = \frac{4\alpha}{B}, \tag{66}$$

$$C_l^I = 0. \tag{66'}$$

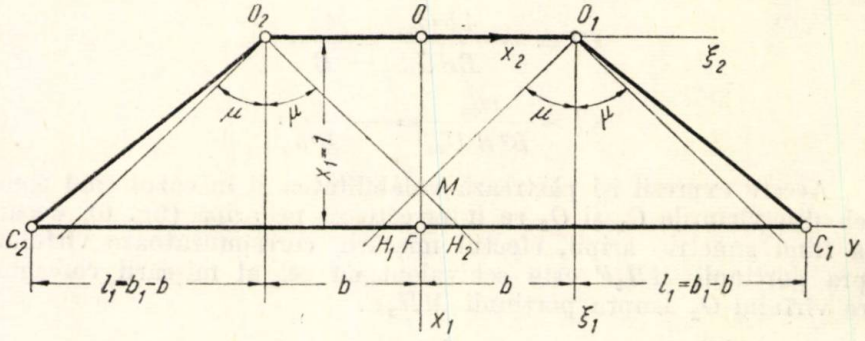


Fig. 7

Primită la redacţie la 15 ianuarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *Asupra caracterului hidrodinamic al soluţiilor din mişcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale*, Comunicările Acad. R.P.R., **II**, *9—10* (1952).
2. — *Extinderea analogiei hidrodinamice din mişcările conice la aripile groase şi cu rezistenţă variabilă*, Comunicările Acad. R.P.R., **III**, *3—4* (1953).
3. E. Carafoli, M. Ionescu, *Écoulemente coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires aù ó épaisseur symetrique*, Revue de Méchanique, **II**, *1* (1957).
4. E. Carafoli, *High-Speed Aerodynamics*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1956.
5. E. Carafoli, Dan Mateescu, *Sur une clase d'ailes delta à incidence et pente variables d'apres des fonctions homogènes en régime supersonique*, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de Mécanique Appliqué, **X**, *2* (1965).
6. Dan Mateescu, *Tragflügel mit besonderer Abschlussfläche in Überschallströmung*, Revue de Mécanique Appliquée, **VIII**, *1* (1963).
7. Şerban Săndulescu, Năstase-Ghia, *Le problème mixte de l'aile triangulaire en mouvement conique d'ordre supérieur*, Revue de Mécanique Appliquée, **VII**, *1* (1963).

DESPRE FORMULAREA PROBLEMELOR ÎN TEORIA SCURGERII ÎN JURUL CORPURILOR ÎNCĂRCATE ELECTRIC A UNUI CURENT DE GAZ IONIZAT FOARTE RAREFIAT[1])

de V. P. ȘIDLOVSKI
Centrul de calcul al Academiei de Științe a U.R.S.S.

Se consideră scurgerea în jurul unui corp încărcat electric a unui curent de plasmă complet ionizată și puternic rarefiată. Dacă cîmpul magnetic lipsește, atunci problema se reduce matematic la rezolvarea unui sistem de două ecuații cinetice (fără integrale ale ciocnirilor) și a ecuației Poisson. Drept una dintre posibilitățile de simplificare a acestui sistem neliniar se consideră linearizarea ecuațiilor. O altă posibilitate este legată de construirea soluției ecuațiilor cinetice la o formă funcțională dată a potențialului. Se arată că pentru anumite condiții ultima dintre metodele aproximative poate oferi rezultate care modelează suficient de exact tabloul real al tuturor proceselor fizice ce se produc.

1. *Introducere.* În cazul unui gaz complet ionizat (plasmă), funcțiile de distribuție ale diferiților componenți satisfac unele ecuații Boltzmann de forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{c}\cdot\nabla\right)F_\alpha+\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\sum_{j=1}^{3}(\mathbf{E}+\mu_e\,\mathbf{c}\times\mathbf{H})\frac{\partial F_\alpha}{\partial c_j}=\frac{\delta_c F_\alpha}{\delta t}, \tag{1}$$

cu următoarele notații: t — timpul, $\mathbf{c}$ — viteza absolută a particulelor, e_α — sarcina particulei de un anumit fel (pentru electroni $e_e=-e$, pentru ioni $e_i=Ze$) m_α — masa particulei, $\mathbf{E}$ și $\mathbf{H}$ — intensitățile cîmpu-

[1]). Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, 3 (1966) (în limba rusă)

ST. CERC. MEC. APL. TOM 22 NR. 3 P. 693–698 BUCUREȘTI 1966

rilor electric şi, respectiv, magnetic, μ_e — permeabilitatea magnetică şi $\delta_c F_\alpha / \delta t$ — integrala ciocnirilor „apropiate".

În cazul general, la ecuaţiile (1) trebuie să adăugăm ecuaţiile lui Maxwell pentru determinarea cîmpurilor electromagnetice şi ecuaţia lui Poisson. Dacă se consideră cazul rarefierii foarte mari în absenţa cîmpului magnetic, atunci în primul rînd putem neglija integralele ciocnirilor, considerînd membrul al doilea al ecuaţiilor (1) egal cu zero; în al doilea rînd, datorită condiţiei $\mathbf{H} \equiv 0$, se simplifică şi membrul întîi al acestor ecuaţii. Dacă, în afară de aceasta, ne mărginim la cazul variaţiei staţionare a tuturor mărimilor, atunci împreună cu ecuaţia lui Poisson obţinem

$$\sum_{j=1}^{3} \left(c_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial F_\alpha}{\partial c_j} \right) = 0, \tag{2}$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi e \left(Z \int F_i \, d\mathbf{c} - \int F_e \, d\mathbf{c} \right), \tag{3}$$

unde, conform definiţiei potenţialului electric,

$$E_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j},$$

iar mărimea $d\mathbf{c} = dc_1 dc_2 dc_3$ reprezintă un volum elementar din spaţiul vitezelor.

Sistemul de ecuaţii (2) şi (3) a fost luat în considerare pentru prima dată de A. A. Vlasov la studierea vibraţiilor unui gaz electronic [1]. Vom cerceta posibilitatea construirii soluţiilor acestui sistem pentru cazul scurgerii în jurul corpurilor încărcate electric a unui curent de gaz ionizat. Principala dificultate care apare în acest caz este legată de neliniaritatea ecuaţiilor date, iar la rezolvarea problemelor la limită este necesar să simplificăm, într-un fel sau altul, sistemul iniţial. Mai jos vor fi analizate cîteva variante de simplificări posibile.

2. *Linearizarea ecuaţiilor lui Vlasov.* Vom considera că, la o distanţă suficient de mare de corp, potenţialul electric tinde către zero. Dacă, în afară de aceasta, potenţialul nu este mare nici pe suprafaţa corpului, atunci pot apărea condiţii cînd $|\Phi_w| \ll kT$ şi cînd termenul al doilea din ecuaţia (2) exercită o influenţă mult mai mică asupra variaţiei funcţiei de distribuţie decît primul. În aceste condiţii, ecuaţia (2), în prima aproximaţie, va coincide cu ecuaţia cinetică pentru particulele neutre, fără a ţine seama de ciocniri. Soluţia acestei ecuaţii este cunoscută; ea corespunde distribuţiei lui Maxwell

$$F_\alpha^{(0)} = n \left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(- m_\alpha w^2 / 2kT \right), \tag{4}$$

unde k este constanta lui Boltzmann, n şi T parametrii constanţi ai mişcării macroscopice, iar w viteza relativă sau absolută a particulelor.

Vom presupune că funcția de distribuție reală F_α diferă de $F_\alpha^{(0)}$ doar printr-un mic termen suplimentar:

$$F_\alpha = F_\alpha^{(0)} + F_\alpha^{(1)} \; (|F_\alpha^{(1)}| \ll F_\alpha^{(0)}). \tag{5}$$

Ținînd seama de faptul că în starea de echilibru plasma trebuie să satisfacă condiția de cvasineutralitate, adică membrul al doilea al ecuației (3) să fie nul, potențialul Φ se obține din ecuația lui Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0 \tag{6}$$

dacă se dau valorile lui Φ_w pe suprafața corpului.

Mărimea $F_\alpha^{(1)}$ se determină din ecuația liniară obținută prin substituirea lui (5) în ecuația (2):

$$\sum_{j=1}^{3} \left(c_j \frac{\partial F_\alpha^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial F_\alpha^{(0)}}{\partial c_j} \right) = 0. \tag{7}$$

La integrarea ecuației (7) trebuie să utilizăm condiția evidentă de anulare a lui $F_\alpha^{(1)}$ la o distanță infinită de corp. Menționăm de asemenea că pentru unele forme geometrice simple se poate stabili ușor faptul independenței lui $F_\alpha^{(1)}$ de vitezele particulelor $\mathbf{c}$.

Găsind $F_\alpha^{(1)}$, pe baza relației (5) vom cunoaște forma aproximativă a funcției de distribuție într-un curent de particule incidente de orice natură. După aceasta, folosind aceeași metodică ca cea adoptată la studierea scurgerilor liber moleculare ale gazelor neutre (vezi, de exemplu, [2]), putem determina toate caracteristicile scurgerii care ne interesează.

3. *Soluția la o formă dată a potențialului.* Dacă revenim la ecuațiile (2) și (3), atunci reiese clar că în cazul general funcțiile de distribuție pentru ambii componenți ai curentului trebuie să fie determinate împreună cu potențialul. Caracterul variației potențialului însă este aproximativ clar, iar funcția $\Phi(\mathbf{x})$ poate fi determinată aproximativ folosind în locul ecuației lui Poisson (3) ecuația lui Laplace (6). Oricum ar fi, cînd se cunoaște forma funcției $\Phi(\mathbf{x})$, determinarea funcțiilor $F_\alpha(\mathbf{c}, \mathbf{x})$ se simplifică substanțial chiar dacă nu utilizăm procedeul de linearizare descris mai sus, adică dacă variația potențialului nu se presupune mică.

Vom scrie sistemul caracteristic pentru ecuația (2)

$$\frac{m_\alpha}{e_\alpha} \frac{dc_1}{\partial \Phi / \partial x_1} = \frac{dx_1}{c_1} = \ldots = \frac{dx_3}{c_3}. \tag{8}$$

Considerăm cazul particular de reprezentare a potențialului cînd

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi_1(x_1) + \Phi_2(x_2) + \Phi_3(x_3). \tag{9}$$

Din formula (9) rezultă că $\partial \Phi / \partial x_1 = \partial \Phi_1 / \partial x_1$ etc. Atunci, din sistemul caracteristic (8) este ușor să obținem primele lui integrale de forma

$$c_j^2 - \frac{2e_\alpha}{m_\alpha} \Phi_j = \alpha_j^2 \quad \text{sau} \quad \sqrt{c_j^2 - 2\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \Phi_j} = \alpha_j. \tag{10}$$

Soluţia ecuaţiei (2) poate fi reprezentată după aceasta ca o combinaţie de integrale prime de tipul (10). În particular, aceasta poate fi funcţia

$$F_\alpha = A \exp\left[-\beta \sum_{j=1}^{3}\left(\sqrt{c_j^2 - 2\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\Phi_j} - \alpha_j\right)^2\right], \tag{11}$$

care, prin alegerea convenabilă a constantelor A, β şi α_j, va trece în funcţia de distribuţie a lui Maxwell pentru $\Phi_j \to 0$, adică la o distanţă infinită de corp. În conformitate cu proprietăţile menţionate mai sus ale potenţialului Φ, mărimea

$$z_j = \operatorname{sign} c_j \sqrt{c_j^2 - 2\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\Phi_j} \tag{12}$$

va servi aici într-un anumit sens drept analog al vitezei obişnuite a particulei c_j.

Principala dificultate care apare la utilizarea funcţiei de distribuţie de tipul (11) este legată de calcularea integralelor care conţin această funcţie. Vom arăta că integralele de tipul $\int F_\alpha \, dc$, care definesc densitatea, vor converge practic pentru orice valori ale potenţialului numai dacă acestea din urmă rămîn finite. Într-adevăr, pentru o valoare fixă a lui x_j (deci şi a lui Φ_j), întreaga gamă infinită de variaţie a lui c_j poate fi totdeauna împărţită în trei domenii. În primul dintre ele — domeniul valorilor mici ale lui $|c_j|$ — funcţia de distribuţie practic nu depinde de c_j, însă depinde în mod esenţial de x_j şi poate fi reprezentată sub forma

$$F_\alpha \approx A \exp\left[-\beta\left(\sqrt{-2\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\Phi_j} - \alpha_j\right)^2\right]\mathcal{F}, \tag{13}$$

unde factorul $\mathcal{F}$ ţine seama de dependenţa lui F_α de variabilele c_k şi x_k pentru $k \neq j$. Integrarea expresiei (13) în raport cu c_j se va face între limitele finite $-c_{j1} \leqslant c_j \leqslant c_{j1}$, de aceea şi rezultatul va da o valoare finită. Al doilea domeniu-limită este domeniul valorilor foarte mari ale lui c_j. În punctele extreme ale acestui domeniu, mărimea $2\Phi_j e_\alpha/m_\alpha$ poate fi pur şi simplu neglijată în comparaţie cu c_j^2, obţinînd o distribuţie care coincide cu distribuţia lui Maxwell. Putem însă trece la valorile mai mici ale lui $|c_j|$, făcînd substituţia

$$\sqrt{c_j^2 - 2\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\Phi_j} = c_j\sqrt{1 - 2\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\frac{\Phi_j}{c_j^2}} \approx c_j - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\frac{\Phi_j}{c_j}.$$

În final ne va rămîne să integrăm în raport cu c_j, între limitele $-\infty \leqslant c_j \leqslant -c_{i2}$ şi $\infty \geqslant c_j \geqslant c_{j2}$, expresia

$$A \exp\left\{-\beta\left[(c_i - \alpha_j)^2 + 2\alpha_j\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\frac{\Phi_j}{c_j}\right]\right\}.$$

Rezultatul va fi de asemenea finit, deoarece intervalul de integrare este dispus departe de unicul punct, punctul nul, unde funcţia de sub semnul de integrare poate avea o singularitate.

Al treilea domeniu de variaţie a lui c_j poate fi numit intermediar; în acest domeniu, $2\Phi_j e_\alpha/m_\alpha$ are acelaşi ordin de mărime ca c_j^2. Acest domeniu nu poate conţine nici un fel de singularităţi şi el însuşi are dimensiuni finite, astfel că integrala care ne interesează va rămîne finită şi aici. Prin urmare, va fi finită şi suma integralelor în toate domeniile, adică integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha \, dc_j$. Integrarea în raport cu celelalte variabile $c_k (k \neq j)$ este perfect analogă integrării în raport cu c_j, astfel încît convergenţa integralei $\int F \, dc$ poate fi considerată ca fiind demonstrată.

Din formulele (11) şi (12) rezultă că

$$F_\alpha = A \exp\left[-\beta \sum_{j=1}^{3} (z_j - \alpha_j)^2\right]$$

în care caz $c_j \, dc_j = z_j \, dz_j$. De aici, la rîndul său, rezultă că componenta arbitrară a vitezei macroscopice, definită de expresia

$$v_j = \frac{\int c_j F_\alpha \, dc}{\int F_\alpha \, dc}, \tag{14}$$

va fi în cazul nostru de asemenea finită si diferită de zero numai dacă $\alpha_j \neq 0$. În mod analog pot fi analizate şi expresiile pentru momentele de ordin mai ridicat care determină temperatura, tensiunea, fluxul termic etc.

Rezumînd putem spune că, dacă potenţialul electric $\Phi(\mathbf{x})$ este o funcţie de coordonate dată de tipul funcţiei (9), atunci ecuaţia (2) are o soluţie exactă (11), care posedă toate proprietăţile-limită necesare, corespunde une viteze macroscopice diferite de zero şi dă valori finite ale densităţii, temperaturii şi altor caracteristici macroscopice. Firește, întrucît în expresia (11) figurează potenţialul Φ care depinde de coordonate, toate caracteristicile macroscopice vor depinde de asemenea într-o măsură sau alta de coordonate.

De altfel trebuie să reamintim din nou că soluţia (11) este exactă numai în raport cu ecuaţia (2) şi nu în raport cu sistemul de ecuaţii al lui Vlasov (2) şi (3). Cu alte cuvinte, în prezenţa unei asemenea „soluţii", ecuaţia lui Poisson (3), în cazul general, rămîne nesatisfăcută. Dar o dată cu recunoaşterea acestui fapt este natural să admitem posibilitatea efectuării unor iteraţii succesive care îşi propun ca scop să ţină seama de autocoordonarea cîmpului electric. Asemenea iteraţii s-ar reduce la aceea că, după obţinerea expresiilor lui F_e şi F_i pentru o formă dată a potenţialului, aceste expresii s-ar substitui în membrul al doilea al ecuaţiei (3), din care apoi poate fi determinată forma mai exactă a potenţialului Φ. După aceasta, la rîndul său, s-ar putea determina din nou funcţiile de

distribuţie F_α etc. În principiu, acest proces poate fi realizat şi dacă nu se iau în considerare cazuri cînd dimensiunea caracteristică a corpului este mult mai mică decît raza lui Debye, atunci este foarte probabil că succesiunea iteraţiilor va fi rapid convergentă.

Din păcate însă, chiar după prima iteraţie expresia potenţialului îşi pierde forma pe care a avut-o în formula (9), astfel încît nu se va mai putea scrie o soluţie de tipul (11). Cea mai simplă cale de a ieşi din această dificultate constă în aceea ca soluţia ecuaţiei lui Poisson să fie aproximată de fiecare dată cu o expresie de tipul (9). Pentru problemele unidimensionale, aceasta se realizează automat, însă la rezolvarea problemelor plane sau spaţiale pot apărea unele dificultăţi.

În încheiere este interesant de menţionat o particularitate a mişcărilor plasmei fără ciocniri care apare la reprezentarea funcţiilor de distribuţie F_α după formula (11). Printre particulele din care este formată plasma există totdeauna particule „lente" la care semnul sarcinii coincide cu semnul potenţialului, iar modulul vitezelor lor $|c_j|$ este atît de mic, încît expresia de sub radical din (11) va fi negativă. Aceasta, la rîndul său, înseamnă că dependenţa funcţiei de distribuţie a particulelor lente de coordonate va avea un caracter vibratoriu.

4. *Scurte concluzii.* Analiza efectuată mai sus dovedeşte că pentru rezolvarea aproximativă a problemelor scurgerii în jurul corpurilor încărcate electric a unui curent de gaz ionizat foarte rarefiat putem utiliza un aparat matematic comparativ simplu şi suficient de standardizat, analog aparatului teoriei scurgerilor liber moleculare ale gazelor neutre. Dacă se compară cele două metode expuse de noi, metoda linearizării şi metoda utilizării soluţiei exacte a ecuaţiei (2), atunci trebuie să preferăm ultima metodă, deoarece la o alegere reuşită a funcţiei $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ ea poate da, chiar fără iteraţii succesive, aspectul fizic suficient de exact al proceselor care se produc, cuprinzînd descrierea variaţiilor vibratorii ale caracteristicilor particulelor cu mişcare lentă. Dificultăţile legate de utilizarea acestei metode au în principal un caracter tehnic şi se referă la calcularea integralelor care definesc densitatea, viteza, temperatura şi alţi parametri macroscopici ai componenţilor gazului ionizat.

Primită la redacţie la 25 octombrie 1965.

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. Vlasov, *Despre vibraţiile gazului electronic*, Jurnal eksperimentalnoi i teoreticeskoi fiziki, *8*, 293 (1938).
2. G. Emmons (red.), *Bazele dinamicii gazelor*, Moscova, Edit. pentru literatură străină, 1963.

ASUPRA PROBLEMEI COMENZILOR OPTIMALE ALE AVIOANELOR CU DECOLARE ŞI ATERIZARE LA VERTICALĂ [1])

de T. HACKER
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

531.3

Se consideră problema determinării legii optime a comenzilor avioanelor cu decolare şi aterizare la verticală pentru ridicarea pînă la o înălţime dată şi accelerarea pînă la atingerea unei viteze orizontale date în timpul cel mai scurt sau cu un consum de carburant minim.
Întîi se fac unele consideraţii asupra variabilelor de comandă, se propune o generalizare teoretică a acestei noţiuni şi o clasificare adecvată. Se dau indicaţii privind utilizarea acestor variabile în construirea modelului matematic.
În continuare se consideră problema de optimum enunţată, completîndu-se rezultatele obţinute într-o lucrare anterioară privind aparatele cu axa de tracţiune orientabilă şi tratînd apoi cele cu direcţia tracţiunii fixă în raport cu aparatul. Drept variabile de comandă se folosesc cîte una sau mai multe din următoarele mărimi : cuplul de comandă longitudinală, mărimea şi direcţia tracţiunii, incidenţa, înclinarea traiectoriei faţă de orizontală.
În anexă se discută unele aspecte legate de construirea algoritmului de calcul.

1. INTRODUCERE

În [1] s-a studiat problema determinării legii de variaţie a mărimii şi direcţiei tracţiunii pentru a asigura cea mai rapidă şi mai economică urcare şi accelerare pentru cazul avioanelor cu decolare şi aterizare la verticală (DAV), avînd axa de tracţiune mobilă faţă de avion. În lucrarea de faţă ne propunem să completăm rezultatele obţinute în [1] şi

[1]) Publicată şi în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, *3* (1966) (în limba franceză).

să considerăm problema comenzilor optimale şi pentru avioanele DAV cu axa de tracţiune solidară cu aparatul.

Vom recapitula pentru început unele aserţiuni generale şi ipoteze expuse în [1], valabile şi pentru obiectul acestei lucrări.

Se vor considera aparatele la care tracţiunea principală furnizată de motoare asigură atît propulsia, cît şi sustentaţia (în parte sau integral) în evoluţiile specifice formulei DAV. Tracţiunea principală nu participă la comanda atitudinii aparatului, presupunîndu-se că rezultanta acesteia trece tot timpul prin centrul de greutate al aparatului. Comanda atitudinii unghiulare faţă de pămînt se realizează fie prin comenzi clasice (profundor, direcţie, eleroane) cînd viteza aerodinamică este suficientă pentru asigurarea eficienţei acestora, fie prin jeturi de gaze suplimentare convenabil dispuse, fie, în sfîrşit, combinat.

Pentru simplificarea expunerii, masa aparatului şi densitatea aerului se presupun constante ; pentru restul parametrilor fixaţi, forţele şi momentele aerodinamice se admit proporţionale cu pătratul vitezei la toate regimurile la care se ţine seama de acestea ; coeficienţii de portanţă, rezistenţă la înaintare şi de moment de tangaj se presupun independenţi de numărul Mach ; pentru coeficientul de portanţă se admite o variaţie liniară, iar pentru cel de rezistenţă la înaintare parabolică în funcţie de incidenţă. Tracţiunea se presupune independentă de regimul de zbor (în particular de viteză), depinzînd numai de admisia de gaze determinată prin comandă.

Optimumul va fi căutat în tot spaţiul fără impunerea vreunei restricţii deplasărilor orizontale.

Ca şi în [1], problema va fi abordată cu ajutorul metodei teoretice oferite de principiul maximului al lui L. S. Pontreaghin [2]. Pentru a fi posibilă aplicarea metodei, comenzile vor fi presupuse lipsite de inerţie, cu alte cuvinte se va admite că variabilele de comandă trec de la o valoare la o altă valoare oarecare instantaneu. Deci clasa variabilelor de comandă admise va fi aceea a funcţiilor continue pe porţiuni, curbele reprezentînd variabilele de comandă în funcţie de timp, admiţînd un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa întîi. În aceste puncte, sistemul de ecuaţii al mişcării comandate optimale va suferi variaţii structurale, aceste variaţii reprezentînd discontinuităţi ale derivatelor în raport cu timpul ale variabilelor de stare.

Este deosebit de important pentru a se putea trece la calcule efective (la programarea calculatorului) a se determina aceste puncte de discontinuitate ca puncte de racordare a arcelor ce compun traiectoria optimală. În acest scop este necesar a se construi funcţiile de comutare respective care vor intra în programul calculatorului. În cele ce urmează, legile de comutare se vor da sub formă de tabele pentru fiecare caz considerat.

Pentru început (§ 2) se vor face unele consideraţii asupra variabilelor de comandă, propunîndu-se o generalizare teoretică a acestei noţiuni şi o clasificare adecvată, şi se vor da unele indicaţii privind utilizarea acestor variabile în construirea modelului matematic.

În continuare, în paragrafele următoare se va considera problema determinării legii optime de comandă pentru atingerea unei înălţimi şi a

unei viteze orizontale date într-un interval de timp minim sau cu consum minim de combustibil, completîndu-se rezultatele obținute în [1] pentru avioanele cu direcția tracțiunii rezultante mobilă în planul de simetrie al aparatului (§ 3) și tratînd apoi cazul avioanelor DAV cu direcția tracțiunii fixă, paralelă cu axa de portanță nulă. Pentru acest din urmă caz se vor scrie ecuațiile generale ale mișcării longitudinale a aparatului în ipotezele amintite (§ 4) și se vor căuta legile optime de variație a mărimii tracțiunii (§ 5), a incidenței (§ 6) și a înclinării pantei traiectoriei (§ 7).

2. DESPRE VARIABILELE DE COMANDĂ

Un prim pas în construirea modelului matematic al unui proces complex îl constitue de obicei alegerea variabilelor considerate esențiale pentru aspectul tratat. În cazul dat al modelării zborului comandat, o parte din variabilele alese, variabilele de stare, vor caracteriza mișcarea mecanică a aparatului de zburat, iar restul legea de comandă. În cele ce urmează, modelele vor fi construite făcîndu-se abstracție de procesele de orice natură (mecanice, electrice, psihofiziologice etc.) care au loc în interiorul instalației de comandă, înlocuindu-le prin ipoteze ce fixează legătura funcțională dintre mărimile de intrare și cele de ieșire corespunzătoare acestei instalații. În felul acesta, variabilele de stare și cele de comandă vor fi, în general, mărimi de aceeași natură (geometrice, cinematice sau dinamice). Spre deosebire însă de variabilele de stare, cele de comandă vor figura în ecuații nu ca variabile dinamice, ci ca legături exterioare, funcții de timp, impuse sistemului. Este de notat însă că problemele de optimum nu implică în mod necesar considerarea unor astfel de sisteme deschise. Dimpotrivă, obținerea unor rezultate sintetizate, sub forma $u = u(t, x)$, unde vectorul u reprezintă variabilele de comandă, iar x pe cele de stare, ar corespunde unor necesități reale legate de programarea blocurilor de calcul ale instalațiilor de comandă automată. Dar considerarea în probleme de optimizare a sistemelor închise se izbește de mari dificultăți matematice.

Se va admite că, într-un anumit domeniu determinat de considerente fizice, valoarea variabilelor de comandă poate fi impusă arbitrar în orice moment și se va căuta legea de variație în timp a acestora, optimă în raport cu cîte una dintre cele două cerințe amintite: asigurarea atingerii înălțimii și vitezei de croazieră în timp minim sau cu consum minim de combustibil.

Deci, pe de o parte, avem de-a face cu variabile de comandă, care pot fi impuse arbitrar, iar pe de alta de variabilele de stare, care rezultă unic determinate dacă sînt date: ecuațiile (corespunzătoare ipotezelor adoptate), un sistem de condiții inițiale (definit de problema concretă cercetată) și legea de variație a variabilelor de comandă. Totuși, întrucît, după cum s-a spus mai sus, cele două categorii de variabile reprezintă mărimi de aceeași natură fizică, va exista totdeauna un anumit grad de arbitrar în ceea ce privește alegerea variabilelor de comandă din totalitatea variabilelor esențiale ale problemei. Această alegere va fi dictată,

printre altele, şi de considerente formale legate de uşurarea rezolvării efective a problemei propuse. Înainte însă de a întreprinde examinarea acestui aspect, avînd o importanţă deosebită pentru obiectul acestei lucrări, se va propune în cele ce urmează o clasificare a variabilelor de comandă.

După cum s-a spus mai sus, în modelele matematice utilizate în această lucrare se face abstracţie de procesele din interiorul instalaţiei de comandă, procese care leagă mişcarea de comandă executată de pilot sau servomotor de efectul acestei mişcări asupra valorii „variabilei de comandă", mărime de aceeaşi natură cu unele variabile de stare. Dacă procesul neglijat, prin înlocuirea mişcării propriu-zise de comandă cu o „variabilă de comandă" în sensul arătat, este independent de restul variabilelor (de stare şi de comandă) ale sistemului, variabila de comandă respectivă o vom denumi directă. Ca exemplu de variabile de comandă directă se pot cita : unghiul de bracaj al profundorului, poziţia voletului de admisie la motoare sau însăşi tracţiunea în ipoteza independenţei acesteia de viteză şi de altitudine etc.

Se pot utiliza însă drept variabile de comandă şi unii parametri cinematici, a căror valoare este determinată de mişcarea de comandă prin intermediul modificării întregului tablou dinamic al obiectului comandat. Altfel spus, în acest caz lanţul care leagă mişcarea de comandă executată de pilot sau de servomotor de mărimea reprezentată de variabilele de comandă conţin elemente care depind cel puţin de una dintre variabilele de stare sau de comandă ale ecuaţiilor de mişcare. În asemenea cazuri vom spune că avem de-a face cu variabile de comandă indirectă. Evident, impunerea arbitrară a valorii variabilelor de comandă indirectă nu este, în general, compatibilă cu sistemul complet de ecuaţii construit pe baza ipotezelor fizice admise. Apare necesitatea adoptării unor ipoteze suplimentare, care, restrîngînd generalitatea problemei, să elimine incompatibilitatea impunerii unor valori arbitrare variabilei de comandă respective.

Astfel, de exemplu, pentru a se putea folosi drept variabilă de comandă incidenţa sau unghiul de tangaj, trebuie să se presupună că (*i*) forţele exterioare tangenţiale şi normale care acţionează asupra aparatului sînt independente de vitezele unghiulare respective ($\dot{\alpha}$, respectiv q)[2]) şi (*ii*) domeniul de variaţie al tuturor variabilelor de care depinde cuplul de comandă longitudinală (α, M, q, $\dot{\alpha}$ etc.) îi permit acestuia să ia în orice moment o valoare suficient de mare. Un exemplu de ipoteză suplimentară impusă de folosirea drept variabilă de comandă a înclinării traiectoriei va fi dat în § 7.

3. O COMPLETARE A REZULTATELOR OBŢINUTE ÎN [1]

În [1] s-au considerat avioanele cu decolare şi aterizare la verticală la care axa tracţiunii rezultante poate fi rotită în planul de simetrie al aparatului în jurul centrului de greutate. Fie φ unghiul format de trac-

[2]) Pentru semnificaţia simbolurilor nedefinite în text, vezi lista principalelor notaţii, dată la sfîrşitul articolului.

țiunea rezultantă și axa de portanță nulă pe care se ia ca sens pozitiv cel îndreptat dinspre bordul de fugă spre cel de atac. S-a studiat problema duratei minime a urcării pînă la altitudinea de croazieră și accelerării pînă la viteza de croazieră (în principiu pînă la o altitudine și o viteză orizontală de zbor date), precum și asigurarea consumului minim pentru realizarea acestei evoluții. În ambele probleme s-a căutat optimizarea legii de variație a mărimii tracțiunii (înlocuită în calcule prin mărimea adimensională $\tau = T/mg$, $m = \text{const.}$, $g = \text{const.}$) și a unghiului φ în ipoteza atitudinii longitudinale constante.

În cele ce urmează se renunță la ipoteza simplificatoare $\theta = \text{const.}$, deci în locul unui sistem de ordinul trei (sistemul (2.1) din [1]) se va considera următorul sistem de ordinul cinci:

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= -(1-\eta)\,k_1V^2 - \eta\,(k_2 + k_3\alpha^2)V^2 - g\sin\gamma + g\,\tau\cos(\varphi+\alpha) \equiv \mathcal{V},\\
\frac{dh}{dt} &= V\sin\gamma,\\
\frac{d\gamma}{dt} &= (1-\eta)k_4\,V + \eta k_5\,V\alpha - \frac{1}{V}g\cos\gamma + \frac{1}{V}g\tau\,\sin(\varphi+\alpha) \equiv \Gamma, \qquad (3.1)\\
\frac{d\alpha}{dt} &= q - \frac{d\gamma}{dt} \equiv \mathcal{A},\\
\frac{dq}{dt} &= \mu_1(V,\ \alpha,\ q) + \eta\,k_6\,V\,\tau\sin(\varphi+\alpha) + \mu_2(V,\ \alpha,\ \delta_e,\ \delta_r) \equiv Q,
\end{aligned}$$

unde

$$\eta = \begin{cases} 1 \text{ pentru } -\alpha^{(1)} \leqslant \alpha \leqslant \alpha^{(2)}, \\ 0 \text{ pentru rest}, \end{cases}$$

$$k_1 = \frac{1}{2}\rho S C_{D_1};\ k_2 = \frac{1}{2}\rho S C_{D_0};\ k_3 = \frac{\rho S C_{L_\alpha}^2}{2\pi\lambda};\ k_4 = \frac{1}{2}\rho S C_{L_1},$$

$$k_5 = \frac{1}{2}\rho S C_{L_\alpha};\ k_6 = -\frac{\rho g S C_{m_{\dot\alpha}}}{2B}.$$

Cu aproximația unui factor constant (momentul de inerție longitudinal B), suma primilor doi termeni ai membrului al doilea al ultimei ecuații reprezintă momentul aerodinamic de tangaj, iar μ_2 cuplul de comandă longitudinală. Se consideră ca variabile de comandă mărimile τ, φ și μ_2, supuse următoarelor constrîngeri:

$$\tau_{\min} \leqslant \tau \leqslant \tau_{\max}\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} + \varepsilon\ \ \mu_2^{(1)}(V,\ \alpha) \leqslant \mu_2 \leqslant \mu^{(2)}(V,\ \alpha), \qquad (3.2)$$

unde ε este un unghi (constant) dat $\left(\text{de obicei } \varepsilon < \frac{\pi}{4}\right)$.

Fie t_1 durata de timp necesară ca avionul să atingă cu consum minim de carburant o înălțime dată h_1, cu o viteză orizontală dată V_1.

Presupunînd consumul în unitatea de timp funcție numai de tracțiunea totală dezvoltată de motoare, respectiv de parametrul adimensional τ, fie $f(\tau)$ această funcție, problema de consum minim revine la minimizarea funcționalei:

$$J = \int_0^{t_1} f(\tau)\, \mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

Se presupune că, pentru valori mici ale argumentului, funcția $f(\tau)$ este mică (eventual că $f(0) = 0$), iar derivata întîi foarte mare (în particular, $\lim_{\tau \to 0} f'(\tau) = \infty$). Se presupune de asemenea că $\lim_{\tau \to \infty} \frac{f(\tau)}{\tau} = 0$ și că derivata a doua $f''(\tau)$ nu-și schimbă semnul. De exemplu, funcția f poate fi de forma $f(\tau) = \varkappa \tau^{\beta}$, cu $\varkappa > 0$ și $0 < \beta < 1$.

Conform principiului maximului, legile optime de variație ale variabilelor de comandă alese, dacă există, trebuie să fie căutate printre cele care asigură în orice moment ca funcția

$$H = -f(\tau) + \psi_1 \mathcal{V} + \psi_2 V \sin \gamma + \psi_3 \Gamma + \psi_4 \mathcal{A} + \psi_5 Q \tag{3.4}$$

să atingă valoarea sa maximă în raport cu variabilele de comandă alese, variabilele auxiliare ψ_i satisfăcînd sistemul adjunct

$$\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial V}, \quad \frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial h}, \quad \frac{\mathrm{d}\psi_3}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial \gamma},$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi_4}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}\psi_5}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{3.5}$$

Evident, H va avea valoarea maximă în raport cu variabilele de comandă (cu variabilele de stare și cele auxiliare considerate fixate) o dată cu funcția

$$\mathcal{H} = -f(\tau) + \psi_1 g \tau \cos(\varphi + \alpha) + \frac{\psi_3 - \psi_4}{V} g \tau \sin(\varphi + \alpha) +$$

$$+ \psi_5 [\eta k_6 V \tau \sin(\varphi + \alpha) + \mu_2], \tag{3.6}$$

obținută din H prin omiterea termenilor care nu conțin variabilele de comandă. Mai departe, făcînd substituția

$$\psi_1 g = \sigma \sin \psi, \qquad \frac{g(\psi_4 - \psi_3)}{V} - \psi_5 \eta k_6 V = \sigma \cos \psi, \tag{3.7}$$

expresia funcției $\mathcal{H}$ devine

$$\mathcal{H} = -f(\tau) + \sigma \tau \sin(\psi - \varphi - \alpha) + \psi_5 \mu_2. \tag{3.8}$$

Se vede imediat că, pentru a asigura atingerea în orice moment a valorii maxime a funcției $\mathcal{H}$, legea de variație a variabilei de comandă μ_2 va fi, într-un fel, de tipul „tot sau nimic", adică în orice moment μ_2 va avea fie valoarea maximă ($\mu^{(2)}(V, \alpha)$), fie valoarea minimă ($\mu_2^{(1)}(V, \alpha)$), permise de valorile instantanee ale variabilelor de stare V și α, după cum semnul variabilei auxiliare ψ_5 va fi pozitiv sau negativ (tabela 1).

Tabela 1

Legea de variație optimă a cuplului de comandă longitudinală

Funcția de comutație ψ_5	μ_2 optim
> 0	$\mu_2^{(2)}(V, \alpha)$
< 0	$\mu_2^{(1)}(V, \alpha)$

După cum s-a arătat în [1], legea de variație a tracțiunii supuse constrîngerii $\tau_{min} \leqslant \tau \leqslant \tau_{max}$ (cu τ_{min} și τ_{max} constante, mărimea tracțiunii fiind, prin ipoteză, independentă de regimul de zbor), care să asigure minimizarea funcționalei (3.3), este de tipul „tot sau nimic" (*bang-bang*), tracțiunea luînd valoarea maximă sau minimă după cum funcția respectivă de comutare este mai mare sau mai mică decît o anumită valoare critică egală cu $f(\tau_{max})/\tau_{max}$.

Renunțînd însă la ipoteza $\theta = \text{const}$, funcția de comutare va fi $\sigma \sin(\psi - \varphi - \alpha)$, care deci nu va depinde numai de variabilele auxiliare, ci și de variabilele de stare V (prin intermediul lui σ și ψ, vezi (3.6)) și de cea de comandă φ. Prin urmare, este necesar a se stabili în prealabil legea optimă de variație a unghiului φ (a orientării tracțiunii). Întrucît σ este pozitiv, din (3.8) rezultă că valoarea variabilei de comandă φ pentru care funcția $\mathcal{H}$ să fie maximum depinde de funcția $\psi - \alpha$, conform primelor două coloane ale tabelei 2. Legea optimală respectivă a mărimii tracțiunii rezultă atunci conform valorilor obținute pe baza primelor două coloane pentru funcția de comutare $\sum = \sigma \sin(\psi - \varphi - \alpha)$.

Variabilele de comandă τ, φ și μ_2 care să realizeze o durată minimă a evoluției considerate, dacă există, trebuie, conform teoremei lui Pontreaghin, să facă maximum funcția

$$\mathcal{H} = \sigma\tau \sin(\psi - \varphi - \alpha) + \psi_5\mu_2. \tag{3.9}$$

În ceea ce privește legile de variație optime pentru φ și μ_2, rămîn valabile rezultatele obținute pentru cazul problemei de consum minim, redate în tabela 1 și în primele două coloane ale tabelei 2. Pentru τ optim, din (3.9) ar rezulta o variație optimă de tipul „tot sau nimic", adică $\tau_{opt} = \tau_{max}$ sau $\tau_{opt} = \tau_{min}$, după cum funcția de comutare Σ sau, ceea ce revine la același lucru, $\sin(\psi - \varphi_{opt} - \alpha)$ este pozitivă sau negativă. Funcția $\sin(\psi - \varphi_{opt} - \alpha)$ este pozitivă în primele trei rînduri ale tabelei 2 și negativă în ultimul. Or, intuitiv pare evident că, pentru asigurarea duratei minime a evoluției avînd drept scop atingerea unei altitudini și a unei

Tabela 2

Legile optime de variație a mărimii și a orientării tracțiunii totale*)

Condițiile de comutare pentru φ optimum	φ optimum	Condițiile de comutare pentru τ optimum ($\Sigma = \sigma \sin(\psi - \varphi - \alpha)$)	τ optimum
$2k\pi \leqslant \psi - \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	0	$\Sigma \leqslant \frac{f(\tau_{max})}{\tau_{max}}$ $\Sigma \geqslant \frac{f(\tau_{max})}{\tau_{max}}$	0 τ_{max}
$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant \psi - \alpha \leqslant \pi + \varepsilon + 2k\pi$	$\psi - \alpha - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\Sigma \geqslant \frac{f(\tau_{max})}{\tau_{max}}$ $\Sigma \leqslant \frac{f(\tau_{max})}{\tau_{max}}$	τ_{max} 0
$\pi + \varepsilon + 2k\pi \leqslant \psi - \alpha \leqslant \frac{3\pi}{2} + \varepsilon + 2k\pi$	$\frac{\pi}{2} + \varepsilon$	$\Sigma \leqslant \frac{f(\tau_{max})}{\tau_{max}}$ $\Sigma \geqslant \frac{f(\tau_{max})}{\tau_{max}}$	0 τ_{max}
$\frac{3\pi}{2} + \varepsilon + 2k\pi \leqslant \psi - \alpha \leqslant 4k\pi$	indiferent **)	$\Sigma < 0 < \frac{f(\tau_{max})}{\tau_{max}}$	0

*) $k = 0, 1, 2, \ldots$

**) În ultimul rînd al tabelei orientarea tracțiunii rezultă indiferentă *a posteriori*, întrucît, avînd $\Sigma < 0 < f(\tau_{max})/\tau_{max} \cdot \tau_{opt} = 0$.

viteze orizontale date superioare altitudinii și vitezei din momentul inițial (în particular $h(t_0) = 0$, $V(t_0) = 0$), mărimea forței de tracțiune trebuie să aibă tot timpul valoare maximă. Deci apariția situației definite în ultimul rînd al tabelei ($3\pi/2 + \varepsilon + 2k\pi \leqslant \psi - \alpha \leqslant 4k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$) nu este probabilă. De aceea pentru simplificarea calculelor pare indicat să se considere la programarea calculatorului pentru problema de timp minim numai primele trei rînduri ale tabelei 2, renunțîndu-se la variabila de comandă τ.

4. AXA DE TRACȚIUNE SOLIDARĂ CU CORPUL APARATULUI. ECUAȚII GENERALE

Pe baza ipotezelor adoptate și presupunîndu-se în plus că direcția tracțiunii rezultante este tot timpul paralelă cu axa de portanță nulă a avionului cu suprafețele de comandă nebracate, ecuațiile mișcării coman-

date din planul de simetrie al aparatului pot fi scrise sub forma [3])

$$\frac{dV}{dt} = -(k_2 + k_3\alpha^2)V^2 - g\sin\gamma + g\tau\cos\alpha \equiv \mathcal{V}_1,$$

$$\frac{dh}{dt} = V\sin\gamma,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = k_5 V\alpha - \frac{g\cos\gamma}{V} + \frac{g\tau\sin\alpha}{V} \equiv \Gamma_1, \tag{4.1}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = q - \frac{d\gamma}{dt} = \mathcal{A}_1,$$

$$\frac{dq}{dt} = \mu_1(V, \alpha, q) + k_6 V\,\tau\sin\alpha + \mu_2(V, \alpha, \delta_e, \delta_r) \equiv Q.$$

Variabilele de comandă vor fi alese cîte una sau mai multe din următoarele mărimi : raportul dintre tracţiune şi greutate (τ) (greutatea fiind considerată constantă) ; incidenţa avionului, α ; unghiul γ de înclinare a traiectoriei şi raportul dintre cuplul de comandă longitudinal şi momentul de inerţie longitudinal, μ_2 (momentul de inerţie B fiind considerat constant). Aceste variabile de comandă se consideră supuse următoarelor constrîngeri :

$$\begin{aligned} &0 \leqslant \tau \leqslant \tau_{max}, \quad \tau_{max} = \text{const.}, \\ &-\alpha^{(1)} \leqslant \alpha \leqslant \alpha^{(2)}, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{sau} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ &\mu_2^{(1)}(V, \alpha) \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_2^{(2)}(V, \alpha). \end{aligned} \tag{4.2}$$

5. URCARE ŞI ACCELERARE CU CONSUM MINIM DE CARBURANT

Se caută minimizarea funcţionalei J, formula (3.3), prin comanda tracţiunii şi momentului longitudinal. Legile optime de variaţie ale funcţiilor $\tau(t)$ şi $\mu_2(t)$, dacă există, asigură atingerea valorii maxime în raport cu τ şi μ_2 a funcţiei

$$\mathcal{H}_1 = -f(\tau) + g\tau\left[\psi_1\cos\alpha + \frac{1}{V}(\psi_3 - \psi_4 + k_7\,\psi_5 V^2)\sin\alpha\right] + \psi_5\mu_2 \tag{5.1}$$

cu $k_7 = \dfrac{k_6}{g} = -\dfrac{\varrho S}{2B} C_{m\dot{\alpha}}$, sau, făcînd schimbarea de variabile

$$g\tau\psi_1 = \sigma\sin\psi\,; \quad \frac{g\tau}{V}(-\psi_3 + \psi_4 - k_7\,\psi_5 V^2) = \sigma\cos\psi \tag{5.2}$$

[3]) Pentru k_2, k_3, k_5 şi k_6 vezi definirea notaţiilor folosite pentru sistemul (3.1) (p. 703). Ca şi în sistemul (3.1), în ultima ecuaţie a sistemului (4.1) suma primilor doi termeni ai membrului al doilea reprezintă momentul aerodinamic de tangaj, iar μ_2 cuplul de comandă longitudinală, şi unul şi celălalt, cu aproximaţia factorului constant B.

a funcţiei

$$\mathcal{H}_1 = -f(\tau) + \tau\sigma\sin(\psi - \alpha) + \psi_5\mu_2. \tag{5.3}$$

Se vede imediat că pentru μ_2 se obţine un rezultat identic celui corespunzător cazului axei de tracţiune orientabile, fiind valabilă tabela 1 din paragraful precedent. Un rezultat identic se obţine în ceea ce priveşte legea de variaţie optimă a cuplului de comandă longitudinală şi pentru problema duratei minime.

Legea optimă de variaţie a funcţiei $\tau(t)$ este şi în acest caz de tip „tot sau nimic", cu funcţia de comutare avînd expresia $\sigma\sin(\psi - \alpha)$, cu aceeaşi valoare critică, egală cu $f(\tau_{max})/\tau_{max}$ ca în cazul considerat în paragraful precedent dacă $f(\tau)$ are proprietăţile enunţate în acel paragraf. Reamintim (vezi [1], p. 439) că, pentru funcţiile $f(\tau)$ cu proprietăţile amintite, funcţia de τ

$$\mathcal{H}_2(\tau) = -f(\tau) + \tau\sigma\sin(\psi - \alpha)$$

poate fi reprezentată printr-o familie de curbe depinzînd de parametrul $\Sigma_1 = \sigma\sin(\psi - \alpha)$, care are alura arătată în figura 1. Valoarea critică a parametrului Σ_1 va fi cea pentru care curba reprezentativă intersectează axa absciselor în punctul $\tau = \tau_{max}$, adică

$$\Sigma_{1crit} = \frac{f(\tau_{max})}{\tau_{max}}.$$

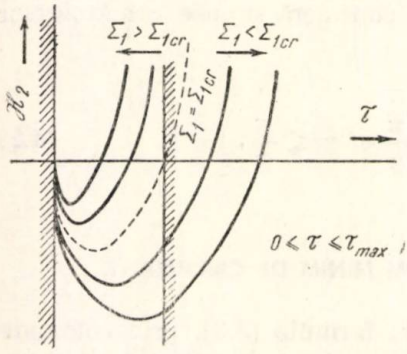


Fig. 1

Într-adevăr, se vede imediat că, în cazul limitării indicate (4.2) a comenzii τ, pentru $\Sigma_1 > \Sigma_{1crit}$, $\mathcal{H}_2$ are cea mai mare valoare la intersecţia curbei $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2(\tau)$ cu dreapta $\tau = \tau_{max}$ şi deci $\tau_{opt} = \tau_{max}$, iar pentru $\Sigma_1 < \Sigma_{1crit}$ cea mai mare valoare a lui $\mathcal{H}_2$ în domeniul $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_{max}$ este cea din origine şi deci $\tau_{opt} = 0$. Rezultatul privind variabila de comandă τ este recapitulat în tabela 3.

Tabela 3

Legea optimă de variaţie a mărimii forţei de tracţiune (avînd direcţia paralelă cu axa de portanţă nulă a aparatului)

Funcţia de comutare $\Sigma_1 = \sigma\sin(\psi - \alpha)$	τ optim
$\geqslant \frac{f(\tau_{max})}{\tau_{max}}$	τ_{max}
$\leqslant \frac{f(\tau_{max})}{\tau_{max}}$	0

6. URCARE ŞI ACCELERARE ÎN TIMP MINIM PRIN COMANDA INCIDENŢEI

În locul variabilelor de comandă directă δ_e şi δ_r (bracajul profundorului şi parametrul de control al comenzii prin jeturi) se va folosi variabila de comandă indirectă (incidenţa avionului), admiţîndu-se ipotezele suplimentare amintite în § 2 (forţele aerodinamice sînt independente de $\dot{\alpha}$ şi valorile cuplului de comandă longitudinală care să asigure cu aproximaţie mulţumitoare îndeplinirea ipotezei că $\alpha(t)$ este o funcţie continuă pe porţiuni în intervalul $[-\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}]$ să fie compatibile cu domeniul de variaţie al parametrilor de care depinde μ_2).

Cu α variabilă de comandă ($\alpha(t)$ considerat ca legătură exterioară impusă sistemului), din sistemul (4.1) se elimină ecuaţia a patra şi se separă sistemul format din primele trei ecuaţii, care descriu mişcarea centrului de greutate al aparatului, de ultima ecuaţie, care reprezintă mişcarea longitudinală în jurul centrului de greutate. Se va considera, desigur, sistemul de ecuaţii care modelează mişcarea centrului de greutate. Unghiurile $\alpha^{(1)}$ şi $\alpha^{(2)}$ se admit suficient de mici pentru a se putea neglija termenii în α^n cu $n \geqslant 3$. Atunci sistemul considerat va fi de forma

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= (k_2 + k_3\alpha^2)V^2 - g\sin\gamma + g\tau\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \equiv \mathcal{O}_2, \\
\frac{dh}{dt} &= V\sin\gamma, \\
\frac{d\gamma}{dt} &= k_5 V\alpha - \frac{g\cos\gamma}{V} + \frac{g\tau\alpha}{V} = \Gamma_2.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Conform principiului maximului pentru legea optimă de variaţie a lui α, funcţia

$$H_2 = \psi_1\mathcal{O}_2 + \psi_2 V\sin\gamma + \psi_3\Gamma_2,$$

unde ψ_i satisfac ecuaţiile

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial V}, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial h}, \quad \frac{d\psi_3}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial\gamma},$$

îşi atinge în fiecare moment valoarea sa maximă, sau, ceea ce revine la acelaşi lucru, $\alpha(t) = \alpha_{opt}(t)$ realizează maximul funcţiei

$$\mathcal{H}_2 = -\psi_1\alpha^2\left(k_3V^2 + \frac{g\tau}{2}\right) + \psi_3\alpha\left(k_5V + \frac{g\tau}{V}\right). \tag{6.2}$$

Să notăm $\varkappa(V, \psi_1, \psi_3) = \dfrac{\psi_3\left(k_5V + \dfrac{g\tau}{V}\right)}{2\psi_1\left(k_3V^2 + \dfrac{g\tau}{2}\right)}$.

Atunci se poate arăta uşor că traiectoria optimală va fi formată din arce de-a lungul cărora incidenţa este maximă, din arce cu incidenţa minimă şi din arce cu incidenţa variabilă egală cu $\varkappa(V, \psi_1, \psi_3)$. Condiţiile de racordare sînt date în tabela 4.

Tabela 4

Variaţia optimă a incidenţei pentru realizarea duratei minime a urcării şi accelerării

Condiţiile de comutare			α optim
ψ_1	ψ_3	$\varkappa(V, \psi_1, \psi_3)$	
$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\geqq \alpha^{(2)}$	$\alpha^{(2)}$
		$\leqq \alpha^{(2)}$	$\varkappa$
$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq -\alpha^{(1)}$	$-\alpha^{(1)}$
		$\geqq -\alpha^{(1)}$	$\varkappa$
$\leqq 0$	$\geqq 0$	indiferent	$\alpha^{(2)}$
$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\geqq \frac{1}{2}(\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)})$	$-\alpha^{(1)}$
		$\leqq \frac{1}{2}(\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)})$	$\alpha^{(2)}$

7. URCARE ŞI ACCELERARE ÎN TIMP MINIM PRIN COMANDA ÎNCLINĂRII TRAIECTORIEI

Pentru obţinerea unui rezultat cu ajutorul metodicei indicate este necesar a se integra (bineînţeles prin procedee aproximative) sistemul format din ecuaţiile mişcării comandate considerate (de exemplu (3.1)) şi din ecuaţiile sistemului adjunct respectiv ((3.5) în cazul exemplului dat) pe baza condiţiilor iniţiale privind variabilele de stare şi a condiţiilor din momentul final (sau şi a unor condiţii de transversalitate), care să compenseze lipsa unor condiţii iniţiale pentru variabilele auxiliare ψ_i. Unele aspecte de calcul privind rezolvarea acestor probleme bilocale vor fi date în anexă. Totuşi, după cum s-a văzut, se pot obţine unele informaţii privind traiectoria optimală căutată şi fără integrare. Astfel se poate cunoaşte natura arcelor posibile ale acestei traiectorii. Pentru obţinerea unor astfel de informaţii privind traiectoria centrului de greutate corespunzătoare atingerii unei înălţimi şi a unei viteze orizontale date în timp minim, se va folosi în cele ce urmează drept variabilă de comandă (indirectă) unghiul γ de înclinare a traiectoriei faţă de orizontală. Substituind variabilelor de comandă directă (δ_e şi δ_r) o variabilă de comandă indirectă (γ), se suprimă din sistemul de ecuaţii al mişcării comandate (4.1) ecuaţiile care determină comportarea acesteia din urmă dacă legea de variaţie a

comenzilor directe este dată. Dar o asemenea suprimare ar putea da loc la incompatibilitate dacă nu s-ar adopta ipoteze suplimentare care s-o justifice. Astfel, în cazul dat, prin alegerea lui γ drept variabilă de comandă (în locul unora directe, cum ar fi δ_e şi δ_r) din sistemul (4.1) se suprimă ecuaţiile 3 şi 5 (relative la γ şi q) şi ecuaţia a patra, relativă la α, care conţine variabila q. Dar, întrucît α figurează şi în prima ecuaţie, suprimarea celor trei ecuaţii menţionate trebuie să fie compensată prin impunerea, ca ipoteză, a unei relaţii între α, γ, V etc., justificate prin

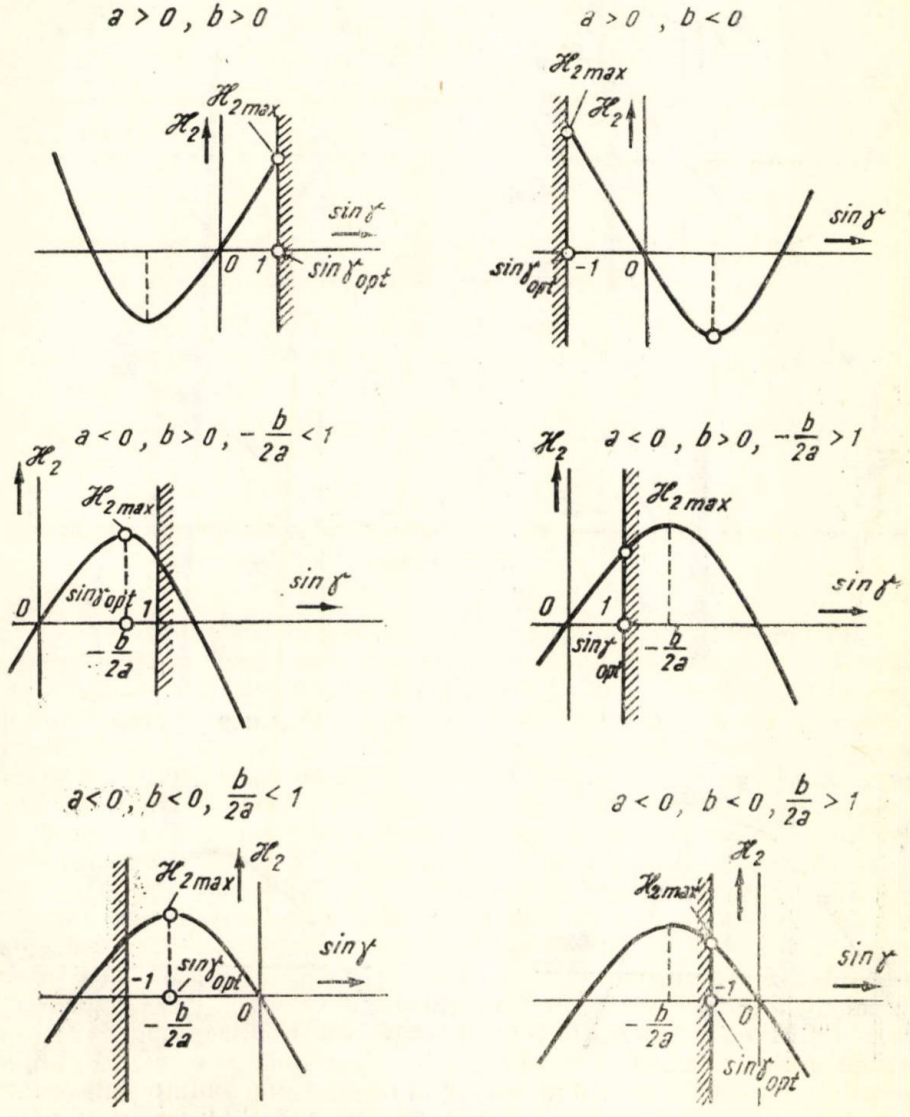


Fig. 2

considerente fizice. Astfel vom presupune, pentru eliminarea variabilei de stare α, că ea satisface în fiecare moment relaţia

$$\alpha = \frac{g \cos \gamma}{k_5 V^2 + g \tau}, \tag{7.1}$$

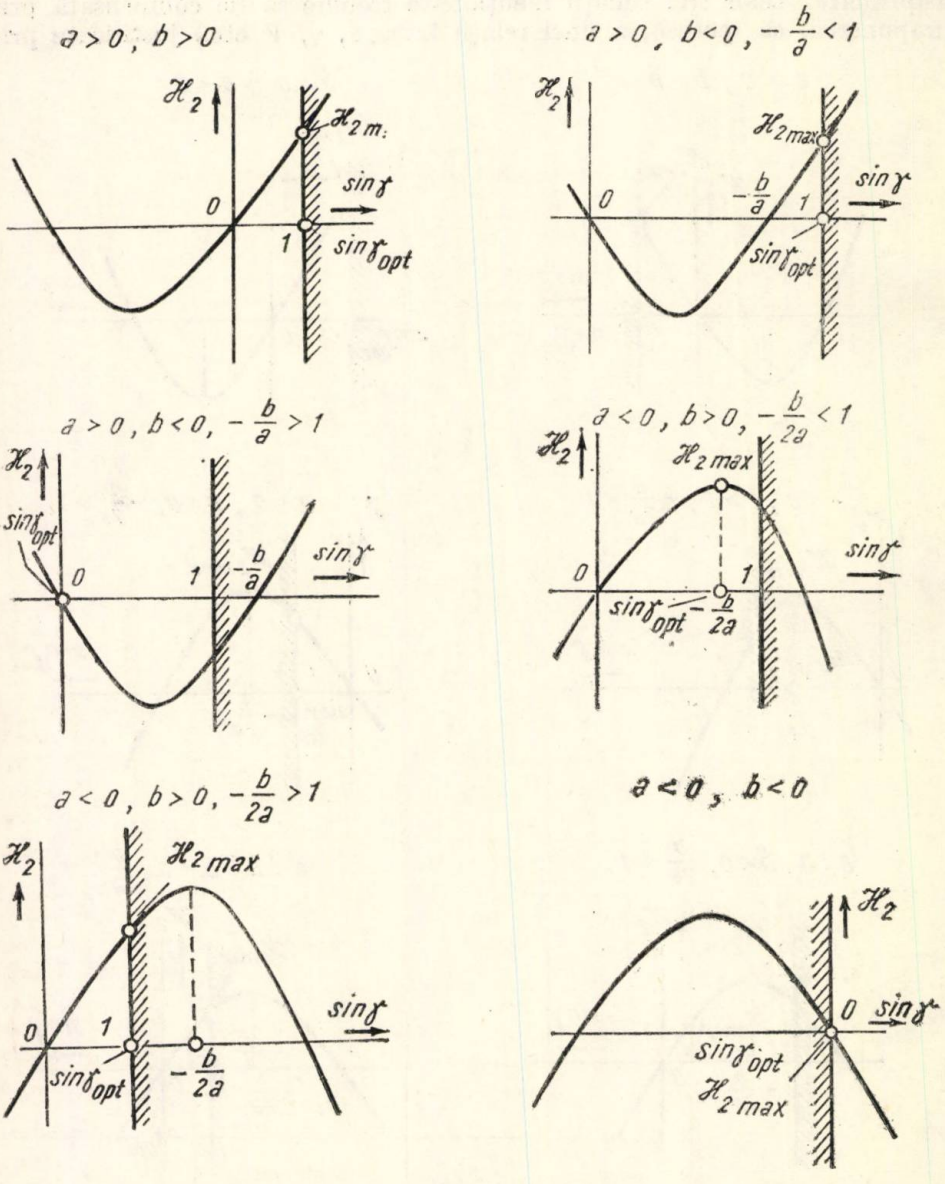


Fig. 3

ceea ce corespunde ipotezelor fizice că accelerația centripetă de-a lungul traiectoriei optimale este neglijabilă și că incidența este suficient de mică pentru a putea înlocui funcția sinus prin argumentul ei. În felul acesta, sistemul de ecuații al mișcării comandate longitudinale considerate va putea fi redus la forma următoare :

$$\frac{dV}{dt} = -\left[k_2 + \frac{k_3 g^2 \cos^2\gamma}{(k_5 V^2 + g\tau)^2}\right] V^2 - g\sin\gamma + g\tau\left[1 - \frac{g^2\cos^2\gamma}{2(k_5 V^2 + g\tau)^2}\right], \quad (7.2)$$

$$\frac{dh}{dt} = V\sin\gamma.$$

Tabela 5

Variația optimă a înclinării traiectoriei pentru realizarea duratei minime

Domeniul admis al variabilei de comandă γ	Condițiile de comutare			γ optim
	a	b	$\frac{b}{2a}$	
$-\frac{\pi}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{2}$	> 0	> 0	indiferent	$\frac{\pi}{2}$
	> 0	< 0	indiferent	$-\frac{\pi}{2}$
	< 0	> 0	> -1	$\arcsin\left(-\frac{b}{2a}\right)$
			< -1	$\frac{\pi}{2}$
	< 0	< 0	< 1	$\arcsin\left(-\frac{b}{2a}\right)$
			> 1	$-\frac{\pi}{2}$
$0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{2}$	> 0	> 0	indiferent	$\frac{\pi}{2}$
	> 0	< 0	$> -\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
			$< -\frac{1}{2}$	0
	> 0	> 0	> -1	$\arcsin\left(-\frac{b}{2a}\right)$
			< -1	$\frac{\pi}{2}$
	< 0	< 0	indiferent	0

Legea optimă de variație a unghiului γ va trebui căutată printre cele pentru care funcția

$$\mathcal{H}_3 = a \sin^2\gamma + b \sin\gamma \tag{7.3}$$

este maximum în tot intervalul de timp cît durează evoluția.

Sînt posibile următoarele situații, puse în evidență cu ajutorul diagramelor $\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_3(\sin\gamma)$: pentru $-\frac{\pi}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{2}$ ca în figura 2, iar pentru $0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{2}$ ca în figura 3.

Rezultatele sînt rezumate în tabela 5.

ANEXĂ

ASPECTE DE CALCUL

Pentru fixarea ideilor ne vom referi la sistemul (4.1), cu condițiile inițiale și finale indicate în tabela 6.

Tabela 6

t	V	h	γ	α	q
t_0	V_0 *)	h_0 *)	$\gamma_0 = \frac{\pi}{2}$	$\alpha_0 = 0$	$q_0 = 0$
liber (t_1)	V_1	h_1	$\gamma_1 = 0$	α_1	liber

*) Din cauza expresiei lui Γ_{12} (4.1), V_0 se alege diferit de zero (dar totuși foarte mic). Deci drept moment inițial se consideră nu cel al dezlipirii de sol, ci unul ulterior, dar foarte apropiat. În consecință, și h_0 va fi diferit de zero (și mic).

Pentru rezolvarea problemei de optimum (considerată, de exemplu, în § 5) se integrează sistemul format din ecuațiile (4.1) și ecuațiile adjuncte corespunzătoare pentru cinci condiții inițiale date (cele din tabela 6) și pentru cinci condiții inițiale libere, corespunzînd variabilelor auxiliare ψ_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Algoritmul întocmit pentru integrarea numerică conține, evident, și relațiile de comutare indicate (pentru exemplul amintit în tabelele 1 și 3), conform cărora sistemul se modifică în funcție de soluție.

Tehnica pentru o problemă bilocală ca cea enunțată este cea prin *încercare* și *eroare*, avîndu-se de determinat un număr de șase parametri liberi: momentul final t_1 și cele cinci condiții inițiale corespunzătoare variabilelor auxiliare ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_5. Pentru aceasta se dispune de următoarele șase relații suplimentare, intrînd de asemenea în algoritmul de calcul: patru condiții finale date pentru variabilele de stare V, h, γ și α, indicate în tabela 6, o relație de transversalitate corespunzătoare valorii finale libere a variabilei de stare q privind valorile finale ale variabilelor auxiliare, în cazul dat, $\psi_5(t_1) = 0$ și o relație derivată din principiul maximului. Se notează $\mathcal{M}(x, \psi) = \sup_{u \in U} H_1(x, \psi, u)$, unde U reprezintă domeniul variabilelor de comandă, H_1 funcția definită de formula

$$H_1 = -f(\tau) + \psi_1 \mathcal{V}_1 + \psi_2 V \sin\gamma + \psi_3 \Gamma_1 + \psi_4 \mathcal{A}_1 + \psi_5 Q_1 .$$

cu f ca în § 3, $\mathcal{V}_1$, Γ_1, $\mathcal{A}_1$ și Q_1, ca în § 4, iar vectorii x, ψ și u reprezintă, respectiv, variabilele de stare, variabilele auxiliare corespunzătoare și variabilele de comandă în cazul dat

$$x = \begin{pmatrix} V \\ h \\ \gamma \\ \alpha \\ q \end{pmatrix} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_5 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} \tau \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Conform principiului maximului, de-a lungul traiectoriei optimale, funcția de t: $\mathcal{M}(x(t), \Psi(t))$ este constantă și egală cu zero. Deci ultima relație menționată mai sus pentru determinarea parametrilor liberi va putea fi $\mathcal{M}(x(t_0), \Psi(t_0)) = 0$ sau $\mathcal{M}(x(t_1), \Psi(t_1)) = 0$.

Prin urmare, algoritmul întocmit pentru integrarea numerică a sistemului (4.1) plus sistemul adjunt respectiv prin procedeul *încercării și erorii* va conține șase relații date, corespunzătoare momentului inițial (dat) t_0, și anume

$$\begin{aligned} &F_{01}(t_0, V(t_0)) \equiv V(t_0) - V_0 = 0, \\ &F_{02}(t_0, h(t_0)) \equiv h(t_0) - h_0 = 0, \\ &F_{03}(t_0, \gamma(t_0)) \equiv \gamma(t_0) - \frac{\pi}{2} = 0, \\ &F_{04}(t_0, \alpha(t_0)) \equiv \alpha(t_0) - \alpha_0 = 0, \\ &F_{05}(t_0, q(t_0)) \equiv q(t_0) = 0, \\ &F_{06}(t_0, x(t_0), \Psi(t_0)) \equiv \mathcal{M}(x(t_0), \Psi(t_0)) = 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

și 5 relații date, corespunzătoare momentului final (liber) t_1, și anume

$$\begin{aligned} &F_{11}(t_1, V(t_1)) \equiv V(t_1) - V_1 = 0, \\ &F_{12}(t_1, h(t_1)) \equiv h(t_1) - h_1 = 0, \\ &F_{13}(t_1, \gamma(t_1)) \equiv \gamma(t_1) = 0, \\ &F_{14}(t_1, \alpha(t_1)) \equiv \alpha(t_1) - \alpha_1 = 0, \\ &F_{15}(t_1, \psi_5(t_1)) \equiv \Psi_5(t_1) = 0. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Rezolvarea unor probleme bilocale ca cea prezentată mai sus prin integrarea repetată a sistemului pentru determinarea efectului variației condițiilor inițiale ($\psi_i(t_0)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$) asupra valorilor finale ale variabilelor V, h, γ, α, ψ_5 este deosebit de dificilă, implicînd operația de derivare numerică. Din acest motiv, diferiți autori au căutat să accelereze convergența aproximărilor succesive, folosind procedee în care sensibilitatea condițiilor finale la modificări ale condițiilor inițiale să fie obținute prin integrare numerică. În cele ce urmează vom schița procedeul propus de A. H. Jazwinski [3], care în cazul problemei de optimum considerate în prezenta lucrare dă o schemă de calcul relativ simplă.

Vom introduce următoarele notații vectoriale:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vdots \\ y_{10} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} V \\ h \\ \gamma \\ \alpha \\ q \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_5 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vdots \\ Y_{10} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ V \sin\gamma \\ \Gamma_1 \\ \mathcal{A}_1 \\ Q_1 \\ -\dfrac{\partial H_1}{\partial \psi_1} \\ \vdots \\ -\dfrac{\partial H_1}{\partial \psi_5} \end{pmatrix},$$

$$F_0(t_0, y(t_0)) = \begin{pmatrix} F_{01}(t_0, y(t_0)) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{06}(t_0, y(t_0)) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} V(t_0) - V_0 \\ h(t_0) - h_0 \\ \gamma(t_0) - \frac{\pi}{2} \\ \alpha(t_0) - \alpha_0 \\ q(t_0) \\ \mathcal{M}(y(t_0)) \end{pmatrix},$$

$$F_1(t_1, y(t_1)) = \begin{pmatrix} F_{11}(t_1, y(t_1)) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{15}(t_1, y(t_1)) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} V(t_1) - V_1 \\ h(t_1) - h_1 \\ \gamma(t_1) \\ \alpha(t_1) - \alpha_1 \\ \psi_5(t_1) \end{pmatrix}.$$

Deci sistemul considerat se va scrie

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y). \tag{A.3}$$

Condiţiile iniţiale (A.1) devin

$$F_0(t_0, y(t_0)) = 0, \tag{A.4}$$

iar cele finale (A.2)

$$F_1(t_1, y(t_1)) = 0. \tag{A.5}$$

Se alege $y(t_0)$ astfel încît să fie satisfăcute condiţiile iniţiale (A.4). În particular, cu $V(t_0)$, $h(t_0)$, $\gamma(t_0)$ şi $\alpha(t_0)$ date, ca în problema considerată, $\psi_5(t_0)$ se aleg astfel încît să fie satisfăcută şi ultima egalitate (A.1), adică $\mathcal{M}(x(t_0), \Psi(t_0)) = 0$. Fie $y^{(1)}(t)$ soluţia corespunzătoare valorilor iniţiale astfel alese ale variabilelor y. Cu aceste valori iniţiale, integrarea numerică se efectuează pînă la un moment final $t_1^{(1)} > t_0$, în care sînt satisfăcute o parte din egalităţile (A.2). De exemplu, se integrează pînă în momentul $t_1^{(1)}$, în care variabila V atinge prima oară valoarea V_1 (sau h valoarea h_1 etc.). În general, soluţia $y^{(1)}(t)$ nu verifică (în ansamblu) condiţiile finale (A.5). Se formează în continuare sistemul în variaţii relativ la soluţia $y^{(1)}(t)$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial y}(t, y^{(1)})\, z \tag{A.6}$$

şi sistemul adjunct corespunzător sistemului (A.6)

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda \frac{\partial Y}{\partial y}(t, y^{(1)}), \tag{A.7}$$

cu λ vector-linie cu 10 componente: $\lambda_1, \ldots, \lambda_{10}$.

Din proprietăţile generale ale sistemului adjunct va rezulta

$$\lambda(t_1^{(1)})\, z(t_1^{(1)}) - \lambda(t_0)\, z(t_0) = 0. \tag{A.8}$$

Acum, fie $y^{(2)}(t)$ o soluţie a sistemului (A.3) corespunzătoare unui alt sistem de valori iniţiale ale variabilelor şi definită pînă la un alt moment final $t_1^{(2)}$. Vom avea

$$y^{(2)}(t) - y^{(1)}(t) = z(t;\, t_0, y^{(2)}(t_0) - y^{(1)}(t_0)) + O(y^{(2)}(t_0) - y^{(1)}(t_0))$$

şi deci

$$y^{(2)}(t_1^{(2)}) - y^{(1)}(t_1^{(1)}) = y^{(2)}(t_1^{(1)}) - y^{(1)}(t_1^{(1)}) + y^{(2)}(t_1^{(2)}) - y^{(2)}(t_1^{(1)}) =$$
$$= z(t_1^{(1)}; t_0; y^{(2)}(t_0) - y^{(1)}(t_0)) + \frac{dy}{dt}(t_1^{(1)})(t_1^{(2)} - t_1^{(1)}) +$$
$$+ O(y^{(2)}(t_0) - y^{(1)}(t_0)) + O(t_1^{(2)} - t_1^{(1)}),$$

de unde

$$z(t_1^{(1)}) = y^{(2)}(t_1^{(2)}) - y^{(1)}(t_1^{(1)}) - \frac{dy}{dt}(t_1^{(1)})(t_1^{(2)} - t_1^{(1)}) + \ldots$$

Atunci (A.8) devine

$$\lambda(t_1^{(1)})\left[y^{(2)}(t_1^{(2)}) - y^{(1)}(t_1^{(1)}) - \frac{dy}{dt}(t_1^{(1)})(t_1^{(2)} - t_1^{(1)}) + \ldots\right] - \lambda(t_0)\, z(t_0). \tag{A.9}$$

Sistemul adjunct (A.7) se integrează înapoi, considerîndu-se ca moment iniţial $t_1^{(1)}$ şi ca moment final t_0 pentru următoarele condiţii iniţiale [4]):

$$\lambda^1(t_1^{(1)}) = \frac{\partial F_{11}}{\partial y}(t_1^{(1)}) = (1, 0, 0, \ldots, 0),$$

$$\lambda^2(t_1^{(1)}) = \frac{\partial F_{12}}{\partial y}(t_1^{(1)}) = (0, 1, 0, \ldots, 0),$$

$$\lambda^3(t_1^{(1)}) = \frac{\partial F_{13}}{\partial y}(t_1^{(1)}) = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0), \tag{A.10}$$

$$\lambda^4(t_1^{(1)}) = \frac{\partial F_{14}}{\partial y}(t_1^{(1)}) = (0, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

$$\lambda^5(t_1^{(1)}) = \frac{\partial F_{15}}{\partial y}(t_1^{(1)}) = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Notînd componentele vectorului linie λ^k cu λ_j^k, $j = 1, 2, \ldots, 10$, condiţiile iniţiale (A.10) se pot scrie în felul următor:

$$\begin{aligned}
&\lambda_j^k(t_1^{(1)}) = 1 \quad (\text{pentru} \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad \text{şi} \quad j = k),\\
&\lambda_j^k(t_1^{(1)}) = 0 \quad (\text{pentru} \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad \text{şi} \quad j \neq k),\\
&\lambda_j^k(t_1^{(1)}) = 1 \quad (\text{pentru} \quad k = 5, \; j = 10),\\
&\lambda_j^k(t_1^{(1)}) = 0 \quad (\text{pentru} \quad k = 5, \; j \neq 10).
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Acum, întrucît primele cinci componente ale vectorului-coloană $z(t_0) = y^{(2)}(t_0) - y^{(1)}(t_0)$ sînt nule (valorile iniţiale ale variabilelor de stare fiind date), ecuaţia vectorială (A.9) poate fi înlocuită cu următorul sistem de ecuaţii scalare:

$$\sum_{j=6}^{10} \lambda_j^k(t_0)\,[y_j^{(2)}(t_0) - y_j^{(1)}(t_0)] + Y_k(t_1^{(1)})(t_1^{(2)} - t_1^{(1)}) + \ldots = y_i^{(2)}(t_1^{(2)}) - y_i^{(1)}(t_1^{(1)}), \tag{A.12}$$

---

[4]) Dacă n este numărul variabilelor de stare (dimensiunea vectorului x) — în cazul dat $n = 5$ —, iar p dimensiunea vectorului F_0 (aici $p = 6$), atunci sistemul (A.7) se integrează pentru $2n - p + 1$ condiţii iniţiale (aici $2n - p + 1 = 5$), numărul $2n - p + 1$ fiind egal cu dimensiunea vectorului F_1.

unde

$$l = k \quad \text{(pentru} \quad k = 1, 2, 3, 4),$$

$$l = 2k = 10 \quad \text{(pentru} \quad k = 5).$$

Pe de altă parte,

$$F_{1k}(t_1^{(2)}, y^{(2)}(t_1^{(2)})) - F_{1k}(t_1^{(1)}, y^{(1)}(t_1^{(1)})) =$$

$$= \frac{\partial F_{1k}}{\partial t_1}(t_1^{(1)}, y^{(1)}(t_1^{(1)}))(t_1^{(2)} - t_1^{(1)}) + \frac{\partial F_{1k}}{\partial y}(t_1^{(1)}, y^{(1)}(t_1^{(1)}))(y^{(2)}(t_1^{(2)}) - y^{(1)}(t_1^{(1)})) + \dots$$

sau, ţinînd seama de faptul că $\frac{\partial F_{1k}}{\partial t_1} = 0$ şi de relaţiile (A.11),

$$F_{1k}(t_1^{(2)}, y^{(2)}(t_1^{(2)})) - F_{1k}(t_1^{(1)}, y^{(1)}(t_1^{(1)})) = y_l^{(2)}(t_1^{(2)}) - y_l^{(1)}(t_1^{(1)}) + \dots$$

cu l ca mai sus.

Prin urmare, ecuaţiile (A.12) devin

$$\sum_{j=6}^{10} \lambda_j^k(t_0)(y_j^{(2)}(t_0) - y_j^{(1)}(t_0)) + Y_k(t_1^{(1)})(t_1^{(2)} - t_1^{(1)}) =$$

$$= F_{1k}(t_1^{(2)}, y^{(2)}(t_1^{(2)})) - F_{1k}(t_1^{(1)}, y^{(1)}(t_1^{(1)})) + \dots \qquad \text{(A.13)}$$

Astfel, pentru determinarea necunoscutelor $y^{(2)}(t_0)$ şi $t_1^{(2)}$ sau a variaţiei condiţiilor iniţiale necunoscute $y_j^{(2)}(t_0) - y_j^{(1)}(t_0)$, $j = 6, 7, \dots, 10$ şi a momentului final $t_1^{(2)} - t_1^{(1)}$ în funcţie de variaţia condiţiilor finale $F_{1k}(t_1^{(2)}, y^{(2)}(t_1^{(2)})) - F_{1k}(t_1^{(1)}, y^{(1)}(t_1^{(1)}))$ [5]), lipseşte încă o singură relaţie. Aceasta se obţine din condiţia, rezultată din (A.4), că variaţiile $y_j^{(2)}(t_0) - y_j^{(1)}(t_0)$ trebuie să satisfacă ecuaţia

$$\frac{\partial F_0}{\partial y}(y^{(1)}(t_0))(y^{(2)}(t_0) - y^{(1)}(t_0)) = 0.$$

Întrucît pentru $k = 1, 2, \dots, 5$

$$\frac{\partial F_{0k}}{\partial y_j} = \begin{cases} 1 \text{ (pentru } j = k), \\ 0 \text{ (pentru } j \neq k), \end{cases}$$

ultima ecuaţie, în transcriere scalară, devine

$$y_i^{(2)}(t_0) - y_i^{(1)}(t_0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 5),$$

$$\sum_{j=1}^{10} \frac{\partial F_{06}}{\partial y_j}(y_j^{(1)}(t_0))[y^{(2)}(t_0) - y_j^{(1)}(t_0)] = 0.$$

Valorile iniţiale ale variabilelor y_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) fiind date, primele cinci ecuaţii ale sistemului se verifică identic, iar din ultima ecuaţie rămîne

$$\sum_{j=6}^{10} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y_j}(y_j^{(1)}(t_0))[y_j^{(2)}(t_0) - y_j^{(1)}(t_0)] = 0, \qquad \text{(A.14)}$$

unde

$$\mathcal{M} = F_{06} = \sup_{u \in U} H_1(y, u),$$

U reprezentînd domeniul admis al comenzilor $u = \begin{pmatrix} \tau \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ (vezi (4.2)), H_1 funcţia definită mai sus, iar $y_j = \psi_{j-5}$.

[5]) Termenii de grad superior se neglijează.

Ţinînd seama mai departe de condiţiile iniţiale date în tabela 6[6], ultima ecuaţie se scrie

$$[-k_2 V_0^2 + g(\tau_{max} - 1)]\,[\psi_1^{(2)}(t_0) - \psi_1^{(1)}(t_0)] +$$

$$+ V_0\,[\psi_2^{(2)}(t_0) - \psi_2^{(1)}(t_0)] + \mu_2(t_0)\,[\psi_5^{(2)}(t_0) - \psi_5^{(1)}(t_0)] = 0,$$

unde $\mu_2(t_0)$ rezultă din tabela 1 în funcţie de semnul lui $\psi_5^{(1)}(t_0)$.

În felul acesta, variaţia momentului final $t_1^{(2)} - t_1^{(1)}$ şi a valorilor iniţiale ale variabilelor auxiliare ψ_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, $\psi_i^{(2)}(t_0) - \psi_i^{(1)}(t_0)$, sau, cu notaţiile folosite $y_j^{(2)}(t_0) - y_j^{(1)}(t_0)$, $j = 6, 7, \ldots, 10$, în funcţie de variaţia condiţiilor finale

$$F_{1k}(t_1^{(2)}, y^{(2)}(t_1^{(2)})) - F_{1k}(t_1^{(1)} y^{(1)}(t_1^{(1)})) \quad (k = 1, 2, \ldots, 5),$$

se determină din sistemul format de cele cinci ecuaţii (A.13) şi de ecuaţia (A.14).

Problema se consideră terminată cînd s-au găsit condiţiile iniţiale satisfăcînd (A.4), pentru care soluţia găsită a sistemului (A.3) verifică cu un grad de aproximaţie suficient condiţia (A.5). Pentru a ne apropia treptat de această situaţie, se alege în sistemul (A.13)

$$F_{1k}(t_1^{(2)}, y^{(2)}(t_1^{(2)})) - F_{1k}(t_1^{(1)}, y^{(1)}(t_1^{(1)})) = -c_k F_{1k}(t_1^{(1)}, y^{(1)}(t_1^{(1)})),$$

cu $0 < c_k \leqslant 1$. În acest fel se determină din sistemul (A.13) + (A.14) condiţiile iniţiale $y_j^{(2)}(t_0)$ pentru care soluţia va aproxima mai bine condiţiile finale (A.5), întrucît

$$F_{1k}(t_1^{(2)}, y^{(2)}(t_1^{(2)})) = (1 - c_k) F_{1k}(t_1^{(1)}, y^{(1)}(t_1^{(1)})) < F_{1k}(t_1^{(1)}, y^{(1)}(t_1^{(1)})).$$

Dacă neglijările făcute mai sus, fără o justificare riguroasă, ar fi admise pentru $c_k = 1$, problema bilocală ar fi rezolvată după un singur pas. Acest lucru, în general, nu este posibil. Se vor face unele încercări prin calcul, alegîndu-se valori cît mai mari ale factorilor c_k pentru care soluţia corespunzătoare noilor condiţii iniţiale $y_j^{(2)}(t_0)$, pentru $t = t_1^{(2)}$, va verifica cu aproximaţie mulţumitoare relaţia $F_{1k}(t_1^{(2)}, y^{(2)}(t_1^{(2)})) = (1 - c_k) F_{1k}(t_1^{(1)}, y^{(1)}(t_1^{(1)}))$.

Operaţiile descrise mai sus se repetă pînă ce se găseşte un sistem de valori iniţiale $y_j^{(n)}(t_0)$ corespunzîndu-i o soluţie pentru care condiţiile finale $F_1(t_1^{(n)}, y^{(n)}(t_1)) = 0$ sînt satisfăcute în mod acceptabil.

Primită la redacţie la 10 ianuarie 1966

PRINCIPALELE NOTAŢII FOLOSITE

t — timpul;
V — viteza centrului de greutate;
α — incidenţa;
γ — înclinaţia vectorului-viteză faţă de orizontală;
θ — unghiul de tangaj;
q — viteza unghiulară de tangaj;
$\dot{\alpha} = \dfrac{d\alpha}{dt}$;
h — înălţimea de zbor;
M — numărul Mach;
m — masa avionului;

[6]) Pentru aceste valori, momentul aerodinamic longitudinal reprezentat cu aproximaţia unui factor constant de primii doi termeni ai ultimei ecuaţii (4.1) este nul.

B — momentul de inerţie în raport cu o axă trecînd prin centrul de greutate şi perpendiculară pe planul de simetrie al avionului;
S — suprafaţa de referinţă;
c — coarda de referinţă;
λ — alungirea aripii;
φ — unghiul format de vectorul tracţiunii rezultante cu direcţia axei de portanţă nulă a avionului cu suprafeţele de comandă nebracate;
δ_e — unghiul de bracaj al profundorului;
δ_r — parametrul de control al cîrmelor prin jeturi;
C_{D0} — coeficientul de rezistenţă la înaintare a avionului corespunzător incidenţei de portanţă nulă;
C_{D1} — coeficientul de rezistenţă la înaintare a avionului corespunzător incidenţelor mari, considerat independent de α;
C_{L1} — coeficientul de portanţă în aceleaşi condiţii;
$C_{L_\alpha} = \dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}$, C_L — coeficientul de portanţă;
$C_{m_{\dot\alpha}} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \dot\alpha}$, C_m — coeficientul momentului de tangaj;
T — tracţiunea (sau împingerea) rezultantă dezvoltată de motoare;
$\tau = T/mg$;
g — constanta de gravitaţie;
ρ — masa specifică a aerului.

BIBLIOGRAFIE

1. T. Hacker, *Comanda optimă a urcării avioanelor DAV cu axul de tracţiune mobil*, St. cerc. mec. apl., **15**, *2*, 433–440 (1964).
2. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Москва, Физматгиз, 1961.
3. A. H. Jazwinski, *Optimal tranjectories and linear control of nonlinear systems*, AIAA. Journal, **2**, *8*, 1 371–1 379 (1964).

EFECTELE MICRO- ŞI MACROGEOMETRIEI SUPRAFEŢELOR ASUPRA PRESIUNII ÎN LUBRIFICAŢIA TRIDIMENSIONALĂ

I. SUPRAFEŢE PLANE

de N. TIPEI şi H. PASCAL

Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

532:621.82

În lucrarea [1] s-au studiat efectele microgeometriei suprafeţelor pentru problema bidimensională. Scopul lucrării de faţă este de a stabili efectele neregularităţii suprafeţelor asupra distribuţiei presiunii pentru problema tridimensională.

Vom considera suprafeţele plane şi vom presupune microgeometria variabilă numai după direcţia perpendiculară mişcării. În acest caz, grosimea filmului h va fi [1]

$$h = \overline{h}_1 - (\overline{h}_1 - \overline{h}_2)\frac{x_1}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_3^{(n)} \cos\left(2\pi n \frac{x_3}{\tilde{b}} + \chi_{3n}\right), \tag{1}$$

unde l este lungimea lagărului, $\tilde{b}$ perioada micro- sau macrogeometriei, x_1 şi x_3 variabilele după direcţia mişcării şi normală pe aceasta, $\overline{h}_1$ şi $\overline{h}_2$ grosimile maxime şi minime ale filmului de lubrifiant pentru suprafeţe perfect netede şi χ_{3n} — unghiul de fază. Introducînd notaţiile

$$h_m = \frac{\overline{h}_1 + \overline{h}_2}{2}; \quad \varepsilon = \frac{\overline{h}_1 - \overline{h}_2}{\overline{h}_1 + \overline{h}_2} \quad \text{şi} \quad H = \frac{h}{h_m}, \tag{2}$$

este uşor de observat că relaţia (1) mai poate fi scrisă sub forma

$$H = 1 + \varepsilon g(x_1, x_3), \tag{3}$$

Publicată şi in „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, 3 (1966) (în limba engleză)

unde prin funcţia $g(x_1, x_3)$ s-a notat

$$g(x_1, x_3) = 1 - 2\frac{x_1}{l} + \frac{2}{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_3^{(n)} \cos\left(2\pi n \frac{x_3}{b} + \chi_{3n}\right). \tag{4}$$

Pentru determinarea distribuţiei presiunii în cazul problemei tridimensionale, vom avea de rezolvat ecuaţia lui Reynolds

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_3}\right) = 6\,V\frac{\partial h}{\partial x_1} \tag{5}$$

ţinînd seama de faptul că grosimea filmului de lubrifiant variază după relaţia (3).

Condiţiile la limită pe care trebuie să le satisfacă presiunea pe frontieră, considerată dreptunghiulară, respectiv funcţia $p\ (x_1, x_3)$, vor fi

$$\begin{aligned} &p(0, x_3) = p_0; \qquad p(x_1, 0) = p_0, \\ &p(l, x_3) = p_0; \qquad p(x_1, b) = p_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Dacă introducem variabilele adimensionale

$$\xi_1 = \frac{x_1}{l};\ \xi_3 = \frac{x_3}{b};\ \bar{p} = \frac{p}{p_0};\ \lambda = \frac{b}{l} \text{ şi } K = \frac{6\,V\mu l}{p_0 h_m^2}, \tag{7}$$

atunci ecuaţia (5) devine

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(H^3\frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi_1}\right) + \lambda^2\frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(H^3\frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi_3}\right) = K\frac{\partial H}{\partial \xi_1}, \tag{8}$$

iar condiţiile la limită (6) vor fi

$$\begin{aligned} &\bar{p}(0, \xi_3) = 1; \qquad \bar{p}(\xi_1, 0) = 1, \\ &\bar{p}(1, \xi_3) = 1; \qquad \bar{p}(\xi_1, 1) = 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Rezolvarea ecuaţiei lui Reynolds în cazul variaţiei filmului de lubrifiant după (3) nu poate fi efectuată exact, şi de aceea vom aplica în acest caz metoda perturbaţiilor, care permite să obţinem o soluţie aproximativă pentru distribuţia presiunii. Vom arăta mai departe că distribuţia presiunii determinată cu ajutorul metodei perturbaţiilor nu diferă practic de cea obţinută prin metoda numerică pînă la o anumită valoare a pantei relative ε.

În conformitate cu metoda perturbaţiilor, vom căuta soluţia ecuaţiei (8) sub forma unei serii de puteri după parametrul ε:

$$\bar{p}(\xi_1, \xi_3) = 1 + \varepsilon p_1(\xi_1, \xi_3) + \varepsilon^2 p_2(\xi_1, \xi_3) + \ldots \tag{10}$$

Introducînd (10) în (8) şi identificînd coeficienţii după puterile parametrului ε, vom obţine pentru determinarea funcţiilor p_1 şi p_2, dacă ne

limităm numai la primii trei termeni, următorul sistem de ecuaţii:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial \xi_1^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial \xi_3^2} = K \frac{\partial g}{\partial \xi_1} \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial \xi_1^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial \xi_3^2} = -\Phi(\xi_1, \xi_3),$$

unde

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_1} = -2 \text{ şi } \Phi(\xi_1, \xi_3) = 3\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(g \frac{\partial p_1}{\partial \xi_1}\right) + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(g \frac{\partial p_1}{\partial \xi_3}\right)\right]. \tag{12}$$

În felul acesta, problema stabilirii funcţiei $\overline{p}(\xi_1, \xi_3)$, soluţia ecuaţiei cu coeficienţi variabili (8), s-a redus acum la rezolvarea sistemului de ecuaţii neomogene (11) cu coeficienţi constanţi.

Condiţiile la limită pe care trebuie să le satisfacă funcţiile p_1 şi p_2 sînt

$$\begin{aligned} &p_1(0, \xi_3) = 0; \quad && p_1(\xi_1, 0) = 0, \\ &p_1(1, \xi_3) = 0; \quad && p_1(\xi_1, 1) = 0, \\ &p_2(0, \xi_3) = 0; \quad && p_2(\xi_1, 0) = 0, \\ &p_2(1, \xi_3) = 0; \quad && p_2(\xi_1, 1) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Pe de altă parte, termenul liber $\Phi(\xi_1, \xi_3)$ mai poate fi scris sub forma

$$\Phi(\xi_1, \xi_3) = 3\, g(\xi_1, \xi_3)\left[\frac{\partial^2 p_1}{\partial \xi_1^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial \xi_3^2}\right] + 3\left[\frac{\partial g}{\partial \xi_1}\frac{\partial p_1}{\partial \xi_1} + \lambda^2 \frac{\partial g}{\partial \xi_3}\frac{\partial p_1}{\partial \xi_3}\right], \tag{14}$$

care, ţinînd seama de faptul că $\frac{\partial g}{\partial \xi_1} = -2$ şi de prima ecuaţie din (11), devine

$$\Phi(\xi_1, \xi_3) = -6Kg(\xi_1, \xi_3) - 6\frac{\partial p_1}{\partial \xi_1} - \frac{12\,\pi\lambda^2}{\overline{h}_1 - \overline{h}_2}\frac{\partial p_1}{\partial \xi_3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nb\tilde{h}_3^{(n)}}{\overline{b}}\sin(2\pi n\,\xi_3 + \chi_{3n}). \tag{15}$$

Este interesant de remarcat din (11) că influenţa geometriei suprafeţelor asupra distribuţiei presiunii apare numai în cea de-a doua aproximaţie, respectiv în funcţia $p_2(\xi_1, \xi_3)$, întrucît $p_1(\xi_1, \xi_3)$ reprezintă distribuţia presiunii în cazul cînd se consideră pentru h o valoare constantă în membrul stîng al ecuaţiei lui Reynolds.

Deoarece avem

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sin(2i+1)\pi\xi_1 \sin(2j+1)\pi\xi_3}{(2i+1)(2j+1)} = \frac{\pi^2}{16}, \tag{16}$$

atunci pentru condiţiile la limită (13) soluţia primei ecuaţii din (11) se poate pune sub forma

$$p_1(\xi_1, \xi_3) = \frac{32K}{\pi^4}\sum_{i=1,3}^{\infty}\sum_{j=1,3}^{\infty}\frac{\sin i\pi\xi_1 \sin j\pi\xi_3}{ij(i^2 + \lambda^2 j^2)}. \tag{17}$$

În ceea ce priveşte soluţia celei de a doua ecuaţii din (11), care satisface condiţiile la limită (13) referitoare la ξ_1, aceasta poate fi scrisă sub forma

$$p_2(\xi_1, \xi_3) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{3m}(\xi_3) \sin m\pi\xi_1, \tag{18}$$

de unde, prin introducerea lui (18) în (11), obţinem, pentru determinarea funcţiei $f_{3m}(\xi_3)$, considerînd $\lambda = 1$, ecuaţia diferenţială

$$\sum_{m=1}^{\infty} (f''_{3m} - m^2\pi^2 f_{3m}) \sin m\pi\xi_1 = -\Phi(\xi_1, \xi_3). \tag{19}$$

Membrul stîng al ecuaţiei (19) reprezintă o serie Fourier în sinus, iar termenul liber poate fi scris sub forma

$$\Phi(\xi_1, \xi_3) = \sum_{m=1}^{\infty} F_{3m}(\xi_3) \sin m\pi\xi_1, \tag{20}$$

unde $F_{3m}(\xi_3)$ sînt coeficienţii seriei Fourier, care depind numai de ξ_3. Introducînd (20) în (19), rezultă

$$f''_{3m} - m^2\pi^2 f_{3m} = -2\int_0^1 \Phi(\xi_1, \xi_3) \sin m\pi\xi_1 \, d\xi_1. \tag{21}$$

Pentru a putea obţine unele informaţii asupra influenţei neregularităţii suprafeţelor, vom considera cazul cînd macrogeometria prezintă numai patru bucle, respectiv cînd funcţia $g(\xi_1, \xi_3)$ are forma

$$g(\xi_1, \xi_3) = 1 - 2\xi_1 + \frac{2\tilde{h}_3}{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} \cos 8\pi\xi_3. \tag{22}$$

Pe de altă parte, convergenţa seriei (17) fiind în general rapidă, ne putem limita într-o primă aproximaţie, pentru determinarea lui $p_2(\xi_1, \xi_3)$, numai la primul termen şi, în consecinţă, funcţia $\Phi(\xi_1, \xi_3)$ devine

$$\Phi(\xi_1, \xi_3) = -6K\left(1 - 2\xi_1 - \frac{2\tilde{h}_3}{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} \cos 8\pi\xi_3\right) - \\ - \frac{96K}{\pi^3} \cos \pi\xi_1 \sin \pi\xi_3 - \frac{768\, K\tilde{h}_3}{\pi^2(\bar{h}_1 - \bar{h}_2)} \sin 8\pi\xi_3 \cos \pi\xi_3 \sin \pi\xi_1, \tag{23}$$

iar integrala din (21) pentru $m = 1$ va fi

$$\int_0^1 \Phi(\xi_1, \xi_3) \sin \pi\xi_1 d\xi_1 = \frac{24\, K\tilde{h}_3}{\pi(\bar{h}_1 - \bar{h}_2)} \left[\cos 8\pi\xi_3 + \frac{16}{\pi} \sin 8\pi\xi_3 \cos \pi\xi_3\right] \tag{24}$$

şi pentru $m = 2, 4, 6$

$$\int_0^1 \Phi(\xi_1, \xi_3) \sin m\pi\xi_1 d\xi_1 = -6K\left[\frac{2}{m\pi} - \frac{32 \sin \pi\xi_3}{\pi^2(m^2 - 1)}\right]. \tag{25}$$

respectiv pentru $m = 3, 5, 7, \ldots$

$$\int_0^1 \Phi(\xi_1, \xi_3) \sin m\pi \xi_1 \, d\xi_1 = -\frac{24 K \tilde{h}_3}{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} \frac{\cos 8\pi\xi_3}{m\pi}. \tag{26}$$

Ţinînd seama de rezultatele de mai sus, se obţin următoarele ecuaţii diferenţiale:

$$f_{31}'' - \pi^2 f_{31} = \frac{48 K\tilde{h}_3}{\pi(\bar{h}_1 - \bar{h}_2)}\left[\cos 8\pi\xi_3 + \frac{16}{\pi}\sin 8\pi\xi_3 \cos \pi\xi_3\right], \tag{27}$$

$$f_{3m}'' - m^2\pi^2 f_{3m} = 12 K\left[\frac{2}{m\pi} + \frac{32 m}{\pi^4 (m^2-1)}\sin \pi\xi_3\right] (\text{pentru } m = 2, 4, 6\ldots),$$

şi (28)

$$f_{3m}'' - m^2\pi^2 f_{3m} = \frac{48 K\tilde{h}_3}{m\pi(\bar{h}_1 - \bar{h}_2)} \cos 8\pi\xi_3 \text{ (pentru } m = 3, 5, 7\ldots).$$

Cu condiţiile $f_{3m}(0) = f_{3m}(1) = 0$, pentru $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$, care rezultă din (13), obţinem din (27) şi (28) pentru funcţiile $f_{3m}(\xi_3)$ următoarele ecuaţii:

$$f_{31} = \frac{48 \tilde{h}_3 K}{65\pi^3 (\bar{h}_1 - \bar{h}_2)}\left[\frac{1 - e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} e^{\pi\xi_3} - \frac{1 - e^{\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} e^{-\pi\xi_3}\right] -$$
$$- \frac{48 \tilde{h}_3 K}{65 \pi^3 (\bar{h}_1 - \bar{h}_2)}\left[\cos 8\pi\xi_3 + \frac{260}{41\pi}\sin 9\pi\xi_3 + \frac{260}{41\pi}\sin 7\pi\xi_3\right] \tag{29}$$

$$f_{3m} = \frac{24K}{\pi^3} \sum_{m=2,4,6}^{\infty} \frac{1}{m^3}\left[\frac{1 - e^{-m\pi}}{e^{m\pi} - e^{-m\pi}} e^{m\pi\xi_3} - \right.$$
$$\left. - \frac{1 - e^{m\pi}}{e^{m\pi} - e^{-m\pi}} e^{-m\pi\xi_3} - 1 - \frac{16 m^4}{\pi^3 (m^4 - 1)}\sin \pi\xi_3\right]$$

$$f_{3m} = \frac{48 K \tilde{h}_3}{\pi^3 (\bar{h}_1 - \bar{h}_2)} \sum_{m=3,5,7}^{\infty} \frac{1}{m(64 + m^2)}\left[\frac{1 - e^{-m\pi}}{e^{m\pi} - e^{-m\pi}} \cdot e^{m\pi\xi_3} - \right.$$
$$\left. - \frac{1 - e^{m\pi}}{e^{m\pi} - e^{-m\pi}} \cdot e^{-m\pi\xi_3} - \cos 8\pi\xi_3\right].$$

Prin urmare, funcţia $p_2(\xi_1, \xi_3)$ devine

$$p_2(\xi_1, \xi_3) = f_{31}(\xi_3) \sin \pi\xi_1 + \sum_{m=2,4,6}^{\infty} f_{3m}(\xi_3) \sin m\pi\xi_1 +$$
$$+ \sum_{m=3,5,7}^{\infty} f_{3m}(\xi_3) \sin m\pi\xi_1, \tag{30}$$

unde funcţiile $f_{31}(\xi_3)$ şi $f_{3m}(\xi_3)$ se obţin din relaţiile (29).

Rezultatele obţinute mai sus permit o interpretare foarte interesantă a efectului geometriei suprafeţelor asupra distribuţiei presiunii. Într-adevăr, din relaţiile (29) se observă uşor că numai pentru valorile impare $f_{3m}(\xi_3)$ depinde de $\tilde{h}_3$, respectiv de amplititudinea geometriei suprafeţelor şi de lungimea de undă a acesteia, şi, în consecinţă, acest

efect va fi adiţional faţă de distribuţia presiunii rezultată în cazul suprafeţelor netede.

Dacă $\tilde{h}_3 = 0$, vom avea $f_{31} = f_{3m} = 0$ pentru m impar şi, prin urmare, obţinem soluţia aproximativă a ecuaţiei lui Reynolds pentru

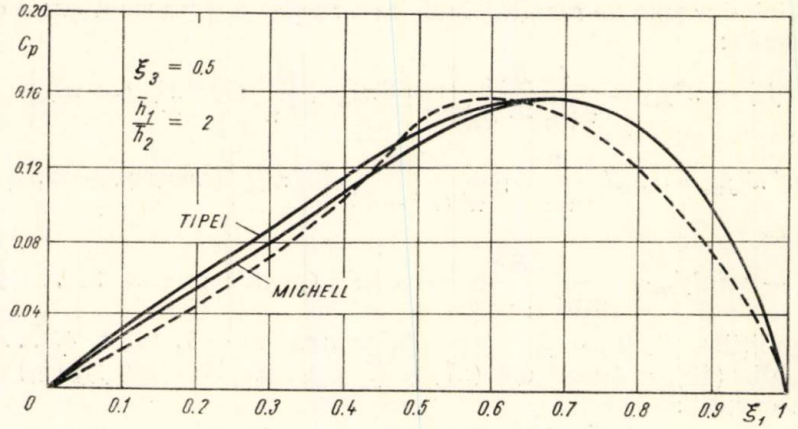


Fig. 1. — — — — Metoda perturbaţiilor.

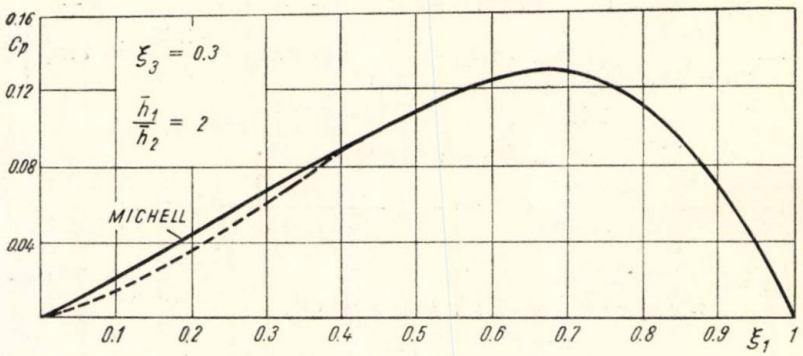


Fig. 2. — — — — Metoda perturbaţiilor.
——— Michell.

suprafeţele netede. Pe de altă parte, din ecuaţia (29) se remarcă de asemenea că termenul $\sum_{m=3,5,7}^{\infty} f_{3m}(\xi_3) \sin m\pi\xi_1$ are în general valori neglijabile comparativ cu ceilalţi termeni din (30), astfel încît în aplicaţiile practice putem face abstracţie de acesta.

În ce priveşte coeficientul de presiune, acesta se obţine din relaţia

$$c_p = 6\,(1-\varepsilon)^2\,[\varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2], \tag{31}$$

unde $$F_1 = \frac{p_1(\xi_1, \xi_3)}{K} \text{ şi } F_2 = \frac{p_2(\xi_1, \xi_3)}{K},$$

iar funcţiile $p_1(\xi_1, \xi_3)$ şi $p_2(\xi_1, \xi_3)$ sînt date de relaţiile (17) şi (30)

În figurile 1 şi 2 s-au redat variaţiile coeficientului de presiune după direcţia mişcării, pentru $\xi_3 = 0{,}3$ şi $0{,}5$, obţinute în cazul supra-

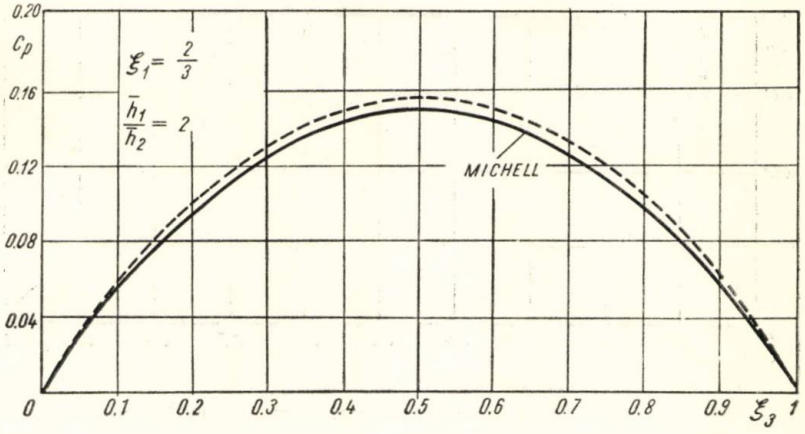


Fig. 3. — — — — Metoda perturbaţiilor.
——— Michell.

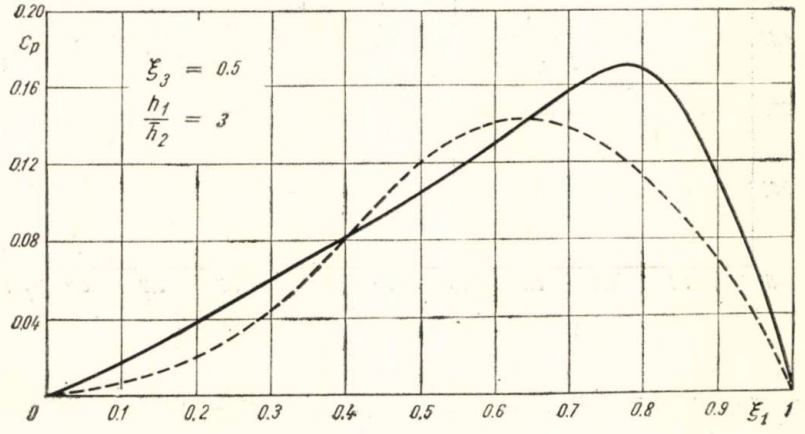


Fig. 4. — — — — Metoda perturbaţiilor.
——— Metoda diferenţelor finite.

feţelor netede, avînd $\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}_2} = 2$, atît prin metoda perturbaţiilor, cît şi prin cea propusă în lucrarea [2].

După cum se observă din diagramele din figurile 1 şi 2, există o bună concordanţă între cele două metode.

În figura 3 este arătată variaţia coeficientului de presiune după direcţia perpendiculară mişcării pentru secţiunea $\xi_1 = 2/3$, unde de

asemenea se vede că metoda perturbaţiilor conduce la valori foarte apropiate de cele exacte în cazul $\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}_2} = 2$. În figura 4 s-a redat variaţia lui

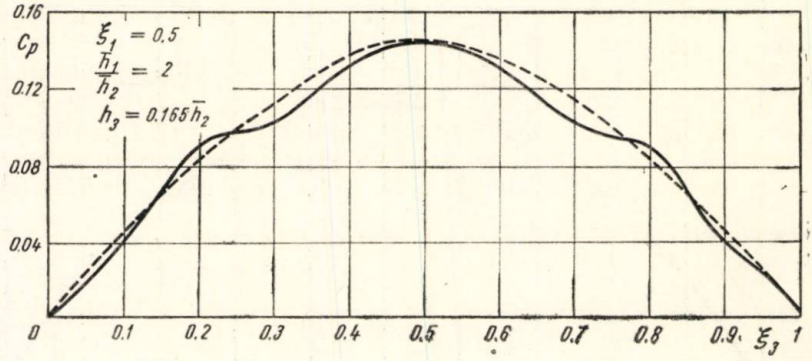


Fig. 5. — — — — Suprafeţe netede.
——— Suprafeţe cu ondulaţii.

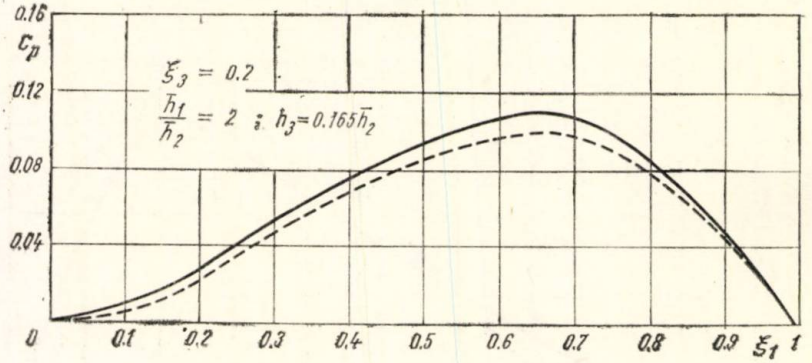


Fig. 6. — — — — Suprafeţe netede.
——— Suprafeţe cu ondulaţii.

c_p după direcţia mişcării în secţiunea mediană corespunzătoare lui $\xi_3 = 0{,}5$, pentru $\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}_2} = 3$, determinată prin metoda diferenţelor finite, cu ajutorul unui calculator digital, şi prin metoda perturbaţiilor.

Din figura 4 se observă că în cazul suprafeţelor netede, apar diferenţe sensibile între rezultatele obţinute prin metoda perturbaţiilor, considerînd numai trei termeni din (10), şi metodele exacte.

În concluzie, pentru problema tridimensională, domeniul de aplicabilitate al metodei perturbaţiilor apare limitat pînă la valori $\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}_2} < 3$, dacă se utilizează numai primii trei termeni ai soluţiei ecuaţiei (8).

În ceea ce priveşte stabilirea influenţei macrogeometriei asupra distribuţiei presiunii, aceasta se poate observa din diagramele 5 şi 6, unde s-au redat variaţiile coeficientului c_p pentru $\frac{\overline{h}_1}{\overline{h}_2} = 2$ şi $\tilde{h}_3 = 0{,}165\ \overline{h}_2$ atît după direcţia mişcării, cît şi după direcţia perpendiculară acesteia, obţinute cu ajutorul relaţiilor (17), (30) şi (31).

Este interesant de remarcat din figura 5 că variaţia coeficientului de presiune după direcţia în care s-a considerat macrogeometria, respectiv după direcţia perpendiculară mişcării, este de asemenea periodică. Totodată alura curbelor de presiune pe direcţia mişcării, normală pe aceea după care variază macrogeometria în cazul considerat, rămîne sensibil aceeaşi.

Primită la redacţie la 10 ianuarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. N. Tipei, *Effects of the microgeometry of surfaces on lubrication*, Revue de mécanique Appliquée, *6* (1963).
2. A. Michell, *Lubrication*, Londra—Glasgow, Blakie & Son Limited, 1950.
3. N. Tipei, *Theory of Lubrication*, Stanford University Press, 1962.

UNELE INFLUENȚE ALE PROCESULUI DE ALUNECARE ASUPRA SUPRAFEȚELOR METALICE

I. SUPRAFEȚE STANATE [1])

de GH. VASILCA
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

539.6

Se studiază influența factorilor care însoțesc procesul de alunecare asupra suprafețelor active prevăzute cu un strat subțire de staniu în cazul unor cupluri de frecare construite dintr-un aliaj de aluminiu. Efectele acestor factori au fost examinate pe modele schematice de laborator în condiții de alunecare cu lubrifiant și uscată, precum și în zona grosimii minime a filmului de lubrifiant în cazul unui lagăr cilindric circular. Modificările apărute în straturile superficiale ale suprafețelor sub acțiunea procesului de frecare au fost diferite, în funcție de intensitatea acestui proces. Au putut fi constatate modificări sub formă de curgeri plastice de material, modificări de microgeometrie, curgeri plastice de material neatacabile de reactivi, precum și unele schimbări în structura grăunțoasă a straturilor superficiale.

În cazul lubrificației în straturi subțiri, grosimea filmului de lubrifiant fiind foarte mică, neregularitățile suprafețelor, atît în ceea ce privește geometria, cît și microgeometria, încep să influențeze regimul de ungere și, ca atare proprietățile la alunecare ale cuplurilor de frecare. Fenomenele care exercită această influență sînt complexe, deoarece, datorită neregularităților de suprafață menționate, apar din loc în loc străpungeri ale filmului de lubrifiant și, în consecință, se produc contacte directe

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech.—Mécanique Appliquée", **11**, *3* (1966) (în limba germană).

între cele două suprafeţe de alunecare. De asemenea apar grosimi ale peliculei la nivelul straturilor de lubrifiant adsorbite, situînd astfel pereţii cuplului la distanţe în care forţele fizice de atracţie dintre materialele suprafeţelor opuse încep să devină active. În cazurile obişnuite, contactele menţionate se realizează la nivelul vîrfurilor asperităţilor de suprafaţă şi, atît prin numărul lor redus, cît şi prin aria restrînsă a contactelor individuale, nu au consecinţe grave, de natură să tulbure funcţionarea ansamblului de frecare. Practica arată însă că funcţionarea cuplurilor de frecare în atare condiţii se menţine neafectată în mod grav numai dacă împerecherea de materiale folosită în construcţie şi proprietăţile de onctuozitate ale mediului lubrifiant sînt alese în mod corespunzător. Dacă materialele de construcţie nu au proprietăţi antifricţiune şi lubrifiantul nu este corespunzător, contactele directe dintre suprafeţe pot evolua către faze de frecare cu gripaj care provoacă întreruperea funcţionării cuplului.

Faţă de regimul de ungere pur hidrodinamic, în care lipsesc contactele directe de orice natură între suprafeţele de frecare, lubrificaţia în straturi subţiri prezintă particularitatea că, datorită contactelor menţionate, frecarea nu mai este pur fluidă, fiind însoţită şi de celelalte două tipuri de frecare, şi anume onctuoasă şi de contact sau uscată. Frecarea lichidă şi onctuoasă nu lasă în general urme pe suprafeţele pereţilor solizi ai cuplului de frecare, aceste două tipuri de frecări avînd loc, după actuala concepţie asupra formării filmului de lubrifiant, în stratul separator format de mediul de ungere. Frecarea de contact, guvernată într-o primă aproximaţie de legea generală a lui Amontons [1]: $F = A\tau = P_c\ \tau/\sigma_c$, afectează însă integritatea suprafeţelor de alunecare, deoarece se produc forfecări şi deformări plastice de material în cadrul ariei reale de contact A. Deci, în afară de aspectul cantitativ al frecării, lubrificaţia în straturi subţiri se deosebeşte de lubrificaţia normală prin aceea că este însoţită de procese superficiale care se produc la nivelul suprafeţelor de alunecare ale pereţilor solizi.

În această analiză s-a luat în considerare numai procesul frecării de contact, care produce de obicei cele mai mari efecte asupra straturilor superficiale. În aceste straturi, procesul de alunecare în condiţii lubrifiate produce şi alte efecte, şi anume afectarea suprafeţei peretelui solid prin coroziune chimică, prin smulgeri de grăunţi de material legaţi de particulele mediului lubrifiant prin forţe de adsorbţie şi supuşi acţiunii forţelor de forfecare lichidă, prin procese de uzură abrazivă provocate de vehicularea de particule dure prin lubrifiant etc. Aceste procese de suprafaţă apar atît în lubrificaţia normală, cît şi în cea cu straturi subţiri, însă la nivele de intensitate diferite. De asemenea mai apar, şi într-un caz, şi în celălalt, aspecte de deformaţie elastică ale suprafeţelor de alunecare sub acţiunea presiunilor din filmul de lubrifiant.

Procesul frecării de contact se produce, cum arată legea generală arătată mai sus, prin tasarea materialului datorită termenului σ_c care reprezintă limita de curgere, şi prin forfecări de material prin intermediul termenului τ. Ambele fenomene fiind deformări cu caracter remanent ale materialului, lucrul mecanic produs de forţa de frecare F se transformă

în mod integral în căldură. Căldura generată pe această cale și cea rezultată din frecarea lichidă în zona înconjurătoare, au ca efect o creștere locală a temperaturii materialului în stratul superficial. Sub influența temperaturii, proprietățile mecanice și fizice, precum și constituenții și textura structurii materialului în stratul de suprafață se pot modifica. Datorită acestor factori, materialul poate deci apărea în procesul de alunecare cu proprietăți schimbate față de acelea din masa lui. Microgeometria și, eventual, proprietățile materialului din straturile superficiale putînd trece prin schimbări în procesul de alunecare, condițiile formării și persistenței peliculei de lubrifiant se pot prezenta de asemenea modificate în raport cu cele inițiale.

Regimul de funcționare în lubrificația cu straturi subțiri fiind, în condițiile tehnice de lucru, termic stabil, ponderea frecării de contact în procesul global de alunecare a suprafețelor este relativ redusă. Ea totuși se produce și, în consecință, diferitele aspecte ale modificărilor care apar în straturile superficiale ale pereților poate apărea util să fie în mod cît mai detaliat elucidate.

În acest scop, pentru încercări schematice de laborator, s-a luat ca model experimental suprafața plană, acoperită cu un strat subțire de staniu, a unui cub confecționat dintr-un aliaj antifricțiune de aluminiu, cu un conținut de 3,5% Sb și 0,5% Mg. Depunerea stratului de staniu s-a făcut pe cale electrolitică după următoarea tehnologie [2]: decapare în acid azotic, spălare în apă, zincare electrolitică, spălare în apă, cuprare electrolitică, spălare în apă, stanare electrolitică, spălare în apă fierbinte, uscare în aer cald. Deoarece staniul nu are afinitate față de aluminiu, este necesar un strat intermediar de cupru, iar pentru evitarea oxidării aluminiului decapat se aplică stratul de zinc. În aceste condiții tehnologice de stanare se obține pe suprafața modelului experimental de aluminiu un strat de staniu în grosime de $2 \div 5 \cdot 10^{-3}$ mm.

Pentru încercări și în alte condiții a fost luat ca model experimental o bucșă cilindrică, pusă să funcționeze ca lagăr cu alunecare. Bucșa a fost confecționată din același aliaj pe bază de aluminiu (Al—Sb—Mg) ca și modelele pentru încercări schematice menționate mai sus, iar suprafața activă a bucșei stanată în aceleași condiții.

În mod intenționat, suprafața cubului înainte de stanare nu a fost executată prea exact plană, iar microgeometria a fost aceea rezultată din pilire fină. Rugozitatea a fost deci în unele locuri de ordinul de mărime a 10^{-2} mm în ceea ce privește înălțimea asperităților.

Efectele asupra stratului superficial au fost cercetate în următoarele condiții de acționare asupra suprafeței de lucru.

MODELUL A6-21

a) Acțiunea pentru tasarea asperităților, în care scop modelul cu fața stanată a fost așezat cu această față pe fața plană a unei rigle masive de tușat din oțel și încărcat timp de 2 min cu sarcina statică de 40 kgf ($\sim$ 20 kgf/cm^2 de suprafață aparentă).

b) După operația de la pct. (a), deplasarea modelului pe fața aceleiași rigle, sub sarcina statică de 40 kgf, pe distanța de 400 mm, cu viteza de 0,025 m/s, suprafețele de frecare fiind unse cu ulei tip 405 STAS.

MODELUL A6-22

a) Fața stanată, fără altă operație, așezată pe fața tușată a riglei de oțel și deplasată sub sarcina statică de 40 kgf, pe distanța de 400 mm, cu viteza de 0,025 m/s, suprafețele de frecare fiind fără ungere.

b) Fața stanată, fără altă pregătire, deplasată pe fața tușată a riglei de oțel, ambele fețe fiind unse cu ulei tip 405 STAS (sarcină statică: 40 kgf; viteză de deplasare: 0,025 m/s; distanță 400 mm).

MODELUL A6-11

a) Fața stanată, fără altă operație, deplasată în condiții fără lubrifiant pe fața tușată a riglei de oțel, sub sarcina statică de 40 kgf, cu viteza de 0,025 m/s, pe distanța de 400 mm.

b) După operația de la pct. (a), deplasarea aceleiași fețe și pe aceeași riglă, ambele fețe unse cu ulei tip 405 STAS, sarcina fiind de 40 kgf, viteza de 0,025 m/s, iar distanța de 400 mm.

MODELUL A6-12

a) Fața stanată, trasă pe hîrtie de șlefuit 600, 700 și 800 apoi lustruită pe postav cu Al_2O_3, astfel ca numai proeminențele cele mai mari să fie nivelate.

MODELUL A1

La o bucșă lagăr a fost practicată prin deformare plastică o proeminență în suprafața activă, situată la mijlocul lagărului și pe generatricea ce trece prin direcția de aplicare a sarcinii în zona încărcată. După aceea bucșa a funcționat ca lagăr circular cu alunecare timp de 40 de ore în regimuri variate de sarcină și de viteză. Parametrii de funcționare au avut valorile maxime $p_m = 245$ kgf/cm^2, $V = 15$ m/s și temperatura cuzinetului 80° C. Uleiul folosit a fost tip 408 STAS, iar fusul lagărului din oțel OLC 16, cementat, călit și rectificat, avînd în suprafața de lucru duritatea HRC = 45. Funcționarea lagărului a fost precedată de un rodaj de 12 ore. Un sector A11 din această bucșă cuprinzînd suprafața activă cu proeminența menționată, precum și unul A12 cu zona de presiuni maxime inclusiv aceea corespunzătoare grosimii minime h_2 a filmului de lubrifiant, au fost utilizate pentru studierea modificărilor superficiale rezultate în condițiile complexe de funcționare ale unui lagăr.

Condițiile de lucru ale suprafețelor de alunecare au fost deci astfel alese ca pe aceeași suprafață să se producă procese de frecare lichidă, onctuoasă și de contact, deci de naturi diferite, precum și la o scară largă în ceea ce privește intensitatea acestor procese. Corespunzător acestor procese, vor trebui să apară în straturile superficiale ale suprafețelor efecte diferite. Metoda de examinare a modificărilor apărute în straturile de suprafață a fost cea optică, cu epruvetele atacate cu reactiv sau fără atac, după caz. De o deosebită utilitate în observație s-a dovedit a fi în acest caz lumina polarizată, folosită mai ales în condițiile cu nicolii paraleli, deoarece prezintă fenomene de dispersie în măsură redusă, permițînd obținerea mult mai clară a contururilor în cazul suprafețelor cu rugozități.

Suprafața stanată la modelul A6-21 se prezintă la mărirea 4,7 : 1, ca în figura 1, iar la mărirea 100 : 1 în zona întretăierii liniilor de referință ca în figura 2. Prin aplicarea sarcinii de 40 kgf în condițiile arătate la A6-21, punctul (a), vîrfurile cele mai proeminente ale rugozităților suprafeței suferă o deformare plastică de tasare în proporția dată de expresia lui F. În micro- și macrozonele tasate, grăunții de staniu rezultați din depunerea galvanică se deformează, umplînd golurile dintre ei, aspect care imprimă suprafeței proprietatea de luciu metalic. Astfel de zone cu luciu se pot vedea în figura 3, fiind de culoare mai închisă și marcate cu *a*. Netezimea feței deformate corespunde rugozității avute de fața tasată a riglei de oțel pe care a fost apăsată epruveta. Faptul că suprafața de lucru a modelului nu a fost perfect plană sau mai puțin plană decît suprafața riglei a condus prin această operație de tasare la formarea de macrozone lucioase, variabile ca mărime. Grăunții de staniu izolați, cum se văd în figura 2, au format microzone de luciu dacă au avut față de suprafață o poziție în relief suficient de accentuată încît prin apăsare să ajungă în contact cu suprafața riglei. Grupurile mai compacte de grăunți au format, la rîndul lor, macrozonele lucioase. Apăsarea exercitîndu-se în acest caz în direcție normală la suprafața modelului și fără să existe o deplasare tangențială între acesta și suprafața riglei, deformarea plastică a grăunților nu manifestă orientare după o direcție oarecare în planul suprafeței de lucru.

Dacă apăsarea în direcție normală este însoțită și de o deplasare tangențială pe suprafața riglei, procesul deformării plastice în straturile superficiale de frecare capătă și alte caractere. În figura 4 se prezintă suprafața modelului A6-21 rezultată din cea arătată în figura 3 prin deplasare sub sarcină în condițiile cu lubrifiant indicate mai sus la A6-21, pct. (b). Modificările în straturile superficiale de staniu, apărute ca un efect al procesului de frecare produs în aceste condiții, se prezintă la analiza optică sub forma unei suprafețe lucioase mai întinse, redată în figura 4 prin zona de culoare neagră. Neuniformitatea geometrică a suprafeței modelului face ca suprafața afectată de frecare să nu fie regulată nici ca formă, nici ca omogenitate a efectului procesului de frecare. Zona de culoare închisă apare astfel brăzdată de dungi de culoare mai deschisă, care marchează tocmai aceste aspecte de neomogenitate.

Un prim aspect al deformării plastice superficiale rezultate în condiţii de mişcare tangenţială relativă a suprafeţelor este zona mult mai întinsă formată de aceste deformări. Aceasta se explică prin faptul că, datorită mişcării, în microzonele care formează la un moment dat aria reală de contact A se produce o forfecare şi deci o îndepărtare de material, avînd drept consecinţă o microapropiere a suprafeţelor. Prin aceasta vin în contact alte vîrfuri de asperităţi, astfel că aria reală de contact este formată, în momentele succesive ale mişcării tangenţiale relative, mereu din alte microzone ale suprafeţei de frecare. Materialul forfecat şi deplasat din microzonele vechi se depune în microgolurile care înconjoară vîrfurile asperităţilor respective, umplîndu-le în măsură mai mare sau mai redusă. Microsuprafeţele rezultate din forfecare, împreună cu microgolurile învecinate umplute cu materialul dislocat şi cu deformările plastice în direcţie normală la suprafeţe, pot fi considerate cauze ale nivelării şi imprimării luciului suprafeţelor efective de frecare rezultate în condiţiile acestor încercări. În cazul din figura 4, suprafaţa efectivă de frecare a rezultat mai mare decît cea corespunzătoare sarcinii statice aplicate de 40 kgf, deoarece — suprafaţa modelului nefiind perfect plană — în timpul mişcării direcţia sarcinii nu a rămas riguros constantă. Ca urmare sarcina s-a aplicat mai concentrat pe diferite porţiuni de suprafaţă şi a provocat modificări în aceste porţiuni mai mari decît cele corespunzătoare repartiţiei uniforme a acesteia.

În figura 13 se prezintă suprafaţa modelului A6-11 rezultată din alunecarea fără ungere efectuată în condiţiile arătate la A6-11, pct. (a), iar în figura 14 aceeaşi suprafaţă după încercarea de alunecare efectuată în stare lubrifiată, cum se indică la A6-11, pct. (b). Aspectul de ansamblu al suprafeţei efective de frecare (zona mai neagră în figuri) prezintă, în cazul alunecării fără ungere (fig. 13), particularitatea că suprafaţa lucioasă este brăzdată de numeroase dungi axiale de culoare mai deschisă. Examinate mai de aproape, se poate constata că dungile reprezintă rizuri, rezultate în suprafaţă din acţiunea abrazivă a particulelor detaşate prin procesul de frecare din suprafaţa modelului experimental şi aderate pe suprafaţa riglei tuşate care formează faţa-suport de alunecare. Particulele aderate pe suprafaţa riglei au putut fi constatate vizual. În cazul alunecării efectuate în condiţii lubrifiate (fig. 14), efectul abraziv menţionat se constată a fi aproape neglijabil. Transferul de material pe suprafaţa riglei fiind extrem de redus, suprafaţa de frecare rezultată din alunecarea lubrifiată prezintă o microgeometrie în mod preponderent corespunzătoare rugozităţii suprafeţei riglei. Un exemplu în această direcţie este arătat în figura 8, care prezintă la scara 100 : 1 microgeometria la modelul A6-22 rezultată din alunecarea în stare unsă în condiţiile arătate la A6-22, pct. (b). La observaţia de mai sus că microgeometria suprafeţei modelului rezultată din alunecarea în stare lubrifiată este foarte apropiată de cea a suprafeţei riglei, trebuie menţionat că această stare este valabilă numai în cazul cînd, datorită duratei şi intensităţii procesului de frecare, microgeometria suprafeţei conjugate modelului nu este afectată. În toate celelalte cazuri de alunecare pe suprafeţele de frecare rezultă o microgeometrie specifică naturii materialelor

care formează cuplul de frecare [3]. Proprietățile de onctuozitate ale lubrifiantului pot deci contribui la obținerea unor suprafețe de frecare mai netede.

Mai trebuie adăugat că deplasarea relativă de alunecare sub sarcină a suprafețelor conduce în straturile superficiale și la o deformare plastică orientată. În figura 5, la mărirea 100 : 1, se prezintă zona de intersecție a liniilor de referință la modelul A6-21, încercat în condițiile arătate la A6-21, pct. (b), iar în figura 15, la aceeași mărire, la modelul A6-11, experimentat în condițiile indicate la A6-11, pct. (b). Se vede că, sub influența factorilor care acționează în procesul de frecare, materialul curge mai ales în direcția mișcării, linia de referință normală pe mișcare fiind din această cauză în bună parte acoperită (mai ales în fig. 5). Din figura 15 reiese chiar și sensul mișcării, acesta fiind din partea de sus a figurii către partea de jos.

Sub acțiunea factorilor de frecare, straturile superficiale ale suprafețelor pot suferi de asemenea modificări micro- și macrostructurale. În figura 18 se prezintă astfel structura grăunțoasă la modelul A6-12, lustruit prin abraziune în condițiile arătate la A6-12, pct. (a). Se poate vedea că grăunții mai proeminenți de staniu, rezultați din depunerea galvanică, au fost șlefuiți plan, apărînd în figură, după atac cu Nital 5%, sub formă de mici pete albe. Caracterul abraziv al procesului de șlefuire rezultă din mărimea redusă a microfețelor plane, care nu depășește în general mărimea grăunților. Au existat însă porțiuni șlefuite la aceeași suprafață, la care atacul cu reactiv a rămas fără efect, cum sînt zonele de culoare deschisă din figura 19. În aceste zone, procesul de șlefuire trebuie să se fi produs în condiții puțin schimbate, dînd naștere stratului superficial rezistent la atac chimic, denumit uneori stratul amorf Beilby [1]. S-ar putea ca sub acest strat procesul de șlefuire mai intens să fi produs și deformări plastice ale grăunților, nu numai îndreptarea fețelor grăunților prin așchiere. Lipsa de planeitate și de netezime mai pronunțată a feței modelului face ca și grăunții de staniu depuși să nu fie în același plan. În consecință, la mărirea de 600 : 1 la care figura 18 redă structura materialului, majoritatea acestor grăunți nu pot fi văzuți în mod clar.

Dacă la șlefuirea abrazivă, operație ai cărei parametri pot fi în mare parte controlați, apar neomogenități de structură în stratul superficial, cu atît mai mult pot fi constatate astfel de neomogenități în procesul mult mai complex al frecării. O astfel de modificare în stratul superficial este arătată în figura 16 în cazul modelului A6-11, încercat în condițiile indicate la A6-11, pct. (b), care constă în apariția unor grăunți de altă mărime, ale căror contururi pot fi bine puse în evidență prin atac cu Nital 5% și observarea cu lumină polarizată și nicoli paraleli. Acești grăunți se caracterizează prin dimensiuni apreciabil mai mari față de cei rezultați din depunerea galvanică a staniului și par a se fi format în zonele de suprafață în care intensitatea procesului de alunecare a fost mai mare, mai ales în partea cu adîncime mai pronunțată a rizurilor. O altă caracteristică a acestei modificări în suprafață este că stratul

fucios care acoperea acești grăunți este ușor corodat de reactiv, spre deosebire de stratul alb în cazul figurii 19.

Condițiile formării acestor grăunți implică încă unele elucidări; într-o primă aproximație, procesul formării lor ar putea fi asemuit cu acela al creșterii grăunților unui metal în anumite condiții de tratament termic. Dacă acesta este în realitate procesul, mecanismul formării lor în condițiile procesului de frecare ar putea consta într-o concreștere a mai multor grăunți mici într-unul mai mare sub acțiunea factorilor termici și de deformare plastică ai acestui proces. Numai topirea metalului în procesul de frecare și solidificarea lui sub formă de grăunți mari pare puțin probabilă, deoarece metalul topit se solidifică sub formă de grăunți mari, de obicei dacă răcirea se face cu viteză redusă. Caracterul de formare a structurii grăunțoase mari al procesului de frecare apare destul de restrîns în ceea ce privește extinderea pe suprafața de lucru a piesei, în alte porțiuni de suprafață, chiar în vecinătate, structura cu grăunți mici rezultată din depunerea galvanică nefiind în mod sensibil afectată, așa cum se poate vedea din figura 17. În alte porțiuni ale suprafeței de frecare, de exemplu la modelul A6-22, în condițiile alunecării uscate A6-22, pct. (a), atacul chimic arată o formație care ar putea fi interpretată ca avînd grăunții măriți (fig. 10), însă nici fețele și nici contururile acestora nu se prezintă atît de clar ca în cazul din figura 16. Neomogenitatea comportării stratului lucios alb la atacul cu reactiv poate fi constatată în cazul modelului A6-22, condițiile de încercare A6-22, pct. (b), aspect redat de figura 9. Formații mai mult sau mai puțin complete de grăunți măriți nu au putut fi constatate în acest caz.

Comportarea neomogenă a straturilor de suprafață în procesele de frecare poate fi influențată și de repartiția unora dintre constituenții de structură. Astfel, în cazul modelului A6-22, condițiile de încercare A6-22 pct. (a), repartiția neuniformă a compusului definit dur AlSb, provocată de segregarea acestuia, a condus la o depunere defectuoasă de staniu în zonele cu segregație. Sub acțiunea procesului de frecare, stratul de staniu din aceste zone a fost dislocat, aspect care apare mai clar abia după atacul chimic. În figurile 11 și 12 este redat un astfel de caz, petele negre reprezentînd faza dură AlSb, iar părțile albicioase flue din fotografii zonele cu stratul de staniu depus normal.

Condițiile grele de încercare adoptate în cazul de față au pus în evidență și o altă modificare de suprafață care se poate produce în cazul straturilor metalice subțiri depuse pe suprafața altor metale în scop protector pentru ameliorarea proprietăților la alunecare, sau pentru alte motive. Această modificare superficială a suprafeței de lucru s-a constatat a fi provocată de apariția unor sufluri, cum se poate vedea în figurile 6 (mărirea 3 : 1) și 7 (mărirea 100 : 1) în cazul modelului A6-21 (condițiile de încercare A6-21, pct. (b)), iar în figurile 20 (mărirea 3 : 1) și 21 (mărirea 100 : 1) pentru modelul A6-11 (condițiile de încercare A6-11, pct. (b)). Înțepînd sub apă o astfel de suflură de dimensiuni mai mari, s-a constatat că în interiorul acesteia se află un gaz sub presiune, care, datorită acestei stări comprimate, iese sub formă de bule prin orificiul înțepăturii. Gazul urmează să fie identificat în ceea ce privește natura

lui, dar ceea ce se poate spune imediat este că apariția suflurilor pe suprafață în cazul de față este analogă cu suflurile care apar în cazul placării prin laminare a unei foițe metalice subțiri pe oțel a cărui suprafață de placare a fost curățată în prealabil printr-un proces de decapare chimică sau catodică. În acest ultim caz, gazul este hidrogen, difuzat în stare atomică în oțel în cursul decapării și autocolectat sub formă moleculară și la presiune mare în crăpăturile fine din masa stratului de suprafață a materialului. În cursul operației de placare, din cauza presiunii de laminare, hidrogenul este expulzat din locurile de acumulare și, datorită presiunii proprii, dezlipește foița aplicată de pe materialul de bază, formînd sufluri [4]. În cazul de față, depunerea staniului pe suprafața modelului experimental cuprinde de asemenea procese de decapare chimică, urmînd să se stabilească dacă și sub ce formă gazul care a provocat formarea suflurilor menționate a rezultat din decapare. Indiferent de proveniența acestui gaz, trebuie reținut că, la depunerile galvanice în a căror tehnologie sînt incluse operații de decapare chimică sau catodică, apariția de sufluri în cazul lagărelor se dovedește a fi posibilă dacă intensitatea procesului de frecare este suficient de mare. Evident că în locurile cu sufluri aderența stratului depus pe materialul de bază este distrusă, reducîndu-se prin aceasta complet rezistența acestui strat la frecare. În încercările efectuate în cazul de față, acest strat nu s-a rupt în dreptul suflurilor, deoarece modelul experimental a fost deplasat o singură dată pe suprafața-suport a riglei de tușat.

În cazul modelului A11, prin funcționarea lagărului în stare încărcată, proeminența practicată în zona activă a fost într-o măsură oarecare tasată. Datorită acestui fapt, zona de suprafață activă, înjumătățită de generatricea ce trece prin mijlocul proeminenței și taie direcția sarcinii, se prezintă ca în figura 22. Caracteristic acestei suprafețe este faptul că porțiunea tasată, reprezentată în figură sub forma unei pete centrale albe, este înconjurată de o regiune de culoare mai închisă. Restul de suprafață activă din figură nu mai prezintă nimic caracteristic.

Natura stratului superficial și microgeometria în zona tasată se deosebesc de parametrii corespunzători ai regiunii care înconjură pata albă. Astfel, mai întîi, zona tasată este, din punctul de vedere al aspectului, lucioasă, iar microgeometria diferă de aceea inițială de prelucrare, după cum se poate vedea din figura 23, care reprezintă o porțiune din centrul zonei la mărirea 100 : 1 și fără atac, din figura 24, unde se redă o porțiune a zonei de asemenea fără atac, însă la mărirea 600 : 1, și din figura 25, care este o porțiune a zonei la mărirea 600 : 1 după atacul cu o soluție apoasă de 10% NaOH. Pentru ca luciul și microgeometria în zona tasată să poată fi explicate, trebuie precizat că în această zonă nu a mai putut fi constatată prezența staniului sub forma stratului compact depus pe cale electrolitică. Această constatare rezultă atît din aspectul luciului petei, care nu este gălbui, caracteristic staniului, cît și din atacul chimic. Prin atac luciul a dispărut, pata luînd aspectul mat specific aluminiului atacat cu reactivul menționat (fig. 25). În zona care a fost tasată, preponderența aluminiului deformat plastic a imprimat acestei zone aspectul lucios, iar cuplul de frecare local format din aluminiu-

lubrifiant-oţel a imprimat microgeometriei suprafeţei rugozitatea specifică acestei împerecheri de materiale.

Faptul că pata albă pierde în general luciul prin atac chimic, înseamnă că stratul superficial, constînd din aluminiu deformat plastic, este atacat de către reactiv ca şi aluminiul obişnuit, adică poate fi presupus că acest strat posedă o constituţie cristalină normală. În condiţiile de investigaţie folosite, nu s-a putut constata caracterul de rezistenţă certă a acestui strat la atacul cu reactiv, şi în figura 25 pot fi văzute virgulele de culoare mai închisă caracteristice formei sub care straturile de acest fel sînt corodate chimic. Este adevărat că sînt zone de extindere mai redusă, ca, de exemplu, dunga albă marcată cu *a* în figura 25, în care acţiunea reactivului a fost mai puţin intensă. Aceasta ar putea constitui un indiciu de neomogenitate în ceea ce priveşte componenţa structurii pe care o are stratul superficial al petei albe. Cercetarea suprafeţei prin metoda microanalizelor ar putea aduce lămuriri suplimentare în această direcţie.

Sensul de tasare, atribuit mai sus procesului care a avut ca efect crearea petei albe, trebuie înţeles mai mult ca o exprimare simplificată, deoarece operaţia nu este numai de tasare, ci şi de uzură. Aceasta din urmă rezultă în mod cert din faptul că microgeometria de prelucrare din pata albă a fost modificată, ceea ce implică forfecări de material şi deci îndepărtarea particulelor desprinse de pe suprafaţă.

Zona, de formă oarecum inelară, care înconjură pata albă, se prezintă ca o depresiune, fiind mai retrasă faţă de nivelul acestei pete şi a restului suprafeţei active atît în direcţia axială după generatrice, cît şi în direcţie azimutală. Formarea zonei retrase în direcţie axială provine din existenţa unei diferenţe de rază de curbură în regiunea distanţei minime între fus şi cuzinet. Astfel, în condiţiile experimentale cu două lagăre de sprijin sub acţiunea sarcinii exterioare pe lagăr, fusul se înconvoaie elastic, apropiindu-se mai mult de cuzinet la marginile acestuia. La mijlocul cuzinetului săgeata de încovoiere fiind maximă, distanţa dintre suprafaţa activă a cuzinetului şi a fusului creşte, prin urmare, de la margine către mijloc. În această zonă de mijloc, proeminenţa practicată în suprafaţa cuzinetului a avut însă ca urmare o apropiere a fusului de cuzinet, analogă ca la margine. Sub acţiunea presiunilor din filmul de lubrifiant şi a procesului de uzură în regiunile de margine şi în dreptul proeminenţei de la mijlocul cuzinetului, materialul cuzinetului s-a tasat şi uzat mai mult decît în restul suprafeţei situate pe generatrice. Zona de depresiune de lîngă pata albă, în direcţie axială, a rezultat deci din faptul că raza de încovoiere elastică a fusului este mai mare decît raza de curbură a proeminenţei menţionate. Formarea şi în direcţie azimutală a acestei depresiuni a rezultat din funcţionarea lagărului la diferite sarcini şi viteze, deoarece în fiecare dintre aceste regimuri linia centrelor a luat o altă poziţie şi cuzinetul s-a situat faţă de fus la distanţă minimă mereu în dreptul unei alte generatrice a suprafeţei sale active.

Depresiunea inelară a suprafeţei prezintă faţă de pata albă două caracteristici principale. Astfel, în această zonă, stratul de staniu depus

electrolitic s-a constatat a fi încă prezent, iar în al doilea rînd microgeometria de prelucrare a suprafeței nu a suferit decît modificări fără însemnătate. Aceste două caracteristici constituie în același timp dovada că depresiunea se află într-o poziție retrasă față de nivelul petei albe și al celorlalte porțiuni de suprafață. Dovada prezenței stratului de staniu pe suprafața depresiunii s-a făcut atît prin observație directă, cît și prin atac cu reactivul 1% NaOH, sub acțiunea căruia suprafața nu s-a înnegrit. Persistența în depresiune a microgeometriei de prelucrare apare din figura 22, unele striuri mai pronunțate datorîndu-se acțiunii abrazive a unor particule dure vehiculate printre suprafețele de frecare de către lubrifiant.

Aspectele de microgeometrie la frontiera dintre pata albă și zona inelară de depresiune sînt arătate, la mărirea 100 : 1 și fără atac, în figurile 26, 27 și 28, și anume în zonele marcate cu 1, 2 și 3, precum și în figura 22. În aceste fotografii, zonele de culoare închisă reprezintă suprafața depresiunii, iar zonele albe porțiuni de suprafață din pata albă. Se poate constata că în zona de depresiune procesul de alunecare, care în pata albă a avut efecte pronunțate de deformare plastică a materialului în stratul superficial, nu a lăsat astfel de urme din cauza grosimii mai mare a filmului de lubrifiant. În figura 29 se prezintă, la mărirea de 600 : 1, zona de frontieră a petei albe cu depresiunea, în regiunea marcată cu 4 din figura 22. Porțiunile albe din figură reprezintă macro- și microzone de suprafață activă în care procesul de alunecare a acționat cu aceeași intensitate ca în pata albă, iar cele de culoare mai închisă zone în care intensitatea procesului modificator de suprafață a fost diminuată datorită grosimii mai mari a peliculei de lubrifiant.

Efectele proceselor severe de alunecare, procese create în cazul de față în mod artificial într-o zonă oarecare a suprafeței active prin practicarea proeminenței menționate, pot fi constatate în mod obișnuit și la suprafețele de lucru în dreptul grosimii minime a filmului de lubrifiant. Mărimea și aspectul multilateral al acestor efecte depind de regimurile de alunecare în care au funcționat suprafețele. În cazul modelului A12 se prezintă unele aspecte ale suprafeței zonei de grosime minimă a filmului după funcționarea lagărului timp de aproximativ 30 de ore în această poziție. Astfel, în figura 30, la mărirea 4 : 1, se arată zona grosimii minime a filmului pe toată lățimea lagărului, această zonă prezentîndu-se în fotografie sub forma unei dungi de culoare mai închisă care desparte două regiuni de culoare mai deschisă. Regiunea *a*, situată sub această dungă, reprezintă suprafața activă a cuzinetului în amonte, iar regiunea *b*, situată deasupra, suprafața în aval de zona grosimii minime a peliculei de lubrifiant. Regiunea din amonte care apare în partea de jos a fotografiei, de culoare închisă asemănător cu dunga menționată, este în realitate de culoare deschisă, așa cum apare în fotografie în imediata vecinătate a acestei dungi. În figura 31 se poate vedea o porțiune din dungă și din regiunile menționate din amonte și din aval, la mărimea 50 : 1.

Caracteristicile principale în ceea ce privește aspectul modificării suprafeței active sub acțiunea procesului de alunecare, atît ale dungii, care are și ea o oarecare lățime, cît și ale zonelor învecinate, se deosebesc

între ele. Aceasta permite ca într-o oarecare măsură să poată fi identificaţi şi factorii care au generat una sau alta dintre aceste caracteristici. Astfel, în figura 32 se arată suprafaţa activă în zona din amonte, iar în figura 33 zona din aval faţă de dungă, ambele la mărimea 600 : 1. Caracterul relativ uniform al mărimii şi alternării petelor de culoare deschisă cu cele de culoare închisă în cazul din figura 33 primele reprezentînd vîrfurile, iar celelalte adînciturile striurilor de pe suprafaţă, arată că în această zonă intensitatea factorilor modificatori a fost minimă sau că astfel de factori nici nu au luat naştere în procesul de alunecare. Aceasta este în concordanţă şi cu consideraţiile teoretice ale lubrificaţiei în cazul lagărelor cilindrice circulare, deoarece în aval de linia grosimii minime a peliculei de lubrifiant se află zona divergentă a spaţiului dintre fus şi cuzinet, zonă inactivă în ceea ce priveşte repartiţia presiunilor. Factorii procesului de alunecare care acţionează în sens modificator asupra suprafeţei, ca temperatura, presiunea, viteza etc. au intensităţi sub rezistenţa materialului, stratul superficial al peretelui solid rămînînd în consecinţă neafectat sau afectat numai în măsură practic fără importanţă. Aspectul suprafeţei arătat în figura 33 este acela rezultat din prelucrare, deci relativ uniform.

În amonte de linia grosimii minime a peliculei de lubrifiant se află zona convergentă a lagărului; factorii modificatori au şi acţionează aici cu intensitate mare, efectul fiind un aspect mai neregulat ca formă, mărime şi alternanţă a microzonelor albe reprezentînd proeminenţele şi a celor întunecate reprezentînd adînciturile din suprafaţa de lucru. Aria mai mare a microzonelor albe indică îndeosebi un intens proces de deformare plastică şi de uzură.

În ceea ce priveşte suprafaţa în dunga neagră însăşi, figura 31 arată că pe toată lăţimea acesteia striurile din zonele din amonte şi din aval sînt întrerupte, suprafaţa constînd din proeminenţe şi goluri dispuse fără orientare. Mai mult, adînciturile sînt numeroase şi de dimensiuni mai mari, forma şi dispunerea reciprocă a acestora putînd fi văzute în figura 34, la mărirea 100 : 1. Cîmpul de temperaturi prezentînd în această zonă un maximum [5], materialul este solicitat termic în cea mai mare măsură, prezentînd deci cea mai redusă rezistenţă mecanică şi o sensibilitate sporită faţă de modificările structurale şi de coroziune chimică. Pot fi luate în considerare de asemenea efecte de cavitaţie, dată fiind zona de presiuni negative care poate apărea imediat în aval de linia unde grosimea peliculei de lubrifiant este minimă.

Din aceste cercetări reiese că procesele de alunecare provoacă importante modificări în straturile superficiale ale suprafeţelor de frecare. Aceste modificări afectează microgeometria suprafeţelor şi structura materialului din straturile superficiale care participă la procesul de alunecare, parametri care în timpul funcţionării lagărelor apar deci modificaţi faţă de cei iniţiali, de la montaj. Condiţiile de adsorbţie ale lubrifiantului şi deci de formare şi persistenţă a peliculei lubrifiante nu rămîn, prin urmare, cele iniţiale, ceea ce influenţează proprietăţile portante şi de funcţionare sigură în exploatare a suprafeţelor de alunecare.

Primită la redacţie la 26 octombrie 1965

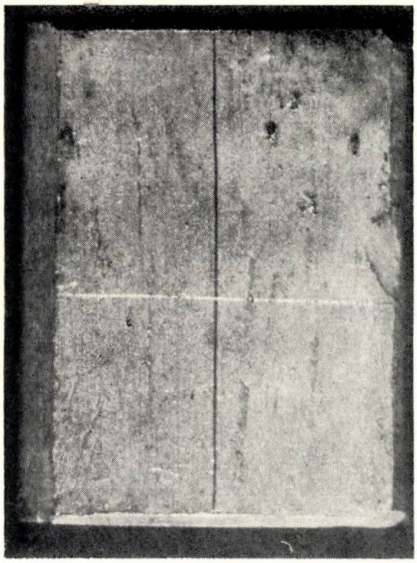


Fig. 1. — Modelul A6-21. Aspectul inițial al suprafeței (4,7 : 1).

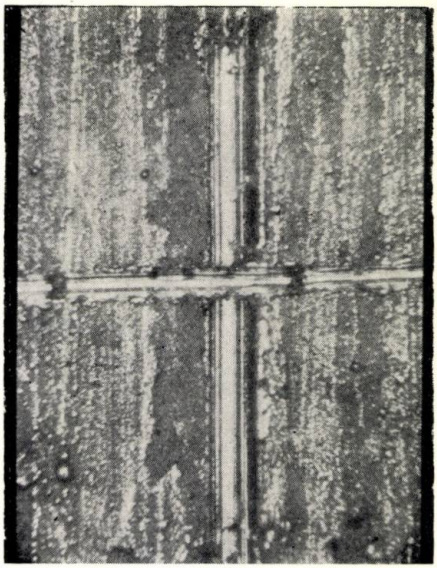


Fig. 2. — Modelul A6-21. Microgeometria de prelucrare (100 : 1).

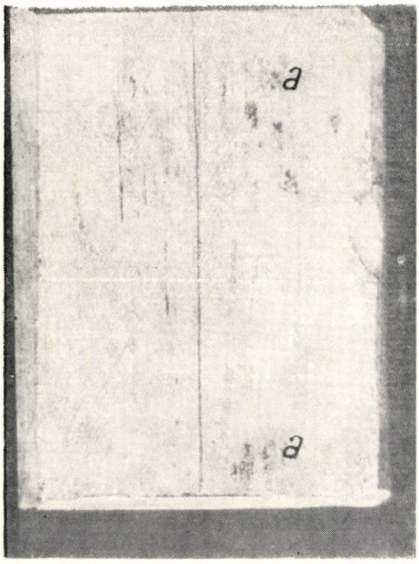


Fig. 3. — Modelul A6-21. Aspectul suprafeței după încercarea în condițiile A6-21, pct. (a): *a*-zone tasate (4,7 : 1).

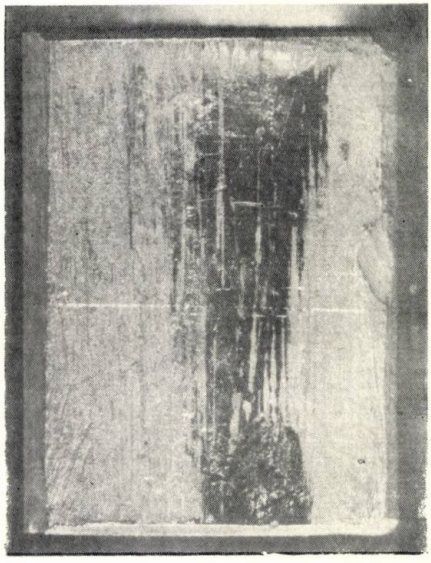


Fig. 4. — Modelul A6-21. Suprafața activă după încercarea la alunecare în stare lubrifiată. (Condițiile A6-21, pct. (b)), (4,7 : 1).

Fig. 5. — Modelul A6-21. Zona întretăierii liniilor de referință în cazul figurii 4 (100 : 1).

Fig. 6. — Modelul A6-21, Suflurile apărute pe suprafață în cazul figurii 4 (3 : 1).

Fig. 7. — Modelul A6-21. Unele sufluri mai mari în cazul figurii 6 (100 : 1).

Fig. 8. — Modelul A6-22. Aspectul fin al suprafeței în cazul alunecării în stare lubrifiată. (Condițiile A6-22, pct. (b)), (600 : 1).

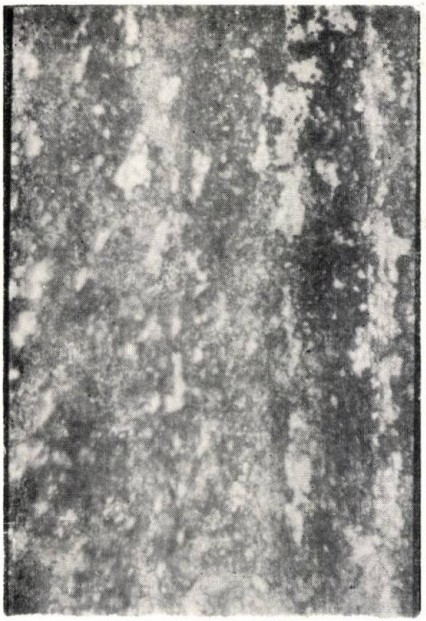


Fig. 9. — Modelul A6-22. Suprafața în cazul figurii 8, cu atac Nital 5%.

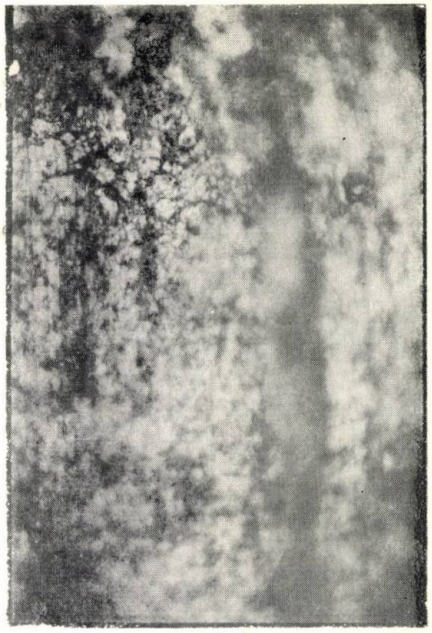


Fig. 10. — Modelul A6-22. Tendința de formare a grăunților mari la alunecarea uscată (Condițiile A6-22, pct. (a)), cu atac Nital 5% (600 : 1).

Fig. 11. — Modelul A6-22. Suprafața în cazul figurii 10. Zonele lucioase sînt atacate greu de reactivul Nital 5% (600 : 1).

Fig. 12. — Modelul A6-22. Suprafața în cazul figurii 10. În jurul fazei AlSb (petele negre) atacul cu Nital 5% este mai eficient (600 : 1).

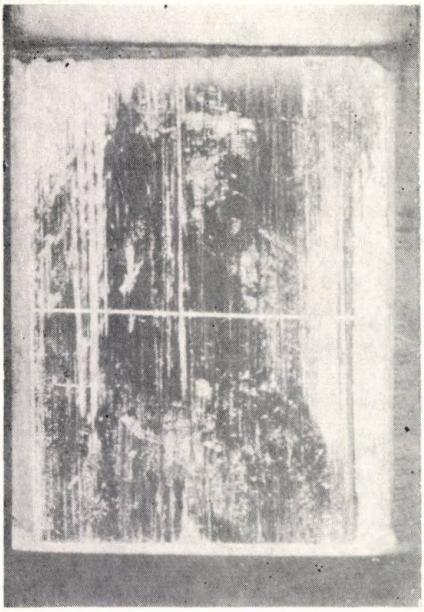


Fig. 13. — Modelul A6-11. Suprafața de lucru după încercarea la alunecare uscată.(Condițiile A6-11, pct.(a)), (4,7 : 1).

Fig. 14. — Modelul A6-11. Suprafața din figura 13 după încercarea la alunecare în stare lubrifiată. (Condițiile A6-11, pct. (b) (4,7 : 1).

Fig. 15. — Modelul A6-11. Aspecte de curgere plastică de material, în cazul suprafeței din figura 14 (100 : 1).

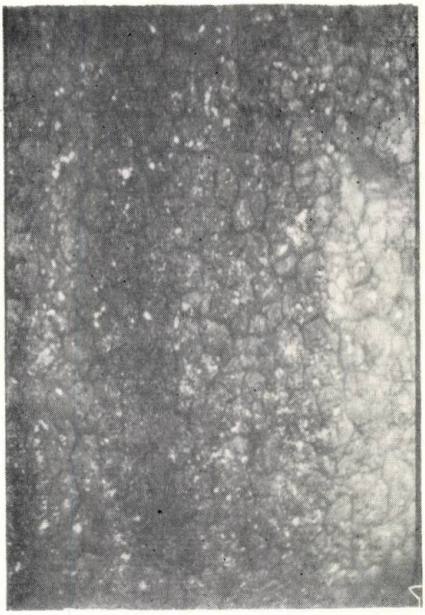


Fig. 16. — Modelul A6-11. Formarea grăunților mari de Sn și unele zone ale suprafeței din figura 14, cu atac Nital 5%, lumină polarizată cu nicoli paraleli (600 : 1).

Fig. 17. — Modelul A6-11. Grăunți mici normali de Sn într-o altă zonă a suprafeței din figura 14, cu atac Nital 5% (600 : 1).

Fig. 18. — Modelul A6-12. Structura grăunțoasă după șlefuirea abrazivă uscată. (Condițiile A6—12, pct. (a)), cu atac Nital 5% (600 : 1).

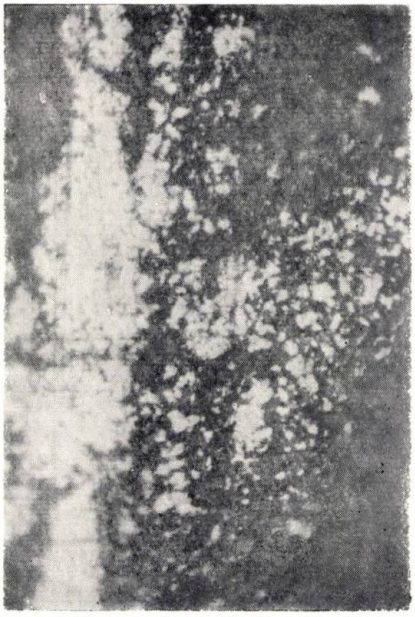


Fig. 19. — Modelul A6-12. Zonă cu strat lucios în cazul șlefuirii abrazive uscate. (Condițiile A6-12, pct. (a)), cu atac Nital 5% (600 : 1).

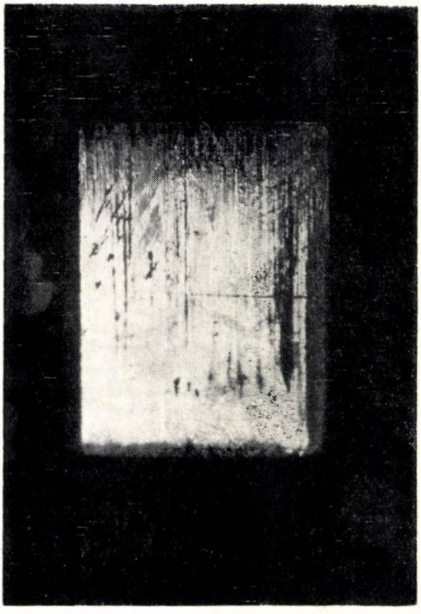


Fig. 20. — Modelul A6-11. Suflurile apărute pe suprafața de alunecare în cazul suprafeței arătate în figura 14 (3 : 1).

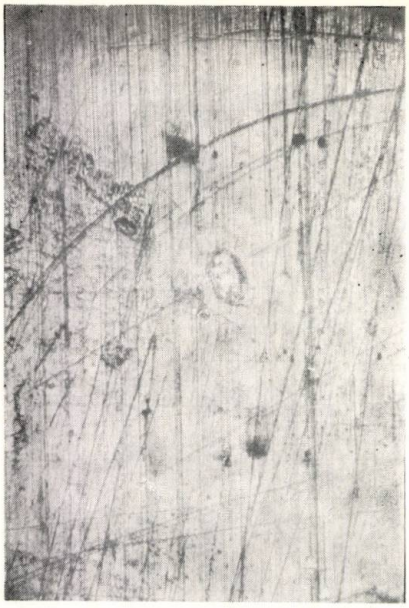
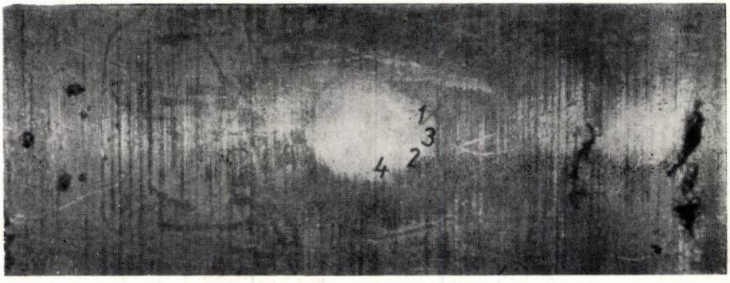


Fig. 21. — Modelul A6-11. Sufluri de proporţii mai mari în cazul figuri 20 (100 : 1).

Fig. 22. — Modelul A11. Pata albă în dreptul proeminenţei şi depresiunea înelară care o înconjură. (Condiţiile A1) (4 : 1).



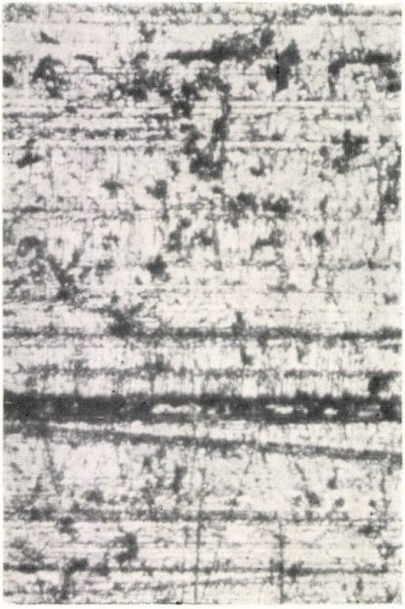


Fig. 23.— Modelul A11. Detalii de microgeometrie ale suprafeţei petei albe (100:1).

Fig.24.—Modelul A11. Curgerea plastică în zona cea mai luminoasă a petei albe (600:1).

Fig. 25. — Modelul A11. Stratul superficial de curgere plastică în pata albă atacat de reactivul Nital 5 %, (600 : 1) : *a*—strat lucios pe care reactivul nu l-a atacat.

Fig. 26. — Modelul A11. Zona de frontieră marcată cu 1 în figura 22 (100 : 1).

Fig. 27. — Modelul A11. Zona de frontieră marcată cu 2 în figura 22 (100 : 1).

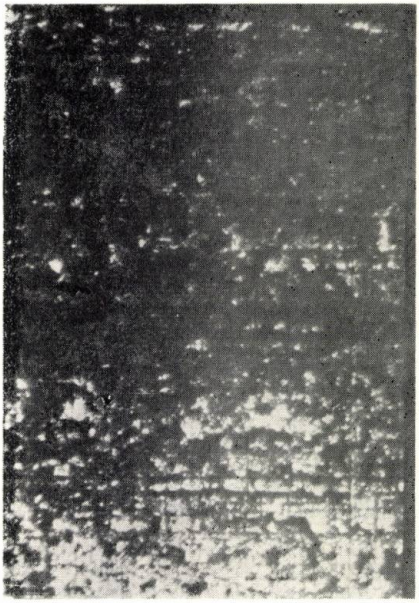


Fig. 28. — Modelul A11. Zona de frontieră marcată cu 3 în figura 22 (100 : 1).

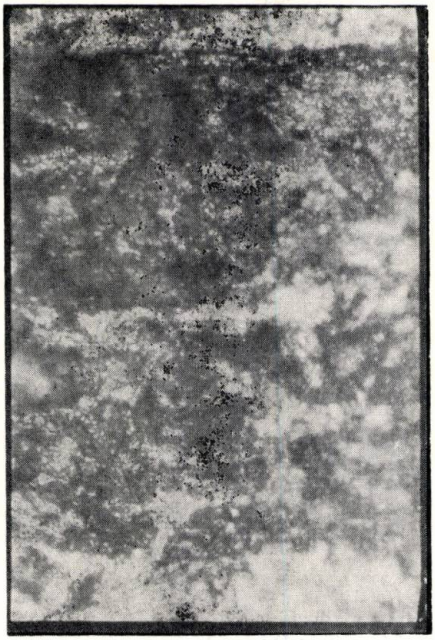


Fig. 29. — Modelul A11. Zona de frontieră amonte a petei albe, marcată cu 4 în figura 22 (600 : 1).

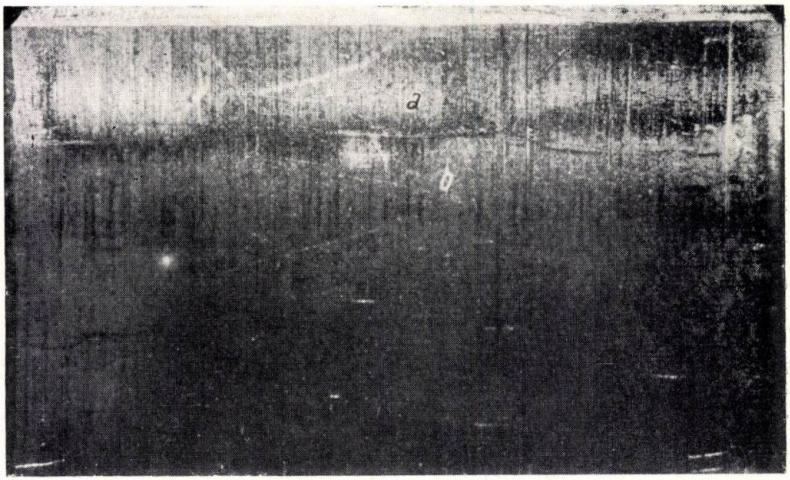


Fig. 30. — Modelul A12. Regiunea grosimii minime a filmului de lubrifiant. (Condițiile de încercare A1), (4 : 1) : *a* — porțiunea din amonte a regiunii ; *b* — porțiunea din aval a regiunii.

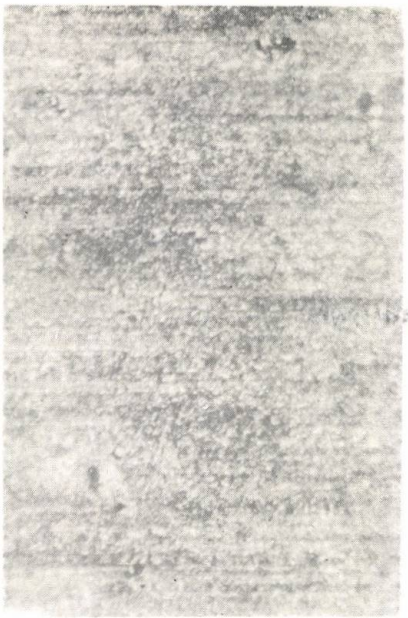


Fig. 31. — Modelul A12. Regiunea dungii negre (50 : 1).

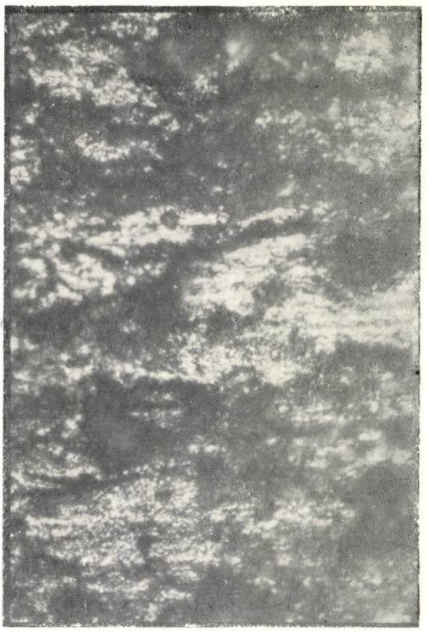


Fig. 32. — Modelul A12. Concentrări mai mari şi distribuite mai neuniform de tasări de material în regiunea din amonte *a*, în cazul figurii 30 (600 : 1).

Fig. 33. — Modelul A12. Distribuţia şi mărimea mai regulate a vrfurilor şi adînciturilor asperităţilor în zona din aval *b*, în cazul figurii 30 (600 : 1).

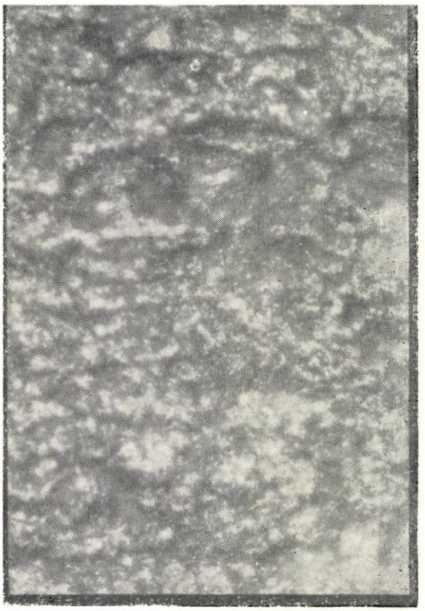


Fig. 34. — Modelul A12. Zona cu denivelări mai accentuate a dungii negre din figura 30 (100 : 1).

BIBLIOGRAFIE

1. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrification of Solids*, Oxford, 1954.
2. Gh. Vasilca, Al. Nica, *Aplicarea teoriei hidrodinamice a ungerii la studiul comportării lagărelor cu cuzineți trimetalici*, Memoriu I.M.A., 1963 (lucrare nepublicată).
3. — *Aspecte de structură în suprafața activă la materialele antifricțiune pentru lagăre*, St. cerc. mec. apl., **14**, *2* (1963).
4. Șt. Zămîrcă, Gh. Vasilca, M. Moravek, *Decaparea cu inhibitori pentru reducerea difuziunii hidrogenului atomic la placarea materialelor antifricțiune pentru lagăre*, **1961** (lucrare nepublicată).
5. N. Tipei, Al. Nica, *Cercetări asupra regimurilor de funcționare a lagărelor. Influența variației viscozității*, St. cerc. mec. apl., **10**, *3*, 738 (1959).

ASUPRA UNEI CLASE DE SCURGERI PRIN MEDIILE POROASE CU PERMEABILITATE VARIABILĂ[1)]

de T. OROVEANU

532

Cu mai mult timp în urmă am studiat scurgerile prin mediile poroase cu permeabilitatea variabilă, punînd condiția ca rotorul vitezei de filtrare să fie nul. Atacăm acum o problemă asemănătoare, considerînd scurgerile cu rotor constant al vitezei de filtrare, tot prin mediile poroase cu permeabilitatea variabilă. Discutăm mai întîi posibilitățile de rezolvare a problemei în cazul scurgerilor tridimensionale, ceea ce ne dă o relație între rotor și viteza de filtrare. Trecem după aceea la studiul scurgerii plane și schițăm o metodă particulară de rezolvare.

1. Introducere. Într-o lucrare anterioară [3] am considerat o problemă particulară referitoare la scurgerea lichidelor incompresibile prin mediile poroase a căror permeabilitate este funcție de punct. După aceea am reluat și aprofundat această problemă în studiul nostru monografic asupra scurgerii fluidelor prin mediile poroase neomogene [4]. Vom reaminti pe scurt principalele rezultate pe care le-am obținut în lucrarea amintită mai sus, față de care studiul de față constituie oarecum o generalizare.

Atunci cînd un lichid incompresibil se scurge printr-un mediu poros a cărui permeabilitate k este o funcție de punct, viteza de filtrare are componentele

$$v_i = k\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

[1)] Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée, **11**, 3 (1966) (în limba franceză).

funcţia φ avînd expresia

$$\varphi = -\frac{1}{\mu}(p + U), \tag{2}$$

în care μ este viscozitatea lichidului, p presiunea şi U potenţialul forţelor exterioare. Această funcţie trebuie să fie o soluţie a ecuaţiei

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{3}$$

care se obţine imediat din ecuaţia de continuitate.

Tensorul rotor al vitezei de filtrare

$$\Omega_{jl} = \frac{\partial v_l}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_l} = \frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} - \frac{\partial k}{\partial x_l}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \tag{4}$$

şi vectorul rotor corespunzător

$$\Omega_i = \delta_{ijl}\frac{\partial v_l}{\partial x_j} = \delta_{ijl}\left(\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + k\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_l}\right) \tag{5}$$

simbolul δ_{ijl} avînd semnificaţia cunoscută, sînt în general diferiţi de zero. Putem, totuşi, obţine soluţii particulare ale ecuaţiei diferenţiale (3), presupunînd că rotorul vitezei de filtrare este nul. Acest lucru l-am făcut în [3], scriind

$$\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} - \frac{\partial k}{\partial x_l}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0, \tag{6}$$

condiţie care este îndeplinită atunci cînd φ este o funcţie oarecare de k

$$\varphi = \varphi(k). \tag{7}$$

Dacă revenim acum la ecuaţia (3), aceasta ia forma

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}k}k\frac{\partial k}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{8}$$

şi soluţiile ei sînt legile de variaţie a permeabilităţii care permit să se realizeze scurgeri cu rotor nul al vitezei de filtrare.

În [3], ca şi în [4], am indicat cîteva cazuri particulare ale relaţiei (7) şi cîteva exemple referitoare la scurgerile plane. Vom trece acum la studiul unei situaţii mai generale, luînd în considerare scurgerile pentru care rotorul vitezei de filtrare nu mai este nul.

2. **Scurgeri cu rotor constant.** S-ar putea întreprinde studiul scurgerii unui lichid incompresibil printr-un mediu poros neomogen atunci cînd vectorul rotor este dat, componentele sale fiind funcţii de punct. Pentru

început ne vom mărgini la cazul mai simplu în fața căruia ne găsim atunci cînd componentele vectorului rotor sînt constante. Obținem astfel din (5)

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = \Omega_1; \qquad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = \Omega_2,$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \Omega_3, \tag{9}$$

Ω_1, Ω_2, Ω_3 fiind constante date. Pentru a rezolva aceste ecuații, vom aplica un procedeu binecunoscut [2], presupunînd mai întîi că avem $v_3 = 0$. În acest fel, din primele două ecuații (9) rezultă

$$v_1 = \Omega_2(x_3 - x_3^{(0)}) + f(x_1, x_2),$$
$$v_2 = -\Omega_1(x_3 - x_3^{(0)}) + g(x_1, x_2), \tag{10}$$

$f(x_1, x_2)$ și $g(x_1, x_2)$ fiind două funcții arbitrare de x_1 și de x_2; valoarea $x_3^{(0)}$ a lui x_3 este o constantă de integrare. Cu aceste expresii ale lui v_1 și v_2, a treia ecuație (9) devine

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} = \Omega_3. \tag{11}$$

Din ecuația de continuitate

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{12}$$

ținînd seama de faptul că $v_3 = 0$, obținem

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \tag{13}$$

și, dacă introducem funcția

$$h(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \Omega_3 x_2, \tag{14}$$

relațiile (11) și (13) ne dau

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial h}{\partial x_2}; \qquad \frac{\partial g}{\partial x_2} = -\frac{\partial h}{\partial x_1}. \tag{15}$$

Funcțiile $g(x_1, x_2)$ și $h(x_1, x_2)$ sînt, așadar, armonic conjugate. Aceasta înseamnă că, dintre cele două funcții pe care le-am introdus în relațiile (10), una singură poate fi aleasă arbitrar printre soluțiile ecuației lui Laplace. Într-adevăr, dacă alegem, de exemplu, funcția $g(x_1, x_2)$, $f(x_1, x_2)$ rezultă imediat din (15) și (14).

Este acum uşor să găsim soluţia ecuaţiilor (9) în cazul general ($v_3 \neq 0$). Astfel, dacă introducem o funcţie oarecare de x_1, x_2, x_3, pe care o vom nota cu $F(x_1, x_2, x_3)$, avem

$$v_1 = \Omega_2(x_3 - x_3^{(0)}) + f(x_1, x_2) + \frac{\partial F}{\partial x_1},$$

$$v_2 = -\Omega_1(x_3 - x_3^{(0)}) + g(x_1, x_2) + \frac{\partial F}{\partial x_2}, \tag{16}$$

$$v_3 = \frac{\partial F}{\partial x_3}.$$

Tot cu ajutorul ecuaţiei de continuitate (12) se poate constata că funcţia $F(x_1, x_2, x_3)$ trebuie să fie de asemenea armonică.

Consideraţiile precedente au un caracter general, dar în problema pe care o studiem componentele vitezei de filtrare au şi expresiile (1). Rezultă de aici că trebuie să avem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{1}{k}\left[\Omega_2(x_3 - x_3^{(0)}) + f(x_1, x_2) + \frac{\partial F}{\partial x_1}\right],$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{1}{k}\left[-\Omega_1(x_3 - x_3^{(0)}) + g(x_1, x_2) + \frac{\partial F}{\partial x_2}\right], \tag{17}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \frac{1}{k}\frac{\partial F}{\partial x_3},$$

ceea ce ne dă condiţiile de integrabilitate

$$v_1\frac{\partial k}{\partial x_2} - v_2\frac{\partial k}{\partial x_1} + k\,\Omega_3 = 0,$$

$$v_3\frac{\partial k}{\partial x_1} - v_1\frac{\partial k}{\partial x_3} + k\,\Omega_2 = 0, \tag{18}$$

$$v_2\frac{\partial k}{\partial x_3} - v_3\frac{\partial k}{\partial x_2} + k\,\Omega_1 = 0,$$

în care, pentru simplificarea scrierii, am introdus, cu ajutorul expresiilor (16), componentele vitezei de filtrare. Însă din ultimele două dintre condiţiile precedente rezultă

$$v_1\frac{\partial k}{\partial x_2} - v_2\frac{\partial k}{\partial x_1} - k\frac{v_1}{v_3}\Omega_1 - k\frac{v_2}{v_3}\Omega_2 = 0, \tag{19}$$

ceea ce ne arată că aceste condiţii sînt incompatibile, afară de cazul în care avem

$$\Omega_i v_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{20}$$

sau

$$\Omega_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{21}$$

dacă ţinem seama de expresiile (1). Această relaţie înseamnă că vectorii Ω_i şi v_i sau $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ sînt ortogonali. Rezultatul la care am ajuns era, de altfel, de aşteptat, deoarece (1) este un caz particular al reprezentării lui Clebsch [1], şi anume acela în care există relaţia (20).

Vectorul Ω_i fiind constant, putem alege axele de coordonate astfel ca una dintre ele să fie paralelă cu acest vector. Din (20) rezultă imediat că în acest caz componenta vitezei de filtrare paralelă cu această axă trebuie să fie nulă. Nu vom face însă deocamdată uz de această posibilitate, deoarece, cel puţin în anumite cazuri, considerarea problemei fără o alegere particulară a axelor de coordonate ne permite să ajungem destul de uşor la rezultate.

Remarcăm, de asemenea, că relaţia (20) sau (21) se poate deduce şi direct din sistemul (9), în care înlocuim componentele vitezei de filtrare cu expresiile lor (1). Obţinem astfel

$$\frac{\partial k}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial k}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \Omega_1, \quad \frac{\partial k}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial k}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \Omega_2,$$

$$\frac{\partial k}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial k}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \Omega_3 \tag{22}$$

şi, dacă eliminăm pe $\frac{\partial k}{\partial x_3}$ între primele două ecuaţii ale acestui sistem şi comparăm rezultatul cu ultima ecuaţie, ajungem din nou la relaţia (21). De altfel, condiţiile (18) nu sînt altceva decît expresiile componentelor vectorului Ω_i, care pot fi deduse din (9) utilizînd tot expresiile (1) ale componentelor v_i.

Componentele Ω_i fiind constante cunoscute, relaţia (21) reprezintă o ecuaţie liniară cu derivate parţiale de ordinul întîi, în care funcţia necunoscută este $\varphi\ (x_1, x_2, x_3)$. Se poate constata uşor că soluţia acestei ecuaţii este o funcţie oarecare de argumentul

$$ax_1 + bx_2 - \frac{\Omega_1 a + \Omega_2 b}{\Omega_3} x_3 + c,$$

a, b şi c fiind constante.

Este, prin urmare, posibil să se determine legea de variaţie a permeabilităţii care corespunde funcţiei $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ astfel ca vectorul rotor să

fie constant. Vom da numai un exemplu, cel mai simplu cu putință, presupunînd că avem

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 - \frac{\Omega_1 a + \Omega_2 b}{\Omega_3} x_3 + c. \tag{23}$$

În acest caz, din ecuația (3) obținem

$$\frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{24}$$

sau

$$a \frac{\partial k}{\partial x_1} + b \frac{\partial k}{\partial x_2} - \frac{\Omega_1 a + \Omega_2 b}{\Omega_3} \frac{\partial k}{\partial x_3} = 0, \tag{25}$$

rezultat la care se poate ajunge și dacă plecăm de la relațiile (16). În acest scop trebuie să înlocuim mai întîi în aceste relații componentele v_i cu expresiile lor (1) și apoi să ținem seama de relația (13) și de faptul că $F(x_1, x_2, x_3)$ este armonică.

Relația (25) reprezintă tot o ecuație liniară cu derivate parțiale de primul ordin, a cărei soluție este o funcție oarecare de argumentul

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \frac{\Omega_3(a\alpha + b\beta)}{\Omega_1 a + \Omega_2 b} x_3 + \gamma,$$

α, β și γ fiind constante. Cea mai simplă dintre aceste funcții este

$$k(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \frac{\Omega_3(a\alpha + b\beta)}{\Omega_1 a + \Omega_2 b} x_3 + \gamma \tag{26}$$

și putem determina constantele α și β funcție de a și b sau invers. Într-adevăr, prima dintre condițiile (18) fiind, ca urmare a relației (20), o consecință a ultimelor două, acestea devin un sistem de ecuații algebrice cu două necunoscute. Nu insistăm asupra acestor calcule, care sînt de altfel lipsite de un interes special. Scurgerea pe care am dat-o ca exemplu este destul de particulară, componentele vitezei de filtrare fiind proporționale cu permeabilitatea.

Să presupunem acum că una dintre componentele vitezei de filtrare, de exemplu v_3, este nulă. Dacă revenim la expresiile (1), se constată imediat că φ trebuie să fie funcție numai de variabilele x_1 și x_2, componentele v_1 și v_2 fiind deci funcții de x_3 prin intermediul permeabilității.

În loc de (21) avem

$$\Omega_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \Omega_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \tag{27}$$

ecuație a cărei integrală este o funcție oarecare de argumentul

$$a\left(x_1 - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} x_2\right) + b,$$

a și b fiind constante.

Din expresiile (1) și (10) găsim în acest caz

$$g(x_1, x_2) = -\frac{\Omega_1}{\Omega_2} f(x_1, x_2), \tag{28}$$

în timp ce funcția $f(x_1, x_2)$ trebuie să fie o soluție a sistemului

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\Omega_3, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \tag{29}$$

pe care îl găsim în locul ecuațiilor (11) și (13). Urmînd calea obișnuită, ajungem fără dificultăți la soluția

$$f(x_1, x_2) = \alpha - \frac{\Omega_2\ \Omega_3}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}(\Omega_1 x_1 + \Omega_2 x_2), \tag{30}$$

în care α este tot o constantă.

Dacă luăm, de exemplu,

$$\varphi(x_1, x_2) = a\left(x_1 - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} x_2\right) + b, \tag{31}$$

permeabilitatea trebuie să varieze după legea

$$k(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{a}\left[\Omega_2 (x_3 - x_3^{(0)}) + \alpha - \frac{\Omega_2\ \Omega_3}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}(\Omega_1 x_1 + \Omega_2 x_2)\right] \tag{32}$$

pentru ca vectorul rotor să fie constant.

În sfîrșit, atunci cînd $v_3 = 0$, se poate satisface relația (20) punînd $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, $\Omega_3 \neq 0$, ceea ce ne conduce la cazul scurgerii plane. Între funcțiile $k(x_1, x_2)$ și $\varphi(x_1, x_2)$ există relația

$$\frac{\partial k}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial k}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \Omega = 0, \tag{33}$$

care este o ecuație liniară cu derivate parțiale de primul ordin pentru funcția φ.

Astfel, de exemplu, dacă alegem legea liniară de variație a permeabilității

$$k(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c, \tag{34}$$

găsim

$$\varphi(x_1, x_2) = \alpha - \frac{\Omega}{a^2 + b^2}(bx_1 - ax_2) \tag{35}$$

și componentele vitezei de filtrare sînt

$$v_1 = -\frac{\Omega b}{a^2 + b^2}(ax_1 + bx_2 + c), \quad v_2 = \frac{\Omega a}{a^2 + b^2}(ax_1 + bx_2 + c). \tag{36}$$

Putem totuşi să rezolvăm problema fără a recurge la ecuaţia (33) dacă ţinem seama de faptul că relaţiile (1) şi (10) ne dau

$$k\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = f(x_1, x_2); \qquad k\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = g(x_1, x_2) \tag{37}$$

în cazul particular al scurgerii plane.

Introducem acum funcţia

$$h(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \Omega x_2 \tag{38}$$

şi reamintim că am arătat mai înainte că funcţiile $g(x_1, x_2)$ şi $h(x_1, x_2)$ sînt armonice şi conjugate. Aceasta înseamnă că funcţiile $k\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \Omega x_2$ şi $k\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$ au aceleaşi proprietăţi. Avem însă

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{h - \Omega x_2}{k}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \frac{g}{k} \tag{39}$$

şi condiţia de integrabilitate ne dă

$$g\frac{\partial k}{\partial x_1} - (h - \Omega x_2)\frac{\partial k}{\partial x_2} - \Omega k = 0 \tag{40}$$

dacă ţinem seama de prima relaţie (15).

Această ultimă ecuaţie poate fi pusă sub forma

$$g\frac{\partial(\ln k)}{\partial x_1} - (h - \Omega x_2)\frac{\partial(\ln k)}{\partial x_2} - \Omega = 0 \tag{41}$$

şi, dacă funcţiile $g(x_1, x_2)$ şi $h(x_1, x_2)$ sînt cunoscute, legea de variaţie a permeabilităţii rezultă de aici. După aceea, plecînd de la relaţiile (39), putem găsi funcţia $\varphi\ (x_1, x_2)$.

Pentru a da şi de data aceasta un exemplu simplu, vom lua

$$g(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma\,, \tag{42}$$

ceea ce ne dă

$$h(x_1, x_2) = \alpha x_2 - \beta x_1 + \delta \tag{43}$$

şi ecuaţia (40) devine

$$(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma)\frac{\partial k}{\partial x_1} - [(\alpha - \Omega)x_2 - \beta x_1 + \delta]\frac{\partial k}{\partial x_2} - \Omega k = 0. \tag{44}$$

Această ultimă ecuaţie admite ca soluţie legea liniară de variaţie a permeabilităţii (34), cu condiţia să avem

$$\alpha = \frac{a^2\,\Omega}{a^2 + b^2}, \quad \beta = \frac{ab\,\Omega}{a^2 + b^2}, \quad \gamma = \frac{b\delta + c\Omega}{a}. \tag{45}$$

Componentele vitezei de filtrare au deci expresiile

$$v_1 = -\frac{\Omega b}{a^2+b^2}\left[ax_1 + bx_2 - \frac{(a^2+b^2)\,\delta}{\Omega b}\right] \tag{46}$$

şi

$$v_2 = \frac{\Omega a}{a^2+b^2}\left[ax_1 + bx_2 + \frac{(b\delta + c\Omega)(a^2+b^2)}{\Omega a^2}\right], \tag{47}$$

identice cu (36) dacă avem

$$\delta = -\frac{\Omega bc}{a^2+b^2}. \tag{48}$$

Funcţia $\varphi(x_1, x_2)$ are, firește, expresia (35), pe care o putem găsi şi dacă plecăm de la relaţiile (39).

Rezultatele pe care le-am obţinut în acest caz particular trebuie să verifice ecuaţia (3) sau ecuaţia de continuitate (12). Se poate constata imediat că această condiţie este satisfăcută de expresiile (34) şi (35), respectiv (36) sau (46) şi (47).

Păstrînd pentru funcţiile $g(x_1, x_2)$ şi $h(x_1, x_2)$ expresiile precedente (42) şi (43), vom mai da un exemplu, admiţînd că permeabilitatea variază după legea exponenţială

$$k = k^{(0)}\, e^{mx_1 + nx_2}, \tag{49}$$

cu m şi n constante.

Din (41) rezultă astfel

$$mg - n(h - \Omega x_2) - \Omega = 0 \tag{50}$$

şi, dacă avem

$$\alpha = \frac{n^2\,\Omega}{m^2+n^2}, \quad \beta = -\frac{mn\,\Omega}{m^2+n^2}, \quad \delta = \frac{m\gamma - \Omega}{n}, \tag{51}$$

această ecuaţie este satisfăcută. La rîndul lor, componentele vitezei de filtrare au expresiile

$$v_1 = \frac{m\Omega}{m^2+n^2}(nx_1 - mx_2) + \frac{m\gamma - \Omega}{n} \tag{52}$$

şi

$$v_2 = \frac{n\,\Omega}{m^2+n^2}(nx_1 - mx_2) + \gamma, \tag{53}$$

care verifică ecuaţia de continuitate.

3. **Concluzii.** Aşa cum am procedat mai înainte vreme pentru scurgerile cu rotor nul al vitezei de filtrare, am schiţat mai sus o teorie a scurgerilor cu rotor constant al vitezei de filtrare prin mediile poroase neomogene. Desigur, posibilităţile de aplicare practică a rezultatelor sînt

foarte limitate, dar scurgerile studiate au unele proprietăţi care nu sînt lipsite de interes. De asemenea, faptul că prin utilizarea unor procedee matematice destul de simple putem găsi soluţii ale unei ecuaţii cu derivate parţiale complicată cum este (3) apare destul de util pentru studiul de ansamblu al scurgerii lichidelor incompresibile prin medii poroase neomogene.

Primită la redacţie la 25 ianuarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. P. APPEL, *Traité de mécanique rationelle*, t. III, Paris, Gauthier-Villars, 1928, p. 460—463.
2. E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1933, p. 380—381.
3. T. OROVEANU, *Einige Betrachtungen über die Strömung inkompressibler Flüssigkeiten durch nichthomogene poröse Medien*, Revue de Mécanique Appliquée, **3**, *4* (1958).
4. T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, Bucureşti, Edit. Acad. R.P.R., 1963, p. 77—87.

ASPECTE ALE FRECĂRII ÎN REGIM-LIMITĂ STUDIATE PE UN CUPLU CU TREI CONTACTE LINIARE[1])

de I. ILIUC
Centrul de mecanica solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

539.6

Pentru studiul regimului de ungere-limită s-a ales ca mărime caracteristică coeficientul de frecare.
Cu ajutorul unei instalaţii sensibile se determină influenţa pe care o are asupra coeficientului de frecare sarcina totală, natura lubrifiantului, unele substanţe active în procesul de frecare şi sarcina totală. Se acordă o atenţie deosebită determinării condiţiilor de lucru care să asigure o împrăştiere minimă a valorilor măsurate. Cuplul de frecare folosit este format dintr-o bucşă cilindrică aflată în rotaţie, presată de trei pastile plane montate într-un disozitiv triunghiular. Deoarece forţele normale se compensează în interiorul dispozitivului triunghiular, se creează condiţii favorabile pentru eliminarea unor erori sistematice la măsurarea forţei tangenţiale de frecare.

INTRODUCERE

O mare parte a ansamblurilor supuse frecării sînt astfel concepute, încît în timpul funcţionării suprafeţele aflate în mişcare relativă să fie separate de o peliculă continuă de lubrifiant. Există numeroase situaţii în care distanţa dintre suprafeţe se micşorează mult, realizîndu-se un contact parţial între ele. În locul ungerii hidrod namice intervine ungerea-

[1]) Publicată şi in „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, *3* (1966) (în limba engleză).

limită, care este responsabilă de cea mai mare parte din uzura totală a suprafeţelor.

În cazul ungerii-limită se constată o dependenţă importantă între frecare şi uzură, pe de o parte, şi natura lubrifiantului, a suprafeţelor, sarcină şi mediu gazos, pe de altă parte.

Dificultăţile întîmpinate în studiul fenomenelor care intervin în procesul de frecare în regim-limită sînt legate de numărul însemnat de variabile care îl condiţionează, dificultăţi de a menţine unele dintre ele constante într-un şir de experienţe, caracterului nepermanent al procesului de uzură, a scării microscopice la care se desfăşoară etc.

Pentru studiul acestor procese se aleg ca variabile dependente, de obicei, forţa de frecare între suprafeţe şi uzura lor, ambele mărimi macroscopice pentru care se determină valorile medii pe un interval mai lung sau mai scurt.

Utilizarea unor metode de măsură noi, perfecţionate pentru frecare şi uzură, sensibile şi precise şi în acelaşi timp continue, poate contribui la sporirea volumului şi a eficacităţii cercetării în acest domeniu.

În lucrarea de faţă se descrie un nou procedeu de măsură a coeficientului de frecare la alunecare pentru un cuplu cu trei contacte liniare. Cu această instalaţie s-a determinat influenţa asupra coeficientului de frecare a sarcinii totale, a naturii lubrifiantului, a unor adaosuri active şi a sarcinii specifice. O condiţie impusă determinărilor a fost o bună reproductibilitate a valorilor coeficientului de frecare pentru condiţii date fixe. Uneori se acordă prea uşor calificativul de întîmplător (statistic) cauzelor care conduc la împrăştierea valorilor măsurate (coeficient de frecare, uzură).

APARATURA EXPERIMENTALĂ

După cum este cunoscut, instalaţiile pentru studiul regimului de ungere-limită conţin una sau mai multe piese fixe apăsate pe o piesă aflată în mişcare, de obicei în mişcare de rotaţie. Soluţiile folosite pentru măsurarea frecării constau în diferite procedee de măsură a forţei tangenţiale care apare între suprafeţele aflate în mişcare relativă.

Măsurarea forţei tangenţiale se poate face fie măsurînd momentul rezistent ce apare în axul care antrenează piesa în mişcare (fig. 1 *a*), fie măsurînd forţa tangenţială care acţionează asupra piesei fixe; măsurarea ei se face prin deplasarea piesei fixe într-un sistem elastic pînă la compensarea forţei tangenţiale. Deoarece piesa fixă trebuie să transmită forţa normală şi în acelaşi timp să nu fie legată pe direcţia tangenţială, ea se aşează de obicei pe un rulment (fig. 1 *b*).

Valorile obţinute pentru forţa tangenţială prin procedeele cuprinse în această clasificare sînt afectate de o eroare sistematică, şi anume: în cazul instalaţiilor din categoria (*a*), la momentul datorit forţei de fre-

care se adaugă şi momentul datorit frecărilor din lagărele axului, întrucît asupra lor acţionează forţe de reacţiune datorită forţei normale; în cazul instalaţiilor din categoria (*b*), la forţa tangenţială datorită frecării de alunecare se adaugă şi forţa tangenţială din rulment. Evident că se poate ţine seama de momentele parazite, însă corecţia este îngreuiată de faptul că acestea sînt funcţie de forţa normală.

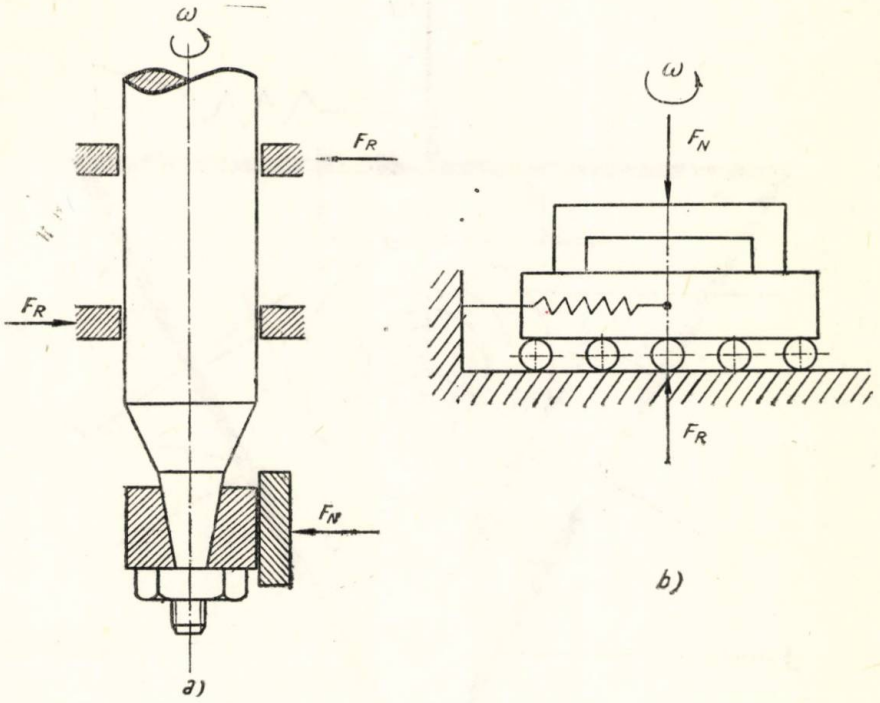


Fig. 1. — Două posibilităţi de măsurare a forţei de frecare :
a — se măsoară momentul rezistent care apare în axul de antrenare al bucşei; *b* — se măsoară forţa care antrenează piesa fixă.

Pentru a înlătura efectul forţei de reacţiune a fost realizat un dispozitiv (fig. 2) în care o bucşă cilindrică (*1*), aflată în rotaţie, este apăsată din trei direcţii decalate la 120° de trei pastile plane (*2*) prin intermediul sistemului de încărcare triunghiular (*3*).

Atît datorită formei cuplului de frecare (suprafaţă plană pe suprafaţă cilindrică), cît şi faptului că pastilele de oţel au posibilitatea de a se roti în jurul unui ax orizontal paralel cu laturile triunghiulare, distribuţia sarcinii este uniformă pe întreaga fîşie de contact. În acest fel se compesează de asemenea şi eventualele imperfecţiuni constructive. Presiunea necesară pe bucşa (*1*) se realizează prin strîngerea unei laturi a piesei triunghiulare în jurul articulaţiei (*5*) cu ajutorul unui şurub şi

al unui resort etalonat. Ca urmare a rotirii bucşei (*1*) asupra dispozitivului triunghiular (*3*), acţionează un moment care este compensat de un cuplu de forţe creat de lamele elastice (*4*).

În sistemul descris mai sus, forţa de încărcare (F_N) este normală pe bucşă şi pe laturile triunghiulare, forţele de frecare (F_T) fiind tangen-

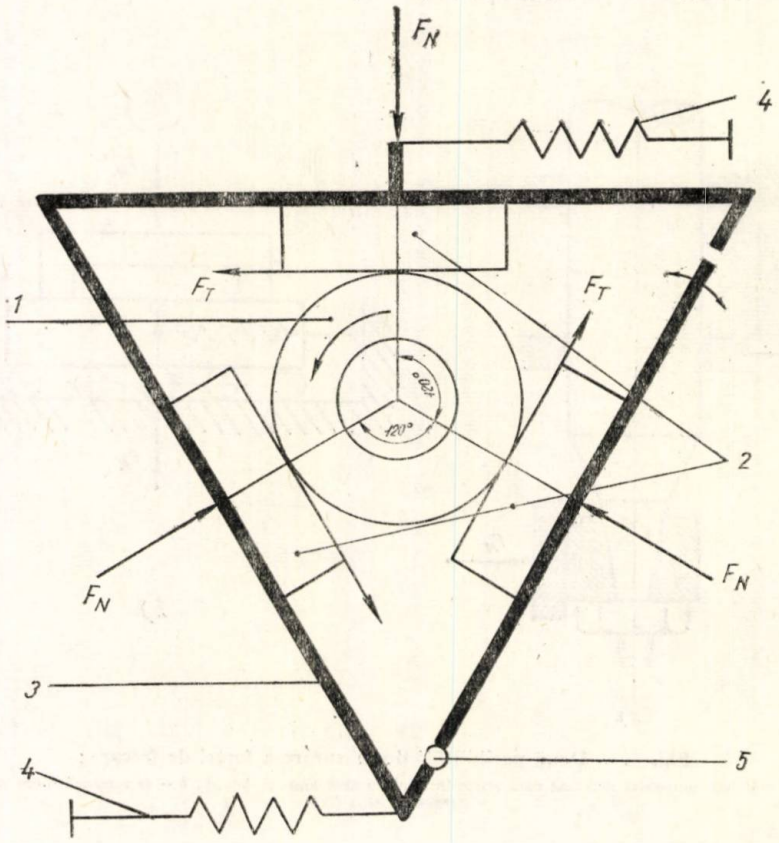


Fig. 2. — Reprezentarea schematică a instalaţiei cu trei contacte:
1 — bucşă cilindrică; *2* — pastilă cu suprafaţa plană; *3* — dispozitiv de încărcare triunghiular; *4* — elemente elastice; *5* — articulaţie.

ţiale în punctele de contact şi deci paralele cu laturile triunghiului. Întregul dispozitiv este astfel construit, încît toate aceste forţe să fie coplanare. Deoarece în afară de aceasta forţele tangenţiale pot fi considerate egale între ele, avînd în vedere condiţiile identice în care lucrează cele trei suprafeţe, iar sistemul de încărcare (*3*) este echilateral, rezultă că asupra dispozitivului (*3*) acţionează numai momentul datorit forţelor de frecare.

Măsurarea deformației elementelor elastice (*4*) se face pe cale tensometrică, valorile lui F_T și deci ale coeficientului de frecare fiind înregistrate continuu. Datorită masei mici a dispozitivului, a săgeții mici a lamelor elastice, fapt permis de utilizarea metodei tensometrice pentru măsurarea încovoierii lor, rezultă o frecvență torsională proprie a siste-

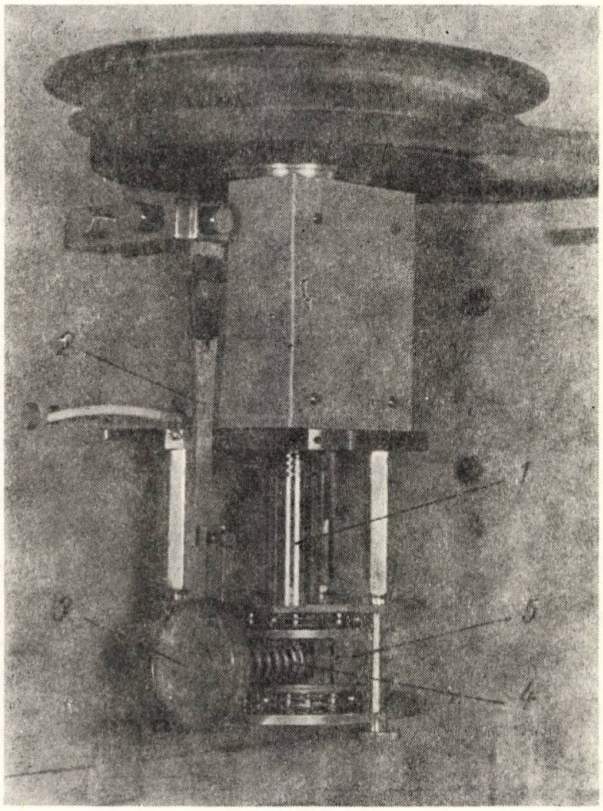


Fig. 3. — Instalație pentru măsurarea coeficientului de frecare :

1 — ax de antrenare al bucșei ; *2* — lamă tensometrică ; *3* — șurub de încărcare ; *4* — resort etalonat ; *5* — dispozitiv de încărcare triunghiular.

mului suficient de înaltă (circa 200 Hz) pentru a putea urmări în cadrul determinărilor variații rapide ale forțelor tangențiale, respectiv ale coeficientului de frecare.

O vedere a instalației este arătată în figura 3. La efectuarea determinărilor, bucșa este confecționată dintr-un material, iar pastilele din celălalt material studiat, întregul cuplu fiind cufundat în lubrifiantul respectiv. Determinările au fost repetate modificîndu-se condițiile de lucru, pînă cînd valorile măsurate ale coeficientului de frecare au prezentat o reproductibilitate satisfăcătoare.

INFLUENȚA SARCINII TOTALE

În acest caz s-a urmărit dependența coeficientului de frecare de sarcina totală pentru trei lubrifianți diferiți.

Cuplul de frecare este format dintr-o bucșă de bronz (cu 7% Sn) pe pastilă de oțel călit (HRC 55). Suprafețele de contact au fost rectificate, cea de oțel fiind apoi șlefuită pentru îndepărtarea rizurilor de prelucrare.

Lichidele întrebuințate ca lubrifiant au fost: a) un sort de benzină (p.f. 80—115°C); b) un ulei alb puțin vîscos bine rafinat (STAS ulei de vaselină $\eta_{50°C} = 10$ cP) și c) un lubrifiant curent (STAS 410, $\eta_{50°C} = 61$ cP). Se face presupunerea că aceste lichide, așa cum rezultă din procesul de fabricație, nu conțin substanțe care să influențeze frecarea. Temperaturile lichidelor lubrifiante în cele trei cazuri au fost, respectiv, de 30, 40 și 50°C. Viteza de alunecare a fost de 0,73 m/s.

Pentru fiecare dintre cele trei lichide s-a folosit o pereche bucșă-pastilă nouă.

În figura 4 este redată o porțiune din diagrama înregistratorului automat care reprezintă variația forței de frecare funcție de sarcină și de timp.

Lubrifiantul folosit în acest caz a fost ulei alb rafinat. Sarcina s-a aplicat treptat din minut în minut sau (în unele determinări) după ce valoarea coeficientului de frecare devenea constantă.

Se constată că la sarcini mici forța de frecare este constantă. La sarcina de 27,4 kgf/cm, forța de frecare F_F (reprezentînd forța care acționează asupra lamelor (*4*); între F_F și F_T există relația $F_T = 1{,}85\, F_F$) crește de la 1,31 la 3,65 kgf, după care rămîne constantă. Coeficientul de frecare crește de la 0,129 la 0,36. Această variație esențială indică în orice caz o modificare a condițiilor din zona de încărcare.

Valorile coeficientului de frecare funcție de sarcină și de lubrifiant sînt arătate în figura 5 (linia plină). Aceste curbe au fost obținute prin prelucrarea unor curbe ca cele arătate în figura 4. Se constată că aceste curbe sînt așezate una sub alta, astfel încît lichidul cel mai vîscos și cu greutatea moleculară medie cea mai mare (lichidele utilizate sînt amestecuri de hidrocarburi) să dea valorile cele mai mici. În același timp, coeficientul de frecare depinde de sarcină, și anume crește cu sarcina în cazul (c) și (b).

În cazul acestor lubrifianți, la o anumită sarcină se produce o creștere a coeficientului de frecare. În cazul în care există două valori pe diagramă pentru același lubrifiant, valoarea mai mică corespunde momentului aplicării sarcinii, iar cea mai mare corespunde valorii constante obținute după 1—2 min de funcționare.

În cazul determinărilor efectuate s-a putut pune în evidență în unele cazuri, prin urmărirea aspectului suprafețelor în frecare, existența unor zone diferențiale. Acest fapt a condus la concluzia că în interiorul zonei încărcate distribuția forței de frecare nu este uniformă. Apariția unor asemenea zone ar conduce la variații ale valorii medii ale forței de frecare.

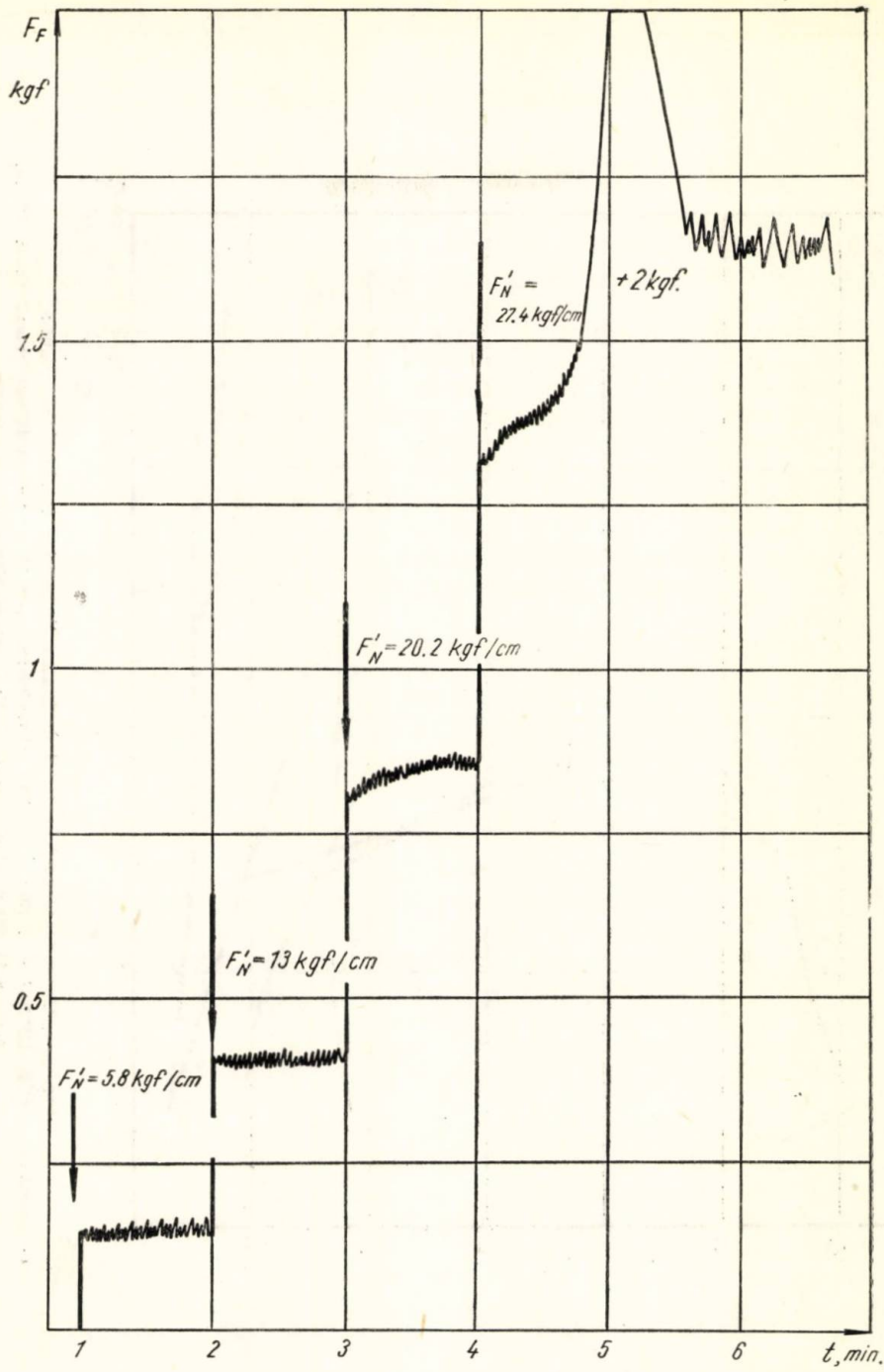


Fig. 4. — **Porţiune din diagramă obţinută cu înregistratorul automat, reprezentînd variaţia forţei de frecare funcţie de sarcină şi timp :**

cuplu de frecare — bucşă de bronz (7% Sn) pe pastilă de oţel de scule HRC 55 ; viteză de alunecare : 0,73 m/s ; lubrifiant : ulei alb rafinat ($\eta_{50°C}$ = 10 cP) ; tempratura lubrifiantului : 40°C.

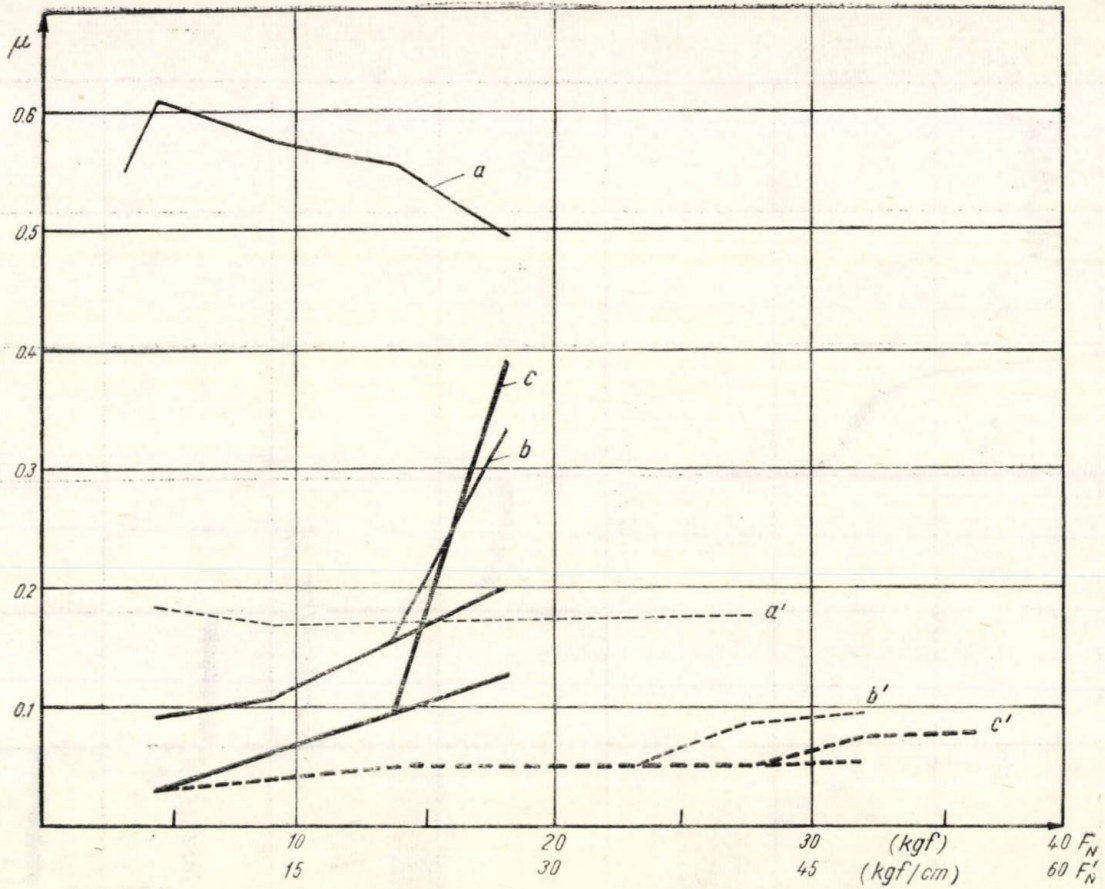


Fig. 5. — Dependența coeficientului de frecare de sarcina totală și lubrifiant :
a — benzină ușoară (pf 80 — 115°C) ; *b* — ulei alb rafinat (STAS ulei vaselină ; $\eta_{50°C}$ = 10 cP) ; *c* — ulei de motoare neaditivat (STAS 410 ; $\eta_{50°C}$ = 61 cP) ; *a'*, *b'*, *c'* — aceleași lichide, la care s-a adăugat 0,2% acid stearic.

INFLUENȚA ACIDULUI STEARIC

În cele trei lichide utilizate mai sus și în condiții identice de experimentare a fost introdusă o cantitate de 0,2% acid stearic. Cantitatea este suficient de mică pentru a nu produce modificări importante ale proprietăților fizice ale lichidelor folosite. Concentrații mai mici, după cum au arătat determinările efectuate, conduc, în condiții, constante, la fluctuații pronunțate ale valorilor coeficientului de frecare. Nu se poate vorbi în acest caz de o anumită valoare a coeficientului de frecare. De asemenea temperatura lubrifiantului trebuie să fie suficient de ridicată pentru a asigura solubilitatea necesară a acidului stearic. În această situație s-a luat hotărîrea, pentru simplificare, să se lucreze cu cantitatea minimă de aditiv care are un efect stabil asupra frecării (0,2% acid stearic) și la temperatura necesară ca întreaga cantitate de aditiv să fie în soluție.

În figura 5 (linia punctată) sînt reprezentate rezultatele obținute.

Se constată că în toate trei cazurile curbele pentru lichidele cu conținut de acid staearic se situează sub curbele corespunzătoare lichidelor pure. Efectul cel mai pronunțat se obține în cazul (*a*). Se constată de asemenea că coeficientul de frecare depinde în acest caz mult mai puțin de sarcină. Pentru lichidul (*c*), la sarcină mică, cele două curbe (*c*) și (*c'*) se suprapun, prezența aditivului nemaifiind simțită.

În concluzie se poate spune că valoarea coeficientului de frecare este determinată atît de proprietățile lubrifiantului folosit, cît și de proprietățile aditivului, avînd loc o suprapunere a efectelor.

INFLUENȚA SARCINII SPECIFICE

S-a determinat variația coeficientului de frecare funcție de sarcina normală pentru trei cazuri în care lungimea zonei de contact (lungimea generatoarei bucșei) a fost foarte diferită. În primul caz (*a*), lungimea totală a generatoarei $lg = 6{,}6$ mm, în al doilea caz (*b*) $lg = 3{,}3$ mm, iar în al treilea caz (*c*) lungimea generatoarei este minimă, și anume corespunzătoare limitei de deformare plastică.

Profilul în cele trei cazuri și rezultatele obținute sînt arătate în figura 6.

Lubrifiantul folosit a fost uleiul alb rafinat (ulei de vaselină), cu 0,2% aditiv Montogear B la o temperatură $T_u = 40°C$.

Curbele obținute sînt foarte apropiate unele de altele, cazurile (*b*) și (*c*) dînd valori mai mici pentru coeficientul de frecare. Concluzia care se impune este că, indiferent de suprafața aparentă de contact, coeficientul de frecare pentru un cuplu și un anumit mediu lubrifiant dat este funcție de suprafața reală de contact, care depinde, la rîndul ei, de sarcina normală. Concluzia respectivă nu este certă, deoarece trebuie avut în vedere că în cele trei cazuri regimul termic în zona de lucru nu este identic.

În legătură cu ipoteza de mai sus (suprafaţa reală de contact mai mică decît suprafaţa aparentă de contact), constatăm totuşi, că, în cazul a două suprafeţe cu sarcini concentrate, procesul de uzură face ca în cele din urmă suprafaţa reală de contact să se deplaseze astfel în interiorul

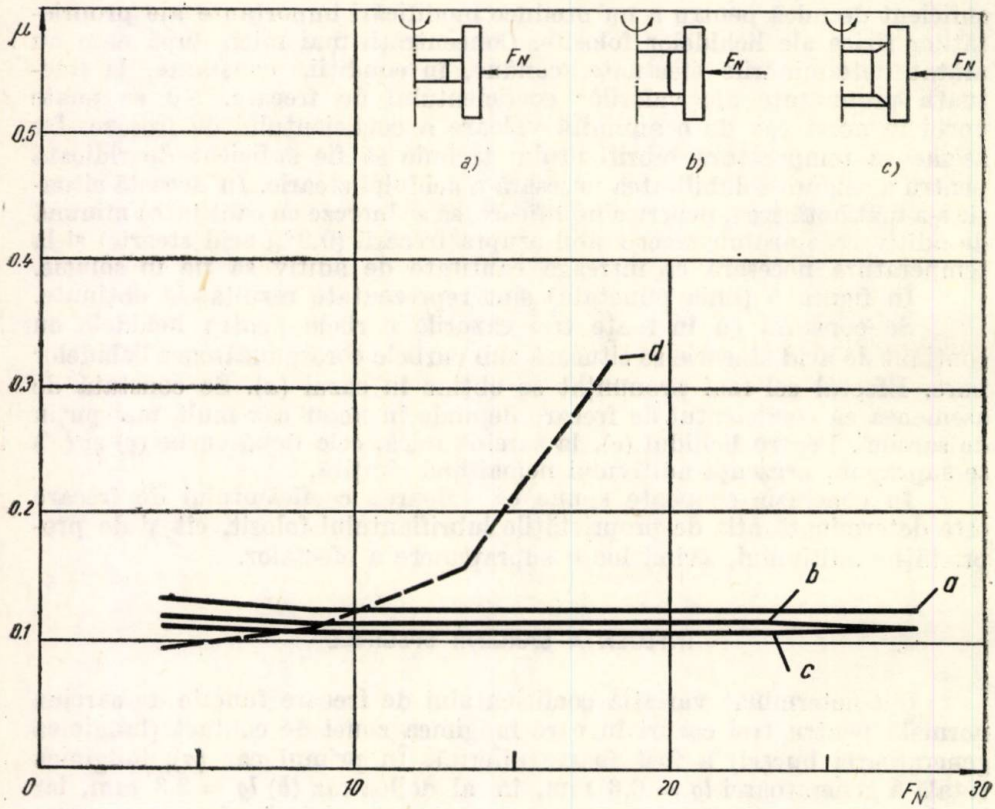


Fig. 6. — Dependenţa coeficientului de frecare de sarcina totală şi lăţimea zonei de contact: *a* — lungimea pe generatoare a zonei de contact l_g: 6,6 mm; *b* — l_g: 3,3 mm; *c* — l_g: minim, corespunzător limitei de deformare plastică; *d* — acelaşi l_g ca în cazul (*a*), însă lubrifiantul nu conţine aditiv; cuplu de frecare: bucşă de bronz (7% Sn) pe pastilă de oţel de scule călit HRC = 55; viteză de alunecare: 0,73 m/s; temperatura lubrifiantului: 40°C; lubrifiant: ulei alb rafinat (STAS ulei de vaselină $\eta_{50°C}$ = 10 cP) cu 0,2% Montogear B.

suprafeţei aparente de contact, încît urma de uzură să se apropie cît mai mult de suprafaţa aparentă de contact. Aceasta în ipoteza că uzura are loc numai în locurile de contact real.

Pe aceeaşi figură se poate vedea (curba *d*) pentru comparaţie coeficientul de frecare pentru cuplul de frecare de tip (*a*), însă în ulei de vaselină fără aditiv.

Se constată de asemenea un efect favorabil asupra coeficientului de frecare, însă spre deosebire de acidul stearic, aditivul folosit în acest caz măreşte coeficientul de frecare la sarcini mici.

CONCLUZII

Coeficientul de frecare între două suprafeţe în regim de ungere-limită este funcţie de proprietăţile lubrifiantului şi de sarcină. Prezenţa unor substanţe care se pot adsorbi sau reacţiona cu suprafeţele metalice influenţează în general coeficientul de frecare, reducîndu-l.

Aceasta arată că în condiţiile respective suprafeţele de frecare sînt atît de apropiate, încît sînt afectate straturile superficiale create de aditivi. În determinările efectuate a existat o excepţie, şi anume, în cazul lubrifiantului cu greutatea moleculară cea mai mare la sarcina minimă, aditivul introdus nu a avut nici un efect. În acest caz, distanţa dintre suprafeţe este suficient de mare sau, cu alte cuvinte, nu există contact metal-metal.

În domeniul sarcinilor mijlocii şi mari, coeficientul de frecare pentru un lichid şi un aditiv dat apare ca o rezultantă a prezenţei lichidului lubrifiant şi a aditivului.

Primită la redacţie la 8 ianuarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. Bowden F. P., Tabor D., *The Friction and Lubrication of Solid*, Oxford, Clarendon Press, 1964.
2. Dereaghin B. V., *The Mechanism of Boundary Lubrication and the Properties of the Lubricating Film*, Wear, *4* (1958).
3. Godfrey D., *Boundary Lubrication*, Proceed. Internat. Symp. on Lubrication and Wear, Editors D. Muster and B. Sternlicht, Huston, 1965.
4. Pavelescu D., Iliuc I., Barbul S., *Studiul unei metode radioactive pentru aprecierea calităţilor lubrifiante ale uleiurilor aditivate prin prisma uzurii suprafeţelor*, II, St. cerc. mec. apl., *1* (1962).

METODA APROXIMATIVĂ PENTRU STUDIUL VIBRAȚIILOR NELINIARE CONSERVATIVE[1)]

de GH. SILAȘ și H. J. KLEPP
Institutul politehnic Timișoara

În lucrare se prezintă o metodă aproximativă pentru studiul oscilațiilor libere ale sistemelor conservative cu un grad de libertate, avînd ecuația diferențială a mișcării de forma $\ddot{q} + N(q) = 0$. Domeniul de oscilație se împarte în domenii parțiale. În fiecare domeniu parțial se aproximează $N(q)$ prin două caracteristici biliniare, care se aleg astfel încît caracteristicile aproximative pentru tot domeniul de oscilație să fie poligoane neîntrerupte. Punctul singular al caracteristicilor biliniare în domeniile parțiale se determină din condiția de echivalență energetică a celor trei caracteristici. Folosind aceste caracteristici pentru studiul mișcării se găsesc valori pentru elongații care cuprind cele exacte. Și valorile ce se obțin pentru perioadă de oscilație cuprind pe cea exactă. Media aritmetică a valorilor găsite cu cele două caracteristici aproximează mai bine elongațiile și perioada mișcării.
Metoda se aplică pentru cazul caracteristicilor polinomiale $N(q) = \sum_{i=1}^{m} a_i q^i$ și $N(q) = \pm a_n |q|^n$ $(q \gtrless 0)$ și se dau formulele necesare scrierii ecuațiilor diferențiale ale mișcării aproximative. Pentru două cazuri particulare $N(q) = \omega^2 q \left(1 - \frac{\lambda^2}{3} q^2\right)$ și $N(q) = a_3 q^3$ se studiază mișcarea în decursul unui sfert de perioadă. Rezultatele găsite pentru elongații și perioadă se compară cu cele exacte ce se obțin folosind integralele eliptice și cu cele ce se găsesc folosind alte metode aproximative.

[1)] Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, 2, (1966) (în limba germană).

Multe probleme practice de vibraţii nu pot fi descrise complet cu ajutorul ecuaţiilor diferenţiale liniare. Acestea trebuie studiate cu ecuaţii diferenţiale neliniare a căror integrare este dificilă. Astfel de ecuaţii sînt cele de tipul $\ddot{q} + N(q) = 0$. În ultimul timp au fost elaborate multe metode de aproximare a caracteristicilor neliniare $N(q)$. Dintre acestea amintim cîteva în continuare.

În [7] caracteristica $N(q)$ este înlocuită printr-una liniară $p_0^2 q$, astfel încît

$$p_0^2 = \frac{1}{Q}\int_0^Q \frac{dN}{dq}\cdot dq.$$

Pentru determinarea perioadei este indicată formula

$$T = \pi\left[\sqrt{\frac{Q_1}{N(Q_1)}} + \sqrt{\frac{Q_2}{N(Q_2)}}\right],$$

unde prin $Q_1 < 0, Q_2 > 0$ s-au notat depărtările maxime ale sistemului faţă de poziţia de echilibru.

Pentru a obţine o aproximaţie mai bună, în [5], [6], [8] se înlocuieşte caracteristica neliniară printr-una liniară $c^* q$, astfel încît (pentru cazul caracteristicilor simetrice)

$$\frac{d}{dc^*}\int_{-Q}^{Q}\{[N(q) - c^* q]\cdot q\}^2\, dq = 0,$$

iar pentru determinarea pulsaţiei proprii şi a perioadei se găsesc formulele

$$p_1^2 = \frac{c^*}{m} = \frac{5}{Q^5}\int_{-Q}^{Q} N(q)\cdot q^3\cdot dq; \quad T_1 = \frac{2\pi}{p_1}. \tag{1}$$

În [9] se înlocuieşte $N(q)$ printr-o caracteristică biliniară, astfel încît prima dreaptă a acestei caracteristici $g_1(q)$ să fie tangentă lui $N(q)$ în origine, iar panta k_2 a dreptei a doua şi punctul singular q_t al ei să se determine din condiţiile

$$\frac{\partial(\overline{E}^2)}{\partial q_t} = 0; \quad \frac{\partial(\overline{E}^2)}{\partial k_2} = 0,$$

unde

$$\overline{E}^2 = \frac{1}{Q}\left\{\int_0^{q_t}[g_1(q) - N(q)]^2\, dq + \int_{q_t}^{Q}[g_2(q) - N(q)]^2\, dq\right\}.$$

O generalizare a metodei indicate în [9] este dată în [10].

Pentru determinarea unei caracteristici biliniare care să aproximeze pe cea neliniară, se pune în [11] condiţia ca eroarea pătratică medie să fie minimă dacă cele două caracteristici sînt echivalente energetic şi la capetele domeniului ele să aibă aceeaşi valoare.

În [12] caracteristica $N(q)$ este aproximată în intervalul $0 \leqslant q \leqslant Q$ prin patru drepte, ai căror coeficienţi unghiulari se determină din condiţii geometrice.

În [13] se înlocuiește $N(q)$ printr-o parabolă

$$f_{2k+1} = c_{2k+1} q^{2k+1},$$

unde c_{2k+1} se determină din condiția de minim a erorii pătratice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c_{2k+1}} \int_{-Q}^{Q} [N(q) - c_{2k+1} q^{2k+1}]^2 \, \mathrm{d}q = 0,$$

iar în [2] este expusă metoda prin care caracteristica neliniară este aproximată printr-un polinom.

Caracteristica neliniară $N(q)$ a mai fost aproximată într-un domeniu dat cu ajutorul a n arce de curbă de forma dată $\varphi(q, c)$, cu condiția ca eroarea pătratică să fie minimă [14].

În prezenta lucrare vom expune o altă metodă aproximativă, care înlocuiește caracteristica neliniară printr-una poligonală.

A. PREZENTAREA METODEI DE APROXIMARE POLIGONALĂ

1. Fie

$$\ddot{q} + N(q) = 0$$

ecuația diferențială a mișcării unui oscilator neliniar [$N(0) = 0$]. Domeniul de oscilație $[Q_1, Q_2]$ îl împărțim prin punctele q_i ($i = 1, 2, \ldots n+1$) ($q_1 = Q_1$, $q_{n+1} = Q_2$) în n domenii parțiale. În fiecare domeniu parțial $[q_i, q_{i+1}]$ vom înlocui $N(q)$ printr-una din cele două caracteristici biliniare $L_{i1}(q)$, $L_{i2}(q)$ sau $D_{i1}(q)$, $D_{i2}(q)$, pe care le definim mai jos.

a) *Caracteristica* $L(q)$

Dreapta L_{i1} să treacă prin punctul $(q_i, N(q_i))$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) și să fie tangentă caracteristicii neliniare în acest punct. Vom avea

$$L_{i1}(q) = N'(q_i) \cdot q - N'(q_i) \cdot q_i + N(q_i) = a_{i1} q - b_{i1}.$$

Dreapta L_{i2} să treacă prin punctul $(q_{i+1}, N(q_{i+1}))$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Fie ξ_i abscisa punctului de intersecție a celor două drepte. Pentru determinarea ei vom mai pune și condiția ca ariile să fie egale, adică

$$\int_{q_i}^{q_{i+1}} N(q) \, \mathrm{d}q = \int_{q_i}^{\xi_i} L_{i1}(q) \, \mathrm{d}q + \int_{\xi_i}^{q_{i+1}} L_{i2}(q) \, \mathrm{d}q.$$

De aici rezultă

$$\xi_i = \frac{2\int_{q_i}^{q_{i+1}} N(q)\mathrm{d}q + q_i[N'(q_i)(q_{i+1} - q_i) + 2N(q_i)] - q_{i+1}[N(q_i) + N(q_{i+1})]}{N(q_i) - N(q_{i+1}) + N'(q_i)(q_{i+1} - q_i)}.$$

Ecuația dreptei L_{i2} va fi

$$L_{i2}(q) = \frac{N(q_{i+1}) - L_{i1}(\xi_i)}{q_{i+1} - \xi_i} q - \frac{N(q_{i+1}) \cdot \xi_i - L_{i1}(\xi_i) q_{i+1}}{q_{i+1} - \xi_i} = a_{i2} q - b_{i2}.$$

b) *Caracteristica D (q)*

Dreapta D_{i2} să treacă prin punctul $(q_{i+1}, N(q_{i+1}))$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ și să fie tangentă caracteristicii neliniare în acest punct. Ecuația ei va fi

$$D_{i2}(q) = N'(q_{i+1}) \cdot q - N'(q_{i+1}) \cdot q_{i+1} + N(q_{i+1}) = c_{i2}\, q - d_{i2}.$$

Dreapta D_{i1} să treacă prin punctul $(q_i, N(q_i))$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Pentru determinarea abscisei η_i a punctului de intersecție a celor două drepte, punem condiția ca ariile să fie egale, adică

$$\int_{q_i}^{q_{i+1}} N(q)\, \mathrm{d}q = \int_{q_i}^{\eta_i} D_{i1}(q)\, \mathrm{d}q + \int_{\eta_i}^{q_{i+1}} D_{i,2}(q)\, \mathrm{d}q.$$

De aici rezultă

$$\eta_i = \frac{2\int_{q_i}^{q_{i+1}} N(q)\mathrm{d}q + q_{i+1}[N'(q_{i+1})(q_{i+1} - q_i) - 2N(q_{i+1})] + q_i[N(q_i) + N(q_{i+1})]}{N(q_i) - N(q_{i+1}) + N'(q_{i+1})(q_{i+1} - q_i)}.$$

Ecuația dreptei D_{i1} va fi

$$D_{i1}(q) = \frac{D_{i2}(\eta_i) - N(q_i)}{\eta_i - q_i}\, q - \frac{D_{i2}(\eta_i)\, q_i - N(q_i)\, \eta_i}{\eta_i - q_i} = c_{i1}\, q - d_{i1}.$$

Pentru o cît mai bună aproximare a caracteristicii $N(q)$, vom alege ca puncte q_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$ în primul rînd punctele în care avem $N(q) = 0$, $N'(q) = 0$ sau $N''(q) = 0$. Se mai pot alege și altele. Cu cît domeniile parțiale sînt mai mici, cu atît aproximarea va fi mai bună.

2. Vom arăta acum proprietăți ce rezultă din condițiile de mai sus. Să presupunem un domeniu parțial $[q_i, q_{i+1}]$ în care avem $q.N''(q) < 0$. Făcînd notațiile

$$f(q) = \begin{cases} L_{i1} & q_i \leqslant q \leqslant \xi_i \\ L_{i2} & \xi_i \leqslant q \leqslant q_{i+1} \end{cases}; \quad g(q) = \begin{cases} D_{i1} & q_i \leqslant q \leqslant \eta_i, \\ D_{i2} & \eta_i \leqslant q \leqslant q_{i+1}, \end{cases}$$

vom avea inegalitățile

$$\int_{q_i}^{q} f(q)\mathrm{d}q \geqslant \int_{q_i}^{q} N(q)\mathrm{d}q \geqslant \int_{q_i}^{q} g(q)\, \mathrm{d}q \quad (q_i \leqslant q \leqslant q_{i+1}). \tag{2}$$

Din felul cum au fost alese caracteristicile poligonale rezultă că în poziția $q_i (i = 1, 2, \ldots, n+1)$ sistemul, avînd oricare caracteristică, $N(q)$, $L(q)$ sau $D(q)$, va avea aceeași energie cinetică, aceeași energie potențială și aceeași valoare a forței de restituire.

Fie v, v_1 și v_{II} vitezele sistemului în poziția q pentru caracteristicile $N(q)$, $L(q)$ și $D(q)$. Ținînd seama că în fiecare dintre aceste mișcări sistemul este conservativ, vom avea

$$\frac{v^2}{2} = E_m(q_i) - \int_0^q N(q)\,dq = E_c(q_i) - \int_{q_i}^q N(q)dq,$$

$$\frac{v_I^2}{2} = E_m(q_i) - \int_0^q f(q)\,dq = E_c(q_i) - \int_{q_i}^q f(q)dq,$$

$$\frac{v_{II}^2}{2} = E_m(q_i) - \int_0^q g(q)\,dq = E_c(q_i) - \int_{q_i}^q g(q)dq.$$

Ținînd seama de relația (2), rezultă următoarele inegalități între cele trei viteze:

$$|v_i| \leqslant |v| \leqslant |v_{II}|; \quad q_i \leqslant q \leqslant q_{i+1}. \tag{3}$$

Dacă $q \cdot N''(q) > 0$, se găsește

$$|v_I| \geqslant |v| \geqslant |v_{II}|; \quad q_i \leqslant q \leqslant q_{i+1}. \tag{4}$$

3. Considerînd o aproximare poligonală, mișcarea sistemului o vom studia cu ajutorul a $2n$ ecuații diferențiale liniare care au forma

$$\begin{array}{ll} \text{caracteristica } L(q) & \ddot{q}_j + a_{ij}\,q_j = b_{ij} \quad \left\{ i = 1, 2, \ldots, n, \right. \\ \text{caracteristica } D(q) & \ddot{q}_j + c_{ij}\,q_j = d_{ij} \quad \left. j = 1, 2. \right. \end{array}$$

Aici am notat $q_i \leqslant q_1 \leqslant \xi_i$ și $\xi_i \leqslant q_2 \leqslant q_{i+1}$ pentru caracteristica L și $q_i \leqslant q_1 \leqslant \eta_i$ și $\eta_i \leqslant q_2 \leqslant q_{i+1}$ pentru caracteristica D. Legile de mișcare au forma următoare:

dacă $\alpha_{ij} > 0$ $q_j = \dfrac{\beta_{ij}}{\alpha_{ij}} + \left(x_j - \dfrac{\beta_{ij}}{\alpha_{ij}}\right) \cos \sqrt{\alpha_{ij}}\, t + \dfrac{\dot{x}_j}{\sqrt{\alpha_{ij}}} \sin \sqrt{\alpha_{ij}}\, t,$

dacă $\alpha_{ij} = 0$ $q_i = \beta_{ij} \dfrac{t^2}{2} + \dot{x}_j\, t + x_j,$

dacă $\alpha_{ij} < 0$ $(|\alpha_{ij}| = \varepsilon_{ij})$ $q_j = \dfrac{\beta_{ij}}{\alpha_{ij}} + \left(x_j - \dfrac{\beta_{ij}}{\alpha_{ij}}\right) \operatorname{ch} \sqrt{\varepsilon_{ij}}\, t + \dfrac{\dot{x}_j}{\sqrt{\varepsilon_{ij}}} \operatorname{sh} \sqrt{\varepsilon_{ij}}\, t.$

Prin α_{ij}, β_{ij}, x_1, $\dot{x}_1$, x_2, $\dot{x}_2$ înțelegem a_{ij}, b_{ij}, q_1, $\dot{q}_1$, ξ_i, $\dot{\xi}_i$ pentru caracteristica L și c_{ij}, d_{ij}, q_1, $\dot{q}_1$, η_i, $\dot{\eta}_i$ pentru caracteristica D.

Fie t momentul în care sistemul cu caracteristica neliniară $N(q)$ ajunge în poziția q. Vom nota $q_I(t)$ și $q_{II}(t)$ pozițiile în care se va găsi sistemul în același moment t avînd caracteristicile L, respectiv D. Ținînd seama de relațiile (3) și (4) care există între viteze, rezultă că $q(t)$ este cuprins între $q_I(t)$ și $q_{II}(t)$. De aceea legea mișcării $q^*(t) = \dfrac{1}{2}(q_I + q_{II})$ va aproxima mai bine legea mișcării $q(t)$ decît legile $q_I(t)$ sau $q_{II}(t)$.

4. Cu t_i notăm timpul necesar sistemului pentru a se deplasa din poziţia q_i în poziţia q_{i+1}. Alegînd $t = 0$ în domeniile parţiale $[q_i, \xi_i]$ şi $[\xi_i, q_{i+1}]$ în momentul cînd sistemul se află în poziţia q_i, respectiv ξ_i, vom avea $t_i = t_{i1} + t_{i2}$, t_{i1} şi t_{i2}, calculîndu-se din ecuaţiile

$$q_1(t_{i1}) = \xi_i\,;\; q_2(t_{i2}) = q_{i+1}.$$

Pentru perioadă se găseşte valoarea

$$\tau = 2\sum_{i=1}^{n}(t_{i1} + t_{i2}).$$

Folosind aproximarea $L(q)$ sau $D(q)$ în cazul cînd avem $q.N''(q) < 0$, din (3) rezultă pentru domeniul parţial $[q_i, q_{i+1}]$ cînd sistemul se mişcă în sensul pozitiv

$$\int_{q_i}^{q_{i+1}} \frac{dq}{v_{\mathrm{I}}} > \int_{q_i}^{q_{i+1}} \frac{dq}{v} > \int_{q_i}^{q_{i+1}} \frac{dq}{v_{\mathrm{II}}},$$

adică

$$t_{i\mathrm{I}} > t_i > t_{i\mathrm{II}}.$$

Dacă $q.N''(q) > 0$, atunci

$$t_{i\mathrm{I}} < t_i < t_{i\mathrm{II}}.$$

Pentru sisteme în care caracteristica satisface în toate domeniile parţiale una dintre inegalităţile $q.N''(q) \lesseqgtr 0$, perioada T va fi cuprinsă între τ_{I} şi τ_{II}.

Valoarea $\tau^* = \dfrac{1}{2}(\tau_{\mathrm{I}} + \tau_{\mathrm{II}})$ va aproxima mai bine perioada T decît τ_{I} sau τ_{II}.

B. APLICAREA METODEI DE APROXIMARE POLIGONALĂ PENTRU CARACTERISTICI DE FORMA $N(q) = \sum_{i=1}^{m} a_i q^i$

Vom folosi metoda expusă în paragraful A pentru cazul caracteristicilor care se pot scrie sub forma unui polinom. Se găsesc următoarele elemente ale caracteristicilor poligonale:

a) pentru caracteristica $L(q)$:

$$a_{i1} = \sum_{j=1}^{m} j a_j q_i^{j-1}, \qquad b_{i1} = \sum_{j=1}^{m} (j-1)\, a_j q_i^j, \tag{5), (6}$$

$$\xi_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} \dfrac{j-1}{j+1} a_j \left[q_{i+1}^{j+1} + j q_i^{j+1} - (j+1)\, q_i^j\, q_{i+1}\right]}{\sum_{j=1}^{m} a_j \left[q_{i+1}^j + (j-1)\, q_i^j - j q_i^{j-1}\, q_{i+1}\right]}, \tag{7}$$

$$a_{i2} = \frac{1}{q_{i+1} - \xi_i} \sum_{j=1}^{m} a_j \left[q_{i+1}^j - j q_i^{j-1} \xi_i + (j-1) q_i^j\right], \tag{8}$$

$$b_{i2} = \frac{q_{i+1}}{q_{i+1} - \xi_i} \sum_{j=1}^{m} a_j \left[q_{i+1}^{j-1} \xi_i - j q_i^{j-1} \xi_i + (j-1) q_i^j\right]; \tag{9}$$

b) pentru caracteristica $D(q)$:

$$c_{i2} = \sum_{j=1}^{m} j a_j q_{i+1}^{j-1}, \quad d_{i2} = \sum_{j=1}^{m} (j-1) a_j q_{i+1}^j, \tag{10), (11}$$

$$\eta_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} \frac{j-1}{j+1} a_j \left[a_i^{j+1} + j q_{i+1}^{j+1} - (j+1) q_{i+1}^j q_i\right]}{\sum_{j=1}^{m} a_j \left[q_i^j + (j-1) q_{i+1}^j - j q_{i+1}^{j-1} q_i\right]}, \tag{12}$$

$$c_{i1} = \frac{1}{q_i - \eta_i} \sum_{j=1}^{m} a_j \left[q_i^j - j q_{i+1}^{j-1} \eta_i + (j-1) q_{i+1}^j\right], \tag{13}$$

$$d_{i1} = \frac{q_i}{q_i - \eta_i} \sum_{j=1}^{m} a_j \left[q_i^{j-1} \eta_i - j q_{i+1}^{j-1} \eta_i + (j-1) q_{i+1}^j\right]. \tag{14}$$

Ca aplicație să studiem cazul sistemului cu caracteristica

$$N(q) = \omega^2 q \left(1 - \frac{\lambda^2}{3} q^2\right). \tag{15}$$

Din cauza simetriei vom cerceta numai un sfert de perioadă. Fie Q amplitudinea oscilațiilor. Dacă $Q \leqslant \frac{1}{\lambda}$, vom considera un singur domeniu $(q_1 = 0, q_2 = Q)$; pentru cazul $Q > \frac{1}{\lambda}$ vom considera două domenii $(q_1 = 0, q = \frac{1}{\lambda}, q_3 = Q)$. În cele de mai jos considerăm primul caz.

Înlocuind $a_1 = \omega^2$, $a_3 = -\omega^2 \frac{\lambda^2}{3}$, $a_2 = a_4 \ldots = 0$ în ecuațiile (5) — (14), se găsesc legile de mișcare și formulele pentru determinarea lui t_1 și t_2:

a) pentru caracteristica $L(q)$:

$$\frac{q_1}{Q} = \sqrt{1 - \frac{1}{6}\lambda^2 Q^2}\ \sin \omega t \quad \omega t_1 = \arcsin \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{1}{6}\lambda^2 Q^2}} \quad 0 \leqslant q_1 \leqslant \frac{Q}{2}, \tag{16), (17}$$

$$\frac{q_2}{Q} = -\frac{\frac{\lambda^2 Q^2}{3}}{1 - \frac{2}{3}\lambda^2 Q^2} + \frac{1}{2\left(1 - \frac{2}{3}\lambda^2 Q^2\right)} \cos \omega \sqrt{1 - \frac{2}{3}\lambda^2 Q^2}\ t + \tag{18}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3 - \frac{2}{3}\lambda^2 Q^2}}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}\lambda^2 Q^2}} \sin \omega \sqrt{1 - \frac{2}{3}\lambda^2 Q^2}\ t \quad \frac{Q}{2} \leqslant q_2 \leqslant Q,$$

$$\omega t_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}\lambda^2 Q^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\lambda^2 Q^2\right)\left(3 - \frac{2}{3}\lambda^2 Q^2\right)}\ ; \tag{19}$$

b) pentru caracteristica $D(q)$:

$$\frac{q_1}{Q} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{6}\lambda^2 Q^2}{1 - \frac{1}{9}\lambda^2 Q^2}} \sin \omega \sqrt{1 - \frac{1}{9}\lambda^2 Q^2}\ t \tag{20), (21}$$

$$\omega t_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{9}\lambda^2 Q^2}} \arcsin \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{9}\lambda^2 Q^2}{1 - \frac{1}{6}\lambda^2 Q^2}} \quad 0 \leqslant q_1 \leqslant \frac{3}{4} Q$$

dacă $c_{12} = \omega^2 (1 - \lambda^2 Q^2) \neq 0$;

$$\frac{q_2}{Q} = -\frac{2\lambda^2 Q^2}{3(1 - \lambda^2 Q^2)} + \frac{3\left(1 - \frac{1}{9}\lambda^2 Q^2\right)}{4(1 - \lambda^2 Q^2)} \cos \omega \sqrt{1 - \lambda^2 Q^2}\ t + \tag{22}$$

$$+ \frac{\sqrt{7 - \frac{5}{3}\lambda^2 Q^2}}{4\sqrt{1 - \lambda^2 Q^2}} \sin \omega \sqrt{1 - \lambda^2 Q^2} \cdot t \quad \frac{3}{4} Q \leqslant q_2 \leqslant Q,$$

$$\omega t_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 Q^2}} \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{(1 - \lambda^2 Q^2)\left(7 - \frac{5}{3}\lambda^2 Q^2\right)}}{9 - \lambda^2 Q^2} \tag{23}$$

dacă $c_{12} = 0$, adică $Q\lambda = 1$,

$$\frac{q_2}{Q} = -\frac{2}{3}\omega^2\frac{t^2}{2} + \frac{\omega}{\sqrt{3}}t + \frac{3}{4} \quad \omega t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{3}{4}Q \leqslant q_2 \leqslant Q. \tag{24}$$

Pentru un sistem avînd caracteristica (15) se găsesc în [1] formulele exacte ale legii mișcării și timpului t necesar sistemului pentru a se deplasa din poziția $q = 0$ într-o poziție q $(0 \leqslant q \leqslant Q)$:

$$\frac{q(t)}{Q} = \operatorname{sn}\left(\frac{\frac{\lambda^2}{3}Q^2}{2 - \frac{\lambda^2}{3}Q^2};\ \frac{v_0}{Q}\cdot t\right) = \operatorname{sn}\left(\sin^2\theta;\ \frac{v_0}{Q}\cdot t\right), \tag{25}$$

$$t\,(q) = \frac{Q}{v_0}F\,(\theta,\ \varphi),$$

unde $\sin\varphi = \frac{q}{Q}$ și v_0 este viteza sistemului în poziția $q = 0$.

Perioada va fi

$$T(Q) = 4\cdot\frac{Q}{v_0}K\,(\theta). \tag{26}$$

La diferite momente ale unui sfert de perioadă am calculat $q(t)$ pentru caracteristica neliniară cu ajutorul relației (25) și $q_{\mathrm{I}}\,(t)$, respectiv $q_{II}\,(t)$ pentru caracteristicile L și D, presupunînd că amplitudinea este $Q = \frac{1}{\lambda}$. Aceste valori sînt trecute în tabela 1. Se observă că $q^*\,(t)$ aproximează mai bine $q(t)$ decît $q_{\mathrm{I}}\,(t)$ sau $q_{\mathrm{II}}\,(t)$.

Tabela 1

ωt	$\frac{q}{Q}$	$\frac{q_{\mathrm{I}}}{Q}$	$\frac{q_{\mathrm{II}}}{Q}$	$\frac{q^*}{Q}$
0,22087	0,2	0,19999	0,20017	0,20008
0,45329	0,4	0,39976	0,40131	0,40054
0,71419	0,6	0,59813	0,60380	0,60097
1,04193	0,8	0,79579	0,80548	0,80063

Pentru oscilații cu amplitudini de $Q = \frac{1}{2\lambda}$ și $Q = \frac{1}{\lambda}$ am calculat valorile sferturilor de perioadă $\frac{\tau_{\mathrm{I}}}{4}, \frac{\tau_{\mathrm{II}}}{4}$ cu formulele (17), (19) și (21), (23), (24). Cu ajutorul lor s-a calculat $\frac{\tau^*}{4}$. Cu formula (1) am calculat $\frac{T_1}{4}$. Aceste valori sînt trecute în tabela 2 și comparate cu valoarea exactă găsită

cu formula (26). E reprezintă eroarea procentuală a determinărilor. Deoarece în tot domeniul $[0,Q]$ este satisfăcută relaţia $q \cdot N''(q) < 0$, rezultă $\tau_I > T > \tau_{II}$, ceea ce se observă şi în tabela 2.

Tabela 2

Q	$\frac{\omega T}{4}$	$\frac{\omega \tau_I}{4}$	E_I	$\frac{\omega \tau_{II}}{4}$	E_{II}	$\frac{\omega \tau^*}{4}$	E^*	$\frac{\omega T_1}{4}$	E_1
$\frac{1}{2\lambda}$	1,62247	1,62536	0,18%	1,62014	0,14%	1,62275	0,02%	1,61974	0,17%
$\frac{1}{\lambda}$	1,81803	1,83146	0,74%	1,80586	0,67%	1,81866	0,03%	1,79957	1,02%

C. APLICAREA METODEI DE APROXIMARE POLIGONALĂ PENTRU CARACTERISTICI DE FORMA $N(q) = \pm a_n |q|^n$

Un caz particular al caracteristicilor considerate în paragraful *B* este

$$N(q) = \pm a_n |q|^n \quad q \gtrless 0 \quad n \geqslant 1 \quad a_n > 0.$$

Această caracteristică este simetrică faţă de originea sistemului $[q, N(q)]$. Particularizînd formulele (5) — (14) pentru acest caz, găsim:

a) caracteristica L:

$$a_{i1} = n a_n q_i^{n-1} \qquad b_{i1} = (n-1)\, a_n\, q_i^n,$$

$$\xi_i \frac{(n-1)\,[q_{i+1}^{n+1} + n q_i^{n+1} - (n+1)\, q_i^n\, q_{i+1}]}{(n+1)\,[q_{i+1}^n + (n-1)\, q_i^n - n q_i^{n-1}\, q_{i+1}]},$$

$$a_{i2} = \frac{a_n}{q_{i+1} - \xi_i}\,[q_{i+1}^n - n\, q_i^{n-1}\xi_i + (n-1)\, q_i^n];$$

$$b_{i2} = \frac{q_{i+1}\, a_n}{q_{i+1} - \xi_i}\,[q_{i+1}^{n-1}\,\xi_i - n\, q_i^{n-1}\xi_i + (n-1)\, q_i^n];$$

b) caracteristica D:

$$c_{i2} = n a_n\, q_{i+1}^{n-1}; \quad d_{i2} = (n-1)\, a_n\, q_{i+1}^n,$$

$$\eta_i = -\frac{n-1}{n+1}, \frac{q_i^{n+1} + n q_{i+1}^{n+1} - (n+1)\, q_{i+1}^n\, q_i}{q_i^n + (n-1)\, q_{i+i}^n - n\, q_{i+1}^{n-1}\, q_i},$$

$$c_{i1} = \frac{a_n}{\eta_i - q_i}\,[-q_i^n + n q_{i+1}^{n-1}\,\eta_i - (n-1)\, q_{i+1}^n],$$

$$d_{i1} = \frac{a_n\, q_i}{\eta_i - q_i}\,[-q_i^{n-1}\,\eta_i + n q_{i+1}^{n-1}\,\eta_i - (n-1)\, q_{i+1}^n].$$

Vom alege $q_1 = 0$, $q_2 = \lambda Q$ $(\lambda \leqslant 1)$ și $q_3 = Q$. Înlocuind în formulele de mai sus, se găsește:

a) pentru caracteristica L:

$$a_{11} = 0\,;\ b_{11} = 0\,;\ \xi_1 = \frac{n-1}{n+1}\lambda Q\,;\ a_{12} = \frac{n+1}{2}a_n(\lambda Q)^{n-1}\,;\ b_{12} = \frac{n-1}{2}a_n(\lambda Q)^n,$$

$$a_{21} = na_n(\lambda Q)^{n-1}\,;\ b_{21} = (n-1)\,a_n(\lambda Q)^n\,;\ \xi_2 = \mu Q\,;$$

$$\mu = \frac{n-1}{n+1}\,\frac{1-\lambda^n+n\lambda^n(\lambda-1)}{1-\lambda^n+n\lambda^{n-1}(\lambda-1)},$$

$$a_{22} = \frac{a_n Q^{n-1}}{1-\mu}\left[1-\lambda^n+n\lambda^{n-1}(\lambda-\mu)\right];$$

$$b_{22} = \frac{Q^n a_n}{1-\mu}\left[\mu-\lambda^n+n\lambda^{n-1}(\lambda-\mu)\right];$$

b) pentru caracteristica D:

$$c_{12} = na_n\lambda^{n-1}Q^{n-1}\,;\ d_{12} = (n-1)\,a_n\lambda^n Q^n\,;$$

$$\eta_1 = \frac{n}{n+1}\lambda Q\,;\ c_{11} = \frac{a_n}{n}\lambda^{n-1}Q^{n-1}\,;\ d_{11} = 0,$$

$$c_{22} = na_n Q^{n-1}\,;\ d_{22} = (n-1)\,a_n Q^n\,;\ \eta_2 = \sigma Q\,;$$

$$\sigma = \frac{n-1}{n+1}\,\frac{n(1-\lambda)-\lambda(1-\lambda^n)}{n(1-\lambda)-(1-\lambda^n)},$$

$$c_{21} = \frac{a_n Q^{n-1}}{\sigma-\lambda}\left[1-\lambda^n-n(1-\sigma)\right];\ d_{21} = \frac{a_n\lambda Q^n}{\sigma-\lambda}\left[1-\lambda^{n-1}\sigma-n(1-\sigma)\right].$$

Dacă $n = 3$, ecuația diferențială a mișcării sistemului neliniar este

$$\ddot{q} + a_3 q^3 = 0.$$

Timpul necesar sistemului pentru a ajunge din origine în poziția q se determină cu formula

$$t(q) = \sqrt{\frac{2}{a_3}}\int_0^q \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{Q^4-q^4}}.$$

Integrala poate fi exprimată cu ajutorul integralelor eliptice sub forma [15]

$$t(q) = \frac{1}{\sqrt{a_3 Q^2}}\{K(k) - F(\varphi,\ k)\} \quad 0 < q < Q,$$

unde

$$\varphi = \arccos\frac{q}{Q}, \qquad k = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pentru diferite valori ale lui q am calculat $t(q)$. La același moment $t(q)$ vom calcula pozițiile q_{I} și q_{II} în care ajunge sistemul dacă înlocuim caracteristica neliniară prin L sau D.

Alegem $\lambda = \dfrac{n-1}{n+1} = \dfrac{1}{2}$. Urmează $q_1 = 0$, $q_2 = \dfrac{1}{2}Q, q_3 = Q$, deci caracteristica neliniară va fi aproximată prin patru drepte și mișcarea în domeniul $[0, Q]$ o vom studia cu ajutorul a patru ecuații diferențiale liniare. Se găsesc următoarele legi de mișcare ($\sqrt{a_3 Q^2} = \omega$):

a) pentru caracteristica L:

$$\frac{q}{Q} = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega t \quad 0 \leqslant q \leqslant \frac{1}{4}Q; \quad \frac{q}{Q} = \frac{1}{4} + \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t \quad \frac{1}{4}Q \leqslant q \leqslant \frac{1}{2}Q,$$

$$\frac{q}{Q} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t + \frac{\sqrt{10}}{4}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t \qquad \frac{1}{2}Q \leqslant q \leqslant \frac{11}{16}Q,$$

$$\frac{q}{Q} = \frac{1}{47}\left[27 + \frac{85}{16}\cos\frac{\sqrt{235}}{10}\omega t + \frac{45\sqrt{47}}{16}\sin\frac{\sqrt{235}}{10}\omega t\right] \quad \frac{11}{16}Q \leqslant q \leqslant Q;$$

b) pentru caracteristica D:

$$\frac{q}{Q} = \sqrt{6}\sin\frac{\sqrt{3}}{6}\omega t \quad 0 \leqslant q \leqslant \frac{3}{8}Q; \quad \frac{q}{Q} = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{8}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t + \right.$$

$$\left. + \frac{5\sqrt{15}}{8}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t\right] \qquad \frac{3}{8}Q \leqslant q \leqslant \frac{1}{2}Q,$$

$$\frac{q}{Q} = \frac{1}{68}\left(27 + 7\cos\frac{\sqrt{238}}{14}\omega t + \sqrt{1785}\sin\frac{\sqrt{238}}{14}\omega t\right) \quad \frac{1}{2}Q \leqslant q \leqslant \frac{17}{20}Q,$$

$$\frac{q}{Q} = \frac{2}{3} + \frac{11}{60}\cos\sqrt{3}\,\omega t + \frac{\sqrt{31}}{60}\sin\sqrt{3}\,\omega t \qquad \frac{17}{20}Q \leqslant q \leqslant Q.$$

Cu ajutorul acestor legi calculăm q_{I}, q_{II} și q^* la momentele $t(q)$. Aceste valori sînt trecute în tabela 3.

Tabela 3

$\frac{q}{Q}$	ωt	$\frac{q_{\text{I}}}{Q}$	$\frac{q_{\text{II}}}{Q}$	$\frac{q^*}{Q}$
0,2	0,282876	0,200024	0,199802	0,199913
0,4	0,567130	0,400452	0,399243	0,399848
0,6	0,860158	0,600503	0,599116	0,599810
0,8	1,188225	0,802223	0,797029	0,799626

Pentru determinarea sfertului de perioadă folosim aceleași legi. Deoarece $q.N''(q) > 0$, în tot domeniul de oscilație vom găsi

$$\tau_{\text{I}} < T < \tau_{\text{II}}.$$

Valoarea exactă a perioadei T, determinată în [1], este

$$T = \frac{\varphi(n)}{\sqrt{a_n Q_{n-1}}}, \text{ unde } \varphi(n) = 2\sqrt{2\pi}\sqrt{n+1}\,\frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)!}{\left(\frac{1-n}{2(n+1)}\right)!}.$$

Valoarea aproximativă a perioadei T_1 mai poate fi calculată și cu ajutorul formulei (1) [8].

În tabela 4 sînt comparate valorile aproximative ale sfertului de perioadă $\frac{\tau_I}{4}$, $\frac{\tau_{II}}{4}$, $\frac{\tau^*}{4}$ și $\frac{T_1}{4}$ cu valoarea exactă $\frac{T}{4}$.

Tabela 4

Metoda	t_1	t_2	$\frac{T}{4}$	Eroare
Exact	0,711646	1,142429	1,854075	—
Caracteristica L	0,710897	1,133335	1,844232	0,53 %
Caracteristica D	0,712762	1,150065	1,862827	0,47 %
Media aritmetică	—	—	1,853530	0,03 %
Metoda Panovko [8] cu formula (1)	—	—	1,858590	0,24 %

Primită la redacție la 10 mai 1965, unele completări la 22 iulie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Hans Kauderer, *Nichtlineare Mechanik*, Springer Verlag, 1958, p. 222.
2. Z. Gabos, D. Mangeron, I. Stan, *Fundamentele mecanicii*, București, Edit. Acad. R.P.R., 1962, p. 323.
3. J. K. Hale, *Oscillations in Nonlineare Systems*, McGraw-Hill, 1963.
4. D. Mangeron, *The Integral Equations Method in Non-Linear Mechanics*, Proc. Internat. Symposium of Non-Linear Vibration, Kiev, 1963, p. 347–350.
5. Я. Г. Пановко, *Основы прикладной теории упругих колебаний*, Москва, Машгиз, 1957.
6. Я. Г. Пановко, И. И. Губанова, *Устойчивость и колебания упругих систем*, Москва, Изд. Наука, 1964.
7. Н. К. Куликов, *Приближенное определение периода свободных колебаний нелинейной системы с одной степенью свободы*, Инженерный сборник, т. 13, Изд. АН СССР, 1952.
8. Я. Г. Пановко, *Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах теории упругих колебаний*, Инженерный сборник, т. 13, Изд. АН СССР, 1952.
9. E. J. Ergin, *Transient response of a nonlinear system by bilinear aproximation method*, Journal of Applied Mechanics, *4*, 635 (1956).

10. Э. Ф. ФАЙЗИБАЕВ, *Исследование нестационарных процессов в существенно нелинейной колебательной системе*, Укр. матем. ж., **15**, *2*, 223—227 (1963).
11. Т. Н. ЧАЧАВА, *К вопросу определения расчетных параметров билинейной диаграммы восстанавливающей силы*, Сообщения АН Грузинской ССР, 32, 3, 597 (1963).
12. Ю. А. ГОПП, *Линеаризация позиционной силы методом кусочно-линейной апроксимации*, Инженерный сборник, т. 18, изд, АН СССР, 1954.
13. ALFRED BRAIER, *Asupra calculului aproximativ al pulsaţiei oscilaţiilor sistemelor neliniare conservative*, Bul. Inst. polit. Iaşi, s.n., **5** (**9**), *1—2*, 135—142 (1959).
14. R. ARIS, M. M. DENN, *N-segment least-squares approximation*, AIAA Journal, *8*, 1516 (1964).
15. H. B. DWIGHT, *Tables of Integrals and other Mathematical Data*, New York, The MacMillan Company, 1961.
16. Б. И. СЕГАЛ, К. А. СЕМЕНДЯЕВ, *Пятизначные математические таблицы*, Москва, ГИФМЛ, 1962.
17. В. М. БЕЛЯКОВ, Р. И. КРАВЦОВА, М. Г. РАППОПОРТ, *Таблицы эллиптических интегралов*, Том I, Москва, Изд. Акад. наук СССР, 1962.

MECANISME DE RUPERE EXACTE ŞI APROXIMATIVE ÎN CALCULUL PLASTIC AL PLĂCILOR DREPTUNGHIULARE DE BETON ARMAT[1)]

de VALERIU PETCU
Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti

539.4

În lucrare se determină influenţa variaţiei parametrilor mecanismelor de rupere ale plăcilor de beton armat în jurul valorilor lor exacte asupra mărimii momentelor plastice. Studiul se referă la plăcile dreptunghiulare rezemate pe trei laturi sau pe tot conturul, solicitate de încărcări uniform distribuite sau de încărcări de tip hidrostatic acţionînd pe toată suprafaţa plăcilor, ale căror momente plastice satisfac criteriul redistribuţiei minime a eforturilor.
Pe baza rezultatelor obţinute se stabilesc reguli simple de determinare aproximativă a parametrilor mecanismelor de rupere ale plăcilor studiate, astfel încît momentele plastice obţinute prin utilizarea valorilor aproximative ale acestor parametri să fie afectate de erori inferioare celei admise în mod obişnuit în practică.

I. INTRODUCERE

Determinarea capacităţii de rezistenţă a plăcilor de beton armat cu armătura pe două direcţii se bazează pe teoria liniilor de rupere elaborată de A. Ingerslev [1], şi K. W. Johansen [2].

[1)] Comunicare prezentată la Conferinţa de Mecanică a Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 27—30 septembrie 1965.
Publicată şi în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, *3*, (1966) (în limba franceză).

Ipoteza fundamentală a acestei teorii constă în admiterea stadiului de mecanism ca stare-limită de rezistenţă a acestor elemente de construcţie.

Mecanismul de rupere al unei plăci este definit de un anumit număr de parametri depinzînd de forma plăcii, de raportul dimensiunilor geometrice, de modul de rezemare pe contur şi de tipul şi punctele de aplicaţie a încărcărilor.

Dacă se cunosc tipul, punctele de aplicaţie şi valorile-limită ale încărcărilor, valorile parametrilor mecanismului de rupere al unei plăci se obţin din condiţiile de maximum ale momentului plastic de referinţă [3].

Prin moment plastic de referinţă se înţelege momentul plastic real sau convenţional în funcţie de care se exprimă, printr-o lege stabilită în prealabil, valorile tuturor momentelor plastice care acţionează de-a lungul liniilor de rupere ale unui mecanism.

Fie

$$M_p = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

expresia generală a momentului plastic de referinţă al unei plăci, în care $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt parametrii mecanismului de rupere al acesteia.

Această expresie se deduce din ecuaţia de echilibru plastic al plăcii.

În mod obişnuit, ecuaţia de echilibru plastic se obţine pe baza teoremei cinematice din teoria plastică simplă a structurilor static nedeterminate. Ea poate fi scrisă sub forma generală

$$L_M + L_Q = 0, \tag{2}$$

în care

L_M este lucrul mecanic virtual al momentelor plastice care acţionează de-a lungul liniilor de rupere în stadiul de mecanism al plăcii,

L_Q — lucrul mecanic virtual al încărcărilor-limită în stadiul de mecanism al plăcii.

Condiţiile de maximum ale momentului plastic de referinţă sînt

$$\frac{\partial M_p}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial M_p}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial M_p}{\partial x_n} = 0. \tag{3}$$

Aceste condiţii formează un sistem de ecuaţii ale cărui necunoscute sînt parametrii mecanismului de rupere al plăcii.

În majoritatea cazurilor, rezolvarea sistemului (3), chiar cînd acesta se reduce la o singură ecuaţie, reprezintă o operaţie laborioasă.

Din această cauză se pune problema cercetării posibilităţii de obţinere, pe o cale simplă, a unei soluţii aproximative a parametrilor mecanismelor de rupere ale plăcilor, astfel încît momentele plastice determinate pe baza acestei soluţii să fie afectate de erori inferioare celei admise în mod obişnuit în practică.

Existenţa unei astfel de soluţii este condiţionată de stabilirea în prealabil a influenţei variaţiei parametrilor mecanismelor de rupere ale plăcilor în jurul valorilor lor exacte asupra mărimii momentelor plastice.

În cele ce urmează se tratează această problemă pentru următoarele tipuri de plăci dreptunghiulare:

plăci de tipul A: plăci rezemate pe trei laturi și libere pe a patra latură, solicitate pe toată suprafața lor de încărcări permanente și temporare uniform distribuite;

plăci de tipul B: plăci rezemate pe trei laturi și libere pe a patra latură, solicitate pe toată suprafața lor numai de încărcări temporare de tip hidrostatic;

plăci de tipul C: plăci rezemate pe tot conturul, solicitate pe toată suprafața lor de încărcări permanente și temporare uniform distribuite;

plăci de tipul D: plăci rezemate pe tot conturul, solicitate pe toată suprafața lor numai de încărcări temporare de tip hidrostatic.

Pe baza rezultatelor obținute se stabilesc reguli simple de determinare aproximativă a parametrilor mecanismelor de rupere ale plăcilor enumerate mai sus.

Terminologia folosită este cea corespunzătoare metodei de calcul al construcțiilor la stări-limită [4].

II. MECANISME DE RUPERE

Plăcile de tipurile A și B au două mecanisme posibile de rupere, ale căror scheme sînt date în figura 1.

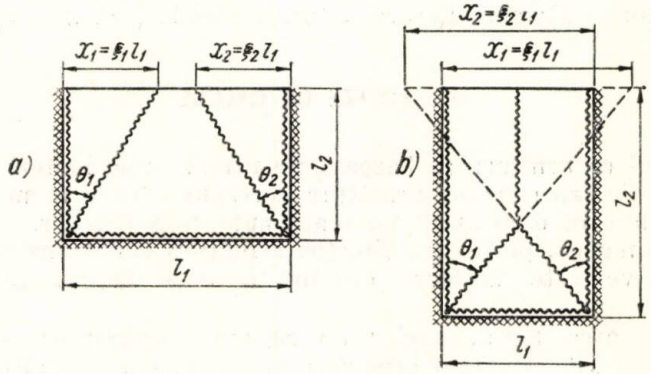


Fig. 1. — Mecanismele de rupere ale plăcilor de tipurile A și B.

Din punct de vedere geometric, ambele mecanisme pot fi definite prin aceiași parametri x_1 și x_2.

Fiecare parametru reprezintă distanța dintre punctele de intersecție a laturii libere cu una dintre laturile perpendiculare pe aceasta și cu linia de rupere sau cu prelungirea acesteia adiacente laturii perpendiculare pe latura liberă (fig. 1, *a*, *b*).

Plăcile de tipurile C şi D au, de asemenea, două mecanisme posibile de rupere, ale căror scheme sînt date în figura 2.

Din punct de vedere geometric, ambele mecanisme pot fi definite prin aceiaşi parametri x_1, x_2 şi x_3.

Parametrii x_1 şi x_2 reprezintă distanţele, măsurate pe orizontală, dintre laturile verticale şi punctele de intersecţie ale liniilor de rupere sau ale prelungirilor acestora adiacente fiecărei laturi verticale.

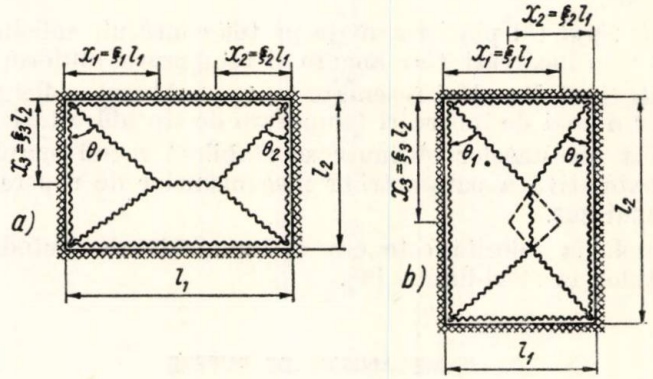


Fig. 2. — Mecanismele de rupere ale plăcilor de tipurile C şi D.

Parametrul x_3 reprezintă distanţa de la latura orizontală superioară pînă la punctele de intersecţie ale liniilor de rupere sau ale prelungirilor acestora adiacente fiecărei laturi verticale (fig. 2 *a*, *b*).

III. IPOTEZE DE CALCUL

Studiul ce urmează se bazează pe următoarele ipoteze:

1. Pe fiecare direcţie, armătura corespunzătoare momentelor pozitive este uniform distribuită pe toată suprafaţa plăcilor.

De asemenea, pe fiecare direcţie, armătura corespunzătoare momentelor negative este uniform distribuită de-a lungul fiecărei laturi încastrate.

2. Formarea mecanismelor de rupere reprezentate în figurile 1 şi 2 este asigurată printr-o armare corespunzătoare a colţurilor şi prin împiedicarea acestora de a părăsi planul definit de conturul plăcilor.

3. Comportarea plăcilor sub acţiunea încărcărilor se consideră perfect elastică pînă la atingerea limitei de curgere în armătură.

4. Pentru toate tipurile de plăci, momentul plastic pozitiv M_{p1}, care acţionează pe direcţia deschiderii l_1, este considerat moment plastic de referinţă.

Exprimarea momentelor plastice ale plăcilor în funcţie de momentul plastic de referinţă se face pe baza criteriului redistribuţiei minime a eforturilor [5].

Potrivit acestui criteriu, momentele plastice ale unei plăci sînt astfel alese, încît limita de curgere a armăturii este atinsă simultan în punctele cele mai solicitate ale plăcii.

Pentru tipurile de plăci şi de încărcări luate în consideraţie rezultă că momentele plastice sînt proporţionale cu momentele elastice corespunzătoare din punctele cele mai solicitate ale plăcilor.

În consecinţă, momentele plastice ale unei plăci se exprimă, în funcţie de momentul plastic de referinţă, prin intermediul coeficienţilor de influenţă ai momentelor elastice corespunzătoare.

5. Plăcile de tipurile A şi C se consideră situate în poziţie orizontală. Ele se presupun solicitate de o încărcare permanentă de calcul constantă şi de o încărcare temporară care poate varia de la valoarea ei normată la valoarea ei de calcul.

6. Plăcile de tipurile B şi D se consideră situate în poziţie verticală. Ele se presupun solicitate numai de o încărcare temporară de tip hidrostatic, care poate varia de la valoarea ei normată la valoarea ei de calcul.

IV. NOTAŢII

În cadrul acestui studiu se folosesc următoarele notaţii :

g — încărcarea permanentă de calcul, uniform distribuită pe unitatea de suprafaţă ;

l_1, l_2 — deschiderile de calcul ale plăcilor ;

M_{p1}, M_{p2} — momentele plastice pozitive pe unitatea de lungime, acţionînd pe direcţiile deschiderilor l_1, respectiv l_2 ;

M'_{p1} — valoarea absolută a momentului plastic negativ acţionînd pe unitatea de lungime a fiecărei laturi încastrate de lungime l_2 ;

M'_{p2} — valoarea absolută a momentului plastic negativ care acţionează :
a) pe unitatea de lungime a laturii încastrate de lungime l_1 la plăcile de tipurile A şi B ;
b) pe unitatea de lungime a fiecărei laturi încastrate de lungime l_1 la plăcile de tipul C ;
c) pe unitatea de lungime a laturii încastrate de lungime l_1, de-a lungul căreia ordonata încărcării de tip hidrostatic este nulă, la plăcile de tipul D ;

M''_{p2} — valoarea absolută a momentului plastic negativ care acţionează pe unitatea de lungime a laturii încastrate de lungime l_1, de-a lungul căreia ordonata încărcării de tip hidrostatic este maximă, la plăcile de tipul D ;

p_n, p_u — a) încărcările normată şi de calcul pe unitatea de suprafaţă la plăcile de tipurile A şi C ;
b) încărcările pe unitatea de suprafaţă, reprezentînd ordonatele maxime ale diagramelor încărcărilor temporare normate şi de calcul la plăcile de tipurile B şi D ;

p_1 — a) încărcarea temporară pe unitatea de suprafață, corespunzătoare atingerii limitei de curgere în armătură simultan în punctele cele mai solicitate ale plăcilor de tipurile A și C;

b) încărcarea pe unitatea de suprafață, reprezentînd ordonata maximă a diagramei încărcării temporare corespunzătoare atingerii limitei de curgere în armătură simultan în punctele cele mai solicitate ale plăcilor de tipurile B și D;

x_1, x_2, x_3 — parametri ai mecanismelor de rupere ale plăcilor, ale căror valori se obțin din condițiile de maximum ale momentului plastic de referință;

x' — valoare comună a parametrilor x_1 și x_2 la plăcile ale căror laturi de lungime l_2 au condiții identice de rezemare;

ωx — valoare arbitrară a parametrului x;

μM_{p1} — valoare a momentului plastic de referință corespunzătoare parametrului arbitrar ωx;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1', \alpha_2', \alpha_2''$ — valori pozitive ale coeficienților de influență ai momentelor elastice maxime, corespunzătoare momentelor plastice M_{p1}, M_{p2}, M_{p1}', M_{p2}' și M_{p2}'';

$$q_n = g + p_n;\ q_u = g + p_u;\ q_1 = g + p_1;$$

$$\xi_1 = \frac{x_1}{l_1};\ \xi_2 = \frac{x_2}{l_1};\ \xi_3 = \frac{x_3}{l_2};\ \xi = \frac{x}{l_1};\ \lambda = \frac{l_2}{l_1}.$$

★

Reprezentările convenționale ale laturilor libere, simplu rezemate și încastrate, precum și ale liniilor de rupere și ale direcțiilor de acțiune ale momentelor plastice, sînt date în figura 3.

V. PLĂCI DE TIPUL A

Plăcile de tipul A au patru moduri de rezemare pe contur, și anume (fig. 4):

modul de rezemare 1: plăci simplu rezemate pe trei laturi și libere pe a patra latură

modul de rezemare 2: plăci simplu rezemate pe două laturi perpendiculare pe latura liberă și încastrate perfect pe latura paralelă cu latura liberă;

modul de rezemare 3: plăci încastrate perfect pe două laturi perpendiculare pe latura liberă și simplu rezemate pe latura paralelă cu latura liberă;

modul de rezemare 4: plăci încastrate perfect pe trei laturi și libere pe a patra latură.

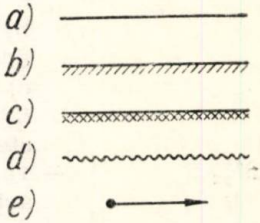


Fig. 3. — Reprezentări convenționale.
a) — latură liberă;
b) — latură simplu rezemată;
c) — latură încastrată;
d) — linie de rupere;
e) — direcția de acțiune a momentelor plastice.

Întrucît aceste moduri de rezemare prezintă simetrie în raport cu o dreaptă perpendiculară pe mijlocul laturii libere, rezultă că parametrii x_1 și x_2 ai mecanismelor de rupere ale acestor plăci sînt egali între ei.

Aplicarea criteriului redistribuției minime a eforturilor la cazul general al plăcii încastrate perfect pe trei laturi conduce la următoarele expresii ale momentelor plastice (fig. 5):

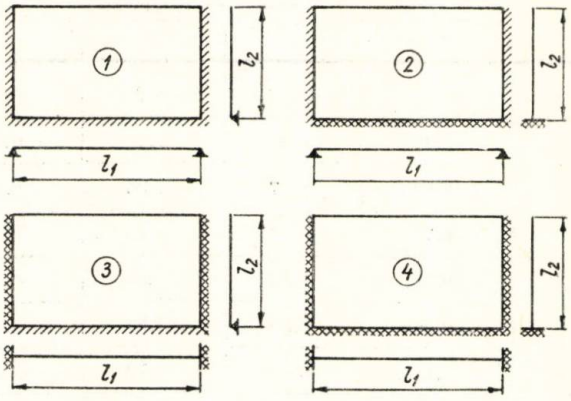


Fig. 4. — Modurile de rezemare ale plăcilor de tipurile A și B.

$$\left.\begin{aligned} M_{p1} &= \alpha_1 q_1 l_1^2; \quad M_{p2} = \alpha_2 q_1 l_1^2, \\ M'_{p1} &= \alpha'_1 q_1 l_1^2; \quad M'_{p2} = \alpha'_2 q_1 l_1^2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Valorile coeficienților α_1, α_2, α'_1, și α'_2 se deduc din lucrarea [6], pentru un coeficient al lui Poisson egal cu $\frac{1}{6}$, în funcție de modul de rezemare și de raportul laturilor plăcilor.

Prin eliminarea încărcării q_1 între relațiile (4) se obțin expresiile momentelor plastice M'_{p1}, M_{p2} și M'_{p2} în funcție de momentul plastic de referință.

Înlocuind aceste momente prin expresiile lor în ecuația de echilibru plastic (2), se obțin următoarele expresii generale ale momentului plastic de referință:

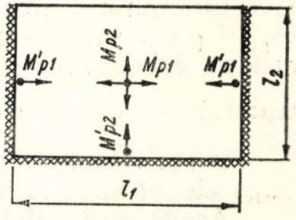


Fig. 5. — Distribuția momentelor plastice la plăcile de tipurile A și B.

$$M_{p1} = \frac{\lambda^2 \alpha_1}{6} \cdot \frac{\xi(3 - 2\xi)}{2\lambda^2(\alpha_1 + \alpha'_1) + \alpha'_2 \xi + 2\alpha_2 \xi^2} \cdot q_u l_1^2 \tag{5}$$

pentru mecanismul de rupere I (fig. 1 *a*), respectiv

$$M_{p1} = \frac{\lambda^2 \alpha_1}{24} \cdot \frac{2\xi - 1}{2\lambda^2(\alpha_1 + \alpha'_1)\,\xi + (\alpha_2 + \alpha'_2)\,\xi^2} \cdot q_u l_1^2 \tag{6}$$

pentru mecanismul de rupere II (fig. 1 *b*).

Valorile parametrului ξ, obținute din condiția de maximum a momentului plastic de referință, sînt date în tabela 1, în funcție de modul de rezemare a plăcilor pe contur și de raportul laturilor.

Tabela 1

Valorile parametrului ξ

λ	Modul de rezemare			
	1	2	3	4
0,3	0,35	0,17	0,72	0,39
0,4	0,42	0,28	1,00	0,51
0,5	0,67	0,37	1,06	0,59
0,6	0,77	0,44	1,19	0,67
0,7	0,89	0,50	1,35	0,75
0,8	0,98	0,56	1,56	0,82
0,9	1,11	0,61	1,72	0,89
1,0	1,25	0,67	2,00	0,98
1,2	1,67	0,78	2,50	1,14
1,5	1,92	0,96	3,33	1,39
2,0	2,78	1,25	5,00	1,79

Momentul plastic μM_{p1} se obține prin înlocuirea parametrului ξ cu produsul $\omega\xi$ în relația (5) dacă $\omega\xi \leqslant 0{,}5$, respectiv în relația (6) dacă $\omega\xi > 0{,}5$.

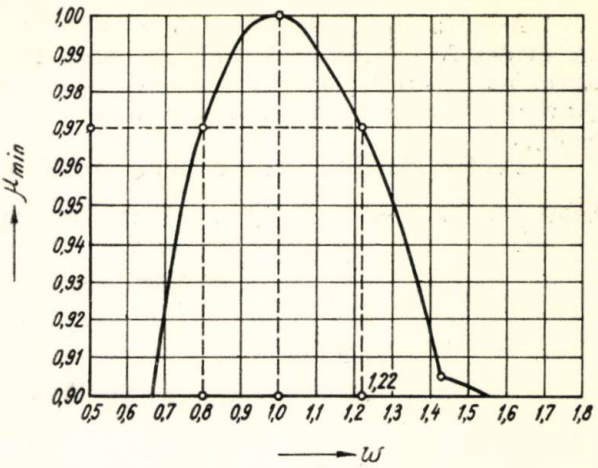
Cu ajutorul relațiilor astfel stabilite pentru momentele plastice M_{p1} și μM_{p1} s-a determinat, pentru fiecare mod de rezemare a plăcilor, variația coeficientului μ în funcție de coeficientul ω pentru valori ale raportului $\frac{l_2}{l_1}$ cuprinse între 0,3 și 2,0.

Pe baza rezultatelor obținute s-a trasat înfășurătoarea valorilor minime (μ_{min}) ale coeficientului μ pentru fiecare mod de rezemare a plăcilor. Aceste curbe sînt reprezentate în figurile 6—9.

Dacă la determinarea momentului plastic de referință se admite o eroare maximă de — 3% în raport cu valoarea exactă a acestui moment, din diagramele reprezentate în figurile 6—9 rezultă că acestei erori îi corespunde o eroare a parametrului mecanismelor de rupere de cel puțin 20% în minus și de cel puțin 22% în plus în raport cu valoarea exactă a acestui parametru.

Prin urmare, variația în limite destul de largi a parametrului mecanismelor de rupere în jurul valorii lui exacte are o influență redusă asupra valorilor momentelor plastice ale plăcilor de tipul *A*.

Fig. 6. — Modul de rezemare 1. Diagrama $\mu_{min} - \omega$.



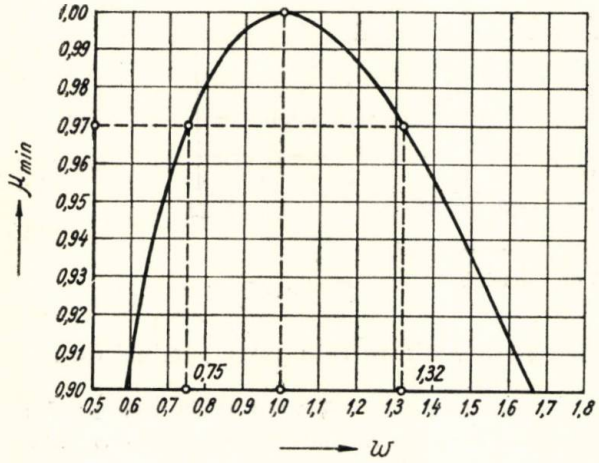


Fig. 7. — Modul de rezemare 2. Diagrama $\mu_{min} - \omega$.

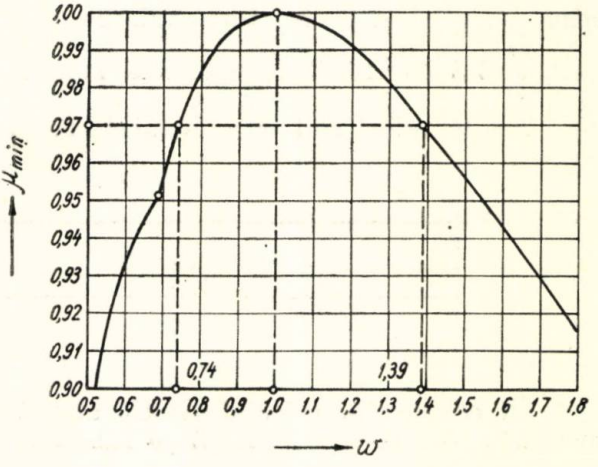


Fig. 8. — Modul de rezemare 3. Diagrama $\mu_{min} - \omega$.

Această concluzie prezintă o importanță deosebită, întrucît pune în evidență posibilitatea stabilirii unei reguli simple de determinare aproximativă a parametrului mecanismelor de rupere fără ca momentele plastice obținute pe această cale să fie afectate de erori mai mari decît — 3%.

Pentru stabilirea unei astfel de reguli s-a examinat variația raportului $\frac{x}{l_2} = \operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} \theta_2$ (fig. 1) în funcție de valorile raportului $\frac{l_2}{l_1}$.

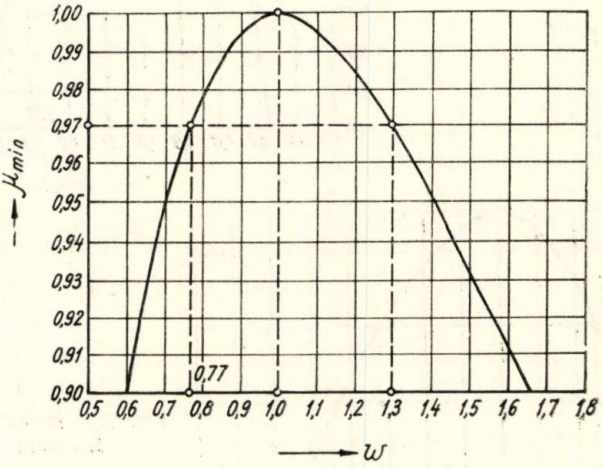


Fig. 9. — Modul de rezemare 4. Diagrama $\mu_{min} - \omega$.

cuprinse între 0,3 și 2,0 pentru fiecare dintre cele patru moduri de rezemare a plăcilor.

În urma acestei operații s-a constatat că pentru fiecare mod de rezemare este posibilă admiterea în calcul a unei valori unice a raportului $\frac{x}{l_2}$, valabilă pentru toate valorile raportului $\frac{l_2}{l_1}$ cuprinse între 0,3 și 2,0, fără ca erorile ce afectează momentele plastice să depășească — 2,5%.

Aceste valori sînt date în tabela 2.

Tabela 2

Modul de rezemare	1	2	3	4
$\frac{x}{l_2}$	1,2	0,7	2,2	1,1

În consecință, calculul plastic al plăcilor de tipul A, ale căror momente plastice se determină pe baza criteriului redistribuției minime

a eforturilor, poate fi făcut cu ajutorul valorilor aproximative ale parametrului mecanismelor de rupere date în tabela 2, indiferent de raportul laturilor plăcilor.

VI. PLĂCI DE TIPUL B

Plăcile de tipul B au aceleași moduri de rezemare pe contur ca și plăcile de tipul A (fig. 4).

În consecință, și pentru aceste plăci rămîn valabile egalitățile $x_1 = x_2 = x$, respectiv $\xi_1 = \xi_2 = \xi$.

La plăcile de acest tip, marginea superioară este constituită de latura liberă. De-a lungul acestei laturi, ordonata încărcării de tip hidrostatic este nulă (fig. 10).

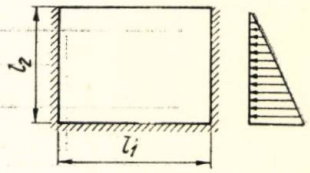


Fig. 10. — Plăcile de tipul B. Modul de solicitare.

În cazul general al plăcii încastrate perfect pe trei laturi, aplicarea criteriului redistribuției minime a eforturilor conduce la următoarele expresii ale momentelor plastice (fig. 5):

$$\left.\begin{aligned} M_{p1} &= \alpha_1 p_1 l_1^2; \quad M_{p2} = \alpha_2 p_1 l_1^2, \\ M'_{p1} &= \alpha'_1 p_1 l_1^2; \quad M'_{p2} = \alpha'_2 p_1 l_1^2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Valorile coeficienților α_1, α_2, α'_1 și α'_2 se deduc din lucrarea [6], pentru un coeficient al lui Poisson egal cu $\frac{1}{6}$, în funcție de modul de rezemare și de raportul laturilor plăcilor.

Relațiile (7), împreună cu ecuația de echilibru plastic (2), conduc la următoarele expresii generale ale momentului plastic de referință:

$$M_{p1} = \frac{\lambda^2 \alpha_1}{12} \cdot \frac{\xi(2-\xi)}{2\lambda^2(\alpha_1 + \alpha'_1) + \alpha'_2 \xi + 2\alpha_2 \xi^2} \cdot p_u l_1^2 \tag{8}$$

pentru mecanismul de rupere I (fig. 1 *a*), respectiv

$$M_{p1} = \frac{\lambda^2 \alpha_1}{192} \cdot \frac{1 - 8\xi + 24\xi^2}{2\lambda^2(\alpha_1 + \alpha'_1)\xi^2 + (\alpha_2 + \alpha'_2)\xi^3} \cdot p_u l_1^2 \tag{9}$$

pentru mecanismul de rupere II (fig. 1 *b*).

Valorile parametrului ξ, obținute din condiția de maximum a momentului plastic de referință, sînt date în tabela 3 în funcție de modul de rezemare a plăcilor pe contur și de raportul laturilor [8].

Momentul plastic μM_{p1} se obține prin înlocuirea parametrului ξ cu produsul $\omega\xi$ în relația (8) dacă $\omega\xi \leqslant 0{,}5$, respectiv în relația (9) dacă $\omega\xi > 0{,}5$.

Cu ajutorul relațiilor astfel stabilite pentru momentele plastice M_{p1} și μM_{p1} s-a determinat, pentru fiecare mod de rezemare a plăcilor,

variația coeficientului μ în funcție de coeficientul ω pentru valori ale raportului $\frac{l_2}{l_1}$ cuprinse între 0,3 și 2,0.

Pe baza rezultatelor obținute s-a trasat înfășurătoarea valorilor minime (μ_{min}) ale coeficientului μ pentru fiecare mod de rezemare a plăcilor.

Aceste curbe sînt reprezentate în figurile 11—14.

Tabela 3

Valorile parametrului ξ

λ	Modul de rezemare			
	1	2	3	4
0,3	0,32	0,18	0,78	0,42
0,4	0,40	0,29	0,89	0,53
0,5	0,75	0,36	1,02	0,58
0,6	0,86	0,43	1,19	0,66
0,7	0,98	0,54	1,39	0,76
0,8	1,09	0,60	1,67	0,85
0,9	1,19	0,66	1,92	0,94
1,0	1,32	0,70	2,17	1,02
1,2	1,52	0,81	2,78	1,22
1,5	1,85	0,98	4,17	1,52
2,0	2,38	1,32	6,25	2,00

Din examinarea acestor figuri rezultă că unei erori de —3% comise la determinarea momentului plastic de referință îi corespunde o eroare a parametrului mecanismelor de rupere de cel puțin 21% în minus și de cel puțin 34% în plus în raport cu valoarea exactă a acestui parametru.

Deoarece această constatare este identică cu cea făcută în cazul plăcilor de tipul A, rezultă că concluziile deduse pentru aceste plăci rămîn valabile și pentru plăcile de tipul B.

În urma examinării variației raportului $\frac{x}{l_2} = \operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}\theta_2$ în funcție de valorile raportului $\frac{l_2}{l_1}$ cuprinse între 0,3 și 2,0, s-a constatat că pentru fiecare mod de rezemare a plăcilor este posibilă admiterea în calcul a unei valori unice a raportului $\frac{x}{l_2}$ fără ca prin aceasta erorile ce afectează momentele plastice să depășească —2,5%.

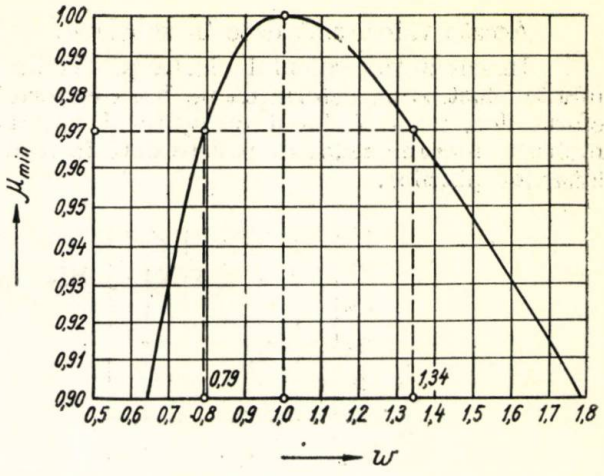


Fig. 11. — Modul de rezemare 1. Diagrama $\mu_{min} - \omega$.

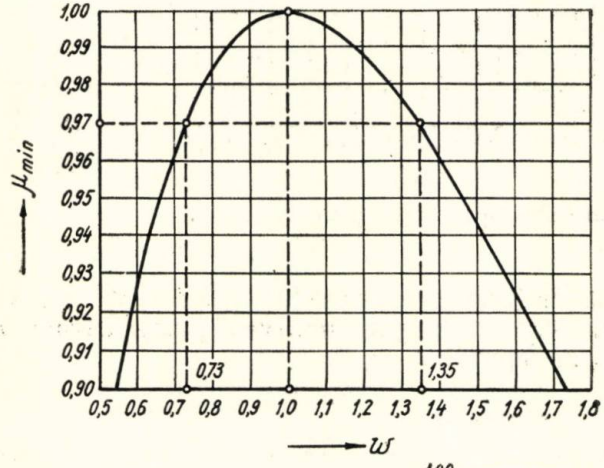


Fig. 12. — Modul de rezemare 2. Diagrama $\mu_{min} - \omega$.

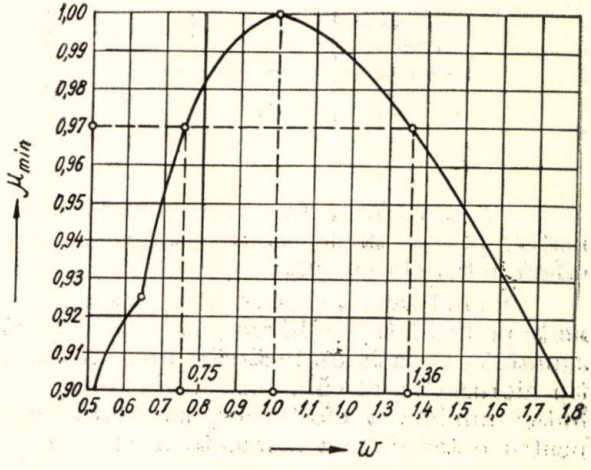


Fig. 13 — Modul de rezemare 3. Diagrama $\mu_{min} - \omega$.

Aceste valori sînt date în tabela 4.

În concluzie, calculul plastic al plăcilor de tipul B, ale căror momente plastice se determină pe baza criteriului redistribuției minime a eforturilor, poate fi făcut cu ajutorul valorilor aproximative ale parametrului mecanismelor de rupere date în tabela 4, indiferent de raportul laturilor plăcilor.

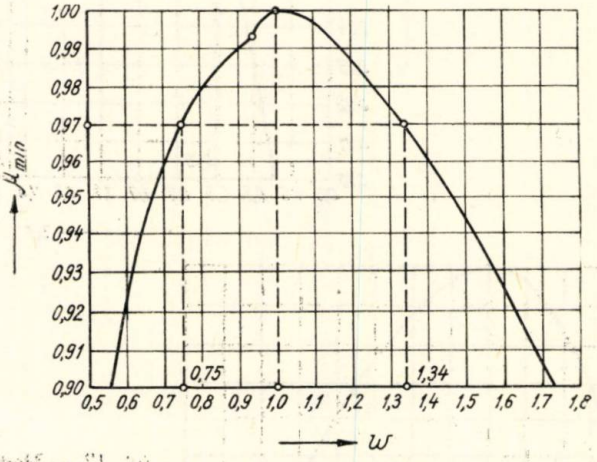


Fig. 14. — Modul de rezemare 4. Diagrama $\mu_{min} - \omega$.

Compararea rezultatelor înscrise în tabelele 2 și 4 arată că, cu excepția modului de rezemare 4, valorile aproximative ale parametrului x sînt identice pentru plăcile de tipurile A și B.

Tabela 4

Modul de rezemare	1	2	3	4
$\frac{x}{l_2}$	1,2	0,7	2,2	1,2

De asemenea, în cazul modului de rezemare 4, valorile aproximative ale parametrului x obținute pentru aceste două tipuri de plăci diferă între ele cu mai puțin de 10%.

Ținînd seama de cele de mai sus, rezultă că în cazul plăcilor rezemate pe trei laturi și libere pe a patra latură, solicitate simultan pe toată suprafața lor atît de încărcări uniform distribuite, cît și de încărcări de tip hidrostatic, al căror calcul plastic se face pe baza criteriului redistribuției minime a eforturilor, se poate admite suprapunerea de efecte pentru determinarea momentelor plastice.

VII. PLĂCI DE TIPUL C

Plăcile de tipul C au şase moduri de rezemare pe contur, şi anume (fig. 15) :

modul de rezemare 1 : plăci simplu rezemate pe tot conturul ;

modul de rezemare 2 : plăci simplu rezemate pe trei laturi şi încastrate perfect pe a patra latură ;

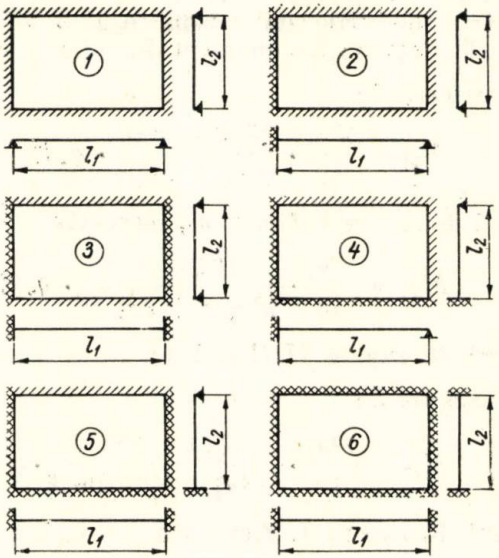


Fig. 15. — Modurile de rezemare ale plăcilor de tipul C.

modul de rezemare 3 : plăci simplu rezemate pe două laturi paralele şi încastrate perfect pe celelalte două laturi ;

modul de rezemare 4 : plăci simplu rezemate pe două laturi adiacente şi încastrate perfect pe celelalte două laturi ;

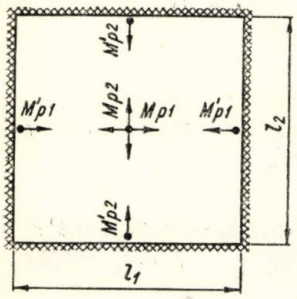


Fig. 16. — Distribuţia momentelor plastice la plăcile de tipul C.

modul de rezemare 5 : plăci încastrate perfect pe trei laturi şi simplu rezemate pe a patra latură ;

modul de rezemare 6 : plăci încastrate perfect pe tot conturul.

Dintre acestea, doar modurile de rezemare 1, 3 şi 6 posedă simetrie în raport cu două axe perpendiculare între ele.

De aceea mecanismele de rupere ale plăcilor avînd modurile de rezemare 1, 3 şi 6 depind numai de un singur parametru, întrucît x_1 şi x_2 sînt egali între ei, iar $x_3 = 0{,}5$.

În cazul general al plăcii încastrate perfect pe tot conturul, aplicarea criteriului redi-

stribuției minime a eforturilor conduce la următoarele expresii ale momentelor plastice (fig. 16):

$$\left.\begin{aligned} M_{p1} &= \alpha_1 q_1 l_1^2; \quad M_{p2} = \alpha_2 q_1 l_1^2, \\ M'_{p1} &= \alpha'_1 q_1 l_1^2; \quad M'_{p2} = \alpha'_2 q_1 l_1^2. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Valorile coeficienților α_1, α_2, α'_1 și α'_2 se deduc din prescripțiile [7], în funcție de modul de rezemare și de raportul laturilor plăcilor.

Prin aplicarea procedeului folosit în cazul plăcilor de tipul A se obțin pentru modurile de rezemare 1, 3 și 6 ale plăcilor de tipul C următoarele expresii ale momentului plastic de referință:

Modul de rezemare 1:

$$M_{p1} = \frac{\lambda^2 \alpha_1}{12} \cdot \frac{\xi(3 - 2\xi)}{\lambda^2 \alpha_1 + 2\alpha_2 \xi} \cdot q_u l_1^2 \tag{11}$$

pentru mecanismul de rupere I (fig. 2 *a*), respectiv

$$M_{p1} = \frac{\lambda^2 \alpha_1}{48} \cdot \frac{6\xi - 1}{\lambda^2 \alpha_1 \xi + 2\alpha_2 \xi^2} \cdot q_u l_1^2 \tag{12}$$

pentru mecanismul de rupere II (fig. 2 *b*).

Modul de rezemare 3:

$$M_{p1} = \frac{\lambda^2 \alpha_1}{12} \cdot \frac{\xi(3 - 2\xi)}{\lambda^2 (\alpha_1 + \alpha'_1) + 2\alpha_2 \xi} \cdot q_u l_1^2 \tag{13}$$

pentru mecanismul de rupere I, respectiv

$$M_{p1} = \frac{\lambda^2 \alpha_1}{48} \cdot \frac{6\xi - 1}{\lambda^2 (\alpha_1 + \alpha'_1)\xi + 2\alpha_2 \xi^2} \cdot q_u l_1^2 \tag{14}$$

pentru mecanismul de rupere II.

Modul de rezemare 6:

$$M_{p1} = \frac{\lambda^2 \alpha_1}{12} \cdot \frac{\xi(3 - 2\xi)}{\lambda^2 (\alpha_1 + \alpha'_1) + 2(\alpha_2 + \alpha'_2)\xi} \cdot q_u l_1^2 \tag{15}$$

pentru mecanismul de rupere I, respectiv

$$M_{p1} = \frac{\lambda^2 \alpha_1}{48} \cdot \frac{6\xi - 1}{\lambda^2 (\alpha_1 + \alpha'_1)\xi + 2(\alpha_2 + \alpha'_2)\xi^2} \cdot q_u l_1^2 \tag{16}$$

pentru mecanismul de rupere II.

Momentul plastic μM_{p1} se obține prin înlocuirea parametrului ξ cu produsul $\omega\xi$ în relațiile (11), (13) și (15) dacă $\omega\,\xi \leqslant 0{,}5$, respectiv în relațiile (12), (14) și (16) dacă $\omega\,\xi > 0{,}5$.

Cu ajutorul relațiilor astfel stabilite pentru momentele plastice M_{p1} și μM_{p1} s-a determinat, pentru fiecare din modurile de rezemare

1, 3 şi 6, variaţia coeficientului μ în funcţie de coeficientul ω pentru valori ale raportului $\frac{l_2}{l_1}$ cuprinse între 0,5 şi 2,0.

Pe baza rezultatelor obţinute s-a trasat înfăşurătoarea valorilor minime (μ_{min}) ale coeficientului μ pentru fiecare dintre cele trei moduri de rezemare specificate mai sus.

Aceste curbe sînt reprezentate în figurile 17 şi 18.

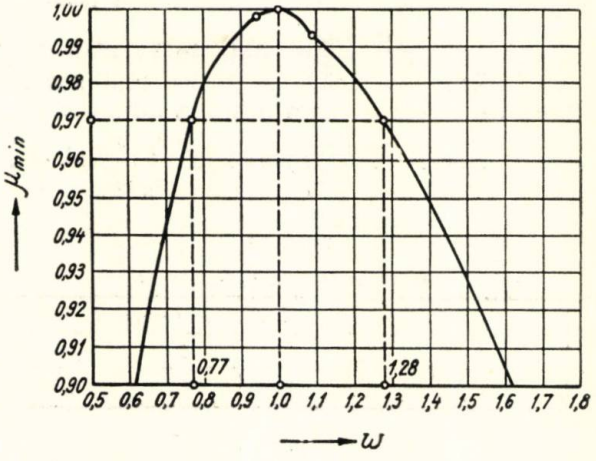


Fig. 17. — Modurile de rezemare 1 şi 6. Diagrama $\mu_{min} - \omega$.

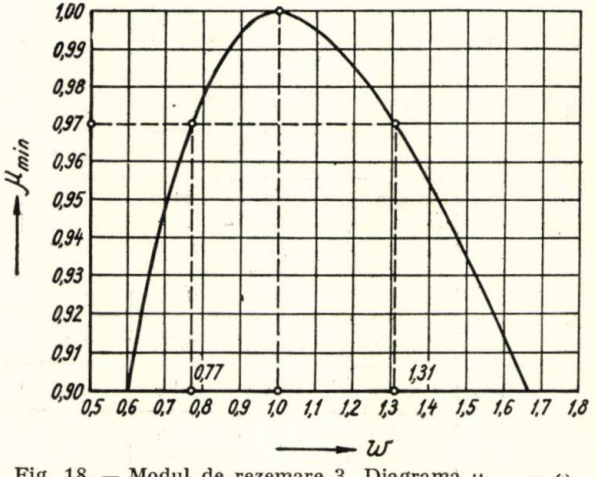


Fig. 18. — Modul de rezemare 3. Diagrama $\mu_{min} - \omega$.

Din examinarea acestor figuri rezultă că unei erori de — 3% comise la determinarea momentului plastic de referinţă îi corespunde o eroare a parametrului mecanismelor de rupere de cel puţin 23% în minus şi de cel puţin 28% în plus în raport cu valoarea exactă a acestui parametru.

Această constatare face posibilă extinderea concluziilor deduse pentru plăcile de tipul A și la plăcile de tipul C.

Pentru stabilirea unei reguli simple de calcul s-a examinat variația rapoartelor $\frac{x_1}{x_3} = \operatorname{tg} \theta_1$, $\frac{x_2}{x_3} = \operatorname{tg} \theta_2$ și $\frac{x_3}{l_2}$ în funcție de raportul $\frac{l_2}{l_1}$ pentru toate modurile de rezemare a plăcilor de tipul C.

Această operație s-a făcut pe baza valorilor exacte ale parametrilor ξ_1, ξ_2 și ξ_3, obținute din condiția de maximum a momentului plastic de referință.

Valorile acestor parametri sînt date în tabelele 5 și 6.

În urma efectuării examinării amintite mai sus s-a constatat că pentru fiecare mod de rezemare este posibilă admiterea în calcul a unor valori unice pentru fiecare din rapoartele $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ și $\frac{x_3}{l_2}$, valabile pen-

Tabela 5

Valorile parametrilor ξ, ξ_1, ξ_2 și ξ_3

λ	Modul de rezemare						
	1		2			3	
	ξ	ξ_3	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ	ξ_3
0,5	0,19	0,50	0,36	0,20	0,50	0,36	0,50
0,6	0,25	0,50	0,47	0,25	0,50	0,46	0,50
0,7	0,32	0,50	0,58	0,30	0,50	0,53	0,50
0,8	0,39	0,50	0,67	0,35	0,50	0,62	0,50
0,9	0,45	0,50	0,77	0,40	0,50	0,73	0,50
1,0	0,50	0,50	0,87	0,45	0,50	0,86	0,50
1,1	0,55	0,50	0,99	0,52	0,50	1,00	0,50
1,2	0,61	0,50	1,12	0,59	0,50	1,14	0,50
1,3	0,68	0,50	1,25	0,67	0,50	1,31	0,50
1,4	0,76	0,50	1,39	0,78	0,50	1,47	0,50
1,5	0,84	0,50	1,52	0,86	0,50	1,67	0,50
1,6	0,93	0,50	1,68	0,95	0,50	1,79	0,50
1,7	1,04	0,50	1,88	1,06	0,50	2,08	0,50
1,8	1,14	0,50	2,13	1,20	0,50	2,27	0,50
1,9	1,25	0,50	2,37	1,34	0,50	2,50	0,50
2,0	1,32	0,50	2,63	1,54	0,50	2,78	0,50

Tabela 6

Valorile parametrilor ξ ξ_1, ξ_2 și ξ_3

λ	Modul de rezemare							
	4			5			6	
	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ	ξ_3
0,5	0,24	0,14	0,64	0,25	0,25	0,64	0,19	0,50
0,6	0,32	0,18	0,64	0,33	0,33	0,64	0,26	0,50
0,7	0,41	0,23	0,64	0,41	0,41	0,64	0,32	0,50
0,8	0,50	0,27	0,64	0,48	0,48	0,64	0,39	0,50
0,9	0,58	0,31	0,64	0,54	0,54	0,64	0,45	0,50
1,0	0,64	0,36	0,64	0,61	0,61	0,64	0,50	0,50
1,1	0,71	0,40	0,64	0,70	0,70	0,64	0,55	0,50
1,2	0,79	0,45	0,64	0,79	0,79	0,64	0,61	0,50
1,3	0,88	0,50	0,64	0,88	0,88	0,64	0,68	0,50
1,4	0,97	0,55	0,64	1,00	1,00	0,64	0,76	0,50
1,5	1,07	0,60	0,64	1,14	1,14	0,64	0,84	0,50
1,6	1,19	0,67	0,64	1,25	1,25	0,64	0,93	0,50
1,7	1,31	0,74	0,64	1,39	1,29	0,64	1,04	0,50
1,8	1,45	0,82	0,64	1,51	1,51	0,64	1,14	0,50
1,9	1,56	0,88	0,64	1,67	1,67	0,64	1,25	0,50
2,0	1,69	0,95	0,64	1,85	1,85	0,64	1,32	0,50

tru toate valorile raportului $\frac{l_2}{l_1}$ cuprinse între 0,5 și 2,0, fără ca prin aceasta erorile ce afectează momentele plastice să depășească — 2%. Aceste valori sînt date în tabela 7.

Tabela 7

Valorile rapoartelor $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ și $\frac{x_3}{l_2}$

Modul de rezemare	1	2	3	4	5	6
$\frac{x_1}{x_3}$	1,0	1,9	1,8	1,0	1,0	1,0
$\frac{x_2}{x_3}$	1,0	1,1	1,8	0,6	1,0	1,0
$\frac{x_3}{l_2}$	0,5	0,5	0,5	0,65	0,65	0,5

În concluzie, calculul plastic al plăcilor de tipul C, ale căror momente plastice se determină pe baza criteriului redistribuţiei minime a eforturilor, poate fi făcut cu ajutorul valorilor aproximative ale parametrilor mecanismelor de rupere date în tabela 7, indiferent de raportul laturilor plăcilor.

VIII. PLACI DE TIPUL D

Plăcile de tipul D au opt moduri de rezemare pe contur, şi anume : (fig. 19) :

modul de rezemare 1 : plăci simplu rezemate pe tot conturul ;

modul de rezemare 2 : plăci simplu rezemate pe trei laturi şi încastrate perfect pe latura orizontală inferioară ;

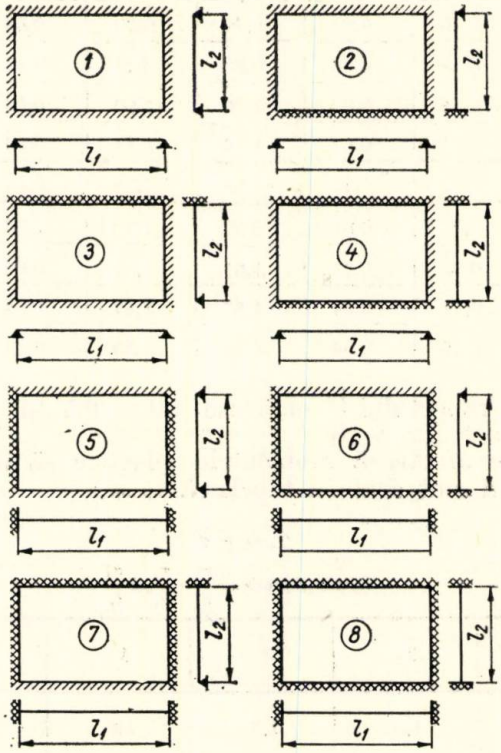


Fig. 19. — Modurile de rezemare ale plăcilor de tipul D.

modul de rezemare 3 : plăci simplu rezemate pe trei laturi şi încastrate perfect pe latura orizontală superioară ;

modul de rezemare 4: plăci simplu rezemate pe cele două laturi verticale și încastrate perfect pe celelalte două laturi;

modul de rezemare 5: plăci încastrate perfect pe cele două laturi verticale și simplu rezemate pe celelalte două laturi;

modul de rezemare 6: plăci simplu rezemate pe latura orizontală superioară și încastrate perfect pe celelalte laturi;

modul de rezemare 7: plăci simplu rezemate pe latura orizontală inferioară și încastrate perfect pe celelalte laturi;

modul de rezemare 8: plăci încastrate perfect pe tot conturul.

Toate aceste tipuri de rezemare posedă un ax de simetrie paralel cu direcția deschiderii l_2, din care cauză parametrii x_1 și x_2 sînt egali între ei.

Întrucît încărcarea temporară care solicită aceste plăci are numai un singur ax de simetrie, rezultă că nici una dintre plăcile de tipul D nu posedă mecanisme de rupere care să depindă doar de un singur parametru.

De aceea pentru stabilirea unor reguli simple de calcul s-a admis și pentru aceste plăci valabilitatea concluziei stabilite la tipurile precedente de plăci referitoare la influența redusă a variației parametrilor mecanismelor de rupere în jurul valorilor lor exacte asupra mărimii momentelor plastice.

Pe baza acestei ipoteze s-au examinat variațiile rapoartelor $\frac{x_1}{x_3} = \frac{x_2}{x_3} = \operatorname{tg}\ \theta_1 = \operatorname{tg}\ \theta_2$ și $\frac{x_3}{l_2}$ în funcție de raportul $\frac{l_2}{l_1}$ pentru toate cele opt moduri de rezemare a plăcilor.

În aceste rapoarte, valorile parametrilor $\xi = \xi_1 = \xi_2$ și ξ_3, deduse pe baza condițiilor de maximum ale momentului plastic de referință [9], sînt date în tabele 8 și 9.

În urma efectuării operației specificate mai sus s-a constatat că pentru fiecare mod de rezemare este posibilă admiterea în calcul a unor valori unice pentru fiecare din rapoartele $\frac{x_1}{x_3} = \frac{x_2}{x_3}$ și $\frac{x_3}{l_2}$, valabile pentru toate valorile raportului $\frac{l_2}{l_1}$ cuprinse între 0,5 și 2,0, fără ca prin aceasta erorile ce afectează momentele plastice să depășească — 2%.

Aceste valori sînt date în tabela 10.

În concluzie, calculul plastic al plăcilor de tipul D, ale căror momente plastice se determină pe baza criteriului redistribuției minime a eforturilor, poate fi făcut cu ajutorul valorilor aproximative ale parametrilor mecanismelor de rupere date în tabela 10, indiferent de raportul laturilor plăcilor.

Tabela 8

Valorile parametrilor ξ și ξ_3

λ	Modul de rezemare							
	1		2		3		4	
	ξ	ξ_3	ξ	ξ_3	ξ	ξ_3	ξ	ξ_3
0,50	0,21	0,59	0,15	0,48	0,16	0,70	0,13	0,58
0,60	0,26	0,59	0,19	0,48	0,20	0,70	0,16	0,58
0,70	0,32	0,59	0,24	0,48	0,24	0,70	0,19	0,58
0,80	0,37	0,60	0,28	0,48	0,29	0,70	0,23	0,58
0,90	0,42	0,60	0,32	0,48	0,33	0,70	0,26	0,58
1,00	0,46	0,61	0,36	0,48	0,38	0,70	0,29	0,58
1,11	0,50	0,61	0,41	0,48	0,42	0,70	0,33	0,58
1,25	0,56	0,63	0,46	0,48	0,47	0,70	0,38	0,58
1,43	0,62	0,65	0,52	0,48	0,50	0,71	0,44	0,58
1,67	0,71	0,67	0,59	0,48	0,60	0,73	0,51	0,58
2,00	0,83	0,68	0,68	0,50	0,70	0,74	0,58	0,58

Tabela 9

Valorile parametrilor ξ și ξ_3

λ	Modul de rezemare							
	5		6		7		8	
	ξ	ξ_3	ξ	ξ_3	ξ	ξ_3	ξ	ξ_3
0,50	0,39	0,59	0,30	0,45	0,31	0,68	0,26	0,56
0,60	0,45	0,60	0,36	0,45	0,37	0,69	0,31	0,56
0,70	0,51	0,62	0,42	0,46	0,42	0,70	0,36	0,56
0,80	0,56	0,64	0,50	0,47	0,50	0,71	0,41	0,56
0,90	0,61	0,65	0,52	0,48	0,51	0,71	0,45	0,56
1,00	0,67	0,66	0,56	0,48	0,56	0,72	0,50	0,57
1,11	0,72	0,66	0,61	0,49	0,61	0,72	0,53	0,57
1,25	0,78	0,67	0,67	0,51	0,69	0,73	0,58	0,58
1,43	0,91	0,69	0,74	0,52	0,77	0,74	0,65	0,59
1,67	1,06	0,70	0,85	0,53	0,89	0,75	0,76	0,60
2,00	1,28	0,72	0,98	0,55	1,09	0,76	0,88	0,60

Tabela 10

Valorile rapoartelor $\frac{x_1}{x_3} = \frac{x_2}{x_3}$ și $\frac{x_3}{l_2}$

Modul de rezemare	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{x_1}{x_3} = \frac{x_2}{x_3}$	0,7	0,7	0,5	0,5	1,1	1,0	0,8	0,9
$\frac{x_3}{l_2}$	0,6	0,5	0,7	0,6	0,6	0,5	0,7	0,6

IX. CONCLUZII

a) În lucrare s-au stabilit valori aproximative ale parametrilor mecanismelor de rupere ale plăcilor dreptunghiulare de beton armat rezemate pe trei laturi sau pe tot conturul, solicitate de încărcări uniform distribuite sau de încărcări de tip hidrostatic acționînd pe toată suprafața plăcilor, ale căror momente plastice se determină pe baza criteriului redistribuției minime a eforturilor.

În toate cazurile, utilizarea acestor valori aproximative conduce la erori ale momentelor plastice de cel mult —2,5% în raport cu rezultatele obținute prin efectuarea unui calcul exact.

b) Valorile aproximative ale parametrilor mecanismelor de rupere obținute în cadrul acestui studiu prezintă o importanță deosebită din punct de vedere practic, întrucît reduc substanțial timpul necesar de proiectare a unei plăci în domeniul plastic.

Această reducere de timp poate fi simțitor mărită în cazul în care se stabilesc în prealabil expresiile momentelor plastice de referință pentru fiecare tip de plăci și de încărcări, prin înlocuirea parametrilor mecanismelor de rupere cu valorile lor aproximative.

De asemenea, rezultatele date în lucrare sînt de mare utilitate în problema verificării capacității de rezistență a unei plăci existente într-o construcție, ale cărei momente plastice satisfac criteriul redistribuției minime a eforturilor.

c) Influența redusă a variației parametrilor mecanismelor de rupere în jurul valorilor lor exacte asupra valorilor momentelor plastice duce la concluzia că la determinarea valorilor acestor parametri prin rezolvarea ecuației sau sistemului de ecuații date de condiția de maximum a momentului plastic de referință nu este necesară o precizie prea mare.

Astfel, dacă parametrii au valori supraunitare, sînt suficiente trei cifre semnificative, iar dacă aceste valori sînt subunitare sînt suficiente numai două cifre semnificative după virgulă.

d) Studiul a permis să se stabilească concluzia potrivit căreia calculul plastic al plăcilor rezemate pe trei laturi, solicitate simultan de încărcări temporare uniform distribuite și de tip hidrostatic, poate

fi făcut pe baza suprapunerii efectelor fără ca erorile ce afectează valorile momentelor plastice provenite din această operaţie să depăşească — 2,5%.

e) Rezultatele prezentate în cadrul acestui studiu au fost obţinute în ipoteza că pe fiecare direcţie armătura corespunzătoare momentelor pozitive este uniform distribuită pe toată suprafaţa plăcilor.

Este uşor de demonstrat că aceste rezultate îşi păstrează valabilitatea şi în cazurile în care armătura plăcilor este dispusă după unul dintre celelalte sisteme cunoscute de armare.

Primită la redacţie la 26 octombrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. A. INGERSLEV, *The strength of rectangular slabs*, Journal of the Institution of Structural Engineers (Londra), **1**, *1*, 3—14 (1923).
2. K. W. JOHANSEN, *Yield — line Theory*, Cement and Concrete Association, Londra, 1962.
3. G. A. STEINMANN, *Principes généraux et applications pratiques de la théorie des lignes de rupture*, Bulletin d'Information, 27, Comité Européen du Béton, Paris, 1960.
4. * * * *Normativ condiţionat pentru calculul construcţiilor la stări limită*, vol. I, Bucureşti, Edit. tehnică, 1963.
5. V. PETCU, *Calculul plastic al plăcilor armate cruciş*, Standardizarea, **14**, *4*, 174—182 (1962).
6. Д. В. ВАЙНБЕРГ, Е. Д. ВАЙНБЕРГ, *Пластины, диски, балки-стенки*, Госстройиздат, УССР, Киев, 1959 г.
7. * * * STAS 3599—52. *Construcţii civile şi industriale. Planşee de beton armat monolite. Plăci, grinzi. Prescripţii de calcul şi alcătuire.*
8. V. PETCU, *Calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat, rezemate pe trei laturi, solicitate de încărcări de tip hidrostatic*, St. cerc. mec. apl., **20**, *5*, 1099—1116 (1965).
9. — *Calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat, rezemate pe tot conturul, solicitate de încărcări de tip hidrostatic*, st. cerc. mec. apl., **20**, *6*, 1475—1498 (1965).

STUDIUL ANALITIC AL SISTEMELOR DE REGLARE EXTREMALĂ PENTRU AVANSUL SAPEI ÎN CAZUL FORAJULUI CU TURBINA LA ADÎNCIMI MARI

de I. VLAD şi D. N. NESTORESCU
Institutul de petrol, gaze şi geologie

622.24

În această lucrare se face un studiu analitic al sistemelor extremale autoadaptive pentru reglarea apăsării pe sapă în cazul forării cu turbina de fund la adîncimi mari, luîndu-se în considerare alungirea porţiunii garniturii de prăjini supusă la alungire.
În prima parte a lucrării se prezintă problemele studiate pînă în prezent, în care se neglijează această alungire. Această neglijare poate fi admisă numai pînă la adîncimi de forare de maximum 2 000 m. Ea atrage după sine faptul că se poate considera viteza punctului neutru egală cu viteza de suprafaţă a elementului de acţionare. În aceste condiţii se găseşte relaţia de optim realizabilă fizic.
În continuare se consideră şi alungirea porţiunii supuse la alungire. Făcîndu-se studiul analitic, se găseşte că în afară de viteza de avansare anterioară mai avem şi o viteză oscilantă, a cărei expresie este diferită la suprafaţă faţă de punctul neutru. În aceste condiţii se studiază stabilitatea sistemului extremal autoadaptiv şi se găseşte condiţia de stabilitate.

1. INTRODUCERE

Aşa cum ştim, forajul cu turbina reprezintă una dintre metodele avansate de foraje, care permite o mărire considerabilă a vitezei de forare. Cu toate acestea, în ultima vreme se pune problema eficacităţii economice a forajului cu turbina. Specialiştii în acest domeniu sînt aproape unanimi a recunoaşte că eficacitatea economică redusă a săpării cu turbina in condiţiile actuale se datoreşte în special utilizării turbinei în condiţii

ST. CERC. MEC. APL., TOM 22 NR. 3 P. 805–829, BUCUREŞTI 1966

nu întotdeauna optime. Problema cea mai acută este aceea a găsirii unui sistem extremal de reglare a apăsării pe sapă, care s-o menţină la valoarea optimă corespunzătoare vitezei maxime de săpare. Un asemenea sistem nu a putut fi construit pînă în prezent pentru adîncimi mai mari de 1 500—2 000 m, deoarece structura complicată a instalaţiei de foraj nu permite reprezentarea simplistă a schemei sale echivalente şi deci nici scrierea proceselor dinamice în toate fazele mişcării sale, prin relaţii simple, la adîncimi mari de foraj.

2. COMPORTAREA DINAMICĂ A GARNITURII DE FORAJ PREVĂZUTE CU TURBINĂ DE FUND CA ELEMENT AUTOMATIZAT

La garnitura de foraj, în timpul săpării distingem trei zone :

a) zona de întindere. Garnitura de foraj este susţinută de întreg mecanismul de susţinere începînd de la tobă, geamblac, macara, cîrlig, cabluri de legătură şi, sub acţiunea greutăţii proprii, suferă un proces de întindere pe cea mai mare parte a lungimii sale ;

b) zona de compresiune. Datorită rezistenţei rocii, la avansul sapei, pe ultima porţiune a garniturii, aceasta este comprimată şi creează o presiune pe sapă, denumită apăsare pe sapă, pe care o vom nota P. Zona de compresiune reprezintă 10% sau mai puţin din întreaga lungime a garniturii ;

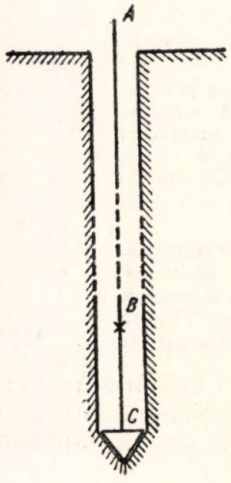


Fig. 1

c) zona neutră. Între aceste zone există zona neutră, unde garnitura nu este nici întinsă, nici comprimată. Pentru că această zonă este foarte mică în raport cu întreaga lungime a garniturii, o vom reduce la un punct, pe care îl vom denumi punct neutru.

În figura 1 sînt reprezentate cele trei zone ; zona AB este zona întinsă, zona BC zona comprimată şi punctul B punctul neutru.

Studiile efectuate pînă în prezent considerau zona AB, ca rigidă, deci nesupusă la întindere. Această aproximaţie este valabilă pentru adîncimi mici de forare (sub 2 000 m), unde lungimea garniturii şi deci greutatea ei este mică şi, ca atare, alungirea la care este supusă garnitura este de asemenea mică.

Dacă notăm cu V viteza de avansare a sapei (de săpare) şi cu W viteza de avansare a garniturii, trebuie remarcat că în cazul considerării porţiunii AB ca rigide şi dacă neglijăm şi celelalte fenomene, cum ar fi frecarea pe pereţii găurii de sondă şi de noroiul de foraj, flambajul la care este supusă garnitura etc., putem să considerăm viteza de avansare a punctului neutru W_B egală cu viteza de avansare a garniturii la suprafaţă W_A.

Studiindu-se numai porţiunea comprimată BC a garniturii de foraj şi aplicîndu-se legea lui Hooke pe această porţiune vom avea

$$\frac{\Delta P}{ES} = \frac{\Delta l}{l}, \tag{1}$$

în care

ΔP este variaţia presiunii care se exercită pe sapă, denumită apăsarea pe sapă,
E — modulul de elasticitate al garniturii,
S — secţiunea transversală a garniturii,
l — lungimea porţiunii BC,
Δl — variaţia acestei lungimi.

Considerînd că variaţia lungimii garniturii se produce datorită diferenţei dintre viteza punctului neutru şi viteza de săpare $W_B - V$ $(W_B \geqslant V)$, relaţia (1) devine

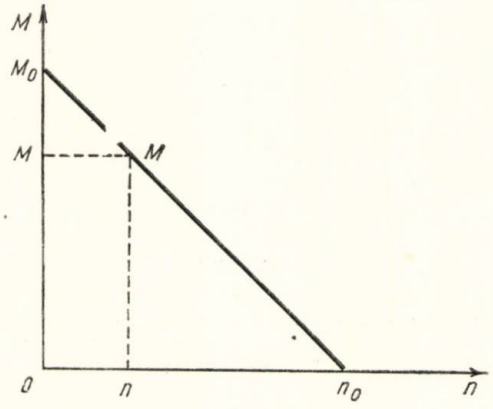


Fig. 2

$$\frac{l}{ES} \Delta P = (W_B - V)\,\Delta t. \tag{2}$$

Pentru a stabili relaţia dintre viteza de săpare şi apăsarea pe sapă, ţinem seama de următoarele : viteza de săpare e proporţională cu puterea turbinii şi momentul turbinei este aproximativ proporţional cu apăsarea pe sapă, adică

$$V = \lambda_1 N, \tag{3}$$

$$M = \lambda_2 P. \tag{4}$$

Caracteristica externă a turbinei (momentul motor în funcţie de turaţie), arată ca în figura 2.

În figura 2, n_0 este turaţia de mers în gol şi M_0 momentul la care turbina se opreşte.

Din asemănarea triunghiului $M_0 O n_0$ şi $M n n_0$ avem

$$\frac{M_0}{M} = \frac{n_0}{n_0 - n}$$

sau

$$r = \frac{n_0\left(\frac{M_0}{M} - 1\right)}{\frac{M_0}{M}} = \frac{n_0}{M_0}(M_0 - M). \tag{5}$$

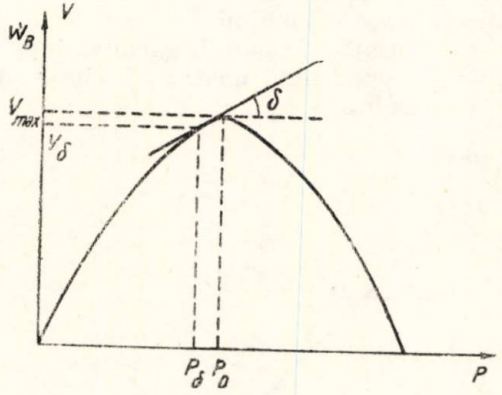


Fig. 3

Ţinînd cont de relaţia (4)

$$n = \frac{n_0 (P_s - P)}{P_s}, \tag{6}$$

unde P_s este apăsarea pe sapă corespunzătoare momentului de oprire, puterea dezvoltată de turbină va fi

$$N = KMn = KM \frac{n_0}{M_0}(P_s - P) = K\lambda_2 \frac{n_0}{P_s} P (P_s - P) \tag{7}$$

iar viteza de săpare conform relaţiei (3)

$$V = K\lambda_1\lambda_2 \frac{n_0}{M_0} P (P_s - P) = \lambda P (P_s - P), \tag{8}$$

unde $\lambda = \frac{K\lambda_1\lambda_2 n_0}{P_s}$ este o constantă, deoarece $K\lambda_1\lambda_2$ sînt coeficienţii de proporţionalitate şi n_0 şi P_s sînt constante.

Elementul care reprezintă legătura dintre V şi P este deci un element fără inerţie, dar neliniar. Caracteristica lui statică este reprezentată de figura 3, adică este o parabolă. Apăsarea pe sapă corespun-

zătoare vitezei maxime de săpare este dată de condiția $\frac{dV}{dP} = 0$ (9). Din condiția (9) rezultă că viteza maximă de săpare are loc la apăsarea pe sapă $P = \frac{P_s}{2} = P_0$, iar valoarea ei va fi $V_{max} = \lambda \frac{P_s^2}{4} = \lambda P_0^2$.

Înlocuind relația (8) în relația (2), avem

$$\frac{l}{ES} \Delta P = [W_B - \lambda P (2 P_0 - P)] \Delta t$$

sau

$$\frac{l}{ES} \frac{dP}{dt} = W_B - \lambda P (2 P_0 - P), \tag{10}$$

care reprezintă ecuația diferențială a elementului care leagă apăsarea pe sapă de viteza de avansare a punctului neutru. După cum se observă, acest element este și el tot un element neliniar, dar cu inerție. Caracteristica statică a acestui element este dată de relația

$$W_B = \lambda P (2 P_0 - P), \tag{11}$$

care se vede că este de aceeași formă ca și relația (8). De aceea în figura 3 am așezat pe abscisă, alături de viteza de săpare (V), și viteza de avansare a punctului neutru (W_B).

De aici se observă că obiectul de automatizare este compus din două elemente, ambele neliniare, cum arată figura 4 : unul care leagă apăsarea pe sapă de viteza de avansare a punctului neutru, care are inerție, și celălalt care leagă viteza de săpare de apăsarea pe sapă și care nu are inerție.

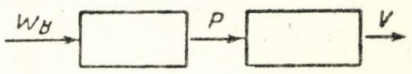


Fig. 4

Ca mărime reglată ar fi natural să fie considerată viteza de săpare V. Cum însă aceasta este un parametru de fund greu de măsurat (pînă în prezent toate dispozitivele preconizate pentru măsurarea vitezei de săpare au dat rezultate aproximative și numai la adîncimi de foraj mici), se poate lua ca mărime reglată apăsarea pe sapă, rămînînd ca viteza de forare să reprezinte mărimea reglată indirect. Acest lucru nu produce nici un inconvenient, deoarece am văzut că elementul care reprezintă legătura dintre viteza de forare și apăsarea pe sapă este un element fără inerție. Deci o dată ce s-a stabilizat o anumită apăsare pe sapă, de exemplu cea optimă, se stabilizează și viteza de săpare corespunzătoare. Apăsarea pe sapă este relativ ușor de măsurat cu drilometre electrice speciale, care au fost bine puse la punct.

Sistemul de reglare al apăsării pe sapă va fi de forma celui a cărui schemă-bloc este reprezentată în figura 5.

În figura 5, DA este dispozitivul de automatizare, EM elementul de măsură, care am văzut că poate fi un drilometru de construcţie specială, x_i mărimea de referinţă şi x_r mărimea de reacţie.

Dacă privim caracteristica statică a obiectului automatizat arătată în figura 3, se poate observa că, dacă viteza de avansare a punctului

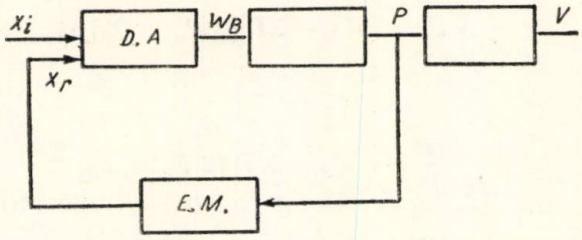


Fig. 5

neutru W_B este mai mare decît viteza maximă de săpare V_{max}, atunci sapa se opreşte. Sîntem în cazul unei zone static instabile.

Dacă viteza de avansare a punctului neutru este astfel încît apăsarea pe sapă să fie între O şi P_0, atunci la creşterea vitezei W_B creşte apăsarea pe sapă, deci şi viteza de săpare V. Sîntem în zona static stabilă.

Dacă viteza de avansare a punctului neutru este astfel încît apăsarea pe sapă să se afle între P_0 şi P_s, la creşterea apăsării pe sapă scade viteza de săpare, iar dacă apăsarea pe sapă ajunge P_s, viteza de săpare devine nulă. Sîntem pe zona semistabilă.

Sistemul de reglare al apăsării pe sapă trebuie să menţină apăsarea pe sapă P_0, adică acea apăsare pe sapă la care viteza de săpare este maximă, deci la care este îndeplinită condiţia

$$\frac{dV}{dP} = 0. \tag{12}$$

Ca să fim siguri că nu vom ieşi din zona stabilă indiferent de perturbaţiile care apar pe parcurs, punem condiţia ca sistemul de reglare să menţină apăsarea pe sapă P_δ apropiată de P_0, adică acea apăsare pe sapă care menţine condiţia

$$\frac{dV}{dP} = \delta \tag{13}$$

($\delta > 0$, dar suficient de mic). Viteza de săpare corespunzătoare acestei apăsări pe sapă va fi V_δ, care este ceva mai mică decît V_{max}, dar apropiată de aceasta. Sistemul va trebui deci să fie un sistem extremal.

Din cauza variației durității rocii în timpul săpării, punctele de optim se modifică, datorită modificării caracteristicii statice, care arată ca în figura 6.

Sistemul trebuie să-și schimbe mărimea de referință în timpul procesului de forare care să corespundă apăsărilor pe sapă optime P_{01}, P_{02}, P_{03} (sau, eventual, $P_{\delta 1}$, $P_{\delta 2}$, $P_{\delta 3}$) și să asigure vitezele maxime corespunzătoare $V_{\max 1}$, $V_{\max 2}$, $V_{\max 3}$ (sau $V_{\delta 1}$, $V_{\delta 2}$, $V_{\delta 3}$). Sistemul este deci un sistem extremal autoadaptiv.

Pentru a putea să mențină în tot timpul forării viteza maximă (sau una apropiată de aceasta), trebuie să fie îndeplinită relația (13). Pentru aceasta trebuie însă să existe posibilitatea măsurării în fiecare moment atît a săpării pe sapă, cît și a vitezei de forare. Viteza de forare am văzut însă că practic este foarte greu de măsurat, chiar cu precizie mică. De aceea s-a căutat să se înlocuiască condiția (3) cu o altă condiție în care să intervină parametrii mai ușor de măsurat.

Pentru aceasta s-a ținut seama că apăsarea pe sapă trebuie să crească pentru aceeași sapă (chiar dacă apăsarea pe sapă inițială este cea optimă), datorită uzurii sapei. S-a presupus că această apăsare pe sapă este liniară cu timpul. Deci

$$P = P_0 + \beta t \quad (P = P_\delta + \beta t), \tag{14}$$

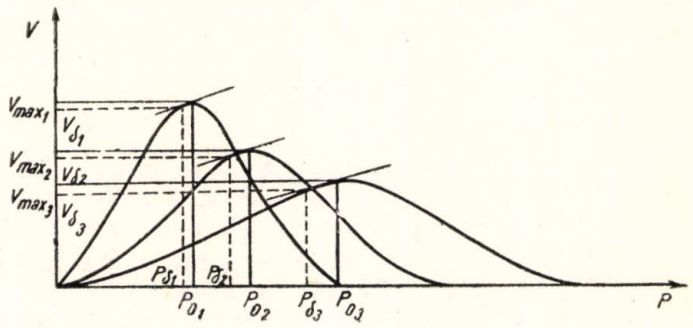


Fig. 6

unde β este un coeficient presupus constant care se determină prin măsurători statistice, iar P_0 (P_δ) apăsările pe sapă optime prescrise pentru fiecare rocă.

Deci

$$\frac{dP}{dt} = \beta \tag{15}$$

sau

$$dP = \beta dt. \tag{16}$$

Pe de altă parte, relația (2) se poate scrie și

$$\frac{l}{ES}\frac{dP}{dt} = W_B - V. \tag{17}$$

Dacă înlocuim relaţia (15) în relaţia (17), avem

$$\frac{l}{ES}\beta = W_B - V. \tag{18}$$

Diferenţiind relaţia (18), deducem

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}W_B, \tag{19}$$

căci l, E, S şi β sînt constante.

Din relaţiile (14) şi (16) înlocuite în relaţia (13) rezultă condiţia echivalentă

$$\frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}W_B}{\mathrm{d}t} = \delta \tag{20}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}W_B}{\mathrm{d}t} = \beta\delta. \tag{21}$$

Dacă presupunem porţiunea AB a garniturii rigidă, atunci $W_B = W_A$ şi relaţia (21) devine

$$\frac{\mathrm{d}W_A}{\mathrm{d}t} = \beta\delta, \tag{22}$$

unde W_A este un parametru de suprafaţă ce se poate măsura uşor şi poate fi şi derivat în raport cu timpul, iar δ, β constante cunoscute, astfel că relaţia de optim (22) poate fi practic uşor menţinută.

În realitate, pentru adîncimi mari, porţiunea AB a garniturii este elastică şi, ca atare, $W_B \neq W_A$. În cele ce urmează, ţinînd seama de elasticitatea porţiunii AB a garniturii şi de frecările garniturii cu pereţii găurii de sondă şi cu noroiul de foraj, vom deduce viteza punctului neutru W_B în funcţie de viteza de la suprafaţă W_A.

3. COMPORTAREA DINAMICĂ A GARNITURII DE FORAJ PREVĂZUTĂ CU TURBINĂ DE FUND, ŢINÎND SEAMA DE ELASTICITATEA PORŢIUNII SUPUSE LA ÎNTINDERE ŞI DE FRECĂRILE GARNITURII CU NOROIUL DE FORAJ ŞI CU PEREŢII GĂURII DE SONDĂ

În studiul părţii de ridicare-coborîre a instalaţiilor de foraj ce se află în mişcare în timpul avansării sapei, s-au admis următoarele premise simplificatorii :

a) partea de ridicare-coborîre, într-un suficient grad de exactitate se poate considera în forma unui model mecanic compus din două mase discrete, unite prin legătura elastică a înfăşurării cablului ;

b) se consideră că legătura elastică a înfăşurării cablului nu are greutate;

c) garnitura de prăjini se consideră ca o bară elastică omogenă cu secţiune constantă;

d) elasticitatea axelor, transmisiilor şi a turlei este mult mai mică decît a cablului şi a garniturii de prăjini;

e) se presupune că garnitura de prăjini şi cablul de foraj în timpul desfăşurării se supun legii lui Hooke;

f) coeficientul de rigiditate a elementelor elastice nu variază cu deformarea lor.

SCHEMA ECHIVALENTĂ DE CALCUL

Problema propusă, aşa cum s-a arătat anterior, se rezolvă considerînd partea de ridicare-coborîre a instalaţiei de foraj ca pe un sistem elastic cu o infinitate de grade de libertate.

Schema echivalentă a părţii de avans este reprezentată în figura 7, unde

$P(t)$ este forţa excitatoare (creşterea finită a forţei motorului care acţionează asupra părţii de avans a sapei),

m_1 — masa părţii în mişcare de rotaţie a motorului şi a părţii de avans a sapei (fără sarcina moartă, reduse la raza de înfăşurare a cablului pe tobă,

$S_1(t)$ — deplasarea masei m_1,

c — rigiditatea înfăşurării cablului,

m_2 — masa sarcinii moarte (macara, geamblac, cîrlig),

$S_2(t, x)_{x=L}$ — deplasarea părţii superioare a garniturii de prăjini şi a masei m_2,

m_3 — masa garniturii de prăjini,

K — rigiditatea garniturii de prăjini supusă la întindere (porţiunea $A - B$).

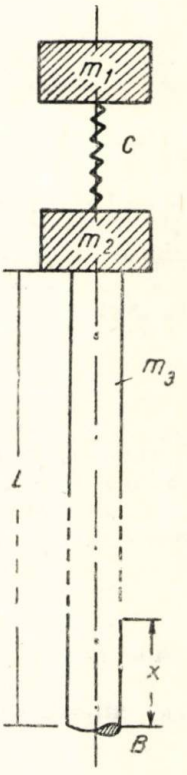


Fig. 7

Pe baza schemei echivalente alese se determină mişcarea elementelor componente ale părţii de avans a sapei şi forţele dinamice dezvoltate în garnitura de prăjini şi în înfăşurarea cablului în perioada avansării sapei.

În cele ce urmează trebuie să ţinem seama şi de frecarea garniturii de prăjini în masa noroiului de foraj şi frecarea de pereţii găurii de sondă.

Viteza de deplasare a garniturii poate fi considerată că este compusă din două componente: o componentă care este datorată variaţiei turaţiei motorului de antrenare a tobei şi care ar corespunde vitezei de avansare a garniturii în cazul că garnitura ar fi rigidă, şi cablul elastic, pe care o notăm cu U_1, şi o componentă care ar

corespunde vitezei de deplasare a garniturii, ţinînd seama de elasticitatea ei, notată cu U_2. Deci viteza de deplasare a garniturii este

$$S_2 = U_1 + U_2. \tag{23}$$

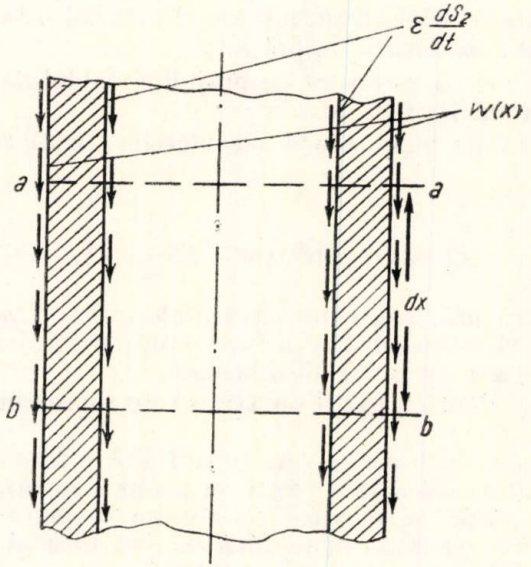


Fig. 8

Pentru obţinerea ecuaţiei diferenţiale a porţiunii elementare din garnitura de prăjini punem în evidenţă forţele care acţionează în porţiunile $a-a'$ şi $b-b'$ (fig. 8), şi anume:

— forţa de inerţie care acţionează asupra porţiunii elementare de lungimea $\mathrm{d}x$:

$$\frac{S\gamma_0}{g} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \mathrm{d}x, \tag{24}$$

unde γ_0 este greutatea specifică a oţelului din care este confecţionată garnitura, g acceleraţia gravitaţională şi S are aceeaşi semnificaţie ca în formula 1;

— forţa longitudinală a deformaţiilor elastice asupra volumului elementar:

$$ES \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \mathrm{d}x, \tag{25}$$

unde E şi S au aceeaşi semnificaţie ca în formula (1);

— forţa de frecare a garniturii de prăjini de pereţii găurii de sondă pe unitatea de lungime:

$$W(x), \tag{26}$$

care în general depinde de coordonata x;

— forţa de frecare ce se dezvoltă în timpul mişcării asupra volumului elementar al garniturii în fluidul de foraj şi care se poate aproxima că este proporţională cu viteza :

$$\varepsilon \frac{\partial U_2}{\partial t} \, dx \tag{27}$$

unde ε este coeficientul echivalent de frecare ce se determină pe baza datelor experimentale :

— forţa exterioară care acţionează pe unitatea de lungime a garniturii de prăjini :

$$\varphi(t) \, dx, \tag{28}$$

unde

$$\varphi(t) = \frac{P(t)}{m_1 + m_2 + m_3}, \tag{29}$$

$P(t)$ fiind forţa excitatoare pe care o exercită motorul asupra complexului garniturii de prăjini-instalaţii de antrenare.

Aplicînd principiul lui D'Alembert, putem scrie ecuaţia diferenţială a volumului elementar cuprins între secţiunile $a-a'$ şi $b-b$ în cazul oscilaţiilor longitudinale :

$$\frac{\gamma_0 S}{g} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} dx + \varepsilon \frac{\partial U_2}{\partial t} dx - ES \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} dx + \\ + W(x) \, dx = \frac{\varphi(t)}{\rho S L} \frac{\gamma_0 E}{g} dx, \tag{30}$$

unde g este masa specifică a materialului şi L lungimea porţiunii din garnitura de prăjini supusă la întindere.

Dacă vom considera viteza garniturii presupusă rigidă, atunci, forţele ce apar pe porţiunea $a-a'$ şi $b-b'$ vor fi :

— forţa de inerţie :

$$\frac{\gamma_0 S}{g} \frac{d^2 U_1}{dt^2} dx; \tag{31}$$

— forţa de frecare :

$$\varepsilon \frac{dU_1}{dt} dx.$$

Deci ecuaţia diferenţială (30) devine

$$\frac{\gamma_0 S}{g} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial U_2}{\partial t} - ES \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + W(x) = \\ = \frac{\varphi(t)}{\rho S L} \frac{\gamma_0 S}{g} - \frac{\gamma_0 S}{\rho} \frac{d^2 U_1}{dt^2} - \varepsilon \frac{dU_1}{dt}. \tag{32}$$

Notînd

$$2\nu = \frac{\varepsilon g}{\gamma_0 S}; \quad \psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\rho S L}; \quad a^2 = \frac{Eg}{\gamma_0}$$

şi împărţind cu $\frac{\gamma_0 S}{g}$, găsim ecuaţia

$$\frac{\partial^2 U_2}{dt^2} + 2\nu \frac{\partial U_2}{dt} - a^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = \psi(t) - \frac{W(x)\, S}{\gamma_0 S} - \left(\frac{d^2 U_1}{dt^2} + 2\nu \frac{dU_1}{dt}\right). \tag{33}$$

Deoarece $S_2 = U_1 + U_2$, avem

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \frac{d^2 U_1}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial t^2}(U_1 + U_2) = \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{dU_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(U_1 + U_2) = \frac{\partial S_2}{dt}.$$

Deci ecuaţia diferenţială de mişcare a garniturii de prăjini, considerînd oscilaţiile longitudinale, va avea forma

$$\frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} + 2\nu \frac{\partial S_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} = \psi(t) \frac{W(x)}{S\gamma_0} \rho. \tag{34}$$

Pentru rezolvarea ecuaţiei (34) avem următoarele condiţii iniţiale şi de contur :

— condiţii iniţiale :

$$\text{la } t = 0 \quad S_2 = W_0 \quad \frac{\partial S_2}{\partial t} = W_0' \tag{35}$$

originea de $t = 0$ este aceea în care se modifică valoarea sau caracterul forţei excitatoare ;

— condiţiile de contur :

$$\text{la } x = 0 \quad \frac{\partial S_2}{\partial x} = 0; \tag{36}$$

la $x = L$ S_2 e dat de ecuaţia

$$m_2 \left(\frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2}\right)_{x=L} + ES \left(\frac{\partial S_2}{\partial x}\right)_{x=L} = C\,[S_1 - (S_2)_{x=L}],$$

unde $S_c = W_{Am}$ este viteza de avansare dată de turaţia tobei, deci de turaţia motorului care antrenează toba.

Soluția ecuației (34) este compusă din două componente:

$$S_2 = S_{20} + S_{2f}, \tag{37}$$

unde S_{20} este soluția ecuației omogene și S_{2f} soluția forțată dată de termenul drept.

Pentru a găsi soluția lui S_{20}, procedăm la separarea variabilelor

$$S_{20} = T(t)\, X(x). \tag{38}$$

Introducînd relația (38) în ecuația omogenă (34), găsim relația

$$\ddot{T}X + 2\nu\dot{T}X - a^2 TX'' = 0,$$

de unde

$$\frac{\ddot{T} + 2\nu\dot{T}}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

sau

$$\ddot{T} + 2\nu\dot{T} + \lambda^2 a^2 T = 0 \tag{39}$$

și

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \tag{40}$$

Soluția ecuației (39) o punem sub forma $T = e^{-\nu t} U(t)$, astfel că ea se transformă în soluția ecuației

$$\ddot{U} + (a^2\lambda^2 - \nu^2)\, U = 0$$

de unde

$$U = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t,$$

în care

$$\omega = \sqrt{a^2\lambda^2 - \nu^2},$$

iar

$$T = e^{-\nu t}(A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t) \tag{41}$$

$$X(x) = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x. \tag{42}$$

Punînd prima condiție de contur (36) la $x = 0$, $\frac{\partial S_2}{\partial x} = 0$, avem $D = 0$.

Deci

$$S_{20} = e^{-\nu t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \cos \lambda x. \tag{43}$$

Pentru a satisface și a doua condiție de contur la $x = L$, facem următoarele transformări.

Aplicînd principiul lui D'Alembert, se determină condițiile de echilibru și pentru masa (1):

$$m_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} + C[S_1 - (S_2)_{x=L}] = P(t). \tag{44}$$

BIBLIOTECA INSTITUTULUI POLITEHNIC TIMIȘOARA

Eliminăm pe S_1 între relația (44) și a doua condiție de contur (36) și avem

$$m_2\left(\frac{\partial^2 S_2}{\mathrm{d}t^2}\right)_{x=L} + ES\left(\frac{\partial S_2}{\partial x}\right)_{x=L} = -\,m_1\frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} + P(t). \tag{45}$$

Diferențiind condiția a doua de contur (36) de două ori în raport cu t, obținem

$$m_2\left(\frac{\partial^4 S_2}{\partial t^4}\right)_{x=L} + ES\left(\frac{\partial^3 S_2}{\partial x\,\partial t^2}\right)_{x=L} = C\left[\frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial S_2}{\partial t^2}\right)_{x=L}\right], \tag{46}$$

de unde obținem

$$\frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} = \frac{m_2}{C}\left(\frac{\partial^4 S_2}{\partial t^4}\right)_{x=L} + \frac{ES}{C}\left(\frac{\partial^3 S_2}{\partial x\,\partial t^2}\right)_{x=L} + \left(\frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2}\right)_{x=L}. \tag{47}$$

Înlocuind (47) în (45), avem condiția de contur pentru $x = L$

$$-\frac{\partial S_2}{\partial x} = \frac{m_1 m_2}{CES}\frac{\partial^4 S_2}{\partial t^4} + \frac{m_1}{C}\frac{\partial^3 S_2}{\partial x\,\partial t^2} + \frac{m_1 + m_2}{ES}\frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2}. \tag{48}$$

Dacă vom introduce în relația (48) valoarea lui $S_{20}^{\prime}$ din (43), avem

$$\left[\frac{m_1 m_2}{C}\omega^4 \cos\lambda L + \frac{m_1 ES}{C}\omega^2\lambda \sin\lambda L - \right.$$
$$\left. - (m_1 + m_2)\,\omega^2 \cos\lambda L - ES\lambda \sin\lambda L\right](A\cos\omega t + B\cos\omega t) = 0. \tag{49}$$

Pentru ca egalitatea (49) să fie satisfăcută pentru orice valoare a lui t, trebuie ca

$$\frac{m_1 m_2}{C}\omega^4 \cos\lambda L + \frac{m_1 ES}{C}\omega^2\lambda \sin\lambda L -$$
$$- (m_1 + m_2)\,\omega^2 \cos\lambda L - ES\lambda \sin\lambda L = 0. \tag{50}$$

Notînd

$$C_0 = \frac{ES}{L},$$

găsim ecuația transcendentă

$$\operatorname{tg}\lambda L = \frac{\dfrac{C(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}\omega^2 - \omega^4}{m_1 C_0 \omega^2 \lambda L - C_0 C \lambda L}. \tag{51}$$

Ținînd cont că $\omega^2 = \dfrac{a^2}{L^2}\lambda^2 L^2 - \nu^2$, cum ν o presupunem constantă, această ecuație este în funcție de λL.

Dacă punem $\delta = \lambda L$, relaţia (52) devine

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\dfrac{C(m_1 - m_2)}{m_1 m_2}\left(\dfrac{a^2}{L^2}\delta^2 - \nu^2\right) - \left(\dfrac{a^2}{L^2}\delta^2 - \nu^2\right)^2}{m_1 C_0\left(\dfrac{a^2}{L^2}\delta^2 - \nu^2\right) - C_0 C\delta}, \tag{52}$$

care se poate rezolva grafic obţinînd diferiţi $\delta(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_i)$, astfel că

$$S_{20} = e^{-\nu t}\sum_{i=1}^{\alpha}(A_i \cos\omega_i t + B_i \sin\omega_i t)\frac{\cos\delta_i}{L}x. \tag{53}$$

Deplasarea S_{2f} pentru oscilaţii forţate este de forma

$$S_{2f} = \sum_{i=1}^{\alpha} X_i(x)\, g_i(t). \tag{54}$$

Pentru determinarea expresiei $q_i(t)$ ne folosim de ecuaţia lui Lagrange în coordonate generalizate

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial R}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i, \tag{55}$$

unde

U este funcţia de dispersie care determină scăderea energiei mecanice a sistemului,
T — energia cinetică a sistemului,
R — energia potenţială a sistemului,
Q_i — forţa generalizată corespunzătoare coordonatei generalizate q_i.

Expresia lui U în timpul mişcării garniturii de prăjini în sondă se determină cu expresia

$$U = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\dot{q}_i^2\int_0^L x_i^2\,\mathrm{d}x. \tag{56}$$

Energia cinetică a sistemului este egală cu suma energiilor cinetice, a masei garniturii de prăjini, a masei m_1 şi a masei m_2:

$$T = \frac{S\gamma_0}{2g}\int_0^L\left(\frac{\partial S_{2f}}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x + \frac{m_1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{\partial S_{2f}}{\partial t}\right)^2_{x=L}. \tag{57}$$

Introducînd valoarea S_{2f} din (54), obţinem

$$T = \frac{S\gamma_0}{2g}\sum_{i=1}^{\infty}\dot{q}_i\int_0^L x_i^2\,\mathrm{d}x + \frac{m_1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\sum_{i=1}^{\alpha}x_i^2(L)\,\dot{q}_i^2. \tag{58}$$

Energia potenţială a sistemului este compusă din energia deformaţiei garniturii de prăjini şi a deformaţiei înfăşurării cablului

$$R = \frac{ES}{2}\int_0^L\left(\frac{\partial S_{2f}}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}C\,[S_1 - (S_2)_{x=L}]. \tag{59}$$

Introducînd expresia lui S_{2f} din (54), obținem

$$R = \frac{ES}{2} \sum_{i=1}^{\infty} q_i^2 \int_0^L x_i^2 \, dx + \frac{1}{2} C \left[S_1 - \sum_{i=1}^{\alpha} x_i (L) \, q_i \right]^2. \tag{60}$$

Se înlocuiește S_1, din condiția de frontieră (36) și S_2 din relația (54) pentru $x = L$ în relația (60) obținînd o nouă expresie pentru R. Expresia lui S_1 extrasă din condiția de frontieră (36) se derivează în raport cu timpul și se înlocuiește în relația (58), obținînd o nouă relație pentru T. Aceste noi relații obținute, precum și relația (56) pentru U se înlocuiește în ecuația diferențială (55) și va rezulta următoarea expresie :

$$\ddot{q}_i + 2\nu \dot{q}_i + a^2 \frac{\int_0^L x_i^2 \, dx - x_i' (L) \, x_i (L)}{\int_0^L x_i^2 dx} q_i. \tag{61}$$

Însă

$$\int_0^L x_i^2 \, dx = x_i (L) \, x_i' (L) - x_i (0) \, x_i' (0) - \int_0^L x_i \, x_i'' \, dx. \tag{62}$$

Dar, conform condiției întîi de contur (36) $x_1' (0) = 0$ și condiției (40) $x'' = -\lambda^2 x$, relația (62) devine

$$\int_0^L x_i^2 \, dx - x_i (L) \, x_i' (L) + \lambda \int_0^L x_i^2 \, dx, \tag{63}$$

deci

$$\int_0^L x_i^2 \, dx - x_i' (L) \, x_i (L) = \lambda^2 \int_0^L x_i^2 \, dx. \tag{64}$$

Deci relația (61) devine

$$\ddot{q}_i + 2\nu \dot{q}_i + a^2 \frac{\delta_i^2}{L^2} q_i = \frac{Q_i}{\frac{S\gamma_0}{g} \int_0^L x_i^2 \, dx}, \tag{65}$$

în care s-a ținut seama că $\lambda = \frac{\delta_i}{L}$.

În continuare trebuie ținut cont că expresia forței generalizate Q_i, corespunzătoare coordonatei generalizate q_i, se obține din expresia lucrului mecanic virtual al forței exterioare (care acționează asupra unității de lungime a garniturii de prăjini) $\varphi (t)$ pentru o deplasare virtuală ΔS_{2f}, funcție de coordonata generalizată Δq_i, adică

$$Q_i = \int_0^L \varphi (t) \, x_i \, dx.$$

Dar

$$\varphi(t) = \psi(t)\,\frac{E\gamma_0}{g} = \frac{P(t)}{m_1 + m_2 + m_3}\,\frac{S\gamma_0}{g}, \tag{66}$$

deci

$$\frac{Q_i}{\frac{S\gamma_0}{g}\int_0^L x_i^2\,\mathrm{d}x} = \frac{P(t)}{m_1 + m_2 + m_3}\,\frac{\int_0^L x_i\,\mathrm{d}x}{\int_0^L x_i^2\,\mathrm{d}x}, \tag{67}$$

Cum, conform soluției (42), $x_i = \cos\frac{\delta_i}{L}\,x$, urmează că

$$\frac{Q_i}{\frac{S\gamma_0}{g}\int_0^L x_i^2\,\mathrm{d}x} = \frac{P(t)}{m_1 + m_2 + m_3}\,\frac{2\sin\delta_i}{\delta_i + 2\sin 2\delta_i}. \tag{68}$$

Putem într-o primă aproximație să considerăm forța de frecare a garniturii de pereții găurii de sondă constantă $W(x) = W$, deoarece, dacă roca e dură, viteza de săpare e mică, iar dacă roca e moale, viteza de săpare e mare.

Deci

$$Q_i = \int_0^L \varphi(t)\,x_i\,\mathrm{d}x - \int_0^L \frac{W}{\frac{S\gamma_0}{g}}\,\frac{S\gamma_0}{g}\,x_i\,\mathrm{d}x_i, \tag{69}$$

adică

$$\frac{Q_i}{\frac{S\gamma_0}{g}\int_0^L x_i^2\,\mathrm{d}x} = \frac{2P(t)\sin\delta_i}{(m_1 + m_2 + m_3)(\delta_i + 2\sin 2\delta_i)} - \frac{W}{\frac{S\gamma_0}{g}}\,\frac{2\sin\delta_i}{(\delta_i + 2\sin 2\delta_i)} = z(t). \tag{70}$$

$$\text{Notînd } \mu_i = \frac{a^2\delta_i}{L^2}, \tag{71}$$

avem forma finală a ecuației diferențiale (55)

$$\ddot{q}_i + 2\nu\dot{q}_i + \mu_i q_i = z(t). \tag{72}$$

Soluția acestei ecuații este

$$q_i(t) = \frac{\mathrm{e}^{-\nu t}}{\omega_i}\int_0^t \mathrm{e}^{\nu t}\,z(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{73}$$

deci viteza masei sarcinii moarte S_{2f} este

$$S_{2f} = e^{-\nu t} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{\cos \delta_i}{\omega_i} \int_0^t e^{\nu\tau} z(\tau) \sin \omega_i (t - \tau)\, d\tau. \tag{74}$$

Ţinînd cont şi de soluţia liberă, vom avea

$$S_2 = e^{-\nu t} \sum_{i=1}^{\alpha} (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \cos^2 \delta_i \frac{1}{\omega_i} \int_0^t e^{\nu\tau} z(\tau) \sin \omega_i (t - \tau)\, d\tau, \tag{75}$$

în care constantele A_i şi B_i se găsesc punînd condiţiile iniţiale (35).

Viteza de avansare a punctului (A, W_A) este compusă din viteza de avansare dată de motor W_{Am} plus viteza masei sarcinii moarte

$$W_A = W_{Am} + S_2. \tag{76}$$

Viteza de avansare la un punct de ordonată x va fi

$$S_{2x} = W_{Am} +$$

$$+ e^{-\nu t} \sum_{i=1}^{\alpha} (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \cos^2 \frac{\delta_i x}{L} \frac{1}{\omega_i} \int_0^t e^{\nu\tau} z(\tau) \sin \omega_i (t - \tau)\, d\tau \tag{77}$$

deci viteza punctului B va fi

$$W_B = W_{Am} + e^{-\nu t} \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \frac{1}{\omega_i} \int_0^t e^{\nu\tau} z(\tau) \sin \omega_i (t - \tau)\, d\tau. \tag{78}$$

Din relaţia (70) se observă că $z(t)$ depinde de $P(t)$ şi δ_i.

$P(t)$ este forţa excitatoare şi ea variază, pe de o parte, o dată cu variaţia lungimii porţiunii AB din garnitură, deci ea creşte în trepte cu fiecare pas ce se adaugă garnitură, iar pe de altă parte $P(t)$ depinde de duritatea rocii. În momentul creşterii durităţii rocii creşte apăsarea pe sapă brusc şi deci forţa de excitaţie scade brusc. Dacă sistemul de reglare extremal modifică viteza de avansare a garniturii dată de motor, pentru a produce apăsarea pe sapă la valoarea prescrisă care se face destul de rapid deoarece dispozitivele de comandă şi de execuţie nu au inerţie, atunci forţa de excitaţie revine iarăşi brusc la valoarea anterioară. În sens invers se petrec lucrurile dacă duritatea rocii scade.

δ_i se modifică o dată cu modificarea lungimii garniturii, deci modificarea lui se face tot în salturi pe măsură ce se adaugă cîte un nou pas, aşa că:

$$z(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j h(t - T_j),$$

unde $h(t)$ este funcţia treaptă unitară, A_j o constantă pozitivă sau negativă n numărul de modificări al lui $P(t)$ şi δ_i, iar T_j intervalul de timp la care se produc modificările lui $z(t)$, care e funcţie de variabila aleatoare a cărei distribuţie trebuie măsurată experimental.

Deci

$$W_A = W_{Am} + e^{-\nu t} \sum_{j=1}^{n} A_j h(t - T_j) \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \frac{\cos^2 \delta_i}{\omega_i} \frac{\sin \omega_i t}{1 + \frac{\nu}{\omega_i}}, \tag{79}$$

$$W_B = W_{Am} + e^{-\nu t} \sum_{j=1}^{n} A_j h(t - T_j) \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \frac{1}{\omega_i} \frac{\sin \omega_i t}{1 + \frac{\nu}{\omega_i}}. \tag{80}$$

Din formulele (79) şi (80) se observă că

$$S_{2B_i} = \frac{S_{2i}}{\cos \delta_i}, \tag{81}$$

unde S_{2i} este deplasarea oscilantă a garniturii în punctul A, iar S_{2Bi} deplasarea oscilantă a garniturii în punctul B, unde am notat cu S_{2i} şi S_{2Bi} componenta vitezei pentru o valoare i a lui δ_i.

De asemenea se observă că dacă adîncimea de forare este mică, atunci lungimea L a porţiunii AB din garnitură e mică, deci forţa excitatoare e mică şi, ca atare, amplitudinile A_j de variaţie a ei sînt mici şi termenii ai doilea din relaţiile (79) şi (80) se neglijează faţă de primii, deci $W_A = W_B = W_{Am}$.

Pe de altă parte, dacă adîncimea de forare e mare, coeficientul de frecare e mare, deoarece se măreşte suprafaţa de frecare, ca atare oscilaţiile lui W_A şi W_B date de termenul al doilea din relaţiile (79) şi (80) se amortizează repede. Astfel că, la adîncimi mici, oscilaţiile vitezei de avansare au amplitudine mică, dar se amortizează încet, pe cînd la adîncimi mari de frecare aceste oscilaţii au amplitudine mare, dar se amortizează repede.

În anumite cazuri, de exemplu atunci cînd se pune problema automatizării avansării sapei cînd avem motor electric de fund, este necesar să ridicăm garnitura dacă sapa se gripează. Acest lucru putem să-l efectuăm cu un sistem planetar.

În momentul ridicării garniturii apar unele forţe dinamice în garnitura de prăjini şi în cablu.

Expresia lor este :

— în garnitura de prăjini :

$$P_{gv} = ES\frac{\partial S_2}{\partial x} = e^{-\nu t}\sum_{j=1}^{n} A_j\, h\,(t - T_j)\sum_{i=1}^{\infty}(A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t)\frac{\sin 2\delta_i\, x}{\omega_i}\frac{\sin \omega_i t}{1+\frac{\nu}{\omega_i}}; \tag{82}$$

— în cablu :

$$P_c = C\,[S_1 - (S_2)_L]. \tag{83}$$

Ţinînd cont de condiţia a doua de contur (36), avem

$$P_c = C\,[S_1 - (S_2)_{x=L}]. \tag{84}$$

Efectuînd calculele, găsim

$$\begin{aligned} P_c = \sum_{j=1}^{\infty} A_j\, h\,(t-T)\, e^{-\nu t}\Bigg\{ & \nu^2 m_2 \sum_{i=1}^{\infty}(A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t)\frac{\cos^2 \delta_i}{\omega_i}\frac{\sin \omega_i t}{1+\frac{\nu}{\omega_i}} - \\ & - 2\nu\omega_i m_2 \sum_{i=1}^{\infty}(-A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t)\frac{\cos^2 \delta_i}{\omega_i}\frac{\sin \omega_i t}{1+\frac{\nu}{\omega_i}} - \\ & - \nu\omega_i m_2 \sum_{i=1}^{\infty}(A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t)\frac{\cos^2 \delta_i}{\omega_i}\frac{\sin \omega_i t}{1+\frac{\nu}{\omega_i}} - \\ & - \nu\omega_i m_2 \sum_{i=1}^{\infty}(-A_i \sin \omega_i + B_i \cos \omega_i t)\frac{\cos^2 \delta_i}{\omega_i}\frac{\cos \omega_i t}{1+\frac{\nu}{\omega_i}} + \\ & + 2\omega_i^2 m_2 \sum_{i=1}^{\infty} -(A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t)\frac{\cos^2 \delta_i}{\omega_i}\frac{\sin \omega_i t}{1+\frac{\nu}{\omega_i}} + \\ & + 2\omega_i m_2 \sum_{i=1}^{\infty}(-A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t)\frac{\cos^2 \delta_i}{\omega_i}\frac{\cos \omega_i t}{1+\frac{\nu}{\omega_2}} + \\ & + ES\sum_{i=1}^{\infty}(A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t)\frac{\sin 2\delta_i}{\omega_i}\frac{\sin \omega_i t}{1+\frac{\nu}{\omega_i}}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{85}$$

4. STUDIUL SISTEMULUI EXTREMAL AUTOADAPTIV

Pentru a putea studia sistemul autoadaptiv trebuie să facem mai întîi unele consideraţii asupra posibilităţii de realizare a sistemului autoadaptiv.

Sistemul autoadaptiv este constituit în primul rînd dintr-un sistem convenţional, capabil să menţină o apăsare pe sapă prescrisă, şi un dispozitiv autoadaptiv extremal, care poate modifica prescrierea conform relaţiei (21).

Sistemul convenţional este arătat în schema-bloc din figura 9.

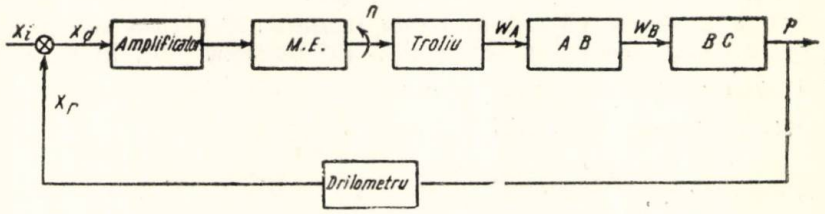


Fig. 9

Dispozitivul de comandă este constituit dintr-un preamplificator şi dintr-un amplificator rotativ (amplidină). Curentul I_c de la ieşirea din aplidină atacă bobinajul de excitaţie suplimentar al unui motor electric M.E. Motorul electric este de construcţie specială, care are două bobinaje de excitaţie : unul principal, care are un curent de excitaţie constant I_0 şi care ne va da o turaţie de regim a motorului, şi altul suplimentar, care ne va da o variaţie Δn a turaţiei n_0, variaţie pozitivă sau negativă care depinde de faptul dacă I_c este de acelaşi sens sau de sens contrar cu I_0.

Motorul M.E. antrenează toba granicului, care ne va da o viteză de avansare W_A a garniturii. Această viteză de avansare am văzut că este compusă din doi termeni : W_{Am}, care depinde de turaţia motorului, şi S_2, care este o viteză oscilantă, datorită forţei excitatoare.

Obiectul de automatizare (garnitura de prăjini) îl putem descompune în două părţi : porţiunea AB, la ieşirea căreia avem viteza de avansare W_B, compusă din viteza W_{Am} plus viteza oscilantă la punctul B şi porţiunea BC, comprimată, care ne produce o variaţie a apăsării pe sapă conform variaţiei vitezei W_B.

Apăsarea pe sapă se măsoară cu un drilometru electric special de mare precizie, care ne produce la ieşire o tensiune x_r proporţională cu apăsarea pe sapă efectivă. Tensiunea x_r se montează în opoziţie cu tensiunea x_i de referinţă, care are o valoare corespunzătoare apăsării pe sapă prescrise. Dacă tensiunea x_r este egală cu tensiunea x_i, adică dacă apăsarea pe sapă este cea prescrisă, tensiunea x_d, care este diferenţa lor, este nulă, deci curentul I_c prin bobinajul de excitaţie suplimentar este nul şi turaţia motorului va fi cea de echilibru n_0, corespunzătoare curentului prin bobinajul de excitaţie principal I_0. Dacă apăsarea pe sapă nu

este cea prescrisă, atunci curentul de excitaţie I_e va fi de acelaşi sens sau de sens contrar cu curentul I_0, după cum tensiunea x_r este mai mică sau mai mare ca x_i, deci după cum apăsarea pe sapă efectivă este mai mică sau mai mare ca cea prescrisă. Aceasta duce la mărirea amperspirelor totale ale curentului de excitaţie al motorului, deci la mărirea turaţiei lui, deci la creşterea vitezei de avansare a garniturii, şi la creşterea apăsării pe sapă în cazul că ea este mai mică ca cea prescrisă şi la o micşorare a amperspirelor totale de excitaţie, deci la o micşorare a turaţiei motorului, a vitezei de avansare a garniturii şi a apăsării pe sapă, în cazul că apăsarea pe sapă e mai mare ca cea prescrisă. O problemă importantă ce se pune la actualul sistem este aceea a stabilităţii dinamice a lui, avînd în vedere că sistemul este nelinear. Pentru a studia stabilitatea sistemului, facem apel la ecuaţia diferenţială (10), în care $W_B = W_{Am} + S_{20}$.

Deci ecuaţia diferenţială va fi

$$\frac{l}{ES}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + \lambda P(2P_0 - P) = W_{Am} + S_{20}. \tag{86}$$

Ţinînd seama că toate elementele ce intră în dispozitivul de automatizare sînt electrice, deci cu inerţie neglijabilă faţă de aceea a obiectului de automatizat (garnitura de prăjini prevăzută cu turbină), putem considera

$$W_{Am} = -\lambda K P, \tag{87}$$

adică variaţia vitezei de avansare datorită motorului este proporţională şi de sens invers cu variaţia apăsării pe sapă.

Deci ecuaţia (86) devine dacă împărţim cu $\frac{l}{ES}$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda ES}{l}(2P_0 - K)P - \frac{\lambda ES}{l}P_2 = \frac{ES}{l}S_{20}. \tag{88}$$

Ecuaţia (88) este o ecuaţie diferenţială de tip Ricatti. Pentru a o putea rezolva trebuie să-i cunoaştem o soluţie particulară. Această soluţie este P_δ, adică apăsarea pe sapă prescrisă pentru a ne situa în zona static stabilă de funcţionare. Deci soluţia ecuaţiei este

$$P = P_\delta + \frac{1}{e^{\int \frac{ES}{l}\lambda(2P_0 - K - 2P_\delta)\mathrm{d}t}\left[c + \int \frac{ES}{l}\lambda e^{-\int \frac{ES}{l}\lambda(2P_0 - K - 2P_\delta)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right]}. \tag{89}$$

Se observă că pentru ca sistemul să fie stabil trebuie ca

$$P_\delta < P_0 - \frac{K}{2}, \tag{90}$$

adică punctul de funcţionare la care stabilim mărimea prescrisă a apăsării pe sapă depinde de amplificarea K. Stabilirea punctului de funcţionare

(P_δ), înseamnă totodată fixarea unghiului δ (panta tangentei la curbă în zona static stabilă). Dacă dorim ca punctul de funcționare să fie cît mai aproape de P_0 (punctul de viteză de săpare maxim), trebuie ca coeficientul de amplificare al dispozitivului de automatizare să fie cît mai mic. Aceasta mărește însă abaterea statică a sistemului. Trebuie deci ales un punct de funcționare care să împace ambele condiții.

În continuare trebuie să cercetăm construcția principială a sistemului autoadaptiv. Sistemul autoadaptiv trebuie să îndeplinească condiția (21).

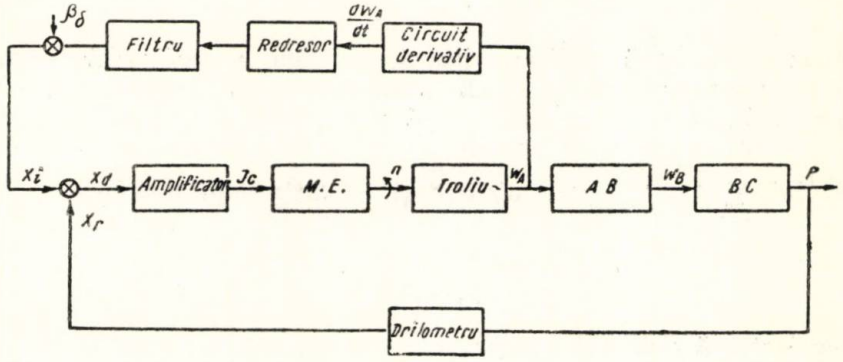


Fig. 10

Noi nu putem însă să măsurăm decît pe W_A. Pentru aceasta sînt diferite aparate de măsură electrice, cum ar fi cel care măsoară viteza de avansare a cîrligului. Dar, cum am văzut în relația (81), $S_{Bi} = \dfrac{S_2 Bi}{\cos^2 \delta_i}$; δ_i nu este însă constant, ci variază în special cu lungimea AB. Pe noi însă ne interesează numai amplitudinea maximă a oscilațiilor, care este aceeași și în punctul A, și în punctul B, și anume

$$\sum_{j=1}^{n} A_j h (t - T_j).$$

Pentru aceasta, tensiunea obținută de la aparatul de măsură a vitezei de avansare o derivăm și apoi o redresăm și o filtrăm. Obținem astfel o tensiune care depinde de

$$\frac{\mathrm{d}W_{Am}}{\mathrm{d}t} + \sum_{j=1}^{n} A_i h (t - T_j).$$

Această tensiune o comparăm cu o tensiune ce depinde de $\beta\delta$. Diferența dintre cele două tensiuni se însumează algebric cu tensiunea de referință x_i, așa cum arată schema-bloc din figura 10.

Dacă

$$\frac{dW_{Am}}{dt} + \sum_{j=1}^{n} A_j h(t - T_j) = \beta\delta,$$

atunci tensiunea rezultantă e nulă şi tensiunea de referinţă rămîne aceeaşi. Dacă

$$\frac{dW_{Am}}{dt} + \sum_{j=1}^{n} A_j h(t - T_j) \neq \beta\delta,$$

tensiunea de referinţă va fi modificată pînă cînd se realizează egalitatea (90) de mai sus, ceea ce înseamnă că este realizată condiţia (21). Avînd în vedere că oscilaţiile se amortizează datorită coeficientului de frecare, după trecerea timpului de stabilizare a oscilaţiilor tensiunea datorată termenului $\sum_{j=1}^{n} A_j h(t - T_j)$ dispare şi condiţia (90) devine

$$\frac{dW_{Am}}{dt} = \beta\delta, \tag{91}$$

ceea ce justifică sistemul propus.

Trebuie cercetată stabilitatea sistemului ţinînd seama şi de dispozitivul autoadaptiv.

Pentru aceasta, avînd în vedere condiţiile (90) şi (87), vom avea

$$W_{Am} = -\lambda KP + \lambda K_1 \frac{dP}{dt} + \lambda K_1 \sum_{j=1}^{n} A_j h(t - T_j). \tag{92}$$

Deci ecuaţia (88) devine

$$\begin{aligned} &\frac{dP}{dt} + \left(\frac{ES}{l} + K_1\lambda\right)(2P_0 - K)P + \left(\frac{ES}{l} + \lambda K_1\right)P^2 = \\ &= \left(\frac{ES}{l} + \lambda K_1\right)S_{20} - \left(\frac{ES}{l} + \lambda K_1\right)\lambda K_1 \sum_{j=1}^{n} A_j h(t - T_j). \end{aligned} \tag{93}$$

Soluţia ecuaţiei (93) este de forma

$$P = P_\delta + \frac{1}{e^{\int \lambda\left(\frac{ES}{l} + \lambda K_1\right)(2P_0 - K - 2P_\delta)\,dt}\left[C + \int\left(\frac{ES}{l} + \lambda K_1\right)\lambda e^{-\int \lambda\left(\frac{ES}{l} + \lambda K_1\right)(2P_0 - K_1 - 2P_\delta)\,dt}\right]dt} \tag{94}$$

ale cărei concluzii duc la relaţia (90), deci stabilitatea sistemului extremal este aceeaşi ca a sistemului convenţional.

5. CONCLUZII

1. Dacă se ţine seama de porţiunea supusă la întindere a garniturii de foraj, pe lîngă viteza de avansare a garniturii dată de motorul electric mai apare o viteză oscilantă, datorită forţei excitatoare. Această mişcare oscilatorie are amplitudine cu atît mai mare, cu cît adîncimea de foraj este mai mare; totodată însă şi amortizarea oscilatorie datorită frecării este mai mare.

2. Sistemul extremal propus este în general compus din aceleaşi elemente ca cele existente, modificările mai importante propunîndu-se pentru dispozitivul autoadaptiv.

3. Condiţia de stabilitate pentru sistemul extremal este aceeaşi ca pentru sistemul convenţional.

Primită la redacţie la 22 iulie 1965.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Vilcovici, St. Bălan, R. Voinea, *Mecanica teoretică*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1963.
2. С. Н. Кожевников, Я. Скитков и др., *Исследование переходных процессов в главных линиях прокатных станков; Отчет о научно-исследовательской работе Института черной металлургии*. АН СССР, Днепропетровск, 1959.
3. С. Н. Кожевников, *Определение действительных нагрузок в линиях передачи тяжелых машин*, АН СССР, Труды семинара по ТММ,, том XIII, Выпуск 51, 1953.
4. С. К. Калинин, *Динамические исследования буровых установок*, Львов, 1959.
5. И. Сищенков, Г. М. Саркисов, *Бурильные трубы, математическая теория их работы и экспериментальные исследования их материалов*, Азнефтеиздат, 1933.
6. S. Timischenco, *Vibration problems in engineering*, Toronto New York, London, D. Van Nostrand Company Inc., 1955.
7. А. А. Минин, *Забойные автоматы подачи долота*, Гостоптехиздат, Москва, 1960.
8. D. M. Cosideres, *Process instruments and control handbook*, New York, Mc. Grow-Hill Company, 1957.
9. Л. Ф. Куликовски, *Электрические измерительные приборы для контрольных процессов бурения*, Москва, Гостоптехиздат, 1962.
10. Mc Gheered, *Automatic optimum control for driling*, OGJ, 1960.
11. М. Г. Ескин, *Автоматическое управление процессом турбового бурения при помощи самонатровоющихся систем*, Автоматика и телемеханика, 6 (1960).
12. *Автоматизация процесов глубокого бурения*, труды совещания по ВНИИБТ в августе 1960 г., Москва, Гостоптехиздат, 1961.

ASUPRA ANALIZEI ŞI SINTEZEI UNITARE A MECANISMELOR CU CUPLE SUPERIOARE

de CHR. PELECUDI şi I. SAVA
Centrul de mecanica solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

531.1

Se face o sinteză asupra metodelor de studiu al mecanismelor cu came, apreciindu-se deosebirile. Apoi se realizează pe cale analitică analiza şi sinteza cu ajutorul curbelor reciproc înfăşurate, considerîndu-se cazul cel mai general, din care, prin particularizare, se deduc acelea cu largă aplicabilitate în tehnică.
Totodată, lucrarea se referă şi la studiul acceleraţiilor de ordine superioare în mecanismele cu came şi cuprinde aprecieri asupra utilizării mecanismelor înlocuitoare.
Lucrarea se încheie cu un exemplu asupra unei came circulare cu tachet cu disc plan.

În tratarea problemelor de analiză şi sinteză cinematică ale mecanismelor cu came se obişnuieşte utilizarea cazurilor particulare, ceea ce, pe lîngă faptul că estompează proprietăţile de bază comune, îngreuiază calculele cu diversele relaţii stabilite pe cazurile respective. Prin aceasta se pierde de asemenea caracterul unitar al analizei şi sintezei, care mai ales pentru mecanismele cu cuple superioare este simplu şi util de evidenţiat.

Metodele grafică şi analitică pentru rezolvarea problemelor de came se bazează pe următoarea proprietate geometrică-fizică : „profilele celor două corpuri, camă şi tachet, care formează cupla superioară, se rostogolesc cu alunecare unul pe celălalt, rămînînd în contact permanent, sau, altfel spus, curbele materializate ale profilelor sînt reciproc înfăşurate". Prin aceasta se obţine proprietatea cinematică-geometrică : „viteza relativă între punctele C_1 şi C_2 ale celor două corpuri, camă şi tachet, dar confundate în punctul de contact C, este tangenta comună la cele

două profile. În această situaţie, deplasarea punctului comun se face după direcţia tangentei".

Pentru aceasta, studiul problemelor de mecanisme se face prin inversarea mişcării, adică prin cercetarea mişcării relative.

În ceea ce priveşte formularea problemelor generale de sinteză şi analiză cinematică, acestea cuprind:

— determinarea profilului camei dacă se cunosc profilul tachetului, legea de mişcare a tachetului şi legea de mişcare a camei;

— determinarea legii de mişcare a tachetului dacă se cunosc profilul tachetului, profilul camei şi legea de mişcare a camei.

Astfel, în mod obişnuit, elementul conducător — cama — are mişcare cunoscută (în general mişcare uniformă $\omega = \text{const.}$), iar tachetul, element condus, are profilul punctiform, plan sau curb. Trebuie să se determine sau profilul camei, sau legea de mişcare a tachetului cînd una dintre ele este dată. Nu sînt excluse şi posibilităţile inverse pentru aflarea profilului elementului condus-tachet sau a legii de mişcare pentru elementul conducător, cama. De asemenea mai general pot fi determinate chiar două caracteristici dintre cele de mai sus, mai ales dacă intervin şi condiţii de altă natură (dinamice, uzură etc.).

În raport cu mişcările simple, aceste mecanisme cuprind cama sau tachetul de translaţie sau de rotaţie, dar elementele respective pot avea şi mişcări generale de rototranslaţie.

Utilizarea acceleraţiilor de ordine superioare, care mai ales la mecanismele cu came capătă importanţă din ce în ce mai mare, complică de asemenea analiza şi sinteza acestor mecanisme.

Astfel, faţă de cele semnalate mai sus, se impune considerarea tratării sub formă generală a problemelor de mecanisme cu came.

1. *Metoda grafică.* Atît analiza, cît şi sinteza grafică a mecanismelor cu came se bazează pe inversarea mişcării. Se impune întregului ansamblu, camă-tachet-bază, o mişcare inversă camei. Cama rămîne fixă, iar tachetul, obligat să se deplaseze în sens contrar camei din cauza legăturii la bază şi totodată să urmărească profilul camei, are o deplasare proprie faţă de planul bazei. Deci în analiză se obţine diagrama deplasării tachetului faţă de deplasarea camei şi, prin derivări grafice, vitezele şi acceleraţiile tachetului.

În sinteză, plecînd de la diagramele parametrilor cinematici prin integrări grafice, se găseşte diagrama deplasării tachetului în raport cu care se desenează poziţiile tachetului în mişcarea sa relativă, inversă camei. Profilul camei se află ca înfăşurătoarea curbei de profil a tachetului în diferite poziţii. Desigur, şi în analiză, şi în sinteză, tachetul punctiform prezintă construcţii grafice mai simple, astfel că se obişnuieşte ca mecanismele cu tachet curb să fie echivalate acestora.

2. *Metoda analitică.* Pentru analiza mişcării relative dintre tachet şi camă se consideră sistemul de axe XOY şi sistemele de axe mobile $A_1x_1y_1$ şi $B_2x_2y_2$, solidare fiecare cu unul dintre elemente (fig. 1).

Ecuaţiile curbelor de profil ale celor două elemente sînt date, în sistemele de axe respective, sub formă parametrică

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\lambda); & x_2 &= x_2(\nu), \\ y_1 &= y_1(\lambda); & y_2 &= y_2(\nu), \end{aligned} \tag{1}$$

sau prin

$$g(x_1 y_1) = 0; \qquad f(x_2 y_2) = 0.$$

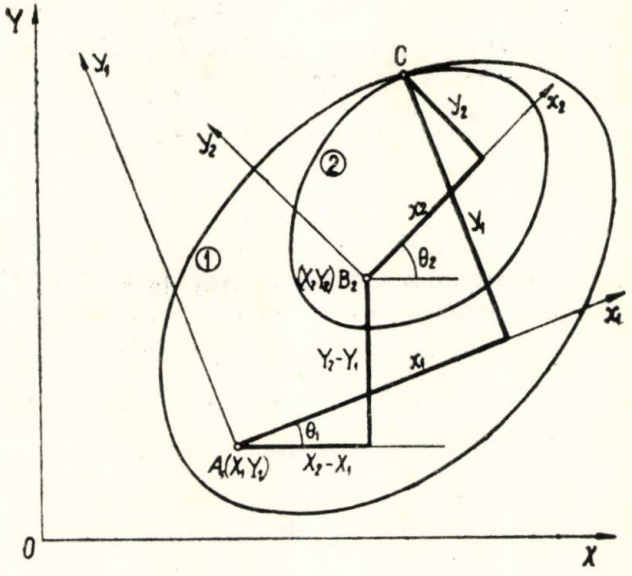


Fig. 1

Legile de mişcare ale elementelor indică, în raport cu timpul t, deplasările unor puncte A_1 şi B_2 şi rotaţiile faţă de sistemul de axe fixe

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1(t); & X_2 &= X_2(t), \\ Y_1 &= Y_1(t); & Y_2 &= Y_2(t), \\ \theta_1 &= \theta_1(t); & \theta_2 &= \theta_2(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Desigur, pentru punctele A_1 şi B_2 se pot cunoaşte traiectoriile lor şi deplasările liniare astfel:

$$\begin{aligned} F_1(X_1 Y_1) &= 0; & F_2(X_2 Y_2) &= 0, \\ s_1 &= s_1(t); & s_2 &= s_2(t). \end{aligned}$$

Coordonatele punctelor oarecare P sau Q, după primul sau al doilea profil, faţă de sistemul de axe fixe sînt

$$\begin{aligned} \overline{X}_1(\lambda, t) &= X_1 + x_1\cos\theta_1 - y_1\sin\theta_1; & \overline{X}_2(\nu, t) &= X_2 + x_2\cos\theta_2 - y_2\sin\theta_2, \\ \overline{Y}_1(\lambda, t) &= Y_1 + x_1\sin\theta_1 + y_1\cos\theta_1; & \overline{Y}_2(\nu, t) &= Y_2 + x_2\sin\theta_2 + y_2\cos\theta_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Aceste coordonate depind de parametrii λ sau γ, care generează curba respectivă, cît şi de timpul t, care indică mobilitatea acestora.

Transformarea coordonatelor punctului $Q[x_2(\nu), y_2(\nu)]$ în sistemul de axe $A_1x_1y_1$ se face prin

$$\begin{aligned} x_{21}(\nu, t) &= (X_2 - X_1)\cos\theta_1 + \\ &+ (Y_2 - Y_1)\sin\theta_1 + x_2\cos(\theta_2 - \theta_1) - y_2\sin(\theta_2 - \theta_1), \\ y_{21}(\nu, t) &= -(X_2 - X_1)\sin\theta_1 + \\ &+ (Y_2 - Y_1)\cos\theta_1 + x_2\sin(\theta_2 - \theta_1) + y_2\cos(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned} \tag{4}$$

Pentru punctul C comun celor două profile este necesar ca

$$\begin{aligned} \overline{X}_1(\lambda_c, t) &= \overline{X}_2(\nu_c, t) = X_c, \\ \overline{Y}_1(\lambda_c, t) &= \overline{Y}_2(\nu_c, t) = Y_c \end{aligned} \tag{5}$$

sau

$$\begin{aligned} x_1(\lambda_c) &= x_{21}(\nu_c, t), \\ y_1(\lambda_c) &= y_{21}(\nu_c, t). \end{aligned}$$

Aceste relații determină pentru punctul de contact C valorile parametrilor λ și ν la momentul t:

$$\lambda_c = \lambda(t); \qquad \nu_c = \nu(t). \tag{6}$$

Parametrii directori ai tangentelor la profile în axele fixe sînt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\overline{X}_1 &= \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}x_1\cos\theta_1 - \mathrm{d}y_1\sin\theta_1, \\ \mathrm{d}\overline{Y}_1 &= \frac{\partial \overline{Y}_1}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}x_1\sin\theta_1 + \mathrm{d}y_1\cos\theta_1, \\ \mathrm{d}\overline{X}_2 &= \frac{\partial \overline{X}_2}{\partial \nu}\mathrm{d}\nu = \mathrm{d}x_2\cos\theta_2 - \mathrm{d}y_2\sin\theta_2, \\ \mathrm{d}\overline{Y}_2 &= \frac{\partial \overline{Y}_2}{\partial \nu}\mathrm{d}\nu = \mathrm{d}x_2\sin\theta_2 + \mathrm{d}y_2\cos\theta_2. \end{aligned} \tag{7}$$

în concordanță cu parametrii $\mathrm{d}x_1$ și $\mathrm{d}x_2$ pentru primul profil în axele $A_1x_1y_1$ și cu parametrii $\mathrm{d}x_2$ și $\mathrm{d}y_2$ pentru al doilea profil în axele $B_2x_2y_2$. Acești parametrii depind de poziția θ_1 și θ_2 a profilelor la momentul t. Parametrii directori ai curbelor dintr-un sistem de axe exprimați în celălalt sistem de axe sînt

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{21}}{\partial \nu}\mathrm{d}\nu &= \mathrm{d}x_2\cos(\theta_2 - \theta_1) - \mathrm{d}y_2\sin(\theta_2 - \theta_1), \\ \frac{\partial y_{21}}{\partial \nu}\mathrm{d}\nu &= \mathrm{d}x_2\sin(\theta_2 - \theta_1) + \mathrm{d}y_2\cos(\theta_2 - \theta_1), \\ \frac{\partial x_{12}}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda &= \mathrm{d}x_1\cos(\theta_2 - \theta_1) - \mathrm{d}y_1\sin(\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{\partial y_{12}}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda &= \mathrm{d}x_1\sin(\theta_2 - \theta_1) + \mathrm{d}y_1\cos(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \tag{8}$$

Viteza relativă între punctele C_1 și C_2 este

$$\begin{aligned} \overline{V}_{C_{21}} &= \overline{V}_{C_2} - \overline{V}_{C_1} = \overline{\omega}_{21} \times \overline{IC}, \\ \overline{V}_{C_{21}} &= \overline{V}_{B_2} + \overline{\omega}_2 \times \overline{BC} - \overline{V}_{A_1} - \overline{\omega}_1 \times \overline{AC}, \end{aligned} \tag{9}$$

în care I este centrul instantaneu al vitezelor. Proiecțiile vitezei relative pe axe sînt:

— pentru axele fixe OXY:

$$v_{C_{21}x} = \frac{\mathrm{d}(\overline{X}_{2C} - \overline{X}_{1C})}{\mathrm{d}t} =$$

$$= v_{Bx} - v_{Ax} - \omega_2(Y_{2C} - Y_{2B}) + \omega_1(Y_{1C} - Y_{1A}) = -(\omega_2 - \omega_1)(y_C - y_I), \tag{10}$$

$$v_{C_{21}y} = \frac{\mathrm{d}(\overline{Y}_{2C} - \overline{Y}_{1C})}{\mathrm{d}t} =$$

$$= v_{By} - v_{Ay} + \omega_2(x_{2C} - x_{2B}) - \omega_1(x_{1C} - x_{1A}) = (\omega_2 - \omega_1)(x_C - x_I);$$

— pentru axele $A_1x_1y_1$ și $B_2x_2y_2$:

$$v_{C_{21}x_1} = \frac{\mathrm{d}x_{21}}{\mathrm{d}t} = \cos\theta_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X_2 - X_1) +$$

$$+ \sin\theta_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Y_2 - Y_1) + y_{21}\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} - [x_2\sin(\theta_2 - \theta_1) + y_2\cos(\theta_2 - \theta_1)]\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t},$$

$$v_{C_{21}y_1} = \frac{\mathrm{d}y_{21}}{\mathrm{d}t} = -\sin\theta_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X_2 - X_1) +$$

$$+ \cos\theta_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Y_2 - Y_1) - x_{21}\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} + [x_2\cos(\theta_2 - \theta_1) - y_2\sin(\theta_2 - \theta_1)]\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}, \tag{11}$$

$$v_{C_{12}x_2} = \frac{\mathrm{d}x_{12}}{\mathrm{d}t} = \cos\theta_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X_1 - X_2) +$$

$$+ \sin\theta_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Y_1 - Y_2) + \frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t} y_{12} - [x_1\sin(\theta_1 - \theta_2) + y_1\cos(\theta_1 - \theta_2)]\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t},$$

$$v_{C_{12}y_2} = \frac{\mathrm{d}y_{12}}{\mathrm{d}t} = -\sin\theta_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X_1 - X_2) +$$

$$+ \cos\theta_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Y_1 - Y_2) - \frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t} x_{12} + [x_1\cos(\theta_1 - \theta_2) - y_1\sin(\theta_1 - \theta_2)]\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t}.$$

Condiția de tangență comună se exprimă printr-una din relațiile

$$\frac{v_{C_{21}Y}}{v_{C_1X}} = \frac{\dfrac{\partial \overline{Y}_1}{\partial \lambda}}{\dfrac{\partial \overline{X}_1}{\partial \lambda}} = \frac{\dfrac{\partial \overline{Y}_2}{\partial \nu}}{\dfrac{\partial \overline{X}_2}{\partial \nu}} \tag{12}$$

sau

$$\frac{v_{C_{21}y_1}}{v_{C_{21}x_1}} = \frac{\dfrac{dy_1}{d\lambda}}{\dfrac{dx_1}{d\lambda}}; \quad \frac{v_{C_{12}y_2}}{v_{C_{12}x_2}} = \frac{\dfrac{dy_2}{d\nu}}{\dfrac{dx_2}{d\nu}}, \tag{12}$$

care exprimă, de altfel, condiţia geometrică de înfăşurare reciprocă.

Se găseşte

$$\left(\frac{dx_1}{d\lambda}\cdot\frac{dx_2}{d\nu}+\frac{dy_1}{d\lambda}\cdot\frac{dy_2}{d\nu}\right)\sin(\theta_2-\theta_1)+$$

$$+\left(\frac{dx_1}{d\lambda}\cdot\frac{dy_2}{d\nu}-\frac{dx_2}{d\nu}\cdot\frac{dy_1}{d\lambda}\right)\cos(\theta_2-\theta_1)=0, \tag{13}$$

în care se înlocuiesc valorile $\lambda_c(t)$ şi $\nu_c(t)$.

Pentru sistemul $B_2x_2y_2$, condiţia de tangenţă este

$$\frac{dx_2}{d\nu}\left[\sin\theta_2\frac{d}{dt}(X_2-X_1)-\cos\theta_2\frac{d}{dt}(Y_2-Y_1)+\right.$$

$$\left.+\omega_1(X_2-X_1)\cos\theta_2+\omega_1(Y_2-Y_1)\sin\theta_2\right]+$$

$$+\frac{dy_2}{d\nu}\left[\cos\theta_2\frac{d}{dt}(X_2-X_1)+\sin\theta_2\frac{d}{dt}(Y_2-Y_1)-\right.$$

$$\left.-\omega_1(X_2-X_1)\sin\theta_2+\omega_1\cos\theta_2(Y_2-Y_1)\right]=$$

$$=\frac{(\omega_2-\omega_1)}{2}\frac{d}{d\nu}(x_2^2+y_2^2) \tag{14}$$

şi invers pentru sistemul $A_1x_1y_1$. Relaţia de tangenţă este exprimată în parametrii $\nu_c(t)$ şi t sau $\lambda_c(t)$ şi t.

Deci pentru rezolvarea problemelor generale ale mecanismelor cu came se pot scrie 13 ecuaţii : 4 ecuaţii ale profilelor (1), 6 legi de mişcare (2), 2 condiţii de contact C (5) şi condiţia de tangenţă (13).

Aceste ecuaţii cuprind 13 parametri : x_1, y_1, x_2, y_2, X_1, Y_1, θ_1, X_2, Y_2, θ_2, λ, ν şi t. Deoarece atît în analiză, cît şi în sinteză trebuie să se determine o relaţie între doi parametri, de exemplu legea de mişcare $\theta_2(t)$ sau profilul unui corp $g(x_1y_1)=0$, este necesar să se impună numai 12 condiţii dintre cele 13 posibile.

Deoarece în general profilul tachetului este cunoscut , problemele de analiză şi de sinteză se rezolvă simplu prin relaţiile (5), (13), scoase din condiţiile de contact şi de tangenţă şi scrise sub formă adecvată. Prin eliminarea parametrului ν se obţin fie ecuaţiile x_1 şi y_1 ale profilului camei în funcţie de legile de mişcare (t) (respectiv coordonatele punctului de contact), fie prin inversare legile de mişcare X_2, Y_2, θ_2 în funcţie de profilul camei (λ).

3. *Particularizări pentru mişcările simple ale elementelor:*

— cama de translaţie (fig. 2, 3):

$$X_1 = X_1(t) \qquad Y_1 = 0 \qquad \theta_1 = 0; \tag{15}$$

— cama de rotaţie (fig. 4, 5):

$$X_1 = 0 \qquad Y_1 = 0 \qquad \theta_1 = \theta_1(t); \tag{16}$$

— tachet de translaţie (fig. 2, 4):

$$\begin{aligned} X_2 &= e\cos\theta_2 - Z_2(t)\sin\theta_2, \\ Y_2 &= e\sin\theta_2 + Z_2(t)\cos\theta_2, \\ \theta_2 &= \text{const.}, \end{aligned} \tag{17}$$

în care e este excentricitatea tachetului, iar $Z_2(t)$ deplasarea sa de translaţie;

— tachet de rotaţie (fig. 3, 5):

$$X_2 = l\cos\theta_2 - f; \qquad Y_2 = l\sin\theta_2; \qquad \theta_2 = \theta_2(t), \tag{18}$$

în care l este lungimea tachetului, iar f abscisa negativă a centrului său de rotaţie R.

4. *Particularizări ale mecanismelor cu came.*

4.1. Pentru tachetul punctiform este suficientă condiţia ca vîrful său C să se găsească pe profilul camei, condiţia de tangenţă fiind eliminată. Deoarece $x_2 = 0$ şi $y_2 = 0$, în ecuaţiile care exprimă condiţia de contact dispare parametrul ν, astfel că ele devin de forma

$$\begin{aligned} x_1(\lambda) &= x_{21}(t) = (X_2 - X_1)\cos\theta_1 + (Y_2 - Y_1)\sin\theta_1, \\ y_1(\lambda) &= y_{21}(t) = -(X_2 - X_1)\sin\theta_1 + (Y_2 - Y_1)\cos\theta_1. \end{aligned} \tag{19}$$

Traiectoria relativă a vîrfului tachetului faţă de camă se confundă cu profilul camei. Astfel, mecanismele cu tachet punctiform se bucură de proprietăţi deosebite care simplifică calculele.

Pentru analiză, deoarece se cunoaşte profilul camei $x_1(\lambda)$ şi $y_1(\lambda)$, prin eliminarea parametrului λ se găseşte legea de mişcare a tachetului $[X_2(t), Y_2(t)$ sau $\theta_2(t)]$, iar prin derivări succesive viteza şi acceleraţiile respective

$$\begin{aligned} \frac{dy_{21}}{dt} &= \frac{dy_{21}}{dx_{21}} \cdot \frac{dx_{21}}{dt}, \\ \frac{d^2y_{21}}{dt^2} &= \frac{d^2y_{21}}{dx_{21}^2}\left(\frac{dx_{21}}{dt}\right)^2 + \frac{dy_{21}}{dx_{21}} \cdot \frac{d^2x_{21}}{dt^2}, \end{aligned} \tag{20}$$

în care

$$\frac{dy_{21}}{dx_{21}} = \frac{\dfrac{dy_1}{d\lambda}}{\dfrac{dx_1}{d\lambda}}; \qquad \frac{d^2y_{21}}{dx_{21}^2} = \frac{\left(\dfrac{d^2y_1}{d\lambda^2}\right) \times \left(\dfrac{dx_1}{d\lambda}\right) - \left(\dfrac{d^2x_1}{d\lambda^2}\right)\left(\dfrac{dy_1}{d\lambda}\right)}{\left(\dfrac{dx_1}{d\lambda}\right)^2}. \tag{21}$$

Pentru sinteză, cunoscîndu-se legea de mişcare a tachetului, deci $x_{21}(t)$ şi $y_{21}(t)$, se elimină parametrul t, obţinîndu-se profilul camei, iar prin derivări succesive pantele şi curburile acestuia :

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\lambda} &= \frac{dy_1}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{d\lambda}, \\ \frac{d^2y_1}{d\lambda^2} &= \frac{d^2y_1}{dx_1^2}\left(\frac{dx_1}{d\lambda}\right)^2 + \frac{dy_1}{dx_1} \cdot \frac{d^2x_1}{d\lambda^2}, \end{aligned} \tag{22}$$

în care

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx_1} &= \frac{\dfrac{dy_{21}}{dt}}{\dfrac{dx_{21}}{dt}}, \\ \frac{d^2y_1}{dx_1^2} &= \frac{\left(\dfrac{d^2y_{21}}{dt^2}\right)\cdot\left(\dfrac{dx_{21}}{dt}\right) - \left(\dfrac{d^2x_{21}}{dt^2}\right)\cdot\left(\dfrac{dy_{21}}{dt}\right)}{\left(\dfrac{dx_{21}}{dt}\right)^3} \end{aligned} \tag{23}$$

Dacă se consideră coordonatele polare parametrice $r(\lambda)$ şi $\varphi(\lambda)$ pentru profilul camei (în special pentru cama de rotaţie), relaţiile sînt

$$\begin{aligned} r^2(\lambda) &= x_{21}^2(t) + y_{21}^2(t), \\ \operatorname{tg}\varphi(\lambda) &= \frac{y_{21}(t)}{x_{21}(t)} \end{aligned} \tag{24}$$

sau

$$r^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} - \theta_1, \tag{25}$$

din care se elimină λ sau t.

4.1.1. Cama de translaţie cu tachet de translaţie (fig. 2) :

$$\begin{aligned} x_1(\lambda) &= e\cos\theta_2 - Z_2(t)\sin\theta_2 - X_1(t), \\ y_1(\lambda) &= e\sin\theta_2 + Z_2(t)\cos\theta_2. \end{aligned} \tag{26}$$

4.1.2. Cama de translaţie cu tachet de rotaţie (fig. 3) :

$$\begin{aligned} x_1(\lambda) &= l\cos\theta_2(t) - X_1(t) - f, \\ y_1(\lambda) &= l\sin\theta_2(t). \end{aligned} \tag{27}$$

4.1.3. Cama de rotaţie cu tachet de translaţie (fig. 4) :

$$\begin{aligned} X_1(\lambda) &= e\cos[\theta_2 - \theta_1(t)] - Z_2(t)\sin[\theta_2 - \theta_1(t)], \\ y_1(\lambda) &= e\sin[\theta_2 - \theta_1(t)] + Z_2(t)\cos[\theta_2 - \theta_1(t)] \end{aligned} \tag{28}$$

sau

$$r^2 = e^2 + Z_2^2(t)\,; \quad \varphi = \psi + \theta_2 - \theta_1 \text{ cu } \operatorname{tg}\psi = \frac{Z_2}{e},$$

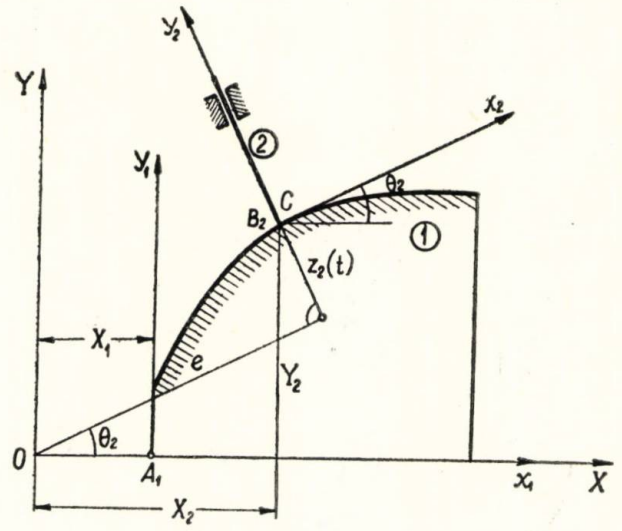


Fig. 2

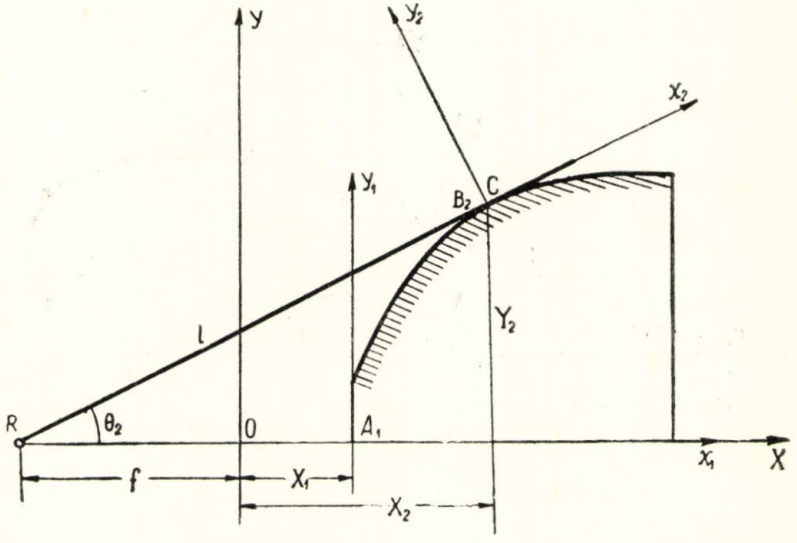


Fig. 3

în care, dacă excentricitatea e este nulă, $r = Z_2(t)$ şi $\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta_2 - \theta_1(t)$.

Se poate considera $\theta_2 = 0$ sau $\theta_1^*(t) = \theta_1(t) - \theta_2$.

4.1.4. Cama de rotație cu tachet de rotație (fig. 5):

$$x_1(\lambda) = -f\cos\theta_1(t) + l\cos[\theta_2(t) - \theta_1(t)],$$
$$y_1(\lambda) = f\sin\theta_1(t) + l\sin[\theta_2(t) - \theta_1(t)] \tag{29}$$

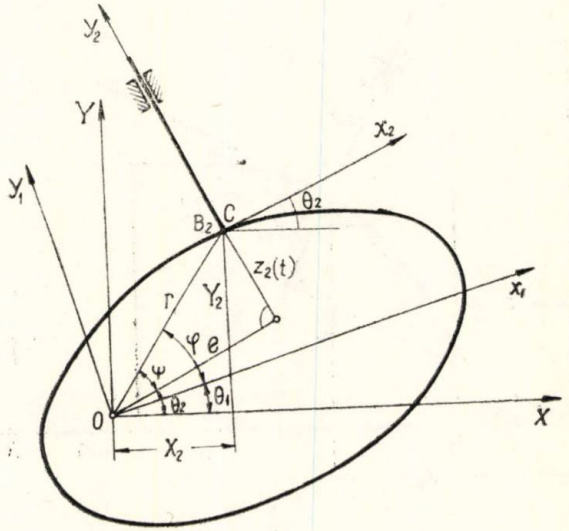


Fig. 4

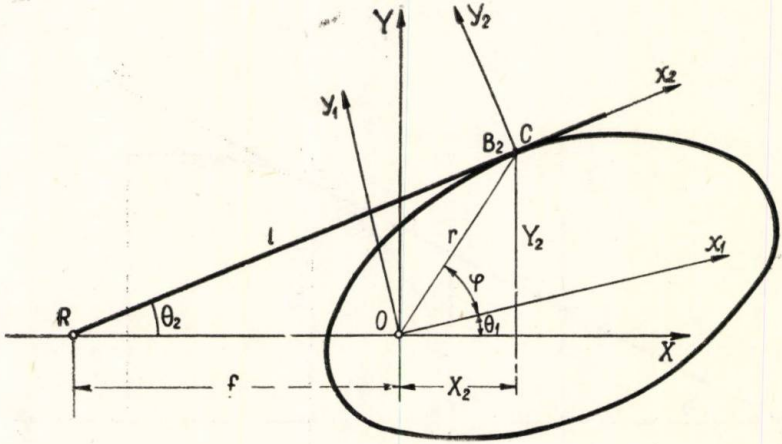


Fig. 5

sau

$$r^2 = f^2 + l^2 - 2fl\cos\theta_2(t),$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{l\sin\theta_2(t)}{l\cos\theta_2(t) - f} - \theta_1(t).$$

4.2. Mecanismele cu tachet de profil oarecare comportă relaţii mai complicate, introducînd în ecuaţiile de contact termeni care ţin seama de profilul său şi de condiţia de tangenţă. Se utilizează uneori echivalarea mecanismelor cu tachet curb şi camă de profil real cu mecanismele cu tachet punctiform şi camă de profil teoretic modificat, ambele mecanisme avînd însă aceleaşi legi de mişcare.

4.3. Pentru mecanismele cu tachet circular sau cu rola de rază R, relaţiile de contact sînt completate prin

$$x_2 = R\cos\nu\,; \qquad y_2 = R\sin\nu, \tag{30}$$

adică

$$\begin{aligned} x_1(\lambda) = x_{21}(\nu,t) &= (X_2 - X_1)\cos\theta_1 + (Y_2 - Y_1)\sin\theta_1 + R\cos(\nu + \theta_2 - \theta_1), \\ y_1(\lambda) = y_{21}(\nu,t) &= -(X_2 - X_1)\sin\theta_1 + (Y_2 - Y_1)\cos\theta_1 + R\sin(\nu + \theta_2 - \theta_1), \end{aligned} \tag{31}$$

iar condiţia de tangenţă este

$$A\sin\nu = B\cos\nu, \tag{32}$$

în care

$$\begin{aligned} A &= \sin\theta_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X_2 - X_1) - \cos\theta_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Y_2 - Y_1) + \\ &\quad + \omega_1[(X_2 - X_1)\cos\theta_2 + (Y_2 - Y_1)\sin\theta_2], \\ B &= \cos\theta_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X_2 - X_1) + \sin\theta_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Y_2 - Y_1) + \\ &\quad + \omega_1[-(X_2 - X_1)\sin\theta_2 + (Y_2 - Y_1)\cos\theta_2]. \end{aligned} \tag{33}$$

Prin eliminarea parametrului ν se găseşte în general (fig. 6)

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} \pm R\frac{A\cos(\theta_2 - \theta_1) - B\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ y_1 &= y_{10} \pm R\frac{A\sin(\theta_2 - \theta_1) + B\cos(\theta_2 - \theta_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned} \tag{34}$$

4.3.1. Reducerea la tachet punctiform se face pentru mecanismele cu tachet circular R prin considerarea profilului (fig. 6) teoretic al camei echidistant faţă de profilul real. Punctul de lucru al tachetului punctiform — centrul rolei — se găseşte pe normala la profilul real în punctul de contact şi la distanţă constantă R. Ecuaţiile (34) evidenţiază această diferenţă, profilul real fiind redat prin coordonatele parametrice x_1, y_1, iar cel teoretic prin x_{10} y_{10}, care reprezintă totodată şi coordonatele punctelor de contact ale profilelor cu tacheţii respectivi.

4.3.2. Cama de translaţie cu tachet de translaţie:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} \pm R\frac{A\cos\theta_2 - B\sin\theta_2}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \text{unde } A = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[Z_2(t) + \sin\theta_2 X_1(t)], \\ y_1 &= y_{10} \pm R\frac{A\sin\theta_2 + B\cos\theta_2}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad B = -\cos\theta_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[X_1(t)]. \end{aligned} \tag{35}$$

4.3.3. Cama de translaţie cu tachet de rotaţie:

$$x_1 = x_{10} \pm R\frac{A\cos\theta_2 - B\sin\theta_2}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \text{unde } A = -\omega_2 l - \sin\theta_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[X_1(t)],$$
$$y_1 = y_{10} \pm R\frac{A\sin\theta_2 + B\cos\theta_2}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad B = -\cos\theta_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[X_1(t)]. \tag{36}$$

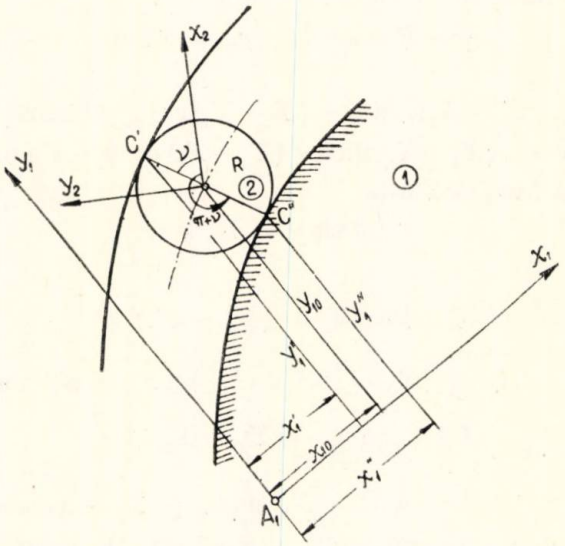


Fig. 6

4.3.4. Cama de rotaţie cu tachet de translaţie:

$$x_1 = x_{10} \pm R\frac{A\cos(\theta_2-\theta_1) - B\sin(\theta_2-\theta_1)}{\sqrt{A^2+B^2}},$$
$$\text{unde } A = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[Z_2(t)] + \omega_1 e, \tag{37}$$
$$y_1 = y_{10} \pm R\frac{A\sin(\theta_2-\theta_1) + B\cos(\theta_2-\theta_1)}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad B = \omega_1 Z_2(t).$$

4.3.5. Cama de rotaţie cu tachet de rotaţie:

$$x_1 = x_{10} \pm R\frac{A\cos(\theta_2-\theta_1) - B\sin(\theta_2-\theta_1)}{\sqrt{A^2+B^2}},$$
$$\text{unde } A = -\omega_2 l + \omega_1(l - f\cos\theta_2), \tag{38}$$
$$y_1 = y_{10} \pm R\frac{A\sin(\theta_2-\theta_1) + B\cos(\theta_2-\theta_1)}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad B = \omega_1 f\sin\theta_2.$$

4.4. Mecanismele cu tachet plan se pot utiliza numai cu came de rotație. Relațiile de contact sînt completate (fig. 7, 8) prin

$$x_2 = \nu \cos \alpha \qquad y_2 = \nu \sin \alpha \qquad \alpha = \text{const.}, \tag{39}$$

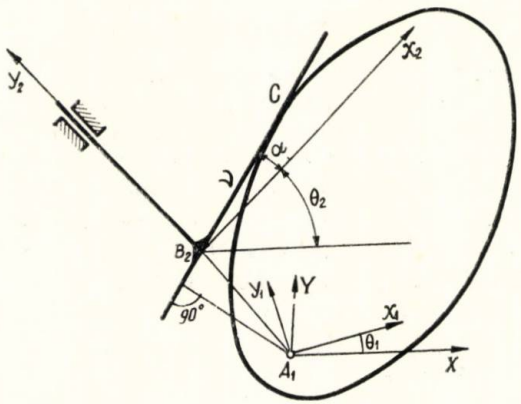


Fig. 7

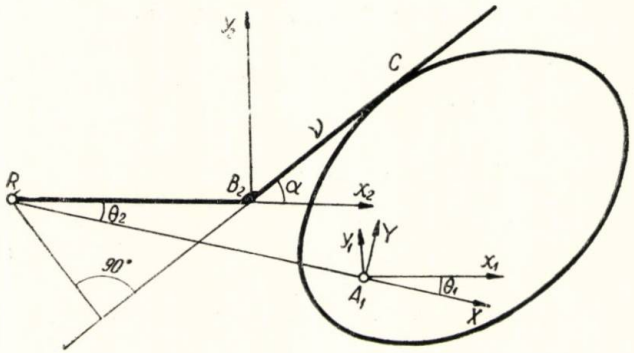


Fig. 8

adică

$$\begin{aligned} x_1(\lambda) &= x_{21}(\nu, t) = x_{10} + \nu \cos(\alpha + \theta_2 - \theta_1), \\ y_1(\lambda) &= y_{21}(\nu, t) = y_{10} + \nu \sin(\alpha + \theta_2 - \theta_1), \end{aligned} \tag{40}$$

și condiția de tangență este

$$A \cos \alpha + B \sin \alpha = (\omega_2 - \omega_1)\nu; \tag{41}$$

se găseşte

$$x_1 = x_{10} + \frac{A\cos\alpha + B\sin\alpha}{\omega_2 - \omega_1}\cos(\alpha + \theta_2 - \theta_1),$$
$$y_1 = y_{10} + \frac{A\cos\alpha + B\sin\alpha}{\omega_2 - \omega_1}\sin(\alpha + \theta_2 - \theta_1). \tag{42}$$

4.4.1. În cazul reducerii la tachet punctiform, profilul teoretic este podara profilului real al camei, adică locul geometric al picioarelor perpendicularelor duse dintr-un punct fix pe tangentele curbei date.

Mai general, cele două drepte fac între ele un unghi constant. Pentru mecanismele cu tachet de rotaţie, punctul fix este chiar centrul de rotaţie al tachetului, iar pentru cele cu tachet de translaţie acesta este centrul de rotaţie al camei (fig. 7, 8).

4.4.2. Camă de rotaţie cu tachet de rotaţie:

$$x_1 = x_{10} + \frac{A\cos\alpha + B\sin\alpha}{\omega_2 - \omega_1}\cos(\alpha + \theta_2 - \theta_1),$$
$$\text{unde } A = -\omega_2 l + \omega_1(l - f\cos\theta_2), \tag{43}$$
$$y_1 = y_{10} + \frac{A\cos\alpha + B\sin\alpha}{\omega_2 - \omega_1}\sin(\alpha + \theta_2 - \theta_1),\ B = \omega_1 f\sin\theta_2.$$

4.4.3. Camă de rotaţie cu tachet de translaţie:

$$x_1 = x_{10} + \frac{A\cos\alpha + B\sin\alpha}{-\omega_1}\cos(\alpha + \theta_2 - \theta_1),$$
$$\text{unde } A = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[Z_2(t)] + \omega_1 \mathrm{e}, \tag{44}$$
$$y_1 = y_{10} + \frac{A\cos\alpha + B\sin\alpha}{-\omega_1}\sin(\alpha + \theta_2 - \theta_1),\ B = \omega_1 Z_2(t).$$

4.5. În cazul general, pentru un profil oarecare de tachet, relaţiile sînt

$$x_1(\lambda) = x_{21}(\nu, t) = x_{10} + x_2\cos\theta_{21} - y_2\sin\theta_{21},$$
$$y_1(\lambda) = y_{21}(\nu, t) = y_{10} + x_2\sin\theta_{21} + y_2\cos\theta_{21}, \tag{45}$$
$$A\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\nu} + B\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}\nu} = \omega_{21}\left(x_2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\nu} + y_2\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}\nu}\right),$$

din care, prin eliminarea parametrului $\nu_c(t)$, se găseşte fie profilul camei prin ecuaţii parametrice x_1 y_1, fie, prin inversare, legile de mişcare ale tachetului.

Mai general, la aceste trei ecuaţii care cuprind cinci parametri (t, x_1, y_1, x_2 şi y_2) mai trebuie adăugată o condiţie pentru a fi determinate sub

formă parametrică coordonatele x_1 y_1, x_2 y_2. O astfel de condiţie este, de exemplu, profilul tachetului. În plus se pot pune condiţii limitative asupra gabaritului mecanismelor, asupra unghiului de presiune etc. care intervin asupra constantelor din ecuaţiile camelor.

5. *Metoda grafoanalitică* a ecuaţiilor vectoriale cuprinde compunerea vectorială a vitezelor şi acceleraţiilor punctelor C_1 şi C_2 din punctul de contact C camă-tachet.

5.1. Pentru viteze, indiferent de felul profilelor, viteza relativă este îndreptată după tangenta comună a profilelor.

Presupunînd cunoscute viteza punctului C_1 aparţinînd camei şi direcţia vitezei punctului C_2 al tachetului, construcţia grafică se execută pentru relaţia vectorială

$$\overline{v}_{C_2} = \overline{v}_{C_1} + \overline{v}_{C_{21}}. \tag{46}$$

Dacă se notează prin α_1, α_2, α (fig. 9) pantele vitezelor $\overline{V}_{C_1}$, $\overline{V}_{C_2}$ şi $\overline{V}_{C_{21}}$, atunci prin proiecţie pe normala la profile se găseşte relaţia diferenţială care leagă panta profilului de viteze

$$v_{C_2} \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = v_{C_1} \sin(\alpha_1 - \alpha), \tag{47}$$

cu

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy_1}{dx_1}.$$

5.2. La acceleraţii, acceleraţia relativă nu mai este îndreptată după tangenta comună a profilelor. În general, dacă traiectoria relativă este tangentă profilelor în punctul de contact, ea are curbură diferită faţă de curburile profilelor camei sau ale tachetului.

5.2.1. Numai în cazul tachetului punctiform, traiectoria relativă a vîrfului său este chiar profilul camei, astfel că faţă de aceasta acceleraţia relativă se poate descompune în acceleraţie tangenţială cunoscută în direcţie şi în acceleraţie normală cunoscută complet din studiul vitezelor şi raza de curbură a camei. Astfel, din relaţia

$$\overline{a}^n_{C_2} + \overline{a}^t_{C_2} = \overline{a}^n_{C_1} + \overline{a}^t_{C_1} + \overline{a}^{cr}_{C_{21}} + \overline{a}^{rn}_{C_{21}} + \overline{a}^{rt}_{C_{21}} \tag{48}$$

se poate determina prin compunere vectorială (fig. 9) acceleraţia tangenţială a lui C_2 şi acceleraţia relativă tangenţială C_{21}. Prin proiecţia pe normală la profile se găseşte a doua relaţie vectorială, care leagă acceleraţiile de curburile profilului:

$$a^t_{C_2} \sin(\alpha_2 - \alpha) - a^n_{C_2} \cos(\alpha_2 - \alpha) = \\ = a^t_{C_1} \sin(\alpha_1 - \alpha) - a^n_{C_1} \cos(\alpha_1 - \alpha) + a^{cr}_{C_{21}} - a^{rn}_{C_{21}} \tag{49}$$

cu

$$\overline{a}^{cr}_{C_{21}} = 2\overline{\omega}_1 \times \overline{v}_{C_{21}}; \quad a^{rn}_{C_{21}} = \frac{v^2_{C_{21}}}{\rho_1}.$$

5.2.2. Pentru tacheţi cu profil oarecare nu se cunoaşte însă traiectoria relativă a punctului de contact. Pentru aceştia se pot cunoaşte

panta şi curbura traiectoriei relative în mişcarea elementară a centrului de curbură a tachetului, obţinîndu-se o reducere instantanee la tachetul punctiform. Se pot deci aplica ecuaţiile vectoriale de viteze şi acceleraţii pentru punctele K_1 şi K_2, coincidente în centrul de curbură al tachetului.

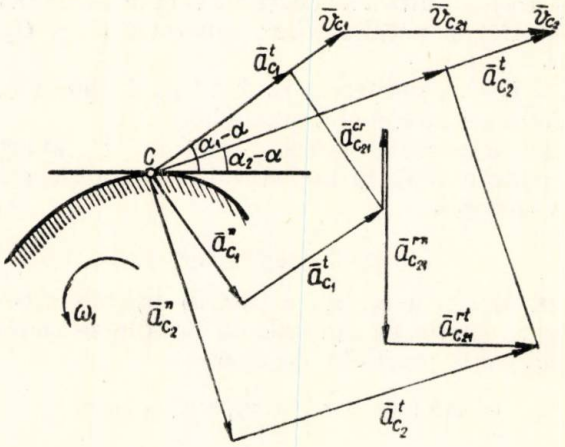


Fig. 9

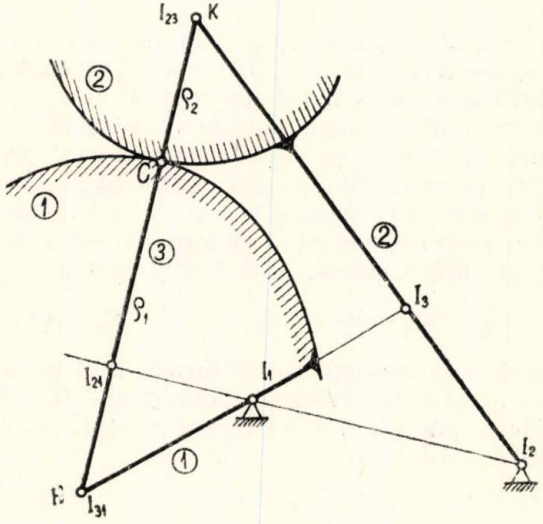


Fig. 10

Normala la această traiectorie relativă se confundă cu normala la profile, iar raza ei de curbură este egală cu suma razelor de curbură a profilului camei şi tachetului (Euler-Savary). Aceasta justifică apoi utilizarea înlocuirii cuplei superioare printr-o bară articulată în centrele de curbură ale profilelor, adică de lungime $l = \rho_1 + \rho_2$ (fig. 10).

Dacă pentru viteze era suficientă aproximarea profilelor cu tangenta comună, pentru acceleraţii este necesară aproximarea profilelor cu cercurile de curbură.

5.3. Mecanismul patrulater înlocuitor echivalent pentru calcule de viteze şi acceleraţii are prin construcţie articulaţiile I_{31} şi I_{32} ale bielei (3) confundate cu centrele de curbură H şi K ale camei (*1*) şi tachetului (*2*). Deoarece $K_2 \equiv K_3 \equiv I_{23}$ şi $H_1 \equiv H_3 \equiv I_{13}$, rezultă

$$\bar{v}_{K_{21}} = \bar{v}_{K_{31}} \quad \text{şi} \quad \bar{a}^r_{K_{21}} = \bar{a}^r_{K_{31}}. \tag{50}$$

Determinarea vitezei unghiulare ω_3 a bielei se poate face din viteza relativă $\bar{v}_{K_{21}}$, obţinută din studiul mecanismului cu camă, şi din viteza relativă $\bar{v}_{K_{31}}$, explicitată din studiul mecanismului patrulater:

$$\bar{v}_{K_{31}} = \bar{\omega}_{31} \times \overline{HK} = \bar{v}_{K_{21}}. \tag{51}$$

Determinarea acceleraţiei unghiulare ε_3 a bielei se face asemănător prin explicitarea acceleraţiei relative $a^r_{K_{21}}$ faţă de traiectoria relativă,

$$\bar{a}^r_{K_{21}} = \underline{\underline{\bar{a}^{rn}_{K_{21}}}} + \underline{\bar{a}^{rt}_{K_{21}}}, \tag{52}$$

şi a acceleraţiei relative $a^r_{K_{31}}$ faţă de centrul de rotaţie relativ:

$$\bar{a}^r_{K_{31}} = \underline{\underline{\bar{a}^r_{I_{31}}}} + \underline{\underline{\bar{a}^{rn}_{K_{31}I_{31}}}} + \underline{\bar{a}^{rt}_{K_{31}I_{31}}}. \tag{53}$$

Deoarece

$$\bar{a}^{rn}_{K_{21}} = \frac{v^2_{B_{21}}}{HK}\,\bar{n} = \bar{a}^{rn}_{K_{31}I_{31}} = -\,\omega^2_{31}\cdot\bar{I}_{31}\bar{K},$$

se găseşte

$$\bar{a}^{rt}_{K_{31}I_{31}} = \bar{\varepsilon}_{31} \times \overline{HK} = \bar{a}^{rt}_{K_{21}}. \tag{54}$$

5.4. Simplificarea calculelor se obţine prin utilizarea centrului instantaneu relativ dintre camă şi tachet $I_{12} = I_{21}$. Acesta se găseşte la intersecţia normalei comune a profilelor cu dreapta centrelor instantanee absolute ale camei şi tachetului, cunoscute din studiul vitezelor, studiu care este posibil pentru orice profile.

Distribuţiile vitezelor şi acceleraţiilor se pot afla pe baza relaţiilor

$$\underline{\underline{\bar{v}_{I_2}}} = \underline{\underline{\bar{v}_{I_1}}}\,; \quad \underline{\underline{\bar{a}_{I_2}}} = \underline{\underline{\bar{a}_{I_1}}} + \underline{\underline{\bar{a}^r_{I_{21}}}}, \tag{55}$$

în care acceleraţia relativă a punctelor confundate în centrul relativ este

$$\bar{a}^r_{I_{21}} = -\,\bar{\omega}_{21} \times \bar{u}_{21} = \omega^2_{21}\,\bar{d}_{21}, \tag{56}$$

unde

$\bar{u}_{21} = \bar{\omega}_{21} \times \bar{d}_{21}$ este viteza de schimbare relativă a centrului instantaneu relativ, $\dfrac{1}{d_{21}\cos\alpha} = \dfrac{1}{I_{21}K} - \dfrac{1}{I_{21}H}$, d_{21} — diametrul cercului de inflexiune în mişcarea relativă exprimat prin formula Euler-Savary, în care α este unghiul făcut de normala la profile cu direcţia diametrului.

Cu ajutorul centrului relativ se pot determina viteza şi acceleraţia oricăror puncte conform ecuaţiilor generale

$$\overline{v}_{D_2} = \overline{v}_{D_1} + \overline{v}_{D_{21}},$$

$$\overline{a}^n_{D_2} + \overline{a}^t_{D_1} = \overline{a}^n_{D_1} + \overline{a}^t_{D_1} + \overline{a}^{cr}_{D_{21}} + \overline{a}^r_{D_{21}}, \tag{57}$$

unde

$$\overline{a}^r_{D_{21}} = \overline{a}^r_{I_{21}} + \overline{a}^{r(n)}_{D_{21}I_{21}} + \overline{a}^{r(t)}_{D_{21}I_{21}}. \tag{58}$$

6. *Acceleraţii superioare.* Pentru aceasta se utilizează în continuare centrul instantaneu relativ al vitezelor ca punct de transferare a mişcărilor între camă şi tachet, deoarece acceleraţia sa relativă, de ordinul (n), se exprimă cu ajutorul acceleraţiilor inferioare presupuse cunoscute. Ecuaţiile vectoriale sînt

$$\overline{a}^{(n)}_{I_2} = \overline{a}^{(n)}_{I_1} + \overline{a}^{c(n)}_{I_{21}} + \overline{a}^{r(n)}_{I_{21}}, \tag{59}$$

în care acceleraţiile punctelor I_1 şi I_2 se descompun faţă de acceleraţiile altor puncte:

$$\overline{a}^{(n)}_I = \overline{a}^{(n)}_D + \overline{a}^{n(n)}_{ID} + \overline{a}^{t(n)}_{ID} \tag{60}$$

sau faţă de traiectoriile absolute respective, adică

$$\overline{a}^{(n)}_I = \overline{a}^{n(n)}_I = \overline{a}^{t(n)}_I \tag{61}$$

cu următoarele explicitări:

$$\begin{aligned} \overline{a}^{(n)n}_{ID} &= -A_n(\omega)\overline{DI}, \\ \overline{a}^{(n)t}_{ID} &= B_n(\omega)\overline{DI}, \end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned} &A_0(\omega) = 0\,;\ A_1(\omega) = \omega^2\,;\ A_2(\omega) = 3\omega\dot{\omega}, \\ &B_0(\omega) = \omega\,;\ B_1(\omega) = \dot{\omega}\,;\ B_2(\omega) = \ddot{\omega} - \omega^3, \\ &A_3(\omega) = 4\omega\ddot{\omega} + 3\dot{\omega}^2 - \omega^4, \\ &B_3(\omega) = \dddot{\omega} - 6\dot{\omega}\,\omega^2, \\ &A_4(\omega) = 5\omega\dddot{\omega} \times 4\ddot{\omega}^2 + 6\ddot{\omega}\dot{\omega} - 10\dot{\omega}\,\omega^3, \\ &B_4(\omega) = \ddddot{\omega} - 10\ddot{\omega}\,\omega^2 - 15\dot{\omega}^2\,\omega + \omega^5 \end{aligned} \tag{63}$$

şi

$$\begin{aligned} &a^{n(0)}_I = 0 \qquad a^{t(0)}_I = v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \\ &a^{n(1)}_I = \frac{v^2}{\rho} \qquad a^{t(1)}_I = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \\ &a^{n(2)}_I = \frac{3}{\rho}\,v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\,v^3; \qquad a^{t(n)}_I = \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{\rho}\,v^3. \end{aligned} \tag{64}$$

Acceleraţia complementară este cunoscută prin acceleraţiile relative de ordine inferioare

$$\bar{a}^{c(n)}_{I_{21}} = \sum_{k=1}^{n-1} D^{(k)}_n(\omega_1)\,\bar{a}^{r(k)}_{I_{21}}, \tag{65}$$

cu

$$D^{(0)}_1(\omega) = 2\omega i; \quad D^{(0)}_2(\omega) = 3\dot{\omega} i - 3\omega^2; \quad D^{(1)}_2(\omega) = 3\omega i,$$
$$D^{(0)}_3(\omega) = 4\ddot{\omega} i - 12\omega\dot{\omega} - 4\omega^3 i,$$
$$D^{(1)}_3(\omega) = 6\dot{\omega} i - 6\omega^2; \quad D^{(2)}_3(\omega) = 4\omega i. \tag{66}$$

Acceleraţia relativă a centrului instantaneu este de asemenea cunoscută prin acceleraţiile de ordine inferioare

$$\bar{a}^{r(n)}_{I_{21}} = -i\sum_{1}^{n}{}_k C^k_n \cdot \omega^{(n-k)}_{21}\,[\bar{u}^{r(k)} - \bar{v}^{r(k)}_{I_{21}}], \tag{67}$$

în care

$$\bar{u}^{r(k)}_{I_{21}} = \bar{b}^{r(k-1)}_{I_{21}} \quad \text{şi} \quad v^{r(k)}_{I_{21}} = \bar{a}^{r(k+1)}_{I_{21}},$$

viteza relativă de schimbare şi viteza relativă de deplasare de ordinul k fiind egale cu acceleraţiile de ordinul $k-1$. Viteza relativă de schimbare se obţine prin derivarea relativă faţă de sistemul $A_1x_1y_1$ al camei, care se găseşte în mişcare de transport, a vectorului de poziţie, care este

$$\bar{r}_{I_{21}} = \bar{r}_{B_{21}} + \frac{\partial \bar{r}_{B_{21}}}{\partial \theta_{21}}\, i, \tag{68}$$

$$\bar{u}^{r(k)}_{I_{21}} = \frac{\partial^k \bar{r}_{I_{21}}}{\partial t^k}, \tag{69}$$

iar dacă vectorul $\bar{r}_{I_{21}}$ este cunoscut faţă de axele fixe, atunci

$$\frac{\partial \bar{r}_{I_{21}}}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}\bar{r}_{I_{21}}}{\mathrm{d}t} - \omega_1 \bar{r}_{I_{21}}\, i. \tag{70}$$

Acceleraţia relativă de schimbare a centrului relativ I se poate calcula şi din acceleraţia absolută de schimbare a aceluiaşi centru relativ (faţă de planul fix O) prin

$$b^{(n)}_{I^0_{21}} = b^{(n)}_{I^1_{21}} + b^{c(n)}_{I^{01}_{21}} + b^{r(n)}_{I^{01}_{21}}. \tag{71}$$

Calculele acceleraţiilor superioare se pot efectua şi pentru orice alte puncte dacă se exprimă acceleraţia relativă faţă de aceea a centrului de viteze

$$\underline{\bar{a}^{(n)}_{D_2}} = \underline{\bar{a}^{(n)}_{D_1}} + \underline{\bar{a}^{c(n)}_{D_{21}}} + \underline{\bar{a}^{r(n)}_{D_{21}}}, \tag{72}$$

unde

$$\underline{\bar{a}^{r(n)}_{D_{21}}} = \underline{\bar{a}^{r(n)}_{I_{21}}} + \underline{\bar{a}^{r(n)n}_{D_{21}I_{21}}} + \underline{\bar{a}^{n(n)t}_{D_{21}I_{21}}}. \tag{73}$$

7. Aplicaţie pentru cama de rotaţie cu profil circular R cu excentricitatea f şi tachet plan de translaţie (fig. 11)

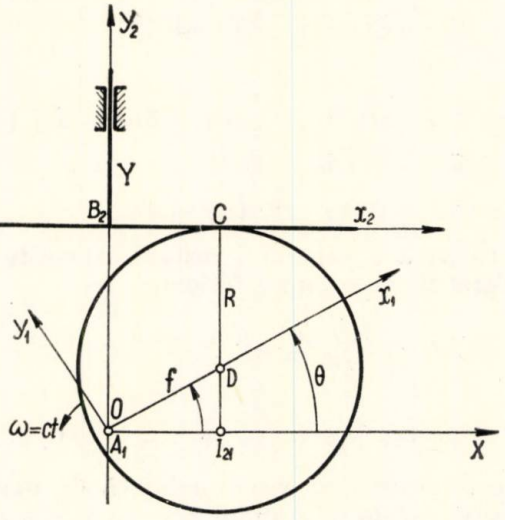


Fig. 11

Punctul I_2 se deplasează rectiliniu, ca şi punctul B_2 al tachetului, adică avem

$$Y_2 = R + f\sin\theta\cdot i,$$
$$V_{I_2} = f\cos\theta\cdot\omega\cdot i,$$
$$a_{I_2} = f\cdot i\cdot(-\sin\theta\,\omega^2 + \cos\theta\cdot\dot{\omega}),$$
$$a^{(2)}_{I_2} = f\cdot i\cdot(-\cos\theta\,\omega^3 - 3\sin\theta\cdot\omega\cdot\dot{\omega} + \cos\theta\,\ddot{\omega}),$$
$$a^{(3)}_{I_2} = f\cdot i\cdot(\sin\theta\cdot\omega^4 - 6\cos\theta\cdot\omega^2\cdot\dot{\omega} - 3\sin\theta\cdot\bar{\omega}^2 - 4\sin\theta\,\omega\cdot\ddot{\omega} + \cos\theta\cdot\dddot{\omega}).$$

Punctul I_1 al camei are mişcare circulară cu raza $f\cos\theta$, adică

$$v_{I_1} = \omega i f\cos\theta,$$
$$a_{I_1} = (-\omega^2 + \dot{\omega}i)f\cos\theta,$$
$$a^{(2)}_{I_1} = [-3\omega\cdot\dot{\omega} + (\ddot{\omega} - \omega^3)i]f\cos\theta,$$
$$a^{(3)}_{I_1} = [-4\,\omega\,\ddot{\omega} - 3\,\dot{\omega}^2 + \omega^4 + (\dddot{\omega} - 6\,\dot{\omega}\,\omega^2)i]f\cos\theta.$$

Reiese

$$\bar{v}_{I_{21}} = \bar{v}_{I_2} - \bar{v}_{i_1} = 0,$$
$$\bar{a}^{r}_{I_{21}} = \bar{a}_{I_2} - a_{I_1} = f\,\omega^2\,e^{-i\theta},$$
$$\bar{a}^{c(2)}_{I_{21}} = D^{(1)}_2(\omega)\,\bar{a}^{r(1)}_{I_{21}} = 3f\,\omega^2\,i\,e^{-i\theta},$$

$$\bar{a}_{I_{21}}^{r(2)} = \bar{a}_{I_2}^{(2)} - \bar{a}_{I_1}^{(2)} - \bar{a}_{I_{21}}^{c(2)} = 3f(\omega\,\dot{\omega} - i\,\omega^3)\,e^{-i\theta},$$

$$\bar{a}_{I_{21}}^{c(3)} = D_3^{(1)}(\omega)\,\bar{a}_{I_{21}}^{r(1)} + D_3^{(2)}(\omega)\,\bar{a}_{I_{21}}^{r(2)} = (18\,\dot{\omega}\,\omega^2 i + 6\,\omega^4) f e^{-i\theta},$$

$$\bar{a}_{I_{21}}^{r(3)} = \bar{a}_{I_2}^{(3)} - \bar{a}_{I_1}^{(3)} - \bar{a}_{I_{21}}^{c(3)} = (-7\,\omega^4 + 4\omega\,\ddot{\omega} + 3\dot{\omega}^2 - 18\dot{\omega}\omega^2 i) f e^{-i\theta}$$

sau, deoarece

$$\bar{r}_{I_2} = f\cos\theta,$$

$$\bar{u}_{I_{21}}^{r(1)} = -f\,\omega\,i\,e^{-i\theta},$$

$$\bar{u}_{I_{21}}^{r(2)} = -f(\dot{\omega}\,i + 2\omega^2)\,e^{-i\theta},$$

$$\bar{u}_{I_{21}}^{r(3)} = -f(\ddot{\omega}\,i + 6\,\omega\,\dot{\omega} - 4\,\omega^3 i)\,e^{-i\theta},$$

astfel că

$$\bar{a}_{I_{21}}^{r} = i\,\omega\,(\bar{u}_{I_{21}}^{r(1)} - \bar{v}_{I_{21}}^{r(1)}) = f\,\omega^2 e^{-i\theta},$$

$$\bar{a}_{21}^{r(2)} = i\,[2\,\dot{\omega}\,(\bar{u}_{I_{21}}^{r(1)} - v_{I_{21}}^{r(1)}) + \omega(\bar{u}_{I_{21}}^{r(2)} - \bar{v}_{I_{21}}^{r(2)}) = 3f(\omega\,\dot{\omega} - i\omega^3)\,e^{-i\theta},$$

$$\bar{a}_{I_{21}}^{r(3)} = i\,[3\,\ddot{\omega}\,(\bar{u}_{I_{21}}^{r(1)} - \bar{v}_{I_{21}}^{r(1)}) + 3\,\dot{\omega}\,(\bar{u}_{I_{21}}^{r(2)} - v_{I_{21}}^{r(2)}) + \omega\,(u_{I_{21}}^{r(3)} - v_{I_{21}}^{r(3)})] =$$

$$= [-7\,\omega^4 + 4\,\omega\,\ddot{\omega} + 3\,\dot{\omega}^2 - 18\,\dot{\omega}\omega^2 i] f e^{-i\theta},$$

accelerațiile relative fiind verificate.

Primită la redacție la 27 noiembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Chr. Pelecudi, *Metoda acceleraţiilor superioare compuse în lanţurile cinematice plane*, St. cerc. mec. apl., *3* (1965).
2. — , *Metoda acceleraţiilor compuse în lanţurile cinematice plane*, St. cerc. mec. apl., *2* (1965).
3. D. Mangeron, *Asupra unor proprietăţi ale acceleraţiilor reduse de ordin oarecare*, Bul. Inst. politehnic Iaşi, **3**, *1–2* (1957).
4. Chr. Pelecudi şi R. C. Bogdan, *Sinteza mecanismelor cu came la prescrierea valorilor arcelor de curbă*, St. cerc. mec. apl., *6* (1962).

REGIMURI DE FUNCȚIONARE ALE MECANISMELOR CU ELEMENTE RIGIDE MULTIPOZIȚIONALE[1)]

de I. SZÉKELY și T. MUREȘAN
Institutul politehnic Cluj

531.1

În lucrarea [1], la studierea mecanismelor de comandă logică cu elemente rigide și elastice s-au luat în considerare elementele bipoziționale. În prezenta lucrare se iau în considerare mecanismele cu elemente rigide și elastice multipoziționale. Se studiază regimurile de funcționare lentă și de funcționare tip selector ale elementelor rigide multipoziționale. Se au în vedere mai multe came fixate pe un arbore, care pun în mișcare tacheții corespunzători, sau o singură camă cu mai mulți tacheți, așezați în diferite poziții radiale. Se studiază, de asemenea, condițiile de compatibilitate ale programului de lucru al selectorului în cazurile regimurilor de funcționare considerate.

Realizarea unei scheme de comandă directă cu elemente mecanice presupune utilizarea unor elemente rigide cu un număr finit de stări care permit o transmitere practic instantanee a semnalelor. O schemă secvențială presupune, în general, utilizarea unor elemente capabile să înmagazineze o cantitate de energie sub o formă oarecare pe care s-o poată receda ulterior sistemului. Aceste elemente, prin reacția lor de timp, permit funcționarea schemei în mai mulți timpi. În cazul elementelor mecanice, înmagazinarea energiei se face fie cu ajutorul maselor în mișcare, fie cu ajutorul elementelor elastice. Apare astfel posibilitatea funcționării secvențiale a automatelor finite cu elemente mecanice [1], [2].

Este necesar să se precizeze că un element de întîrziere (releu mecanic) [1] este format dintr-un element motor (M), un element de ieșire

1) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, *3*, (1966) (în limba franceză)

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 22 NR. 3 P. 853–860 BUCUREȘTI 1966

(I) şi un element de comandă (C) (fig. 1). Elementul motor acţionează dinamic asupra elementului ieşire, formînd împreună cu acesta un mecanism cu structură variabilă. Elementul de comandă acţionează logic asupra elementului de ieşire, determinînd structura mecanismului considerat, iar elementul de ieşire, care răspunde cu o întîrziere τ la semnalul dat de elementul de comandă, dă în acelaşi timp o reacţie logică rigidă.

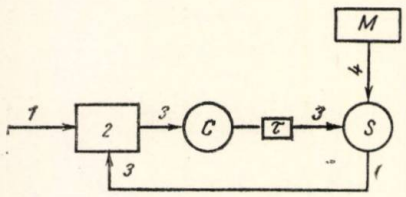


Fig. 1.
1 – intrare; 2 – bloc logic; 3 – logic; 4 – dinamic.

ELEMENT MULTIPOZIŢIONAL. Se numeşte element multipoziţional al unui ansamblu de elemente un element care poate avea $m \geqslant 2$ stări stabile distincte (unde m este un întreg pozitiv), astfel ca perioada de tranziţie de la o stare la alta să fie funcţional neglijabilă.

În cazul cel mai general, stările elementului multipoziţional sînt stări de mişcare periodică [1], însă în practică se întîlnesc mai des elemente cu poziţii fixe. Studiul funcţionării unor astfel de elemente se face ataşîndu-le o variabilă m valentă

$\xi \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, adoptîndu-se de cele mai multe ori calculul modulo m.

Fie mecanismul cu camă (fig. 2), avînd un număr de m tacheţi de translaţie dispuşi radial, astfel ca unghiul dintre doi tacheţi învecinaţi

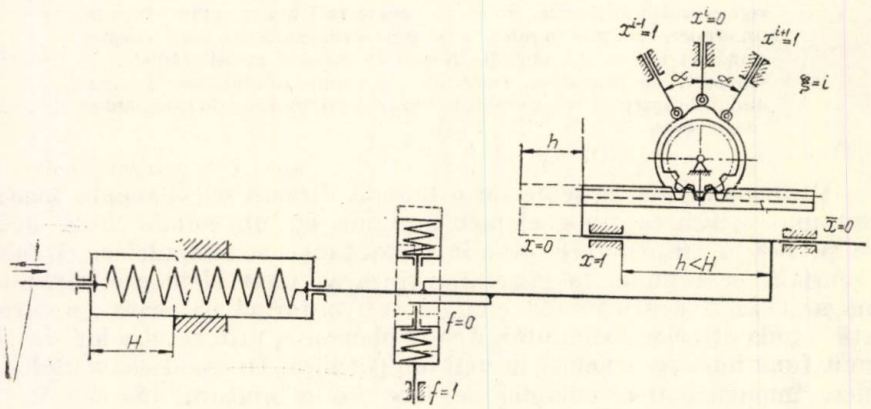


Fig. 2.

să fie $\alpha = \frac{2\pi}{m}$. Cama poate avea m poziţii fixe $0, 1, \ldots, m-1$. În fiecare dintre aceste poziţii fixe, unul dintre tacheţi ocupă poziţia extremă superioară, determinată de raza maximă a camei, iar restul tacheţilor ocupă poziţii extreme inferioare, determinate de raza minimă a camei.

Tachetului corespunzător poziției $\xi = i$ i se atașează variabila bivalentă x^i [1], astfel ca

$$x^i = 0 \quad (\text{pentru } \xi = i),$$
$$x^i = 1 \quad (\text{pentru } \xi \neq i).$$

Rezultă

$$x^i = \overline{L_i(\xi)},$$

unde $L_i(\xi)$ sînt funcțiile lagrangiene de interpolare modulo m definite de relația [3]

$$L_i(\xi) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } \xi \equiv i \pmod{m}, \\ 0 \text{ pentru } \xi \not\equiv i \pmod{m}. \end{cases}$$

În cazul unui modul prim, acestea au o formă polinominală [4]:

$$L_0(\xi) \equiv (m-1)\,\xi^{m-1} + 1 \pmod{m},$$

$$L_i(\xi) \equiv (m-1)\,\xi^{m-1} - \sum_{j-1}^{m-2} i^j\,\xi^{m-j-1} \pmod{m}$$
$$(\text{pentru } i = 1,\ldots,m-1).$$

Ținînd seama de relația

$$\overline{L_i(\xi)} = 1 - L_i(\xi),$$

rezultă că

$$X^0 \equiv \xi^{m-1} \pmod{m},$$

$$X^i \equiv 2 + \sum_{j=1}^{m-2} i^j\,\xi^{m-j-1} \pmod{m} \quad (\text{pentru } i = 1,\ldots,m-1).$$

În calculul algebric curent al automatelor finite, aceste forme nu se utilizează, operîndu-se cu funcțiile lagrangiene în baza unor proprietăți fundamentale care rezultă din însăși definiția lor [3]:

$$L_i(\xi).L_j(\xi) = 0 \pmod{m} \quad (\text{pentru } i \not\equiv j),$$
$$[L_i(\xi)]^2 = L_i(\xi),$$
$$\sum_{i=0}^{m-1} L_i(\xi) = \bigcup_{i=0}^{m-1} L_i(\xi) = 1.$$

Regim de funcționare lentă. Se consideră că mecanismul cu camă din figura 2 se pune în mișcare prin intermediul unui angrenaj cremalieră-roată dințată (roata dințată fiind solidară cu cama) de ieșirea x a unui releu mecanic [1] bipozițional X cu poziții fixe, astfel ca deplasării ieșirii x a releului din poziția $x = 1$ în poziția $x = 0$ să-i corespundă o rotație completă a camei în sens orar, iar deplasării ieșirii x din poziția $x = 0$ în poziția $x = 1$ să-i corespundă o rotație completă a camei în

sens antiorar. Dacă perioada de oscilaţie T a elementului conducător (1) al relului mecanic este suficient de mare, atunci deplasarea unghiulară a camei se face lent, funcţionarea ei fiind analogă funcţionării unui contact multipoziţional al unui releu electromagnetic lent. Prin urmare, dacă f este comanda releului mecanic, atunci ecuaţiile caracteristice capabile să descrie funcţionarea ansamblului considerat sînt [3]

$$X_{N+1} = f_N,$$

$$\xi_{N+1} \equiv \bar{f}_N [\xi_N - L_{m-1}(\xi) + 1] + f_N [\xi_N + L_0(\xi_N) - 1] \pmod{m},$$

$$x^i_{N+1} = \overline{L_i(\xi_{N+1})}.$$

REGIMURI DE SELECTOR. Fie un releu mecanic bipoziţional (fig. 3), combinat cu două sectoare de roţi dinţate A şi B. În poziţia $f = 1$ a elementului comandă (*9*), ieşirile releului sînt în poziţiile fixe $x = 1$, $\bar{x} = 0$, manşonul (*2*) fiind blocat de roata dinţată A (situată în poziţia $A = 1$), care, la rîndul ei, este oprită de tija (*5*). Elementul conducător (*1*), oscilînd, comprimă arcul (*4*). La trecerea comenzii în poziţia $f = 0$ (sensul indicat de săgeată), tija (*5*) eliberează roata A. Ca urmare, elementul conducător (*1*) prin arcul comprimat (*4*) deplasează manşonul (*2*) spre dreapta şi mută ieşirile în poziţiile $x = 0$, $\bar{x} = 1$. Concomitent cu aceasta, cremaliera roteşte ambele roţi A şi B în sens orar cu un unghi α, astfel că roţile ocupă poziţiile $A = 0, B = 1$. În această situaţie, tija (*8*), împinsă de arcul comprimat (*7*), blochează roata B., fixînd în acelaşi timp ieşirile în poziţiile $x = 0$, $\bar{x} = 1$. Elementul conducător continuă

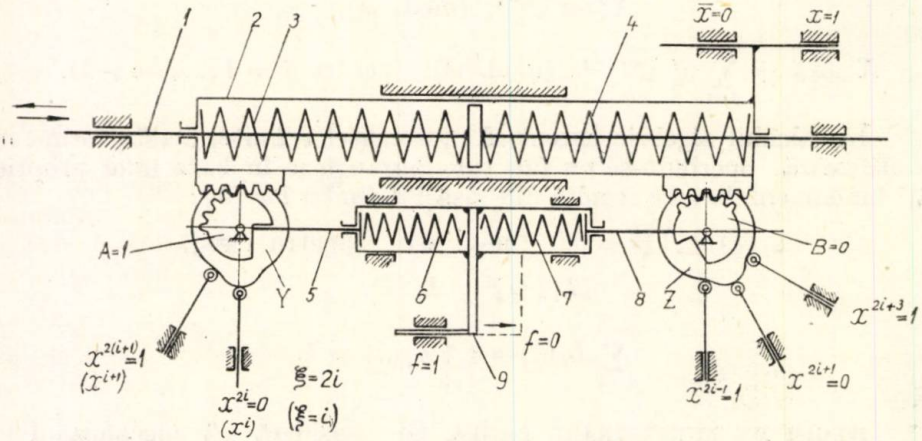


Fig. 3.

să oscileze, comprimînd arcul (*3*). În concluzie se poate afirma că, la fiecare trecere a comenzii din poziţia $f = 1$ în poziţia $f = 0$, sectoarele de roţi dinţate A şi B se rotesc în sens orar; cînd se trece din poziţia $f = 0$ în $f = 1$, ambele sectoare de roţi se rotesc în sens antiorar.

Se consideră un mecanism cu camă cu m tacheți de translație (notat cu Y), legat de roata dințată A din figura 3 (pe roata dințată B nu se montează deocamdată nimic) fixată pe arbore prin intermediul unei cuple unilaterale (în fig. 3 această cuplă nu este reprezentată) în așa fel ca rotirea ei să fie posibilă numai în sens orar. Menționăm că în cazul de față tijele mecanismului sînt notate cu x^i, x^{i+1},... (în fig. 3 sînt în paranteze); notațiile x^{2i}, $x^{2(i+1)}$,... (care în fig. 3 nu sînt în paranteze) se vor folosi la tratarea cazului al doilea, unde se utilizează ambele sectoare de roți dințate A și B. Construcția mecanismului pe care îl analizăm (care cuprinde deci numai roata A fără roata B) permite rotirea camei în sens orar cu un unghi $\alpha = \frac{2\pi}{m}$ numai dacă comanda releului este în poziția $f_{N-1} = 1$ la timpul $N-1$ și în poziția $f_N = 0$ la timpul imediat următor. În toate celelalte cazuri, poziția camei rămîne neschimbată. Rezultă de aici că funcționarea unui astfel de element multipozițional este similară cu funcționarea căutătorului pas cu pas. Prin urmare, ecuațiile caracteristice au forma [3].

$$x_{N+1} = f_N,$$

$$\xi_{N+1} = \xi_N + f_{N-1}\bar{f}_N \qquad (\text{mod. } m),$$

$$x^i_{N+1} = \overline{L_i(\xi_{N+1})}.$$

În continuare se consideră cazul cînd și pe roata dințată B este montat un mecanism cu camă (notat cu Z) cu m tacheți de translație. Cama Z este acționată tot prin intermediul unei cuple unilaterale, dar care permite rotirea ei numai în sens antiorar. Astfel se obține un ansamblu format din două mecanisme cu came, în care cama Y se rotește în sens orar cu un unghi $\alpha = \frac{2\pi}{m}$ numai dacă $f_{N-1} = 1$ și $f_N = 0$, iar cama Z se rotește în sens antiorar cu același unghi α numai dacă $f_{N-1} = 0$ și $f_N = 1$ (fig. 3). La valorile $f_{N-1} = f_N = 0$ sau $f_{N-1} = f_N = 1$, camele Y și Z nu-și schimbă poziția. În celelalte două cazuri (considerate mai sus), camele se rotesc, dar nu simultan; cînd $f_{N-1} = 1$ și $f_N = 0$, se rotește cama Y în sens orar, iar cînd $f_{N-1} = 0$ și $f_N = 1$, se rotește cama Z în sens antiorar. Menționăm că un astfel de mecanism a fost realizat practic (fig. 4) și funcționează satisfăcător.

Se atașează tacheților camei Y variabilele binare x^0, x^2,..., $x^{2(m-1)}$ (considerînd că tacheții respectivi se succed în sens orar), iar tacheților camei Z variabilele binare x^1, x^3,..., x^{2m-1} (considerînd că tacheții respectivi se succed în sens antiorar), în așa fel ca unei poziții $f = 1$ a comenzii releului (fig. 3.) să-i corespundă o poziție $x^{2i} = 0$, $x^{2i+1} = 0$ a celor două roți Y și Z. Ansamblului considerat i se atașează variabila ξ $2m$ valentă, astfel ca

$$\xi = K \text{ (pentru } x^K = 0 \text{ și } x^{K+1} = 0),$$

unde $k = 0,1,\ldots,2\ m-1.$

Cum $\xi \in \{0,1,\ldots,2\ m-1\}$, se va adopta calculul modulo $2m$. Ţinînd seama de funcţionarea celor două mecanisme cu came Y şi Z acţionate de releul mecanic X din figura 3 (prin intermediul cuplelor

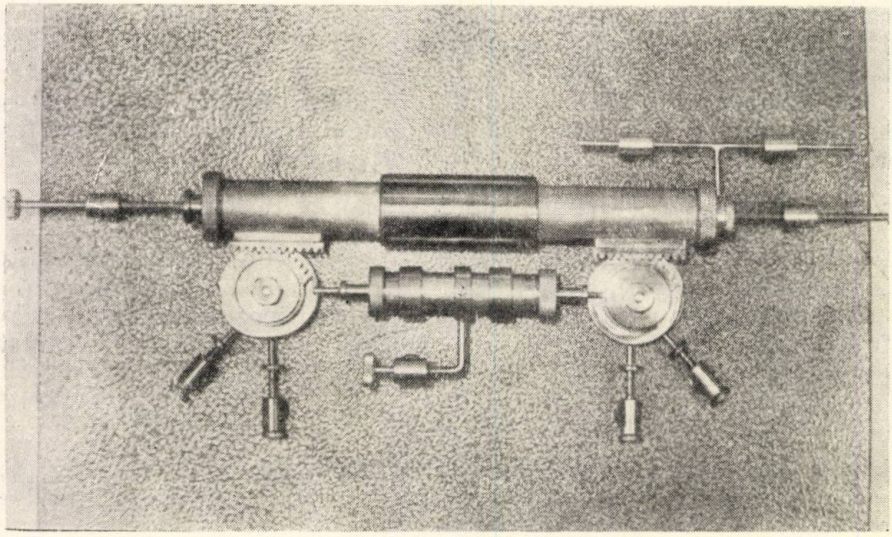


Fig. 4

unilaterale) şi avînd în vedere definiţia variabilei ξ, se pot scrie ecuaţiile caracteristice sub forma

$$x_{N+1} = f_N,$$

$$\xi_{N+1} \equiv \xi_N + f_{N-1} \approx f_N \quad (\text{mod. } 2m),$$

$$x^K_{N+1} = \overline{L_{K-1}(\xi_{N+1}) + L_K(\xi_{N+1})} \quad (\text{pentru } K = 0, 1,\ldots,2\ m-1),$$

unde funcţia $f_{N-1} \approx f_N$ (neechivalenţa) este dată de tabloul

$f_{N-1} \approx f_N$	$\overbrace{0\ 1}^{f_N}$
f_{N-1} 0	0 1
f_{N-1} 1	1 0

CONDIŢII DE COMPATIBILITATE A PROGRAMULUI DE LUCRU AL SELECTORULUI. În general, într-o shemă care conţine butoanele $a,\ldots,b$ releele $y,\ldots,z$ şi selectorul ξ acţionat de releul X, comanda f a relelului X este o funcţie de forma

$$f_N = f(a_N,\ldots,b_N,\ \xi_N\ x_N,\ y_N,\ldots,z_N).$$

Programul de lucru al selectorului este dat dacă se dă funcția bivalentă [3].

$$F(a_N, a_{N-1}, \ldots, b_N, b_{N-1}, \xi_N, \xi_{N-1}, x_N, x_{N-1}, y_N, y_{N-1}, \ldots, z_N, z_{N-1}) = \xi_{N+1} - \xi_N.$$

În cele două cazuri de regimuri de selector realizate de mecanismele cu came studiate mai sus, problema se reduce la determinarea condiției în care o funcție F se poate pune sub formele

$$F(a_N, a_{N-1}, \ldots, z_N, z_{N-1}) \approx f_{N-1} \cdot \bar{f}_N = f(a_{N-1}, \ldots, z_{N-1}) \cdot \overline{f(a_N, \ldots, z_N)}, \quad (1)$$

$$F(a_N, a_{N-1}, \ldots, z_N, z_{N-1}) = f_{N-1} \approx f_N = f(a_{N-1}, \ldots, z_{N-1}) \approx f(a_N, \ldots, z_N), \quad (2)$$

unde

$$f_{N-1} \cdot \bar{f}_N \equiv f_{N-1}(f_N + 1) \pmod 2,$$

$$f_{N-1} \approx f_N \equiv f_{N-1} + f_N \pmod 2$$

Notînd

$$F(a_i, a_{i-1}, \ldots, z_i, z_{i-1}) = \beta_{i-1i},$$

$$f(a_i, \ldots, z_i) = V_i$$

și considerînd o evoluție a schemei din starea ei de repaus pînă ce după $K + 1$ timpi schema reintră în repaus, relațiile (1) și (2) conduc la sistemele de ecuații modulo 2 :

$$\left.\begin{aligned} &V_0 (V_0 + 1) \equiv \beta_{00} \equiv 0 \pmod 2 \\ &V_{i-1} (V_i + 1) \equiv \beta_{i-1i} \pmod 2 \text{ (pentru } i = 1, \ldots, K), \\ &V_K = V_0 ; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} &V_0 + V_0 \equiv \beta_{00} \equiv 0 \pmod 2, \\ &V_{i-1} + V_i = \beta_{i-1i} \pmod 2 \text{ (pentru } i = 1, \ldots, K), \\ &V_K = V_0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Sistemul (3) admite soluția

$$V_{i-1} = \beta_{i-1i} \qquad (\text{pentru } i = 0, 1, \ldots, K - 1)$$

dacă valorile funcției F satisfac condiția

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{i-1i} \cdot \beta_{ii-1} \equiv 0 \pmod 2 \text{ (pentru } i = 1, \ldots, K - 1, \\ &\beta_{K-1K} \cdot \beta_{01} \equiv 0 \pmod 2 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

În adevăr, în acest caz avem

$$V_{i-1} \cdot V_i \equiv 0 \pmod 2$$

și

$$V_{i-1} (V_i + 1) \equiv \beta_{i-1i} \pmod 2,$$

ceea ce conduce la

$$V_{i-1} \equiv \beta_{i-1i} \pmod 2 \text{ (pentru } i = 0, 1, \ldots, K - 1).$$

În celălalt caz, dacă însumăm ecuaţiile sistemului (4), obţinem relaţia

$$2\sum_{i=0}^{K-1} V_i \equiv \sum_{i=1}^{K} \beta_{i-1i} \pmod 2. \tag{6}$$

Rezultă deci că, dacă valorile funcţiei F satisfac condiţia

$$\sum_{i=1}^{K} \beta_{i-1i} \equiv 0 \pmod 2, \tag{7}$$

atunci sistemul (4) este compatibil nedeterminat şi soluţia se obţine din relaţia de recurenţă

$$V_i \equiv \beta_{i-1i} - V_{i-1} \pmod 2 \quad (\text{pentru } i = 1,\ldots,K-1),$$

după ce în prealabil s-a ales o valoare arbitrară a lui V_0.

Cum $V_0 \in \{0, 1\}$, rezultă că sistemul (3) admite două soluţii dacă relaţia (7) este satisfăcută, ceea ce se explică prin egalitatea

$$f_{N-1} + f_N \equiv \bar{f}_{N-1} + \bar{f}_N \pmod 2$$

care arată că, f fiind o funcţie care satisface relaţia (2), $\bar{f}$ satisface de asemenea relaţia (2).

Relaţiile (5) şi (7) de compatibilitate a sistemelor (3) şi (4) reprezintă, respectiv, condiţiile de compatibilitate a programului de lucru al selectorului pentru cele două scheme de mecanisme cu came (una cu o singură camă Y, iar cealaltă cu două Y şi Z), combinate cu releul mecanic din figura 2. Pentru ca selectorul să revină după un ciclu în poziţia iniţială, trebuie să fie satisfăcute relaţiile

$$\sum_{i=1}^{K} \beta_{i-1i} \equiv 0 \pmod m$$

$$\sum_{i=1}^{K} \beta_{i-1i} \equiv 0 \pmod{2m} \Rightarrow \sum_{i=1}^{K} \beta_{i-1i} \equiv 0 \pmod 2$$

care presupune adevărată relaţia

$$k \geqslant 2m.$$

BIBLIOGRAFIE

1. I. Székely, T. Mureşan, Al. Leluţiu, *Mecanisme de comandă logică cu elemente rigide şi elastice*, St. cerc. mec. apl., *4* (1965).
2. L. Livovschi, *Automate finite cu elemente mecanice*, St. cerc. mec. apl., *1* (1965).
3. Gr. C. Moisil, *Teoria algebrică a mecanismelor automate*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1959.
4. I. Székely, T. Mureşan, *Interpolarea faţă de un modul prim*, Buletinul ştiinţific al Institutului politehnic Cluj, *8* (1965).

METODE DE CALCUL LA UZURĂ ŞI UTILIZAREA ÎN CONSTRUCŢIA DE MAŞINI

de DAN PAVELESCU
Centrul de mecanica solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

539.6 : 621

În această lucrare de sinteză sînt prezentate cîteva tendinţe noi privind calculul la uzură al pieselor metalice, în special privind uzura prin microaşchiere, de contact elastic şi plastic, precum şi unele aspecte aplicative care interesează proiectarea cuplurilor de frecare ce se pretează la calculul la uzură.

În două lucrări anterioare cu caracter de sinteză [1], [2] au fost prezentate aspectele, pe care autorul le-a considerat esenţiale, pentru a reflecta evoluţia şi stadiul cercetărilor teoretice şi aplicative asupra fenomenului frecării şi celui al uzurii [1]).

Eficienţa cercetărilor menţionate poate fi confirmată în măsura în care se creează posibilitatea de proiectare pe baze ştiinţifice prin calcularea rezistenţei sau pierderilor prin uzură [2]). Din acest punct de vedere considerăm că rezultatele nu sînt concordante cu volumul cercetărilor întreprinse pe plan mondial. Dată fiind importanţa problemei, autorul şi-a propus să sublinieze unele aspecte care caracterizează calculul la uzură şi utilizarea lui cu întîrziere în construcţia de maşini.

Relativ nu de mult, cunoscutul specialist M. M. Hruşciov a apreciat că „piesele de maşini nu se calculează la uzură nici în Uniunea Sovietică, nici în alte ţări, cu toate că, după cum trebuie să se presupună pentru

[1]) Privind stadiul metodologiei şi al aparaturii experimentale, se consacră o lucrare de sinteză separată.

[2]) Calculul la uzură, desigur, constituie numai unul dintre aspectele calculului sistemelor mecanice.

unele piese, astfel de calcule sînt posibile". El a conchis că metodele de calcul la uzură se dezvoltă foarte slab, explicînd această situaţie prin „neclarificarea căilor prin care este posibilă studierea raţională a problemei şi lipsa cererilor pentru astfel de metode de calcul din partea constructorilor şi proiectanţilor care creează maşinile" [3].

Complexitatea fenomenului uzurii în legătură cu cel al frecării, care a condus la existenţa mai multor teorii şi a unor aprecieri încă în discuţie [1], [2], poate fi de asemenea una dintre principalele cauze ale situaţiei constatate atunci şi care nu s-a modificat esenţial în perioada ce a urmat.

În cadrul lucrărilor conferinţei unionale de frecare şi uzură la care ne-am referit, au fost subliniate cîteva tendinţe noi privind calculul la uzură al pieselor metalice. Astfel, B. I. Ghinţburg şi A. S. Pronikov au fost de părere că în cazul în care se cunoaşte legea elementară a uzurii, care leagă intensitatea uzurii liniare de condiţiile exterioare ale frecării (sarcină specifică, viteză) şi de parametrii care caracterizează proprietăţile materialelor pieselor conjugate, se poate determina repartizarea sarcinilor specifice şi uzura liniară după diferite perioade de funcţionare ale unei îmbinări. Pe această idee, primul a calculat durata de funcţionare a segmenţilor de piston, iar cel de-al doilea, după cum se va vedea, alte piese simple de maşini [4].

Pentru anumite condiţii de frecare şi feluri de uzură au fost stabilite unele legi elementare ale uzurii. De exemplu dependenţa intensităţii uzurii de sarcina specifică în cazul frecării cu unele particule abrazive fixate (cînd viteza de uzură este proporţională cu viteza de alunecare relativă şi cu presiunea de contact pe suprafaţa de frecare).

V. M. Treier a propus calcularea durabilităţii pieselor metalice de maşini pornind de la *ipoteza* că *intensitatea uzurii este proporţională cu lucrul mecanic de frecare* [3] (dar această ipoteză nu este justificată în cazul unei uzuri pur abrazive).

Din alte lucrări rezultă că în practica inginerească din U.R.S.S. uzura pieselor în frecare este evaluată prin *uzura liniară* (I_h) şi *uzura în greutate* (I_q) exprimate prin

$$I_h = \frac{\Delta h}{L}; \quad I_q = \frac{Q}{A_a L} (\mathrm{g/cm^3}); \quad I_q \approx I_h \nu_s, \tag{1}$$

unde Δh este înălţimea stratului uzat, L distanţa de frecare (alunecare), Q greutatea materialului uzat din suprafaţa reală de contact, A_a suprafaţa aparentă de contact şi ν_s greutatea specifică a materialului [5]. Aceste „intensităţi de uzură" arată că, de fapt, uzura *este direct proporţională cu drumul de frecare.*

Se admite în general determinarea valorilor de mai sus fie în condiţii reale de exploatare, fie, mai ales, prin intermediul maşinilor de încercat la uzură, care modelează condiţiile de frecare.

V. I. Kraghelski apreciază viteza de uzură liniară ca fiind una dintre cele mai indicatoare caracteristici ale uzurii şi că, dispunînd de această valoare împreună cu uzura liniară limită, putem calcula traiec-

toria şi durata de funcţionare sigură a maşinii sau a unora dintre elementele ei [6] [3]).

Pentru rezolvarea anumitor probleme practice (de exemplu de frînare) se utilizează şi „criteriul energetic" al uzurii (I_w):

$$I_w = \frac{V}{W} \text{ cm}^2/\text{kg} = I_h \cdot \frac{A_a}{F}, \tag{2}$$

exprimat prin raportul dintre volumul materialului îndepărtat (V) şi lucrul mecanic al forţelor de frecare ($W = L \cdot F$).

Experienţele efectuate de P. A. Rebinder şi V. D. Kuznețov au arătat că I_w este invers proporţional cu densitatea şi că *trecerea în condiţii de frecare uşor diferite duce la variaţii de cîteva ordine* [5]. Aprecierea vitezei de uzură energetică este de preferat în cazul dispozitivelor de frînare sau de ambreiare; atunci cînd interesează aspectul contrar, al micşorării frecării, este de preferat considerarea vitezei de uzură liniară [6].

În cazul *uzurii abrazive*, intensitatea uzurii I_h s-a dovedit a fi direct proporţională cu presiunea specifică nominală şi invers proporţională cu duritatea (după datele lui M. M. Hruşciov şi M. A. Babicev, această lege este valabilă doar pentru metalele tehnice pure, pentru oţelurile tratate avînd alt caracter [5]).

Kraghelski apreciază, totuşi, că în formulele (1) şi (2) uzura nu depinde de proprietăţile materialului, ci de caracteristicile procesului respectiv (sarcină, viteză, temperatură etc.), situaţie, desigur, nesatisfăcătoare.

Pe de altă parte, Spurr şi Newcomb au constatat dependenţa uzurii şi de modulul de elasticitate al materialului (în acord deci cu principiile teoretice în ipoteza unui contact elastic).

Pe baza cercetărilor efectuate, autorii englezi Archard, Burwell şi Strong (1952—1953) au propus drept ecuaţie de bază a uzurii relaţia

$$\frac{Q}{L} = K \cdot \frac{N}{P_m}, \tag{3}$$

unde K este un coeficient de uzură, P_m presiunea care corespunde curgerii materialului şi N sarcina.

Mai mulţi autori au efectuat studii experimentale pentru determinarea valorii lui K pentru diferite metale în condiţii diferite de frecare. Rezultatele au arătat că *valoarea coeficientului de uzură diferă mult chiar în cazul aceluiaşi tip de uzură* [5]. De exemplu, după datele lui E. Rabinowicz, K diferă în funcţie de „ascuţimea" abrazivului (adică de faptul dacă are loc *aşchiere* sau *deformare plastică*) [8]. Dacă ar fi posibil să se determine exact acest coeficient, s-ar fi putut rezolva mai uşor calculul intensităţii la uzură.

Kraghelski acordă o importanţă deosebită *contactului real*, care a preocupat şi pe alţi cercetători (Abbot şi Firiston, 1933, curba suprafeţei

[3]) Introducerea noţiunii de „viteză de uzură" presupune raportarea uzurii liniare, gravimetrice etc. la unitatea de timp sau de distanţă parcursă [7].

de contact a lagărului [6]; Bowden şi Tabor [1], [9]). El subliniază că raportul dintre suprafaţa de contact reală şi aceea aparentă este egal cu raportul dintre presiunea specifică şi duritate, ceea ce conduce mai comod la posibilitatea de apreciere a suprafeţei reale de contact.

De asemenea, Demkin şi Kraghelski (1958) au arătat importanţa „penetraţiei relative" $\in = \frac{h}{h_{\max}}$ şi ariei relative de contact $\eta = \frac{A_r}{A_c}$, h fiind adîncimea de penetraţie, $h_{\max}$ înălţimea maximă a asperităţilor, A_r suprafaţa reală de contact şi A_c suprafaţa „conturului" de contact. Ei recomandă pentru calcularea suprafeţei relative de contact funcţie de penetrarea asperităţilor, la apariţia contactului dintre o suprafaţă rugoasă şi una „netedă", relaţia

$$\eta = b_1 \in^{\nu}, \tag{4}$$

unde b_1 şi ν depind de tipul de finisare ($b = 1 - 16$; $\nu = 2 - 3$). În situaţia *ambelor suprafeţe rugoase*, relaţia se complică mult [6]; ea este valabilă numai pentru contactul în regim elastic; de menţionat că asperităţile au fost asimilate sferice [4]) [1], [6]. S-a studiat şi frecarea dintre un cilindru rigid care alunecă pe un corp semiplastic şi condiţiile stratului superficial durcisat, acordîndu-se atenţie condiţiei de trecere de la starea de deformare elastică la cea plastică (Kraghelski, Blok etc.) în cazul contactului asimilat: sferă pe suprafaţă plană.

O contribuţie importantă pentru avansarea rezultatelor către concluzii aplicative a adus-o Kraghelski; acesta, utilizînd caracteristici geometrice şi cinematice ale interacţiunii solidelor în mişcarea de alunecare, a propus un nou criteriu [5], [6], şi anume *uzura specifică* i_q, prin care se reprezintă cantitatea de substanţă uzată q_x, sau volumul ei $V_x = \frac{q_x}{\nu_s}$, îndepărtată de pe suprafaţa reală de contact pe o distanţă l_1 egală cu diametrul petei (punctului) de tangenţă:

$$i_q = \frac{q_x}{A_r l_1} \text{ (g/cm}^3\text{)} \text{ şi } i_h = \frac{V_x}{A_r l_1} \nu_s \tag{5}$$

(ν_s fiind greutatea specifică a materialului). Rezultă deci că i_h, viteza specifică liniară de uzură, este exprimată prin înălţimea stratului uzat pe o distanţă egală cu diametrul petei (punctului) de contact. Kraghelski apreciază că, dispunînd de mărimea uzurii specifice şi de caracteristicile geometrice ale suprafeţelor în contact, putem determina numărul de cicluri care duc la ruperea materialului, la uzura acestuia prin microaşchiere, i_q şi i_h fiind considerate ca avînd valori reale [6]. El vede aplicarea în cazul contactului dintre o suprafaţă rugoasă (absolut rigidă) şi un corp deformabil, atît în cazul frecării uscate, cît şi al celei limită; consideră secţiunea asperităţilor ca fiind triunghiulară şi admite principiul lui P. A. Rebinder: lucrul mecanic de dispersie proporţional cu

[4]) În lucrarea [1] au fost menţionate şi alte feluri de asimilare.

duritatea. În acest caz se arată că „uzura specifică" va fi o *mărime constantă*, care nu depinde de proprietăţile mecanice ale materialului (determinate o singură dată). De asemenea se stabileşte dependenţa dintre uzura specifică şi cea liniară :

$$I_q = i_q \frac{A_r}{A_a}; \quad I_h = i_h \frac{A_r}{A_a} = i_h \frac{P_a}{P_r}. \tag{6}$$

Kraghelski consideră aceste relaţii ca fiind ecuaţii de bază pentru uzură [6]; ele arată că uzura în greutate, sau liniară, a piesei este egală cu uzura specifică înmulţită cu raportul dintre suprafaţa reală şi cea aparentă sau cu raportul dintre presiunea specifică nominală P_a şi cea reală P_r.

Se dă şi în această situaţie o legătură între criteriul „specific" şi „energetic" al uzurii :

$$I_w = i_h \frac{2(v+1)}{C \sigma_s \operatorname{tg} \theta}, \tag{7}$$

în care θ este unghiul la baza asperităţii presupusă a avea profil triunghiular, v coeficient ce depinde de rugozitate, σ_s limita de curgere şi C coeficient funcţie de geometria de suprafaţă şi de proprietatea materialului de a se ecruisa [5].

Este interesant că se ajunge la o formulă generală a vitezei de uzură liniară în cazul frecării dintre o suprafaţă rugoasă şi o alta netedă [6] :

$$I_h = \frac{\in h_{\max}}{(v+1)\, m\, l_1} \frac{A_r}{A_a} \tag{8}$$

sau

$$I_h = \frac{\in h_{\max}}{(v+1)\, m\, l_1} \cdot \frac{P_a}{P_r}, \tag{8'}$$

unde m este numărul de cicluri în timpul distrugerii de oboseală.

Kraghelski este de părere că se poate calcula deci uzura folosind funcţia de penetraţie a ariei reale de contact şi a valorii m (numărul de cicluri), subliniind că aceste funcţii diferă la diferitele tipuri de uzură, dintre care autorul analizează numai pe cele prin microaşchiere, deformare elastică şi redeformare plastică. În lucrarea [2] au fost arătate părerile diferite privind varietatea tipurilor de uzură.

a) În primul caz, *uzura prin microaşchiere*, se ajunge la o relaţie de tipul [6]

$$I_h = \frac{\operatorname{tg} \theta}{2(v+1)} \cdot \frac{P_a}{H_b} = K_a \cdot \frac{P_a}{H_B} \tag{9}$$

(K_a fiind coeficientul de proporţionalitate în formula obţinută de Archard, Hirst, Rabinowicz etc., iar H_B duritatea Brinell), în concordanţă cu experienţele făcute de W. Tonn, M. M. Hruşciov şi M. M. Babicev, care au obţinut pentru uzura de abraziune o legătură direct proporţională între uzură şi presiune şi invers proporţională între uzură şi duritate

($K_a = 2{,}8 - 4 \cdot 10^{-2}$ pentru diferite metale; $\theta = 15$ grade și $v = 2$). De asemenea Spurr și Newcombe, în cazul unor suprafețe brut finisate, au obținut $K_a = 1 - 4 \cdot 10^{-1}$, iar Rabinowicz, pentru glaspapir ascuțit și, respectiv, șmirghel, a obținut valorile $K_a = 0{,}1$ și $K_a = 0{,}01$. Rezultă că viteza de uzură depinde de „ascuțimea" elementelor care pătrund, fiind direct proporțională cu presiunea nominală și invers proporțională cu duritatea corespunzătoare temperaturii de frecare. Uzura de microașchiere ar fi deci independentă de coeficientul de frecare.

b) Expresia *uzurii de contact elastic* în cazul contactului dintre o suprafață rugoasă rigidă și o suprafață elastică a fost obținută din (8), utilizînd funcția $\in$ (după N. B. Demkin):

$$I_h = \frac{1{,}1\,(1 - \mu^2)\, v^{1/2}\, P_a}{(v + 1)\, K_2\, Emf} \tag{10}$$

(μ fiind coeficientul lui Poisson, E modulul de elasticitate, mf numărul de interacțiuni suficient pentru a înlătura materialul de pe suprafața de frecare), în care, dacă $v = 3$,

$$I_h = 0{,}7\,\frac{P}{Emf}. \tag{10'}$$

În acest caz, viteza de uzură (raportul dintre mărimea straturilor uzate și suprafața de alunecare) la contact elastic este direct proporțională cu presiunea nominală și invers proporțională cu modulul de elasticitate și cu numărul de cicluri mf; ea este dependentă de asemenea și de rugozitate, de coeficientul de frecare, de rezistența de rupere și de valoarea exponentului de putere al curbei de oboseală.

Numărul de cicluri (mf), pe baza aprecierii lui E. F. Nepomniascky privind valoarea efortului principal de întindere și pe baza valorii presiunii reale P_r (după N. B. Demkin), poate varia între 10^4 și 10^7 și chiar mai mult.

De fapt, dacă în relația (8) se înlocuiește expresia obținută de Demkin pentru presiunea specifică P_r, apoi expresia aproximativă a curbei de oboseală $m = \left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^{\lambda}$, al cărui λ poate varia între 2 și 5 (δ_0 fiind rezistența statică), și valoarea efortului de întindere care acționează în stratul superficial $\delta = K_r f P_r$, se ajunge la o relație deosebit de complicată de prezența mai multor coeficienți și termeni, dificil de determinat experimental. (K_r reprezentînd coeficientul de proporționalitate între efortul de întindere și forța de frecare specifică); această relație arată că, în condițiile contactului elastic, intensitatea uzurii depinde de diferitele caracteristici geometrice ale suprafeței (printre care înălțimea maximă și raza asperităților), de proprietățile mecanice (printre care modulul de elasticitate), de coeficientul de frecare (f), de caracteristicile de oboseală (λ), precum și de presiunile nominale și de contur (P_a și P_c); de asemenea se remarcă că factorul corespunzător vitezei de alunecare variază cu proprietățile mecanice și cu alte caractere produse de temperatura rezultantă [6].

În vederea calculului la uzură, S. B. Ratner, E. F. Nepomniansky, Lancaster şi Kraghelski au făcut experienţe pentru a determina gradul de dependenţă dintre uzură, rugozitate, modulul de elasticitate şi sarcină, în unele cazuri obţinînd rezultate a căror neconcordanţă nu a fost perfect explicată.

c) De *uzura în cazul contactului plastic* s-au ocupat experimental Tavernelly şi Coffin, S. W. Serensen şi alţii. Pe baza relaţiei (8) şi a valorilor şi formulelor obţinute de aceştia, Kraghelski ajunge şi în cazul uzurii liniare de contact plastic la o relaţie mai generală, la fel de complicată ca aceea menţionată în situaţia precedentă (b), care însă arată în acest caz dependenţa rezistenţei la uzură a materialului de duritate, de rugozitate, de presiune nominală, de deformaţia relativă plastică de distrugere şi de coeficientul de frecare. O astfel de relaţie, în esenţă de forma

$$I_h = i_h \cdot \frac{P_a}{H_B}, \tag{11}$$

este asemănătoare cu aceea sugerată anterior de Holm, Archard, Hrist şi Rabinowicz :

$$I_h = K \frac{P}{H_B}, \tag{11'}$$

unde K este coeficientul de uzură amintit [6].

Situaţia mai complicată, aceea a ambelor suprafeţe în frecare, rugoase, nu a fost suficient studiată, complicînd, desigur, relaţiile amintite. În orice caz, studiile efectuate de Kraghelski şi de alţi autori arată că pentru calcularea uzurii trebuie avute în vedere în primul rînd variaţia sarcinii şi a vitezei (sau temperaturii) şi tipul uzurii (de contact elastic, plastic sau de microaşchiere) care conduc la influenţa diferenţiată a celorlalţi parametri principali : rugozitate, modul de elasticitate, duritate, rezistenţă de rupere, coeficient de frecare.

În ţara noastră s-a acordat de asemenea atenţie problemei calculului la uzură a organelor de maşini. Într-o lucrare apărută în ţară [10] se reia o relaţie prezentată de Al. Sleşteanu [11], obţinută prin *asimilarea uzurii cu aşchierea metalelor* şi prin combinarea unor rezultate furnizate de teoria similitudinii, şi anume :

$$U = k P_a \nu_s \frac{E}{\sigma_r^2} \left(\frac{g H}{v_r^2} \right)^{\frac{\alpha}{2}}, \tag{12}$$

unde $0 < \alpha < 1$, P_a este presiunea specifică, v_r viteza relativă, H iregularităţile suprafeţei, ν_s greutatea specifică a materialului, g acceleraţia gravitaţiei şi σ_r rezistenţa de rupere. Autorul menţionat arată că sînt necesare unele corecţii formulei de mai sus, deoarece, supunînd-o analizei dimensionale, apar contradicţii între mărimile celor doi termeni. De altfel, analogia cu aşchierea metalelor ar fi condus la o relaţie oarecum diferită. În această privinţă menţionăm unele concluzii ale colectivului

M. Popov, privind uzura de aşchiere [12]. De asemenea, în lucrarea noastră [13] sînt indicate relaţii între uzura în greutate, viteza de aşchiere şi durabilitatea sculei aşchiare.

Într-o altă lucrare de sinteză mai recentă [14], în care sînt abordate unele tendinţe în calculul modern al organelor de maşini, autorul respectiv concretizează şi ordonează factorii care limitează durabilitatea organelor de maşini după cum urmează : uzura suprafeţelor, oboseala materialelor şi coroziunea suprafeţelor ; de asemenea temperaturile ridicate, care modifică starea de tensiune din material şi de la suprafaţă, şi sporirea sarcinilor dinamice ca rezultat al măririi jocurilor (de altfel ambele induse în parametrii anteriori). Autorul lucrării [14] este de părere că, dacă printr-o construcţie, întreţinere şi exploatare îngrijită coroziunea şi sporirea sarcinilor dinamice pot fi micşorate, rezultă că durabilitatea organelor de maşini este în general limitată (pentru temperaturi obişnuite) numai de uzură sau de oboseală.

În manualul menţionat [14] este prezentat, pe baza altor lucrări, modul de a se realiza calculul de uzură, în felul următor. Se defineşte uzura organelor de maşini ca fiind efectul însumat al ciclurilor de frecare într-o anumită perioadă de timp între două suprafeţe şi se face apel la lucrul mecanic necesar pentru învingerea frecării, menţionîndu-se că acesta se consumă parţial prin îndepărtarea unui strat de pe suprafaţa fiecărei dintre piesele de frecare. Totodată se recomandă introducerea pentru calculele practice a noţiunii de „coeficient de uzură" (despre care am mai amintit [1]) :

$$U = \frac{V_x}{N_f \cdot t} \tag{13}$$

unde V_x este volumul de material îndepărtat prin uzură, t timpul respectiv, N_f puterea consumată pentru învingerea frecării pe unitatea de suprafaţă, definită prin

$$N_f = \frac{p \cdot f \cdot v_r}{A \cdot 75} \tag{13'}$$

(p fiind presiunea de contact, f coeficientul de frecare, v_r viteza relativă şi A unitatea de suprafaţă).

În cazul în care se cunosc valorile coeficienţilor de uzură (determinate experimental) şi dacă se admite că uzura se repartizează *uniform* asupra celor două suprafeţe în frecare, „grosimea totală a uzurii" este redată prin relaţia

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 = \frac{D \cdot N_f}{(1 + \rho)} \left[u_1 \frac{\rho}{A_1} + u_2 \frac{1}{A_2} \right], \tag{14}$$

în care

$$\rho = \frac{N_{f_1}}{N_{f_2}} = \frac{u_2}{\alpha_1 u_1}, \tag{14'}$$

α_1 este un coeficient de echivalare al volumului de material îndepărtat la uzură din suprafaţa mai rezistentă cu volumul îndepărtat din

suprafața mai puțin rezistentă; u_1, u_2 — coeficientul de uzură pentru prima și, respectiv, a doua suprafață; A_1, A_2 — suprafețele de frecare; Δh_1, Δh_2 — grosimile straturilor respective.

Dacă cele două piese au caracteristici mecanice diferite, durabilitatea totală este prezentată ca funcție de uzura totală:

$$D = \frac{\Delta h\,(1+\rho)}{N_f\left[\frac{u_1\rho}{A_1}+\frac{u_2}{A_2}\right]}. \tag{15}$$

De asemenea capacitatea de funcționare a ansamblului celor două piese:

$$C_f = D\cdot p\cdot v_r = \frac{75\,\Delta h\,(1+\rho)}{f\left(\frac{u_1\rho}{A_1}+\frac{u_2}{A_2}\right)}. \tag{16}$$

În situația întîlnită în practică, în care diferă caracteristicile de rezistență a celor două piese, prin neglijarea coeficientului de uzură al suprafeței cu rezistență mai mare se obține

$$C_f = D\cdot p\cdot v_r\cdot = \frac{75\,\Delta h_2'\,A_2\,(1+\rho)}{\mu_2\cdot f}, \tag{16'}$$

unde $\Delta h_2'$ este grosimea admisibilă a uzurii piesei executate din material mai puțin rezistent la uzură.

Deoarece

$$\Delta h_2 = \frac{V_{x_2}}{A_2} = \frac{N_{f_2}D}{A_2}\,u_2, \tag{17}$$

verificarea practică, în ultimă instanță, necesită determinarea valorilor: A_2 real, α, f, V_{x_2}, N_f, cu consecințele de eroare respective. Ar fi mai simplă soluția în cazul în care uzura ar fi determinată numai de *valoarea* $f\cdot p\cdot v_r\cdot$, așa cum sînt de părere autorii lucrării [15].

Pentru un caz mai concret (un cuplu de frecare simplu: disc și locaș de supapă), lui A. S. Pronikov i se datorește o formulă prin care se leagă durata perioadei de rodaj de rezistența la uzură a materialului respectiv [4].

Pentru cazul uzurii abrazive și în situația unei suprafețe de contact constante, el a prezentat relația

$$U = U_1 + U_2 + K\,\frac{N\cdot n}{R'-r'}\,t, \tag{18}$$

unde U_1 și U_2 sînt uzurile celor două suprafețe, N sarcina, n numărul relativ de rotații, R' și r' razele maxime și minime ale discului, t durata uzurii, $K = K_1 + K_2$ coeficient care caracterizează viteza de uzură a celor două corpuri.

Pentru perioada rodajului, cînd suprafaţa se modifică, se dă formula

$$U = \sqrt[m+1]{c\left[\frac{(m+1)\,KN \cdot n}{n}\right]^m} \cdot \frac{m}{t_n(m+1)}, \tag{19}$$

care arată că în perioada de rodaj uzura cuplului respectiv în funcţie de timp nu urmează o lege liniară.

De asemenea, pentru acelaşi caz, autorul menţionat a prezentat şi o formulă pentru fixarea toleranţei în funcţie de durata admisibilă a perioadei de rodaj şi de viteza de uzură a îmbinării :

$$I_0 = \frac{m+1}{m}\,\gamma_{1-2} \cdot t_n \tag{20}$$

de exemplu în cazul în care t_n perioada de rodaj $= 50$ de ore, viteza de uzură $\gamma_{1-2} = 10^{-4}$ mm/h, $m = 2$ şi dacă forma interstiţiului iniţial corespunde ecuaţiei unei parabole pătratice, rezultă valoarea admisibilă a jocului : $I_0 = 0{,}0075$ mm) [4].

O problemă mai complicată este aceea a uzurii ghidajelor maşinilor-unelte destinate aşchierii metalelor, importantă totodată prin implicaţiile ei privind precizia şi stabilitatea la vibraţii. În literatură nu s-a ajuns la formule pentru un calcul direct al neuniformităţii uzurii unui corp prismatic [16]. Pronikov a indicat (1956), pe baza cercetărilor proprii şi ale lui M. M. Hruşciov, V. F. Lorentz, D. N. Reşetov etc., o anumită metodă de calcul şi o formulă generală pentru determinarea formei suprafeţelor uzate ale ghidajelor. Dintre premisele calculului menţionăm :

— caracterul abraziv şi proporţionalitatea uzurii cu drumul de frecare şi presiunea specifică ;

— nu se ia în consideraţie variaţia presiunilor specifice la contactul ghidajelor saniei şi batiului ;

— curba de distribuţie a deplasărilor saniei pe lungimea ghidajelor este funcţie de caracterul prelucrării pieselor la maşina-unealtă.

Totuşi, relaţia analitică elaborată de autorul menţionat este încă departe de a putea fi utilizată de proiectant.

A. Schilling [17] arată că în cazul materialelor lagărelor s-a încercat de mai mult timp să se grupeze întrun singur coeficient trei parametri : viteza relativă de alunecare, presiunea maximă şi presiunea medie exercitată pe cuzinet.

Faptul că puterea datorită frecării se reprezintă adesea prin expresia $N_f = f \cdot N \cdot v_r$ (funcţie de coeficientul de frecare, sarcină şi viteză de alunecare) şi se presupune că pentru un anumit tip de cuzinet şi metal f ar avea o valoare constantă, prin înlocuirea sarcinii cu presiunea unitară p s-ar putea ajunge la un produs pv, denumit „coeficient de uzură".

Încercările pe diferite tipuri de motoare au arătat că această noţiune nu corespunde realităţii la lagărele lubrificate. S-a propus înlocuirea cu „factorul de uzură", $\sqrt{p_m v^3}$, care apare în expresia puterii absorbite prin frecare în cazul menţinerii unui regim de ungere hidrodinamic (p_m fiind presiunea medie şi v viteza medie). Au fost astfel calculaţi

„factorii uzură" pentru diferite materiale de antifricţiune, valorile variind între 250 şi 400, metoda de calcul fiind proprie numai anumitor situaţii funcţie de regimul de funcţionare al motoarelor [17].

De asemenea s-a pus problema calculării coeficientului de frecare [1]. Unii autori sovietici au urmărit ca pe calea modelării fenomenului de frecare să exprime pe f funcţie de presiune, rugozitate şi viteza de alunecare (V. S. Seldrov, G. I. Troianovski, A. V. Cincinadze etc.).

După cum s-a arătat [1] şi anterior, începînd din 1925, Guembel, Ernst şi Merchant, Blok şi alţii au propus diferite formule cu doi termeni pentru coeficientul de frecare [18].

Gh. Manea menţionează de asemenea o relaţie la care s-a ajuns pe baza teoriei lui A. I. Petrusevici şi experienţelor lui M. D. Gharkin, N. F. Kuzmin şi I. A. Mişorin şi prin care se exprimă, în primă aproximaţie, coeficientul de frecare în cazul razelor reduse de curbură a suprafeţelor de contact (angrenaje), a eforturilor unitare de alunecare mai mari ca 1 000 kgf/cm^2, funcţie de viscozitatea uleiului, viteza totală de rostogolire şi viteza de alunecare [19].

Metodele analitice ale calculului uzurii organelor de maşini au un caracter general, teoretic; unele relaţii de calcul obţinute pînă în prezent, deşi au fost deduse pe bază experimentală şi statistică, au valabilitate limitată. Din literatura de specialitate şi din practică rezultă un număr limitat de organe de maşini precalculate şi din punctul de vedere al rezistenţei la uzură: frîne, ambreiaje, segmenţi de piston, danturi de angrenaje etc.

Natura calculelor aplicate diferitelor organe de maşini arată că de cele mai multe ori calculele ce privesc aspectele de frecare şi uzură trebuie să fie în mod obligatoriu însoţite şi de calcule de oboseală, vibraţii, elasticitate-plasticitate-reologie etc. Ele presupun prealabile încercări mecanice asupra materialelor respective [20], [21], [22], [23]. Unii autori acordă importanţa cuvenită calculului complex pe baze ştiinţifice a sistemelor mecanice. Din tabela prezentată de prof. Gh. Manea [19] privind organele de maşini ce s-ar preta şi pentru calculul de frecare, încălzire şi uzură, precum şi oboseală superficială, reţinem: îmbinările nituite, asamblările cu şuruburi sau prin strîngere, fusurile şi lagărele de alunecare sau cu rulmenţi, cuplajele şi ambreiajele, angrenajele, cuzineţii bielelor, pistoanele (exclusiv bolţurile), segmenţii etc. Autorul menţionat apreciază că stabilirea legăturii dintre uzura cantitativă şi durata de funcţionare este, totuşi, dificilă şi că una dintre dificultăţile mari rămîne determinarea coeficienţilor de frecare.

În ceea ce priveşte introducerea maselor plastice ca înlocuitoare a metalelor, aspect deosebit de important pentru construcţia de maşini, se cer încă studii aprofundate care preocupă în prezent pe oamenii de ştiinţă din diferite ţări şi din ţara noastră [1], [2], [24].

Calculul la uzură nu a putut fi aplicat pe scară largă în cazurile practice, atît datorită lipsei unei metode universale, cît şi datorită *necunoaşterii coeficienţilor de uzură specifici* fiecărui material *în parte*. Totuşi, datorită progreselor realizate pînă în prezent, a devenit posibilă în mai multe cazuri aplicarea metodicii de calcul la durabilitate limitată şi la

uzură; la *bazele calculului modern al organelor de mașini* trebuie puse *criteriile de oboseală limitată și de uzură, precum și condițiile de mediu lubrifiant*; astfel se va putea ajunge la o dimensionare economică a organului de mașină respectiv și la asigurarea omogenității durabilității. Autorii care au urmărit obținerea unor formule de calcul, după părerea noastră, nu au avut în vedere în general și un alt parametru important, și anume *influența mediului*. Cercetările proprii [25] și ale altor autori [17], [26] au scos în evidență preponderența factorilor chimici și a *uzurii chimice* impuse față de *uzura mecanică*. Dacă intervenția de natură fizico-chimică a unor aditivi poate reduce de zece ori viteza de uzură a unui cuplu de materiale dat, considerăm că acest factor este determinant în stabilirea duratei de funcționare a mașinilor.

După cum rezultă însă din esența fizică a procesului de uzură în strînsă legătură cu cel de frecare, *o constantă universală nu poate exista* („constanta de uzură"), deoarece uzura depinde și de proprietățile materialului, geometria contactului și forma ruperii legăturilor de frecare etc. Studiul anterior [1] a arătat că nu s-a ajuns la rezultate de luat în seamă nici în cazul „calculării" coeficienților de frecare.

Cercetările experimentale au scos în evidență și *dificultatea reproducerii uzurii pe modele*, prin faptul că este insuficient să se păstreze caracteristicile geometrice și mecanice fără a se realiza condițiile de rupere a legăturilor de frecare care duc la același număr n în natură și pe model.

Faptul că foarte puțini autori au subliniat sau au acordat atenție caracterului statistic al evoluției fenomenului de uzură și apariției unor fluctuații aleatoare care îngreuiază reproductibilitatea determinărilor este reflectat prin trecerea cu vederea a acestui aspect atunci cînd se conchid posibilități de calcul a uzurii pe baza unor coeficienți determinați experimental. Această situație scoate, desigur, în evidență actualitatea acestui subiect [27]. Acest lucru este cu atît mai mult valabil dacă se are în vedere varietatea tipurilor de uzură ce pot apărea în cursul aceluiași proces de frecare [2].

În privința conexiunii cu latura experimentală, după cum am mai arătat [2], Kraghelski este de părere că trebuie utilizate două mașini de laborator: una care să reproducă raportul de acoperire totală a suprafeței cuplului de exploatare, iar cealaltă raportul de cuprindere minim. El apreciază că, obținînd rezultatele respective ale uzurii cu aceste două tipuri de mașini, în cazul deformării elastice, plastice și microașchierii putem determina prin calcul *uzura unor* piese. Pentru aceasta trebuie să se țină seama de suprafața de tangență *reală* la mașina de încercat și la cuplul de frecare real, deoarece uzura se poate aprecia prin *produsul dintre uzura specifică și raportul ariei de tangență reală față de cea nominală*. Trebuie avut însă în vedere faptul că acest raport depinde de mulți factori, în speță de jocul respectiv, geometria piesei etc. De asemenea că suprafețele de frecare vor fi mai mult sau mai puțin adecvate funcție de modul în care ele au fost uzinate, calitatea tăișului sculelor, granulația pietrei, viteza de așchiere și avansul, metoda de polizare etc. În lucrarea [25] se indică, pe baza unor cercetări proprii, o ordine a importanței

factorilor. Aceste suprafeţe în frecare vor suferi *eforturi* pe care, imperfecţiunile micro şi macrogeometriei pieselor le vor face de sute de ori mai mari decît ceea ce ne indică un calcul global. Sînt necesare deci încercări de laborator pe epruvete mici şi pe epruvete naturale, precum şi încercări în condiţii de exploatare [23]. Astfel de concluzii au fost verificate şi de autor pe mai multe maşini de laborator.

O problemă importantă care se ridică la proiectarea unui cuplu de frecare din punctul de vedere al uzurii este şi aceea a stabilirii *dimensiunilor relative a suprafeţelor în frecare* ($S_1 - S_2$) [1], [23]. Mişcarea unui cap de cruce pe o glisieră, a unei bile pe cămaşa unui rulment, mişcarea unui segment în cilindrul respectiv, a unui arbore pe cuzinetul său etc. reprezintă exemple practice de suprafeţe în frecare de dimensiuni relative diferite. De exemplu, în cazul arbore-cuzinet, în poziţia de echilibru stabil, pentru cuzinet există o singură zonă hertziană, în timp ce întreaga suprafaţă a arborelui trece periodic prin suprafaţa de frecare. Apare un aspect asupra căruia au insistat puţine lucrări, deşi este necesară introducerea în prevederile de proiectare a efectului diferenţial al suprafeţelor.

Alţi autori [17], [23] acordă, în mod justificat, o importanţă deosebită aspectelor metalurgice ale frecării şi uzurii pentru evitarea gripajului şi mărirea duratei de funcţionare. Tratamentele termice sau prelucrările mecanice aplicate materialelor şi pieselor în cursul uzinării pot conduce la schimbarea structurii metalografice (decarburări, exces feritic, procentaj ridicat de austenită etc.), astfel încît suprafaţa de frecare şi, respectiv, piesa să devină rebutabilă. Aceste aspecte au fost dezvoltate în lucrarea [2]. În alte lucrări s-a demonstrat importanţa determinantă a compoziţiei şi a structurii metalului. Ne referim, de pildă, la procentul „optim" de fosfor în fonta de saboţi [28].

Studiile asupra influenţei raportului S_1/S_2 asupra uzurii şi gripajului trebuie să ţină cont de următoarele:

— afinităţile cristaline a metalelor şi oxizilor;
— punctele de fuziune a metalelor şi straturilor adsorbite;
— curbele: tendinţa de ecruizare funcţie de viteză şi de presiune.

Practic, în cazul unui cuplu de frecare „arbore-cuzinet" care este ameliorat prin sulfinizare, s-au obţinut rezultate interesante: sulfinizarea cuzinetului nu conduce decît la o securitate mediocră în funcţionare, în timp ce sulfinizarea fusului este decisivă [23].

Starea de suprafaţă are o influenţă importantă în ceea ce priveşte rezistenţa la uzură. Adesea se utilizează o relaţie empirică între σ_R (rezistenţa la oboseală) şi R (rezistenţa de rupere):

$$\sigma_R = 0{,}6\, R - \frac{0{,}2}{120} R^2. \tag{21}$$

Valorile $R = 180$ kgf/mm² şi $\sigma_R = 54$ kgf/mm², corespunzătoare punctului de ordonată maximă al curbei respective pentru o epruvetă perfect polizată, sînt în realitate mult mai reduse, datorită operaţiilor de prelucrare care măresc pe σ_R. Raportul σ_r/R poate varia de la 0,15 pentru fontă şi între 0,20 şi 1 pentru oţeluri.

De asemenea a fost adesea supraestimat şi rolul durităţii, apreciindu-se un bun cuplu de frecare după raportul durităţilor. Faptul că gripajul poate interveni prin oboseala substraturilor sau ca urmare a microsudurilor şi smulgerilor epidermice fără ca duritatea să poată da indicaţii asupra acestui fenomen sau faptul că frecarea şi uzura, după cum s-a văzut, are un aspect punctual, iar duritatea este o măsură globală, formează aspecte care limitează modul de a fi considerată duritatea în frecare şi uzură. Totuşi, sînt şi situaţii în care ea intervine : diferenţa de duritate a constituenţilor, diferenţa de duritate între particulele abrazive şi suprafaţa de frecare şi creşterea de duritate la anumite prelucrări sau tratamente. În ultimii ani, Nadai, Prandt şi Tabor au făcut cercetări atente pentru a elucida rolul durităţii şi a măsurării ei, ţinînd seama, în afară de efectele ce privesc elasticitatea şi plasticitatea, şi de aspectele de frecare.

Date fiind imperfecţiunile şi eterogenitatea structurii cristaline, J. J. Coubet este de părere că noţiunile : duritate, rezistenţă la rupere, modul de elasticitate etc. sînt noţiuni globale, la fel ca mărimile ce se deduc din diferitele calcule ale lui Boussinesq sau Hertz (tensiuni principale, forfecare într-un punct al suprafeţei de contact etc.). Ele nu pot avea un sens bine definit decît dacă piesei considerate ca un ansamblu de particule mecanic elementare (mai precis cristalite) poate să i se aplice legea numerilor mari. Calculele lui Hertz de presiune parţială, de zone elastice de apăsare şi forţe de forfecare maxime în adîncime nu spun nimic dacă structurile nu sînt suficient de fine [23].

Kennedy şi Andrede, efectuînd măsurători sistematice asupra alungirilor funcţie de contracţii pe epruvete reprezentînd o gamă variată de diametre şi grosimi de cristalite, au găsit că secţiunea epruvetei trebuie exprimată corect prin expresia

$$\pi (R_0 - 0{,}3\, r)^2 .$$

Pentru o problemă mecanică obişnuită, raza unui grăunte (r) nu implică nici o reducere a razei epruvetei (R_0), în timp ce într-o problemă de frecare chiar numai o reducere în valoare de 0,3 r poate contrazice calculele bazate pe mărimile statistice menţionate.

Faţă de această situaţie, Coubet insistă arătînd că fenomenele de frecare se produc, de regulă, prin puncte, *contactele fiind „microlocalizate"*, şi pot deci angaja *un singur grăunte* şi nu pe vecinul lui, în timp ce noţiunile de rezistenţă şi de modul de elasticitate sînt esenţial statistice ; el prezintă următoarea caracteristică a ştiinţei frecării din punctul de vedere al posibilităţii de calcul :

— nu acordă valoare integrală unui calcul de rezistenţa materialelor decît în funcţie de o structură dată ;

— micrografia în secţiunea structurii superficiale este anexa obligatorie a unui proiect [23].

Proiectantul trebuie să aibă în vedere faptul că din punctul de vedere al uzurii anumiţi parametri lucrează în sensuri contrare şi pot constitui atît factori favorabili, cît şi defavorabili, după cum urmează :

a) *creşterea durităţii suprafeţelor* :

— întăreşte filmul de oxid (factor favorabil) ;

— micşorează tendinţa spre suduri reci (factor favorabil);
— contribuie la mărirea presiunilor locale (hertziene) şi la oboseala straturilor adînci (factor defavorabil);

b) *îmbunătăţirea suprafeţelor şi polizarea*:
— conduce la micşorarea presiunilor locale (factor favorabil);
— poate reduce perioada rodajului (factor favorabil);
— face mai solid şi mai omogen stratul de oxid (factor favorabil);
— de la un anumit grad poate dăuna ungerii (factor defavorabil).

În plus, trebuie să se aleagă între polizarea obţinută pe cale mecanică curentă, care creează un strat Beilby important, şi aceea prin superfiniş electrolitic etc., care poate conserva constituţia cristalină a suprafeţei;
— în cazul în care structurile celor două metale prezintă *riscul unei afinităţi cristaline la solubilitate* (de exemplu oţel-fontă), stratul Belby poate fi acceptat şi chiar dorit;
— dacă structurile cristaline nu au nici un fel de afinitate (de exemplu crom-argint), poate fi acceptată rectificarea prin superfiniş;

c) *un punct de finisare mai scăzut*:
— micşorează riscurile sudurilor calde, putînd fi favorabil rodajului (factor favorabil);
— favorizează formarea sudurilor reci (factor defavorabil) [23].

În concluzie, *proiectarea unui cuplu de frecare nu este o operaţie matematică*. Deşi este posibil să fie utilizate în anumite cazuri unele relaţii mai simple, uneori cu caracter de generalizare, totuşi cunoştiinţele ştiinţifice actuale nu permit încă a se generaliza calculul riguros de uzură. Pentru producţia de serie, rezultatele cercetării şi „experienţa" proiectantului trebuie completată cu repetate şi serioase încercări de laborator în fază de prototip. Rezultatele vor fi materializate sub formă de toleranţe (dimensiuni, jocuri, duritate, adîncime de tratament, stare de suprafaţă etc.). Într-un ciclu de fabricaţie este obligatoriu să nu se schimbe niciodată în mod simplist tratamentele de suprafaţă şi toleranţele care definesc o piesă în frecare fără ca o verificare prealabilă riguroasă s-o fi permis.

Fabricarea unui anumit tip nou de maşină impune să se abordeze în prealabil în mod c o m p l e x toate aspectele de frecare şi de uzură (alături de celelalte studii şi încercări menţionate care privesc rezistenţa materialelor, cu metode şi instalaţii experimentale adecvate a căror *regim de reproductibilitate* este bine cunoscut). În acest mod, proiectantul va obţine concluziile privind cuplurile optime de frecare şi regimurile respective de ungere şi de funcţionare. Urmează acea legătură strînsă între cercetător, proiectant şi laboratorul uzinal, care poate completa lipsurile actuale ale calculului de frecare-uzură[5]) şi asigura reuşita prototipului şi a seriei.

Primită la redacţie la 25 ianuarie 1966

[5]) Dificultăţile şi stadiul acestei probleme considerăm că este reflectat şi de faptul că o serie de tratate şi monografii recente şi de mare extindere şi autoritate fie că abordează calculul de rezistenţă în construcţia de maşini (S. D. Ponomariov [22]), fie că au ca obiect frecarea şi uzura (E. Rabinowicz [29]; Bowden şi Tabor [30]; D. Muster şi B. Sternlicht [31]) nu au inclus în tematica respectivă şi problema calculului la uzură.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Pavelescu, *Stadiul actual al cercetărilor în domeniul uzurii. Evoluţia concepţiilor asupra frecării*, St. cerc. metalurg., *1* (1966).
2. D. Pavelescu, *Evoluţia şi stadiul cercetărilor asupra uzurii. Aspectele metalurgice ale frecării şi uzurii*. St. cerc. metalurg., *2* (1966).
3. M. M. Hruşciov, *Tendinţe actuale în dezvoltarea ştiinţei asupra rezistenţei la uzură a materialelor*. Extr. din lucrările Conferinţei a III-a unională organizată de Institutul de maşini al Academiei de Ştiinţe U.R.S.S., Moscova, 1958, I.D.T., vol. I, Bucureşti, 1962, p. 9—16.
4. A. S. Pronikov, *Problemele de bază ale calculului şi proiectării maşinilor de durată mare de exploatare*. Lucrările Conferinţei a III-a unională organizată de Academia de Ştiinţe a U.R.S.S., Moscova, 1958, I.D.T., Vol. I, Bucureşti, 1962, p. 41—49.
5. V. I. Kraghelski, Trenie i iznos, Moskva, Maşghiz, 1962, p. 119—131.
6. V. I. Kraghelski, *Calculation of Wear Rate*, Journ. of basic Engineering, Trans. of the ASME, **87 D**, *3*, 785—790 (1965).
7. D. Pavelescu, *Cu privire la erorile de măsură şi ponderea acestor erori în cazul studiului uzurii cu izotopi radioactivi*, St. cerc. mec. apl., *3*, 625 (1963).
8. E. Rabinowicz, *New Coefficients Predict Wear of Metal Parts Product*. Eng., **29**, *23* — 1958, 71 (1959).
9. D. Tabor, *Friction and Wear*, Proc. Internat. Symp. on Lubricat. and Wear, Berkeley, Ed. Mc Cutchon, California, p. 712.
10. C. I. Staicu, *Asupra formulei pentru uzura organelor de maşini*, Constr. de maşini, *3*, 196—198 (1959).
11. Al. Seleşteanu, *Durata de viaţă a maşinilor*, Metalurgia şi construcţia de maşini, *1*, 26—31 (1957).
12. M. Popov, D. Pavelescu, I. Mitrică, E. Deciu, *Cu privire la parametrii geometrici ai cuţitului armat cu plăcuţă de carburi metalice*, St. cerc. mec. apl., *2*, 423—435 (1957).
13. D. Pavelescu, *Utilizarea izotopilor radioactivi la studierea aşchierii metalelor*, Tehnica nucleară, **5**, *10*, 603—606 (1962).
14. V. Tărăboi, *Organe de maşini*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1962, p. 21—30.
15. Al. Seleşteanu, D. Ştefănescu, V. Munteanu, *Maşini energetice*, Bucureşti, Edit.tehnică, 1962, p. 161.
16. S. A. Pronikov, *Cercetări teoretice şi industriale asupra uzurii ghidajelor maşinilor-unelte pentru aşchierea metalelor*, Frecarea şi uzura la maşini, culegerea X, 1956, I.D.T. (trad. l. rusă), p. 102—103.
17. A. Schilling, *Les huiles pour moteurs et le graissage des moteurs*, vol. II, Paris, Edit. Technip., 1962, p. 77—78.
18. R. Courtel, I. M. Tichvinsky, *Sur le développement des théories du frottement sec et de la lubrification limite*, Rev. de l'inst. Franc. du Pétrole, **XVI**, *9*, 978—991 (1961).
19. Gh. Manea, *Metodele de calcul aplicate organelor de maşini în lumina cercetărilor moderne*, Sesiunea jubiliară I.M.A. (4—7 iunie 1960), Bucureşti, Edit. Acad. R.P.R., 1960, p. 67—99.
20. Şt. Nădăşan şi Colab., *Încercări şi analize de metale*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1965, p. 236—250.
21. Gh. Buzdugan, *Maşini pentru încercările mecanice ale materialelor*, Bucureşti, Edit. Acad. R.P.R., 1953.
22. D. S. Ponomariov, *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, Vol. I—III, Bucureşti, Edit. tehnică, 1963.
23. J. J. Coubet, *Théorie et pratique industrielle du frottement*. Edit. Paris, Technip. Dunod, 1964, p. 306—327 şi 248.
24. Gh. Manea, *Asupra calculului lagărelor şi roţilor dinţate din materiale plastice*, Metalurgia şi construcţia de maşini, *3*, 238—247 (1963).
25. D. Pavelescu, *Aspecte ale dependenţei perioadei iniţiale a uzurii de factorii mecanici şi chimici în cazul frecării de alunecare mixte asu limită*, St. cerc. mec. apl., *3*, 570—572 (1965).

26. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica, O. Biță, *Lagăre cu alunecare*, Bucureşti, Edit. Acad. R.P.R., 1961, p. 36—37 şi 373—397.
27. D. Pavelescu, *Aspecte ale evoluției uzurii legate de caracterul statistic al metodelor de măsură cu izotopi radioactivi*, St. cerc. mec. apl., *6* (1965).
28. Şt. Nădăşan, *Versuche mit Bremsklötzen aus algewandelten Phosphorhaltungen Eisenbahntech*, **11**, *9*, 420—422 (1963).
29. E. Rabinowicz, *Friction and Wear of Materials*, Londra, Wiley, 1965.
30. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solid*, p. II, Oxford at the Clarendon Pres., 1964.
31. D. Muster, B. Sternlicht, *Proceeding International Symposium on Lubrication and Wear* (Houston, June 1963), Berkeley, McCutchan Publ. Corp., 1965.

RECENZII

AL. GHEORGHIU, *Statica construcţiilor*, vol. II. *Structuri static nedeterminate*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1965, 128 p.

Statica construcţiilor este acea ramură a mecanicii construcţiilor care se ocupă cu determinarea eforturilor şi a poziţiilor deformate pe care le produce acţiunea sarcinilor exterioare la acele sisteme de rezistenţă ale construcţiilor care, prin schematizare, se pot reduce la structuri alcătuite din bare. Studiul deformării structurilor prezintă o importanţă deosebită, reprezentînd mijlocul cu ajutorul căruia devine posibilă rezolvarea structurilor static nedeterminate. Aceasta permite alegerea unor sisteme de rezistenţă concepute raţional şi dimensionate judicios, ceea ce constituie una dintre problemele esenţiale în proiectarea construcţiilor.

Problemele staticii construcţiilor formează o disciplină bine închegată, cu metode de calcul verificate de experienţă şi devenite clasice, unde contribuţiile noi se referă în special la diferite sistematizări de calcul şi nu la chestiuni fundamentale (în special atîta timp cît ne menţinem în domeniul liniar elastic). Volumul prezentat de autor depăşeşte cu mult nivelul unui curs de facultate, atît prin cuprinsul său bogat şi variat, cît şi prin multiple referiri la metode noi de calcul, cu toate că stadiul elastic nu este depăşit. Problemele legate de stadiul elastoplastic şi de capacitatea portantă a structurilor vor fi cuprinse într-un volum ulterior, destinat unor probleme speciale.

În primul volum al lucrării [1]) este cuprins studiul structurilor static determinate, utilizînd în paralel două căi generale de exprimare a condiţiilor de echilibru static: ecuaţii generale pentru poligonul forţelor şi pentru momente, respectiv aplicarea principiului lucrului mecanic virtual.

Volumul al doilea este consacrat studiului structurilor static nedeterminate în domeniul elastic. El este conceput ca o continuare a volumului anterior; totuşi, s-a căutat să se dea materialului prezentat un caracter unitar, scoţîndu-se în evidenţă principiile şi specificul metodelor generale de calcul. În marele număr de metode particulare de calcul utilizate în prezent la calculul structurilor static nedeterminate (menţionăm şi diferitele forme de utilizare a iteraţiei pentru structuri cu un grad mare de nedeterminare statică), s-a produs un proces de sintetizare, conducînd la două metode generale mai importante: metoda generală a eforturilor (caracterizînd static sistemul) şi metoda generală a deplasărilor (caracterizînd geometric structura în situaţia de echilibru); diferitele metode particulare de calcul pot fi înglobate în aceste

[1]) Recenzat în St. cerc. mec. apl., Tom 11, Nr. 5, 1960.

metode generale, care, de altfel, prezintă ele însele un paralelism complet, după cum reiese şi din modul de prezentare a lor în cadrul acestui volum.

Lucrarea este împărţită în 10 capitole. Primele trei capitole conţin bazele de plecare în studiul sistemelor static nedeterminate, următoarele patru capitole se referă la specificul şi la domeniul de aplicare al metodei generale a eforturilor, iar alte două capitole sînt dedicate metodei generale a deplasărilor pentru calculul cadrelor multiple. Ultimul capitol este destinat calculului unor structuri plane încărcate normal pe planul lor. O atenţie specială a fost dată scoaterii în evidenţă a fenomenului fizic; pentru aceasta a fost folosit cu precădere principiul lucrului mecanic virtual, obţinîndu-se rezultate sugestive, uşor interpretabile din punct de vedere mecanic. În lucrare se dau multe aplicaţii caracteristice, evitîndu-se însă calculele lungi. Totuşi, problemele teoretice tratate sînt duse pînă la posibilitatea de aplicare concretă în proiectarea inginerească. Unele părţi pot fi lăsate deoparte la o primă lectură; de altfel, o asemenea diferenţiere s-a făcut şi prin mărimea caracterelor tipografice, rezultatele de detaliu şi aplicaţiile fiind prezentate cu literă mică.

Capitolul I se referă la deformarea structurilor în stadiul elastic. După unele date preliminarii, în special de natură energetică, se trece la aplicarea principiului deplasărilor virtuale. O atenţie deosebită este acordată teoremelor generale de reciprocitate de tip Betti; în particular menţionăm teorema lui Maxwell şi diferite relaţii de reciprocitate în care apar reacţiuni unitare şi deplasări unitare. Calculul deplasărilor elastice se face în mai multe feluri; menţionăm în special aplicarea formulei Maxwell-Mohr şi sistematizarea calculului făcută de Vereşceaghin. Utilizarea proprietăţilor de simetrie şi de antisimetrie este luată în considerare. Calculul deplasărilor este sistematizat pentru bare de secţiune constantă sau pentru bare de secţiune variabilă, ca şi pentru grinzi cu zăbrele. Liniile de influenţă pentru deplasări elastice, pentru reacţiuni şi eforturi la structuri static nedeterminate sînt obţinute cu autorul teoremelor de reciprocitate.

În capitolul al II-lea este cuprins studiul poziţiilor deformate cu ajutorul sistemelor conjugate. Spre deosebire de metodele expuse anterior care au un caracter geometric, metoda sistemelor conjugate are un caracter static, autorul aducînd o preţioasă contribuţie la dezvoltarea ei. La baza acestei metode stă analogia statică a corelaţiei geometrice dintre deplasările care caracterizează o poziţie deplasată. După o scurtă introducere se trece la studiul deformării barei drepte; se consideră poziţiile deformate la grinzi drepte static nedeterminate şi la bare drepte cu secţiune variabilă. O atenţie specială este acordată deformării barelor cu axă poligonală sau curbă plană; se stabilesc sarcinile convenţionale pentru barele care se deformează în planul lor şi se indică modalităţile de operare cu sistemul conjugat; de asemenea se dau şi sarcinile convenţionale pentru bare care se deformează normal pe planul lor. În studiul deformării structurilor articulate plane se consideră întîi variaţia unghiurilor dintr-un triunghi sau patrulater; se pot determina astfel sarcini convenţionale pentru diferite categorii de bare; menţionăm determinarea deplasării nodurilor şi a rotirii barelor.

Capitolul al III-lea cuprinde elemente pentru rezolvarea generală a structurilor static nedeterminate. După o caracterizare generală a structurilor: statică (stabilirea gradului de nedeterminare) şi geometrică (cadre cu noduri fixe, cadre cu noduri deplasabile), se trece la prezentarea specificului fiecăreia dintre cele două metode generale de calcul. Menţionăm apoi un studiu succint al sistemelor de ecuaţii algebrice liniare, care apar în rezolvarea structurilor static nedeterminate; se indică algoritmul lui Gauss, ca şi unele aplicaţii pentru sisteme de ecuaţii cu cîte trei necunoscute consecutive. Rezolvarea acestor sisteme prin metode iterative este de asemenea luată în considerare.

Metoda generală a eforturilor este prezentată în capitolul al IV-lea. Se stabilesc întîi ecuaţiile de condiţie şi se indică posibilitatea de verificare a acestora. Se trece apoi la deter-

minarea diagramelor de eforturi şi la calculul deplasărilor pentru structuri static nedeterminate. Menţionăm structurile cu grad redus sau mijlociu de nedeterminare. Simplificări ale ecuaţiilor de condiţie se obţin în cazul structurilor simetrice sau prin utilizarea concomitentă a mai multor sisteme de bază. Alte simplificări se obţin prin ortogonalizarea pe cale analitică a diagramelor unitare sau prin utilizarea sistemelor de bază static nedeterminate. Se indică de asemenea posibilitatea de a obţine linii de influenţă.

În capitolul al V-lea se dau forme sistematizate de aplicare a metodei eforturilor pentru grinzi continue şi grinzi cu zăbrele static nedeterminate. În cazul grinzilor continue, distingem între posibilitatea de a avea sarcini cu poziţie fixă, respectiv sarcini cu poziţie variabilă. Se stabileşte ecuaţia celor trei momente şi se indică rezolvarea sistemelor de ecuaţii corespunzătoare prin iteraţie. Menţionăm grinzile continue cu console şi extremităţi încastrate, ca şi grinda cu o singură deschidere static nedeterminată. Pentru sarcini cu poziţie variabilă se aplică metoda punctelor fixe, analitic şi grafic; se determină liniile de influenţă şi diagramele de momente încovoietoare maxime. În cazul grinzilor cu zăbrele static nedeterminate, se consideră sarcini cu poziţie fixă şi se obţin linii de influenţă.

Capitolul al VI-lea cuprinde forme sistematizate de aplicare a metodei eforturilor pentru arce şi structuri mixte static nedeterminate. În cazul arcelor cu două articulaţii se dă o metodă generală de rezolvare, indicînd şi modul de calcul al împingerii pentru arce cu secţiune plină; menţionăm în special cazul arcului cu tirant, ca şi al arcelor cu axă parabolică sau circulară. De asemenea se determină curba de presiune şi liniile de influenţă. În cazul arcului dublu încastrat se prezintă metoda centrului elastic, obţinîndu-se expresiile necunoscutelor; influenţa cedărilor de reazeme şi a variaţiilor de temperatură este de asemenea luată în considerare. Menţionăm analog cazul arcelor cu axă parabolică sau circulară; se determină şi liniile de influenţă, ca în cazul precedent. Structuri mixte cu un singur sau cu mai multe grade de nedeterminare statică sînt de asemenea studiate.

În capitolul al VII-lea se prezintă rezolvarea structurilor static nedeterminate cu ajutorul sistemelor conjugate. Se arată modul de alcătuire a conjugatelor auxiliare şi utilizarea lor. Aplicînd metoda în mod sistematic, se stabileşte ecuaţia celor patru momente şi se extinde metoda punctelor fixe la cadre cu noduri fixe; menţionăm analogia compresiunii excentrice. Sistemele conjugate sînt aplicate apoi la construirea liniilor de influenţă la grinda dublu încastrată, la grinda continuă, la cadre şi la arcul dublu încastrat.

Metoda generală a deplasărilor este prezentată în capitolul al VIII-lea. După unele rezultate preliminare privind trecerea la sistemul de bază, forma şi semnificaţia ecuaţiilor de condiţie şi unele convenţii de semne, se trece la cazuri tip de încărcare pentru bare drepte şi curbe. Se determină astfel relaţii între eforturi şi deplasări la bare drepte şi curbe, expresiile coeficienţilor de rigiditate, ale factorilor de transmitere şi ale momentelor de încastrare perfectă pentru bare drepte şi pentru bare curbe simetrice, se consideră cazul barelor cu o articulaţie pe parcurs, cazul barelor încărcate cu rotiri de noduri simetrice sau antisimetrice etc. În cadrul cadrelor cu noduri fixe se prezintă cazul cadrelor cu un singur nod şi cazul general al cadrelor cu mai multe noduri; menţionăm simplificările ce se obţin la structuri simetrice. Studiul se face în mod gradat şi în cazul cadrelor cu noduri deplasabile; după cadrele cu o singură necunoscută se trece la cadrele etajate şi la cazul general al cadrelor de formă oarecare. În cazul structurilor simetrice se obţin simplificări interesante. Efectul variaţiilor de temperatură şi al cedărilor de reazeme este de asemenea luat în considerare. Autorul dă unele rezultate şi pentru cazul cadrelor cu tiranţi sau cu bare curbe. Unele sistematizări de calcul se pot obţine prin utilizarea necunoscutelor grupate sau al sistemelor de bază geometric nedeterminate. Este prezentat şi modul de obţinere a liniilor de influenţă prin metoda deplasărilor. De asemenea se discută posibilitatea de aplicare combinată a metodelor generale; un tip de

metodă mixtă este metoda coeficienților nedeterminați, elaborată de Gh. Em. Filipescu. Autorul prezintă pe un exemplu metoda Gvozdev.

În capitolul al IX-lea se dezvoltă probleme legate de utilizarea rezolvării prin iterație în metoda deplasărilor. În ceea ce privește cadrele cu noduri fixe, se prezintă procedeul transmiterii rotirilor, procedeul distribuirii și al transmiterii momentelor (metoda Cross), ca și procedeul transmiterii momentelor neechilibrate; menționăm o privire comparativă între aceste diferite procedee. Sistemele de bază geometric nedeterminate sînt de asemenea utilizate. Cadrele cu noduri deplasabile sînt rezolvate fie în două etape, fie într-o singură etapă, aceste metode avînd avantajele și dezavantajele lor, puse în evidență de autor. Menționăm și utilizarea „distorsiunilor" la rezolvarea cadrelor etajate; la asemenea tipuri de cadre se extinde și procedeul transmiterii rotirilor. Procedeele respective sînt apoi aplicate și la calculul liniilor de influență, ca și la cazul grinzilor cu zăbrele cu noduri rigide.

Capitolul al X-lea este destinat aplicării metodelor generale la rezolvarea structurilor plane încărcate normal pe planul lor. Menționăm astfel cazul rețelelor de grinzi pentru planșee; se prezintă o rezolvare directă și o rezolvare prin iterație. În cazul grinzilor curbe sau cotite plane încărcate normal pe planul lor, se aplică metoda eforturilor; menționăm analogia forfecării cu torsiune. De asemenea se indică modul de obținere a liniilor de influență.

Ca și în primul volum, expunerea materialului — foarte clară și sistematică — este făcută într-un stil propriu autorului. Lucrarea nu este formată dintr-o sumă de probleme izolate, așa cum se întîmplă adesea în legătură cu această disciplină, ci dintr-un material bine închegat în care există un fir conducător. În felul acesta se pot scoate în evidență concluziile principale ce rezultă pentru alcătuirea rațională și economică a structurilor de rezistență a construcțiilor.

Cartea prof. Al. Gheorghiu este deosebit de utilă atît pentru studenții facultăților de construcții (s-au indicat capitolele și paragrafele care formează cursul predat de d-sa la Institutul de construcții București), cît și pentru inginerii constructori proiectanți sau executanți.

P. P. Teodorescu

M. SARIAN, *Mecanica și rezistența materialelor*, Vol. I, Mecanica, ed. 3, București, Edit. didactică și pedagogică, 1965, 416 p.

Volumul I (*Mecanica*) al lucrării *Mecanica și rezistența materialelor* de prof. M. Sarian conține principalele probleme ale mecanicii clasice, prezentate într-o formă științifică clară și concisă de pe pozițiile materialismului dialectic.

Lucrarea se adresează studenților din învățămîntul superior, precum și specialiștilor și cadrelor didactice, care pot găsi în ea noi puncte de vedere asupra prezentării noțiunilor fundamentale ale mecanicii și asupra sistematizării acestei discipline. Fiecare capitol conține exerciții și probleme rezolvate (unele dintre ele discutate mai amănunțit), al căror număr total depășește cifra 150.

În capitolul introductiv sînt expuse pe larg noțiunile și conceptele fundamentale ale mecanicii, poziția lor față de concepțiile științifice și filozofice moderne și limitele practice pe care le implică folosirea lor. În continuare se expun simplificările și aproximațiile principale utilizate în mecanică, cum sînt: punctul material, solidul rigid, continuul etc., scoțîndu-se în evidență procesul de abstractizare care a condus la obținerea acestor concepte.

După examinarea caracteristicilor mişcării mecanice sînt expuse patru principii de bază : principiul inerţiei, principiul acţiunii, principiul egalităţii acţiunii şi reacţiunii şi principiul paralelogramului forţelor. Modul de enunţare a acestor principii permite autorului să desfăşoare în mod logic şi economic expunerea în cadrul capitolelor ulterioare.

Prezentarea materialului are un caracter consecvent vectorial, ceea ce constituie o însuşire remarcabilă a lucrării. În acelaşi timp, pentru a nu încărca expunerea mecanicii propriu-zise cu descrierea simultană a metodelor matematice spre a se putea concentra asupra aspectelor fizice fundamentale, autorul consacră calculului şi analizei vectoriale capitole prealabile separate, în cadrul cărora se remarcă în mod deosebit prezentarea teoriei vectorilor alunecători.

În cadrul capitolelor consacrate staticii se evidenţiază modul de exemplificare a noţiunii de punct material liber, folosind legături mobile (fire elastice sau fire trecute peste scripeţi), ceea ce ajută mult familiarizării studenţilor cu noţiunea respectivă, care apare acum ca un caz întîlnit curent în tehnică. Este de asemenea remarcabil felul în care sînt expuse şi exemplificate legăturile punctului material şi solidului rigid. Problema legăturilor capătă o amploare deosebită în cadrul cărţii, insistîndu-se asupra caracteristicilor geometrice şi fizice ale diverselor tipuri de legături şi asupra trecerii de la legăturile concrete la schemele abstracte folosite în mecanică printr-un proces de generalizare treptată, foarte bine condus. Tot atît de amplu sînt analizate şi legăturile cu frecare.

În ceea ce priveşte aplicaţiile, este de menţionat modul corect din punct de vedere ştiinţific în care se indică rezolvarea exerciţiilor privind echilibrul cu frecare, care adeseori este tratat în diverse manuale, numai în cazul-limită, ceea ce uneori poate conduce la erori de interpretare şi chiar la soluţii incomplete sau false. Cinematica şi dinamica sînt prezentate împreună, în scopul studierii mişcării mecanice în complexul ei, conform ideii de bază a lucrării de a scoate în evidenţă cît mai clar fenomenele fizice reale. Expunerea dinamicii sistemelor materiale precedă pe aceea a solidului rigid, care decurge ca un caz particular, cu adăugarea noţiunilor privitoare la momentele de inerţie. În cadrul dinamicii sistemelor materiale se insistă în mod deosebit asupra noţiunilor fundamentale : impuls, cantitate de mişcare, moment cinetic, lucru mecanic, energie cinetică.

Se remarcă felul în care autorul face distincţie între noţiunile de *cantitate de mişcare* şi *impuls*, care se află într-o relaţie de cauzalitate şi nu de identitate. Într-un mod deosebit de clar, concis, perfect riguros şi totodată foarte intuitiv se introduce şi noţiunea de putere. Mai semnalăm introducerea studiului *dispozitivelor mecanice simple* (sisteme care adesea sînt numite *maşini simple*) în cadrul dinamicii şi nu în cadrul staticii, aşa cum se obişnuieşte de multe ori, fapt care permite autorului să scoată în evidenţă o serie de caracteristici importante ale funcţionării acestor sisteme.

Din întreg conţinutul lucrării se degajează cu pregnanţă preocupările intense ale autorului în legătură cu metodica prezentării materialului, precum şi cu alegerea exemplelor şi aplicaţiilor care ilustrează teoremele generale. Autorul reuşeşte pe deplin să creeze pentru cititorul student o punte de legătură directă între mecanica clasică şi alte discipline, printre care în mod special rezistenţa materialelor.

Faţă de ediţia precedentă a cărţii, ediţia de faţă cuprinde în plus unele completări la principiul relativităţii clasice, transformarea Galilei, principiul relativităţii restrînse, transformarea Lorentz şi legile Kepler. De asemenea, noua ediţie conţine o serie de precizări şi de formulări îmbunătăţite, legate de prezentarea noţiunilor şi a legilor mecanicii.

Lucrarea urmăreşte înainte de toate să prezinte, într-un mod cît mai ştiinţific şi în acelaşi timp adecvat înţelegerii studenţilor, noţiunile de bază şi legile mecanicii, şi de aceea unele capitole speciale nu sînt cuprinse. Totuşi, considerăm că lucrarea ar fi putut conţine şi capitole

ca: mișcarea solidului cu punct fix, noțiuni de mecanică analitică, punctul cu masă variabilă, fără să piardă din unitatea expunerii. Aceasta, desigur, ar fi cerut un spațiu suplimentar, de care, probabil, nu s-a putut dispune.

În concluzie se poate afirma că lucrarea reprezintă o valoroasă contribuție a autorului în domeniul mecanicii, atît din punct de vedere didactic, cît și științific. Autorul reușește să pună clar în lumină noțiunile fundamentale și legile mecanicii clasice, limitele ei științifice, precum și legăturile ei cu tehnica. În felul acesta, cartea corespunde pe deplin cerințelor actuale ale predării mecanicii într-un învățămînt tehnic superior, fiind totodată utilă și specialiștilor care lucrează în acest domeniu.

Radu C. Bogdan și *D. Pantazopol*

Л. Д. РЕЗИНОВ, *Проектирование и расчет механизмов на основе геометрических преобразований*
(Proiectarea și calculul mecanismelor pe baza transformărilor geometrice), Москва—Ленинград, Издательство Машиностроение, 1964, 150 p., 97 fig.

Lucrarea de față, pornind de la premisa că programul mecanizării și automatizării complexe a proceselor de producție presupune creșterea continuă a posibilităților funcționale ale mașinilor, contribuie la dezvoltarea metodelor de proiectare, legîndu-le de problemele sintezei mecanismelor.

Cartea are cinci capitole. În primul, care tratează mecanismele ce se disting prin noutate, ne prezintă rolul legilor matematice în sinteza mecanismelor și, legat de aceasta, exemple de folosire a analogiei geometrice. Dacă studierea structurii și cinematicii mecanismelor începe de obicei cu analiza geometrică, folosirea principiilor geometriei în sinteză nu se face într-o măsură deplină. Or diferitele principii ale matematicii trebuie larg aplicate în tehnică la construirea mecanismelor, putîndu-se obține astfel generarea de traiectorii conform unor legi date. Se dau exemple din sinteza mecanismelor cu ghidaj rectiliniu.

Capitolul al II-lea se ocupă de mecanismele cu camă în cadru care, o dată cu dezvoltarea tehnicii, sînt tot mai mult folosite în construcția de mașini. Cadrul, care se găsește la o distanță e de axul de rotație al camei, execută o mișcare comandată de profilul acesteia, mișcare care poate fi liniară, de du-te-vino sau oscilantă. Legat de aceasta se tratează cazul camelor nesimetrice, ale căror arce de pauză corespund pozițiilor extreme ale cadrului. Întrebuințarea acestui tip de came se recomandă în cazurile cînd numai una dintre părțile laterale ale profilului camei lucrează sub sarcină; de asemenea aceste came dau constructorului posibilitatea alegerii diagramelor vitezelor și accelerațiilor mai apropiată de condițiile cerute. Apoi se prezintă camele ale căror arce de pauză corespund pozițiilor intermediare ale cadrului și modul de determinare a gabaritelor minime ale acestor tipuri de came. În încheierea capitolului se prezintă mecanismele cu camă în cadrul, cu numărul de perioade de pauză crescut.

Capitolul al III-lea cuprinde mecanismele plane cu ghidaje articulate și cu bare, care de asemenea își găsesc o întrebuințare tot mai largă în tehnică. Ele se întîlnesc sub forme constructive foarte diferite, putînd executa mișcări cît mai variate. Se studiază mai întîi cazul mecanismelor cu ghidaj, avînd o mișcare rectilinie de translație a elementelor, apoi criteriile generale și deosebirile la mecanismele Kempe și Gagarin, metode de construire a mecanismelor cu destinație analogă, calculul și exemple de alcătuire a mecanismelor pentru îndreptarea

traiectoriei unui element sau care conţin elemente ce se deplasează paralel şi perpendicular pe suport. În scopul dezvoltării sintezei se tratează şi teoria transformării mecanismelor pe baza transformărilor geometrice, precum şi modificarea grupei Cebîşiov în formă de λ cu exemple de utilizare a ei. Trecîndu-se şi la cazuri mai complexe, se studiază mecanismele cu opt elemente pentru reproducerea unei mişcări de translaţie rectilinie a unui element.

Datorită aplicaţiilor multiple pe care le pot avea, autorul se opreşte şi asupra mecanismelor cu ghidaj rectiliniu (directoare), precum şi a celor cu ghidaj după o elipsă (elipsografe). Pe baza modificării generalizate a grupei Cebîşiov în formă de λ se prezintă mecanismul hiperbolograf, iar în final mecanisme pentru reproducerea diferitelor forme de curbe.

Capitolul al IV-lea cuprinde mecanismele plane pentru transmisii, formate din bare şi articulaţii. O problemă destul de dificilă pentru sinteza mecanismelor este realizarea unui raport aproximativ constant între vitezele unghiulare ale arborelui conducător şi cel condus. Determinarea acestor rapoarte de transmitere a devenit posibilă datorită metodelor sintezei aproximative, cu ajutorul cărora ele se realizează cu un grad de aproximare acceptabil pentru un unghi dat al arborelui conducător. Sînt prezentate doar mecanisme care determină rapoarte de transmitere constante între elemente, şi anume $i = -1$, $i = 1/2^n$ şi altele.

Ultimul capitol se ocupă de bazele structurii mecanismelor şi de unele formule structurale transformate. Prezentînd noţiuni despre cuplele cinematice şi tipurile lor, autorul trece apoi la clasificarea structurală a mecanismelor şi la modul în care ele se pot forma prin legarea grupelor cinematice. În continuare se analizează cazul legăturilor pasive şi al gradelor de libertate în plus. Se dă formula structurală a lui Somov-Malîşev pentru mecanismele aparţinînd familiei zero, apoi şi formulele structurale transformate pentru celelalte familii de mecanisme. Pentru a se veni în ajutorul clasificării mecanismelor, se dau în încheiere anumite tabele structurale, cuprinzînd scheme pentru fiecare familie şi aspect de mecanism avînd cuple de rotaţie, de translaţie sau combinat. Autorul pune accent pe partea de structură a mecanismelor, plecînd de la premisa că ea stă la baza proiectării noilor construcţii.

Lucrarea de faţă se adresează în special proiectanţilor cuprinzînd date numai asupra mecanismelor cu elemente rigide.

Tudor-Vasile Huncher

C. F. KOLLBRUNNER, N. HAJDIN, *Wölbkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit offenem Profil* (Torsiunea barelor cu pereţi subţiri cu profil deschis) partea a II-a, Schweitzer Stahlbau-Vereinigung (Camera elveţiană de construcţii metalice), Mitteilungen der Technischen Kommission (Comunicările Comisiei tehnice), Zürich, Verlag Schweitzer Stahlbau-Vereinigung, 30 (1965), 76 p. + 23 de tabele pliante.

În prima parte a acestei lucrări [1]), autorii s-au ocupat de problemele de statică ce se pun în cazul barelor cu pereţi subţiri, determinînd eforturile care apar pe o secţiune transversală la solicitări şi rezemări oarecare în cazul unei singure deschideri. Aceste rezultate sînt folosite în lucrarea de faţă pentru studiul sistemelor de bare, constituind o continuare a staticii clasice la barele cu pereţi subţiri. Lucrarea este împărţită în nouă paragrafe, urmate de o bibliografie de 11 titluri şi 23 de tabele de calcul privind linii de influenţă şi integrări de-a lungul unei bare.

[1]) Recenzată în St. cerc. mec. apl., **18**, *3* (1965).

După o scurtă introducere se trece la principiul lucrului mecanic virtual în cazul unei variații a stării de tensiune. Pentru studiul sistemelor static nedeterminate se folosește metoda forțelor, precizîndu-se sistemul de ecuații canonic. Rezultatele obținute se aplică în special la cazul unor grinzi continue. Se iau în considerare și unele cadre simple plane. Menționăm de asemenea un studiu al barelor cu pereți subțiri cu profil deschis, rigidizate din loc în loc cu plăcuțe transversale.

Ca și monografiile precedente ale aceloraşi autori, și aceasta este caracterizată printr-o deosebită claritate de expunere ; ea poate fi folosită cu succes în practica de proiectare și, ca material informativ, în cercetarea științifică.

P. P. Teodorescu

Approximation of Functions, Proceeding of the symposium on approximation of functions, General Motors Research Laboratories, Warren, Michigan, 1964. Edited by Henry L. Garabedian, Amsterdam — Londra — New York, Elsevier Publishing Company, 1965, 218 p.

Cartea reprezintă o reuniune de lucrări din diverse domenii ale teoriei aproximației funcțiilor, prezentate de personalități binecunoscute din lumea matematicienilor ce se ocupă cu analiza numerică, dintre care citäm : F. L. Bauer (München), Garett Birkhoff (Harvard), Lothar Collatz (Hamburg), A. A. Goldstein (Washington), G.G. Lorentz (Syracuse), John R. Rice (Warren), E. L. Stiefel (Zürich) etc.

Aceste lucrări au fost prezentate în cadrul Simpozionului privind aproximarea funcțiilor care a avut loc la Michigan în 1964.

În prima lucrare, *Convergența șirurilor de funcții raționale de cea mai bună aproximație cu un număr de poli liberi*, datorită lui J. L. Walsh, se expun rezultatele principale ale problemei aproximației unor funcții continue $f(z)$, definite pe o mulțime închisă și mărginită prin funcții de forma

$$R_{jk}(z) \equiv \frac{a_0 z^j + a_1 z^{j-1} + \ldots + a_j}{b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \ldots + b_k} ; \sum_0^k |b_i| \neq 0.$$

În al doilea articol, *Întrebuințarea spațiilor Hilbert pentru aproximații*, redactat de Arthur Sard, se arată că problema ce stă în centrul problemei generale a aproximației poate fi formulată și rezolvată în termeni de problemă într-un spațiu Hilbert.

În al treilea articol, *Aplicațiile dualității în teoria aproximației*, de R. C. Buck, se discută aplicarea principiului de dualitate în probleme de aproximare a funcțiilor.

Al patrulea articol este scris de L. Collatz și intitulat *Teoreme de incluziune pentru distanța minimală în cazul aproximației Cebîșiov rațională cu mai multe variabile.*

În al cincilea articol, *Aproximații raționale pe o mulțime finită de puncte*, de P. Fox, A. A. Goldstein și G. Lastman, se dezvoltă un algoritm ce se termină după un număr finit de cicluri, prin care se construiește aproximația rațională „constrînsă", adică aceea pentru care numitorul funcției raționale construite este mărginit inferior de un număr pozitiv.

E. L. Stiefel prezintă un articol cu titlul *Metoda fazelor pentru aproximația polinominală.*

Articolul *Aproximația liniară optimală și aproape optimală*, de Michael Golomb, are un caracter pronunțat teoretic și se ocupă cu tema cît de apropiată poate să fie aproximația liniară de cea mai bună aproximație.

Al optulea articol, *Aproximații prin funcții raționale generalizate*, de E. W. Cheney, se ocupă cu aproximarea în spațiul C $[a, b]$ prin funcții de forma $r = p/q$, unde p și q sînt elemente din spațiile liniare de funcțiuni P, respectiv Q.

John R. Rice prezintă un articol cu titlul *Aproximații neliniare*, în care arată că extinderea elementelor intuitive geometrice, curent folosite în cazul aproximației liniare, ar prezenta certe avantaje și în problema aproximației neliniare.

Articolul lui L. F. Bauer, *Transformări neliniare de serii*, se ocupă cu problema sumării seriilor divergente (în special) numerice sau de funcții. Se expune metoda Stieltjes de sumare, precum și metode legate de fracțiile continue.

Philip J. Davies prezintă o privire critică asupra relației dintre teoria aproxmației funcțiilor și evoluția mașinilor electronice de calcul în lucrarea cu titlul *Teoria aproximației în primele două decade ale calculatoarelor electronice.*

Garret Birkhoff și Carl R. de Boor, în *Aproximația și interpolarea pe porțiuni polinomială*, militează pentru aplicarea acestui tip de aproximație, care are avantajul de a fi foarte comod pentru calcule și nu prezintă inconvenientele principale ale interpolării propriu-zise.

Ultimul capitol, scris de G. G. Lorentz, *Literatura rusă asupra aproximațiilor între 1958 și 1964*, este o trecere în revistă cu caracter bibliografic a rezultatelor principale apărute în intervalul anunțat.

Lucrările care au constituit subiectul simpozionului privind aproximarea funcțiilor, lucrări adunate în acest volum, constituie o valoroasă contribuție teoretică cu prețioase implicații practice dintre cele mai actuale, importanța temei crescînd în ultimul timp în special în legătură cu dezvoltarea mașinilor electronice de calcul.

L. Librescu

W. MÖRCHEN, *Über die Spaltverluste zwischen Flügeln und Endscheiben ohne und mit Ausblasung in Spannweitenrichtung*, Dissertation, TH, Darmstadt, 1965

Reluînd studiul jeturilor laterale inițiat de E. Carafoli (Al III-lea Congres internațional al științelor aeronautice, Stockholm, septembrie 1962), autorul o aplică la studiul caracteristicilor aerodinamice ale unei aripi dreptunghiulare cu suflaj lateral, situată între două plăci mari, normale pe anvergura aripii. Printre parametrii specifici ai acestei lucrări sînt: pe de o parte, intervalul dintre capătul aripii și placă, studiindu-se în prealabil, în cazul absenței suflajului, influența acestui interval asupra repartiției circulației; pe de alta, suflajul lateral, variabil ca intensitate și înclinare ($\alpha = 0{,}45°, 90°$), și influența lui, care a fost studiată experimental. Influența jeturilor laterale asupra portanței, rezistenței și repartiției circulației este cu atît mai mică, cu cît intervalul dintre extremitățile aripii și placă este mai mic.

Lucrarea cuprinde detalii experimentale care asigură acuratețea numeroaselor rezultate prezentate (polare, repartiții de presiuni etc.). Autorul face considerații și asupra aplicării suflajului lateral la elicele sau rotoarele înțubate pentru ameliorarea pierderilor marginale, ajungînd la concluzia că la intervalele mici dintre perete și palete influența este foarte mică.

Lucrarea este foarte interesantă prin metodele experimentale utilizate, prin aplicațiile practice pe care le poate sugera și prin confirmarea unor rezultate teoretice obținute în cazul jeturilor laterale de E. Carafoli în lucrarea suscitată.

Șt. Săvulescu

FRIEDRICH PFEIFFER, *Abwindkorrekturen für Flügel beliebiger Pfeilung in offenen und geschlossenen kreisrunden Windkanälen mit Bodenplatte* (Corecţii ale vitezei induse pentru aripi cu săgeata oarecare în suflerii aerodinamice cu vînă liberă sau închisă, de secţiune circulară cu placă de bază), Dissertation, Darmstadt, 1965.

Problema determinării corecţiilor care trebuie efectuate asupra rezultatelor obţinute în încercarea machetelor de aripi în sufleriile aerodinamice, mult studiată datorită interesului ei practic, este reluată în această lucrare pentru un caz particular de secţiune transversală şi anumite forme de aripi. Problema este studiată pentru viteze mici, scurgerea fiind presupusă incompresibilă şi staţionară. Se consideră cazul plan, cercetat mai înainte vreme de K. Kondo pentru aceeaşi formă de secţiune, precum şi cazul tridimensional. În ambele cazuri, metoda de rezolvare utilizată este aceea a imaginilor, care permite găsirea potenţialelor de viteze şi, în cele din urmă, determinarea cîmpului de viteze induse.

Rezultatele permit calcularea corecţiilor pentru unghiul de incidenţă, valorile numerice fiind găsite printr-un c ul programat la maşina electronică. Ca aplicaţii se consideră aripa dreptunghiulară, aceea m săgeată şi aripa delta.

Din concluziile lucrării rezultă că se poate găsi o aşezare geometrică optimă a aripii şi plăcii, astfel ca să se obţină o corecţie minimă, dar această aşezare depinde de un număr destul de mare de parametri.

Executată cu îngrijire, lucrarea lui F. Pfeiffer aduce o contribuţie interesantă la teoria aripii în curent limitat, iar rezultatele sînt utile pentru încercările în suflerie.

T. Oroveanu

F 2557

4
TOMUL 22
1 9 6 6

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

1967 M 3 1

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. **E. CARAFOLI** — *redactor responsabil,*
Acad. **D. DUMITRESCU** — *redactor responsabil adjunct,*
Prof. **I. ANTON,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CONSTANTIN AVRAM,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. **ȘT. BĂLAN,**
Prof. **GH. MANEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CR. MATEESCU,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. **N. PATRAULEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **N. TIPEI,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU VOINEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Conf. **RADU C. BOGDAN,** *secretar de redacție.*

În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134–135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Redacția : **București,**

str. Const. Mille 15, tel. 14.89.07

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 22, nr. 4 1966

SUMAR

Pag.

Centenarul Academiei

Evoluţia cercetărilor în cadrul Institutului de mecanica fluidelor şi al Centrului de mecanica solidelor 891

STUDII

C. IANCU, Scurgerea unui fluid perfect, cu greutate, dintr-un rezervor cilindric, printr-un orificiu de fund 909

E. D. DECIU, Unele contribuţii la analogia hidrodinamică a laminării 931

E. CARAFOLI şi D. PANTAZOPOL, Devierea unui curent supersonic plan-paralel cu ajutorul unei pînze de jet subţiri 945

DAN MATEESCU, Caracteristicile aerodinamice ale aripilor poligonale de grosime simetrică în regim supersonic 959

E. CARAFOLI şi ŞT. STAICU, Asupra teoriei aripii delta subţiri cu separaţia curentului la bordurile de atac 989

V. N. CONSTANTINESCU, Asupra lubrificaţiei magnetogazodinamice 1011

CHR. PELECUDI şi I. SAVA, Legile generale ale mecanismelor cu came 1039

I. BARBĂLAT, I. FILOTTI, O. GÜNDISCH şi A. HALANAY, O problemă de vibraţii neliniare în studiul suspensiei automobilului 1069

ALEX. GHEORGHIU şi C. PACOSTE, Stabilirea directă a ordinei de formare a articulaţiilor plastice la cadre încărcate cu sarcini proporţionale 1081

MIHAIL IFRIM şi SORIN LARIONESCU, Aplicarea teoriei grafurilor la calculul pulsaţiei fundamentale de vibraţie a structurilor elastice 1099

NICOLAE ORLOVSCHI, Unele probleme de modelare electrică a sistemelor de bare 1111

NOTE

RADU MARINOV, Asupra vibraţiilor unui sistem elastic cu masă concentrată, ţinînd cont de excentricitatea masei faţă de centrul elastic 1125

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

DAN PAVELESCU, Cu privire la aparatura experimentală destinată studiilor de frecare şi uzură 1133

AL. NICA, Asupra bazelor fizice ale proceselor de frecare şi ungere. II. Ungerea cu lubrifianţi solizi 1163

RECENZII 1173

St. cerc. mec. apl., Tom. 22, Nr. 4, P. 889–1178, Bucureşti, 1966

EVOLUȚIA CERCETĂRILOR ÎN CADRUL INSTITUTULUI DE MECANICA FLUIDELOR ȘI AL CENTRULUI DE MECANICA SOLIDELOR

De-a lungul anilor s-au ridicat mereu din rîndurile poporului român oameni dornici să învețe, să cerceteze, să cunoască și să pătrundă tainele naturii, minți agere, spirite adînci, gata oricînd să observe un fenomen, să examineze, să tragă concluzii, să așeze pietre la temelia științei și tehnicii pentru binele omenirii, pentru progresul social.

Drumul a fost însă lung și uneori greu de străbătut pentru fiii poporului nostru pînă cînd au putut găsi condițiile necesare valorificării creațiilor lor. Vicisitudinile istoriei noastre, lămurite pe deplin în lumina materialismului dialectic și istoric, au făcut ca diferitele încercări de creare a posibilităților de studii corespunzătoare modelelor epocii respective să dea cîteodată greș.

În 1562 se soldează cu o nereușită încercarea lui Despot-Vodă de a înființa la Cotnari o Academie, unde invitase și pe matematicianul Rheticus.

Vasile Lupu înființează (1640), la Iași, „Școala mare domnească", cu limba de predare slavonă. Dar nici activitatea acestei școli nu poate avea un caracter de continuitate.

La București funcționează pe la 1679 „Academia" de la Sf. Sava.

Mai apoi (1712—1713) școala din Iași este reorganizată după modelul academiei de pe lîngă Patriarhia din Constantinopol.

Prin 1754 sînt inaugurate la Blaj trei școli, care vor reprezenta importante focare de învățămînt.

Mai tîrziu, unii români plecați prin alte țări la învățătură se întorc înflăcărați de noile idei aduse de revoluția franceză, pe care caută să le răspîndească prin viu grai prin scrieri și prin înființare de noi școli. Printre aceștia trebuie amintiți Gh. Lazăr și Gh. Asachi.

Gh. Lazăr înființează la 1818 la București, în cîteva chilii ale mănăstirii Sf. Sava, o „școală academicească" pentru „științele filozoficești și matematicești". Școala de la Sf. Sava își întrerupe temporar activitatea în 1821 și este redeschisă mai tîrziu de foștii săi elevi I. Heliade-Rădulescu, Eufrosin Poteca și apoi Petrache Poenaru.

În Moldova, adevăratul organizator și aducător de noi idei pe tărîmul învățămîntului este Gh. Asachi. El obține titlul de doctor în filozofie și inginer la Lemberg. Urmează studii de specializare la Viena, călătorește prin Italia și se reîntoarce în Moldova, devenind profesor de matematici cu „aplicație practică de gheodezie și arhitectură" la Școala de la Trei Ierarhi, unde limba de predare era cea elină. Asachi predă

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 22 NR. 4 P. 891—908, BUCUREȘTI 1966

însă în limba română. Mai tîrziu (1827), Asachi reorganizează şcoala de la Trei Ierarhi, cerînd ca limba de predare să fie cea românească. Primele lucrări ştiinţifice originale româneşti în domeniul matematicii, scrise în special în timpul studiilor în străinătate, se datoresc lui Gh. Asachi, E. Bacaloglu etc.

În Moldova, un început de învăţămînt superior îl constituie Academia Mihăileană (1835), care va ocupa un loc de seamă în crearea unei tradiţii progresiste. Mai tîrziu se va crea şi o „şcoală a ingineriei civile", alipită de Academia Mihăileană.

În timpul lui Cuza se organizează învăţămîntul universitar, se dă apoi oarecare încurajare învăţămîntului secundar şi profesional. Treptat ia fiinţă un început de viaţă culturală. În aprilie 1866 se constituie Societatea Literară Română, devenită în 1867 Societatea Academică Română, iar în 1879 Academia Română. Încep să apară unele publicaţii, se manifestă timid preocupări pe tărîmul ştiinţei.

Încă înainte de 1877 s-a încercat să se constituie o Societate de ingineri şi arhitecţi, care însă nu a putut dăinui.

După experienţe costisitoare şi foarte triste făcute cu darea în concesie a lucrărilor publice unor specialişti din străinătate, în urma războiului din 1877 o seamă de conducători patrioţi au stimulat pe inginerii români să execute singuri linii ferate, poduri mari şi alte lucrări de utilitate publică. Prima linie ferată construită în aceste condiţii a fost linia Buzău—Mărăşeşti, reprezentînd astfel prima lucrare de ştiinţă aplicată executată de români. Lucrările acestei linii au fost conduse de inginerul român D. Frunză.

Entuziasmaţi de acest succes al ştiinţei româneşti, inginerii şi antreprenorii şi-au dat seama că nu mai era timpul să lucreze şi să se instruiască izolat şi că se impunea crearea unei asociaţii care să activeze pentru propăşirea ştiinţifică şi economică a ţării. Astfel, în 1881 se constituie Societatea politehnică, recunoscută în 1893 ca persoană juridică şi morală.

Tot în 1881 s-a înfiinţat Şcoala naţională de poduri şi şosele.

În cadrul societăţii s-au ţinut diferite conferinţe, s-a desfăşurat o acţiune privind uniformizarea nomenclaturii tehnice etc.

Din 1885 a început să apară „Buletinul Societăţii politehnice" care însă, datorită lipsei de fonduri, nu a putut avea o apariţie regulată. „Buletinul Societăţii politehnice" a reprezentat pentru mult timp cea mai importantă publicaţie tehnică-ştiinţifică de la noi din ţară.

Se afirmă o seamă de ingineri români, dintre care trebuie menţionaţi D. Frunză şi Gh. I. Duca.

Gh. I. Duca, în calitatea sa de director al Şcolii de poduri şi şosele, a reorganizat-o, ridicînd-o la nivelul şcolilor tehnice din străinătate. Totodată, ca director al căilor ferate române, a desfăşurat o rodnică activitate, reprezentînd de asemenea ţara la diferite congrese internaţionale.

Figura cea mai proeminentă a ingineriei româneşti din ultimul sfert al secolului trecut a fost acea a inginerului Anghel Saligny. Inginer, profesor şi preşedinte al Academiei Române, numele său este legat de nenumărate lucrări, ca acele privind docurile din Brăila şi Galaţi, lucrări

și instalații pentru cereale și petrol în portul Constanța etc. Dar lucrarea sa cea mai importantă este podul de la Cernavodă, realizare tehnică deosebit de valoroasă. În 1907 are loc la București al 3-lea Congres internațional de petrol, prezidat de A. Saligny.

Tot în rîndul inginerilor constructori care s-au relevat în mod special trebuie amintit Elie Radu. Acesta a condus o serie de lucrări importante de utilitate publică, linii ferate, alimentarea cu apă subterană a capitalei, poduri, șosele etc. Profesor de edilitate și procedee de construcții la Școala națională de poduri și șosele, Elie Radu a fost membru de onoare al Academiei Române.

Încep să se publice și unele lucrări în domeniul matematicilor. Prima revistă științifică românească consacrată matematicii, fizicii și chimiei, apărută la Iași sub conducerea prof. C. Climescu (1883—1888), începe prin a insera în domeniul mecanicii probleme de statică, cinematică și dinamică. La Congresul internațional de căi ferate ținut la Milano în 1887, participă unii reprezentanți români. Ing. Th. Dragu, unul dintre participanți, a publicat un raport detaliat în „Buletinul Societății politehnice" din ianuarie—februarie 1888.

Delegații români participă regulat la Congresele de căi ferate care au avut loc apoi la Petersburg (1892), cînd Gh. Duca este ales vicepreședinte al Congresului, Londra (1895), Washington (1905) etc.

De la începutul secolului al XX-lea pînă la primul război mondial dezvoltarea capitalismului în țara noastră asigură o întărire a pozițiilor politice ale burgheziei. În același timp are loc o creștere a industriei țării, împletită cu pătrunderea capitalului internațional.

Datorită dezvoltării industriei, școala începe a fi organizată mai sistematic, fiind necesar ca muncitorii să cunoască un minimum de carte care să ușureze folosirea mașinii. Crește procentul știutorilor de carte la 39,3%. Analfabetismul rămîne totuși o adevărată plagă.

Se înființează, prin legea lui Spiru Haret, trei categorii de școli de meserii. Se simte o sporire a numărului studenților. Însă învățămîntul de toate gradele este mai mult teoretic, fără să aibă vreo corespondență cu nevoile dezvoltării reale ale țării.

Încep totodată a se înfiripa primele școli de matematică și mecanică, create la sfîrșitul secolului trecut de generația de tineri oameni de știință pregătiți în țară și străinătate, ca Spiru Haret, N. Coculescu, D. Emanuel, Șt. Burileanu.

Merită în special subliniată activitatea lui Spiru Haret, membru al Academiei Române, care, ca ministru al instrucțiunii publice, a reformat învățămîntul de toate gradele, dînd un impuls învățămîntului științific și tehnic prin crearea liceelor reale. De asemenea a ținut prelegeri de mecanică de un înalt nivel științific.

Un alt reprezentant al mecanicii a fost și Mănescu Chirilov, unul dintre primii profesori.

În cadrul Societății române de matematică, se înființează în (1895) „Gazeta matematică", în paginile căreia se publică primele lucrări ale tineretului studios. Începe să se contureze activitatea școlilor de meca-

nică și de matematică sub conducerea unor personalități binecunoscute, ca Gheorghe Țițeica, Dimitrie Pompei, Ion Ionescu, Gh. Filipescu.

Alt reprezentant important al corpului didactic este și Andrei Ioachimescu, care timp de peste 30 de ani a funcționat ca profesor de mecanică la Școala de poduri și șosele, devenită ulterior (1920) Școala politehnică din București. Activitatea didactică a lui Ioachimescu prezintă un deosebit interes pentru formarea cadrelor de specialiști din acel timp.

În domeniul rezistenței materialelor și a staticii construcțiilor merită să fie amintite în special contribuțiile lui Gh. Em. Filipescu (1887—1937). Acesta a publicat, pentru prima oară în limba română, un tratat de *Rezistența materialelor și statica construcțiilor* care s-a bucurat de aprecieri în țară și străinătate.

Activitatea în domeniul construcțiilor, a rezistenței materialelor, a tehnicii drumurilor a fost continuată mai tîrziu de o serie de specialiști, ca Nicolae Profiri, Aurel Beleș, Ștefan Bălan, M. Hangan, Cr. Mateescu, care au realizat lucrări originale, contribuind totodată la formarea a noi noi cadre.

În 1927 a avut loc la Amsterdam primul Congres internațional de încercarea materialelor, iar în 1928 a luat ființă noua Asociație internațională pentru încercarea materialelor. Ulterior se constituie și în România Asociația română pentru încercări de materiale sub președenția prof. Vasilescu-Karpen, care a fost ales în 1931 membru în comitetul de onoare al Congresului internațional respectiv.

România a participat și la congresele internaționale de tramvaie de la Bruxelles din 1910 și 1922, precum și la Congresul de la Paris din 1924.

În 1925, la Congresul internațional de tramvaie și căi ferate înguste de la Budapesta, ing. C. Mikloși și C. C. Teodorescu au prezentat o comunicare asupra sudurii electrice a șinelor.

O activitate deosebită în domeniul mecanicii desfășoară și ing. George Constantinescu, care imaginează în 1910 o nouă metodă de transmisiune a energiei cu ajutorul vibrațiilor, formulînd o nouă teorie, denumită teoria sonică (sau sonicitatea), aplicată pentru prima oară la tirul mitralierelor de pe avioanele de vînătoare, dînd posibilitatea tragerii printre palele elicelor avioanelor. De asemenea a imaginat un dispozitiv mecanic, denumit convertizor (*Torque converter*), care se aplică motoarelor și are proprietatea de a furniza în mod simultan și de a menține automat un cuplu constant și egal cu rezistențele ce se opun mișcării, menținînd însă viteza și cuplul motorului aproape neschimbate. A aplicat principiile teoriei sale la o serie de mașini, construind motoare și generatoare sonice, transmisiuni, ciocane de nituit, de găurit etc.

Contribuții deosebite au fost aduse în domeniul construcțiilor aeronautice. Realizările românești în acest domeniu se înscriu în rîndul celor ale pionerilor pe plan mondial.

Traian Vuia (1872—1950), plecat la Paris pentru a-și desăvîrși concepțiile sale, este primul aviator constructor care a rulat pe pămînt și apoi s-a înălțat în aer numai cu puterea proprie a motorului instalat pe bordul avionului său (Paris, 18 martie 1906). Aparatul lui Vuia avea

elice tractivă, motor cu acid carbonic de 25 CP și șasiu pe patru roți de bicicletă, care reprezintă prima concepție de tren de aterizaj pe roți de cauciuc. Vuia s-a ocupat de asemenea de construcția aparatelor cu aripi rotitoare. Studiile și încercările sale au atras atenția specialiștilor, făcînd obiectul a diferite articole apărute în publicațiile vremii.

O altă importantă și valoroasă realizare a sa, care dovedește o nouă concepție în domeniul producerii aburului, este generatorul de aburi cu ardere internă. Vuia a imaginat și a realizat un cazan cu totul nou, modern nu numai pentru epoca respectivă, ci chiar și pentru nivelul actual al tehnicii.

Aurel Vlaicu (1882—1913) a realizat la București (1910) avioane de o concepție originală, foarte apreciate pe acea vreme. El aduce o serie de inovații, care mai sînt folosite și astăzi în mod curent, cum este, spre exemplu, reductorul dintre motor și elice (1911), aripa parasol, ampenaj vertical dublu etc. Cu unul dintre aceste aparate a obținut premii la concursul aeronautic internațional de la Aspern (Viena) în 1912.

Henry Coandă construiește în 1910 un avion propulsat de un motor cu reacție, primul în lume de acest gen, cu fuselaj de o formă nouă mai subțire, cu aripă în formă delta și cu tren de aterizaj escamotabil. Mai tîrziu Henry Coandă descoperă un fenomen, care a fost denumit „efectul Coandă" și care este și astăzi în atenția savanților din toată lumea.

După această primă perioadă a precursorilor, denumită în toate țările „perioada eroică", construcțiile de avioane încep să cunoască o deosebită dezvoltare. Și în Romînia fabrici și ateliere se ocupă cu construcții de avioane. În afară de avioanele străine construite sau reparate, se realizează în 1922, după planurile maiorului aviator Șt. Protopopescu, un avion românesc, care a dat bune rezultate, fiind întrebuințat în aviația românească ca avion-școală.

Cam în aceeași perioadă se realizează un biplan de recunoaștere sub conducerea inginerului Șeșefski, ca și un hidroavion de observație românesc, conceput de ing. Radu Stoica.

Dar începuturile unei organizări a industriei aeronautice datează din 1925, cînd se constituie societatea „Industria aeronautică română".

La început, activitatea societății se limitează la construcția în licență a avioanelor și motoarelor de tip străin. Mai apoi, dr. ing. E. Carafoli concepe și proiectează, cu un colectiv din cadrul biroului de studii și construcții de pe lîngă fabrica de avioane de la Brașov, o serie de avioane, dintre care „avionul de vînătoare I.A.R." de formula „aripă joasă". Această formulă, adoptată de toată lumea atît pentru aviația militară, cît și cea civilă, părea la acea epocă îndrăzneață.

De asemenea începe să se dezvolte și o altă fabrică, S.E.T. (Societatea pentru exploatări tehnice), unde ing. Gr. Zamfirescu și-a construit avioanele sale.

O a treia fabrică care construiește avioane românești este și I.C.A.R. (Industria pentru construcții aeronautice din România).

În același timp se construiește sub conducerea maiorului Macavei, a căpitanului Istrate, Stănculescu și Constantinescu, la Arsenalul aero-

nautic, un avion-şcoală dublu monoplan, avînd aripa inferioară demontabilă, denumit „Aeron".

În rîndul constructorilor români de avioane trebuie menţionaţi şi G. Fernic, a cărui activitate (1900—1930) s-a desfăşurat în America, G. Bothezat, care de asemenea a lucrat în America, fiind directorul Laboratorului aerodinamic din Dayton (Ohio). Realizarea sa cea mai importantă este un elicopter cu patru aripi învîrtitoare, compuse din patru pale şi patru trenuri de aterizaj independente.

Cercetările de aerodinamică încep să cunoască în ţara noastră o dezvoltare deosebită.

Cu această ocazie trebuie amintit că E. Carafoli a realizat înainte de 1931, în Franţa, în colaborare cu prof. H. Toussaint de la Sorbona, un tunel hidrodinamic la Institutul aerotehnic de la Saint-Cyr, în scopul de a vizualiza mişcările fluidelor în jurul diverselor corpuri utilizate în aviaţie.

Paralel cu activitatea tehnică, E. Carafoli desfăşoară o remarcabilă activitate didactică, ocupîndu-se totodată de crearea mijloacelor experimentale necesare pregătirii de noi cadre. Astfel creează Laboratorul aerodinamic al Şcolii politehnice din Bucureşti, construind (1931), împreună cu I. Stroescu, un tunel aerodinamic de sistemul „circuit închis" cu întoarcere simetrică, cu un randament de utilizare foarte ridicat, printre primele din lume cu astfel de performanţe.

Lui E. Carafoli i se datoreşte iniţierea şi conducerea unei activităţi susţinute de aerodinamică experimentală şi formarea mai multor specialişti. Dintre aceştia se relevă în special I. Stroescu, care de altfel se ocupase cu mult înainte de aerodinamica experimentală, specializîndu-se în construcţii de suflerii şi dispozitive de experimentare. Realizează printre altele, în urma participării la un concurs internaţional, o suflerie de turbulenţă redusă, în Franţa.

În domeniul aerodinamicii mai trebuie relevată activitatea desfăşurată mai tîrziu de unii specialişti, ca, de exemplu, aceea a lui N. Tipei, care întreprinde studii de aerodinamică teoretică şi experimentală, cercetări de mecanica avionului, cercetări asupra teoriei aripii de avion etc.

E. Carafoli aduce în acelaşi timp contribuţii însemnate în problemele fundamentale ale mecanicii fluidelor şi aerodinamicii, publicînd o serie de lucrări în ţară şi în străinătate. A elaborat astfel metode de trasare ale profilelor aerodinamice cu vîrf ascuţit cu diedru şi în special cele cu vîrf rotunjit (1926—1928) (aceste din urmă fiind denumite de diverşi autori străini „profile Carafoli"), teoria aripilor de anvergură finită etc.

În domeniul mecanicii aplicate au obţinut rezultate deosebite încă o serie de oameni de ştiinţă, care îşi desfăşoară azi activitatea în alte unităţi academice sau universitare. Deşi activitatea acestora este expusă pe larg în sectoarele respective, nu putem să nu amintim contribuţiile pe care le-au adus la dezvoltarea cercetărilor şi a învăţămîntului mecanicii. Astfel, Victor Vâlcovici introduce încă din 1913, la Universitatea din Bucureşti, un curs de mecanică unitar şi modern, aducînd totodată contribuţii valoroase la dezvoltarea diferitelor capitole ale mecanicii

(mecanica analitică, mişcări ale fluidelor cu suprafeţe de discontinuitate, scurgeri ale fluidelor barotrope etc).

Octav Onicescu, pe lîngă bogata sa activitate în domeniul matematicii, s-a ocupat şi de probleme de mecanică, căutînd să stabilească, cu ajutorul unor principii mai largi decît cele newtoniene, un cadru al mişcării corpurilor materiale care să implice masa ca o manifestare a inerţiei corpurilor.

Totodată trebuie amintite contribuţiile lui Caius Iacob în dinamica gazelor şi teoria jeturilor.

De asemenea este de relevat şi activitatea lui Al. Proca, care a elaborat numeroase studii originale în mecanică şi fizică.

În domeniul hidromecanicii, prof. D. Germani (1877—1948) aduce contribuţii originale în teoria similitudinii, studiul loviturii de berbec în conducte, calculul presiunii pe pereţi subţiri flexibili. Lui Germani i se datoreşte primul tratat românesc de hidraulică teoretică şi aplicată. De asemenea a realizat şi importante lucrări de canalizare şi alimentări cu apă în România.

La al II-lea Congres internaţional de mecanică aplicată din 1926 de la Zürich, E. Carafoli prezintă, în colaborare cu prof. H. Toussaint, o comunicare asupra scurgerii plane a fluidelor, prezentînd şi un film în acest sens, iar la al III-lea Congres de la Stockholm (1930), E. Carafoli este din nou prezent cu o lucrare privind teoria aripilor sustentatoare şi verificări experimentale ale acesteia. De asemenea D. Germani prezintă o comunicare privind similitudinea în hidrodinamică.

În domeniul hidrotehnicii mai trebuie amintite încă lucrările lui Dorin Pavel, precum şi activitatea lui A. Bărglăzan, specializat în domeniul maşinilor hidraulice. Acesta înfiinţează Laboratorul de maşini hidraulice al Institutului politehnic de la Timişoara, unde s-au obţinut rezultate remarcabile, aducîndu-se mai tîrziu contribuţii valoroase pentru industria noastră constructoare de maşini. Pe lîngă activitatea ştiinţifică, A. Bărglăzan desfăşoară şi o bogată activitate didactică, formînd în jurul său un nucleu de tineri cercetători. Cercetările iniţiate de A. Bărglăzan sînt continuate azi, cu rezultate teoretice şi aplicative interesante.

★

În urma primului război mondial şi a tratatelor încheiate, România a suferit mari transformări. Noua situaţie duce în mod firesc la o dezvoltare atît a exportului, cît şi a activităţii industriale şi comerciale. Datorită acestei dezvoltări se creează noi şcoli, mai ales în mediul orăşenesc. Se înfiinţează şcoli de agricultură şi tehnice, se înregistrează o dezvoltare a învăţămîntului superior, acordîndu-se oarecare atenţie învăţămîntului ştiinţific şi tehnic.

Apar unele reviste ştiinţifice, se observă o dezvoltare a ştiinţei aplicate. Între timp s-au format cîteva asociaţii tehnice-ştiinţifice, ca Asociaţia inginerilor şi tehnicienilor din industria minieră, Asociaţia generală a inginerilor din România, Cercul tehnic etc.

Academia Română desfăşoară o activitate de afirmare a ştiinţei româneşti, rămînînd mai mult o instituţie cu un caracter de consacrare, în care ştiinţele tehnice erau slab reprezentate.

Din succinta și, desigur, incompleta exemplificare ce precedă, se poate desprinde totuși că au existat preocupări și s-au adus importante contribuții la dezvoltarea mecanicii atît pe plan teoretic, cît și în ceea ce privește o seamă de realizări tehnice.

★

„Nu se poate concepe socialismul fără tehnica marii industrii..., care e bazată pe ultimul cuvînt al științei moderne..." [1]).

Călăuzindu-se după această teză, se subliniază necesitatea imperioasă a dezvoltării continue și multilaterale a forțelor de producție prin industrializarea țării pe bazele științei și tehnicii celei mai înaintate.

Crearea bazei tehnice-materiale a socialismului necesită perfecționarea neîntreruptă a tehnicii, conform cerințelor legii economice fundamentale a socialismului, înlocuirea permanentă a tehnicii vechi cu tehnica nouă.

Matematica, mecanica, fizica, chimia, geologia, metalurgia și atîtea alte discipline sînt instrumente puternice necesare tehnicii, ridicîndu-i potențialul și perfecționînd mereu metodele de producție. Studiile și cercetările științifice în orînduirea socialistă nu mai rămîn pe seama întîmplării sau a pasiunii sporadice de știință, ci sînt încadrate în problemele de stat.

Adînca schimbare structurală produsă după 23 August 1944 a acordat științei un nou statut, necunoscut pînă atunci. Activitatea științifică a căpătat un caracter organizat reflectîndu-se, așa după cum se știe, în reorganizarea Academiei, constituirea unei rețele de institute de cercetare în cadrul Academiei și a departamentelor, ca și institute de proiectare, în procesul de formare a cadrelor, de înființare a laboratoarelor pe lîngă catedre, în problematica de cercetare. S-a creat posibilitatea, pentru prima dată în țara noastră, ca oamenii de știință să dispună de o bază materială necesară desfășurării activității, iar tinerele cadre să găsească condițiile unei formări cît mai bune.

În cadrul noii Academii, care nu mai era o instituție de consacrare, ci o instituție a cărei activitate avea să se îmbine cu efortul creator al întregului popor muncitor, s-au creat institute de cercetări în diferitele domenii ale științei, menite să sprijine industria și să contribuie la dezvoltarea științei în general. Dat fiind locul important pe care mecanica îl ocupă în tehnică, s-a înființat în cadrul Academiei în 1949 și un institut de mecanică aplicată, în profilul căruia erau cuprinse și alte ramuri ale științelor tehnice, ca siderurgia și metalurgia.

Activitatea Institutului de mecanică aplicată, precum și a celorlalte institute, ca orice activitate nouă, a început în condiții grele, inerente oricărui început.

Lipseau astfel laboratoarele, materialele documentare, publicațiile periodice. La acestea trebuie adăugat o compoziție necorespunzătoare a personalului științific, unele deficiențe în planificarea și organizarea cercetărilor, în colaborare cu departamentele, datorite mai ales lipsei unei legături profunde a științei cu producția.

[1]) V.I. Lenin, *Opere complete*, ed. a 2-a, vol. 36, București, Edit. politică, 1965, p. 315.

Pornind de la un număr relativ redus de probleme și teme, planul de cercetare al Institutului de mecanică aplicată, siderurgie și metalurgie a cuprins atît cercetări fundamentale, care să poată aduce contribuții pe plan internațional, permițînd totodată formarea pe plan național a unor cadre de specialiști și constituirea unor rezerve ale viitorului, cît și probleme care să reprezinte contribuții la dezvoltarea industriei țării și deci a ridicării nivelului de trai al poporului.

O primă problemă care se punea stringent chiar de la început a fost aceea a creării bazei materiale. Datorită măsurilor luate de partid și de guvern, institutul a primit fondurile necesare pentru investiții în această direcție. Chiar din primul an s-a executat peste 60% din planul de investiții, din care o parte au fost realizate cu mijloace locale. Astfel au început să se execute instalații pentru un tunel aerodinamic, un canal hidromecanic, utilaj pentru laboratorul de geotehnică etc.

Formarea cadrelor a constituit de la început una dintre problemele principale căreia i s-a acordat de către conducere întreaga atenție. Prin îndrumările date de cercetători mai vîrstnici cu o deosebită pregătire, prin organizarea diferitelor cursuri de știință și tehnică, prin specializări în străinătate au început să se formeze noi cadre.

Cu toate dificultățile cărora a avut să le facă față activitatea în această perioadă de început, s-au realizat progrese, înregistrîndu-se o serie de rezultate.

Astfel, în domeniul mecanicii fluidelor, domeniu în care exista o tradiție în țara noastră, s-au înregistrat de la început o serie de studii și cercetări valoroase cu rezultate practice. Astfel, cercetările de aerodinamică au dus la rezultate practice aplicabile aripilor în săgeată și aripilor cu suprafețe permeabile. S-au efectuat de asemenea încercări de laborator asupra ecranelor permeabile, care au permis obținerea unor rezultate ce-și puteau găsi aplicarea la organizarea perdelelor forestiere de protecție a agriculturii. Alte cercetări s-au ocupat cu acțiunea vîntului asupra obstacolelor, cercetări care au condus la redactarea unor STAS-uri relative la efectul vîntului asupra construcțiilor.

În domeniul hidrodinamicii s-a studiat scurgerea prin orificii sau peste deversoare cu creastă ascuțită, ajungîndu-se la rezultate care puteau avea aplicații directe la determinarea debitelor de scurgere a apelor prin orificii de evacuare sau peste deversoare, probleme cerute în lucrările de baraje.

Rolul deosebit de important al construcției de mașini în industrializarea țării a pus de la început cercetării o serie de probleme. În acest sens au început studii în domeniul mecanismelor, elasticității, vibrațiilor, ungerii-frecării și uzurii etc.

Astfel, în vederea înlăturării diferitelor perturbații constatate în funcționarea și utilizarea mașinilor, mecanismelor și diverselor instalații, s-a studiat problema loviturilor de berbec și a oscilațiilor în conducte, ajungîndu-se la o serie de formule permițînd calculul sistemului piston-conductă-injector la motoarele diesel.

În cadrul problemei îmbunătățirii ungerii motoarelor s-au obținut rezultate interesante asupra repartiției de presiune în paliere. De asemenea

s-au înregistrat o serie de rezultate privind utilizarea aceluiași tip de ulei atît iarna, cît și vara, precum și posibilitatea măririi perioadelor de schimb a uleiurilor.

Alte studii și cercetări s-au ocupat de probleme de rezistență a materialelor, plasticitate, elasticitate și geotehnică. S-au efectuat studii privind determinarea coeficientului de adaptabilitate pentru profile laminate, s-au obținut rezultate în cadrul problemei flambajului, s-a pus la punct o metodă practică pentru calculul tălpii comprimate a podurilor metalice. De asemenea s-au stabilit formule pentru calculul învelitorilor cu două directoare și plan director.

În cadrul problemei degradării construcțiilor fundate pe argile s-a cercetat pămîntul de fundație al construcțiilor ce prezentau degradări, stabilindu-se caracteristicile geotehnice de bază.

S-au studiat de asemenea probleme de protecție a muncii.

Pe măsura dezvoltării cercetării și a creșterii cadrelor, s-au organizat secțiile și sectoarele de cercetări. Astfel mai tîrziu activitatea s-a desfășurat în cadrul următoarelor cinci secții :

Secția de mecanică generală, în cadrul căreia au fost grupate probleme de elasticitate, fotoelasticitate, studiul barelor supuse la șocuri, probleme de vibrație și stabilitate, studiul comportării structurilor etajate formate din cadre, statica și dinamica grinzilor-pereți, studiul dinamic al fundațiilor etc.

Secția de mașini și mecanisme, cuprinzînd probleme de lubrificație hidrodinamică, dinamica stabilității lagărelor, lubrificația cu gaze, uzura și rodajul suprafețelor. Au fost de asemenea studiate probleme de teoria mecanismelor cu aplicații la diferite tipuri de mașini. Alte preocupări s-au îndreptat spre metalizarea prin pulverizare în vederea recondiționării și protecției suprafețelor metalice, cercetări asupra mecanicii utilajului petrolier, cercetări experimentale privind studiul tăierii mediilor continue, cu aplicații la tăierea solurilor (mașini agricole) și așchierea metalelor (mașini-unelte).

Secția mecanica construcțiilor, care a grupat în general probleme de mecanica solidelor cu aplicații în construcții : cercetări sistematice asupra învelitorilor subțiri de diferite forme, cercetări statice și dinamice asupra betonului precomprimat, studiul aderenței betonului de armături, cercetări de geotehnică privind consolidarea terenurilor, studii asupra comportării mecanice a pămîntului etc.

Secția aeromecanică, în cadrul căreia s-au efectuat cercetări de aerodinamica industrială, aerodinamica vitezelor mari subsonice și supersonice, mișcări cu unde de șoc detașate, aerodinamica suprafețelor permeabile, studiul jeturilor de gaze cu aplicație la hipersustentația aripilor de avion, cercetări asupra mecanicii stabilității avioanelor și aparatelor cu aripi rotitoare, studiul aeromecanic al reactoarelor, studiul mișcărilor prin medii poroase, cercetări asupra stratului-limită, studii de aeroelasticitate etc.

Secția hidromecanică, cuprizînd probleme de mecanica fluidelor cu aplicații în hidraulică și hidrotehnică. S-au abordat astfel cercetări asupra unor construcții hidrotehnice pe modele, cercetări privind mișcările flui-

delor grele cu suprafaţa liberă prin metode numerice, studiul loviturii de berbec în conducte, unele mişcări ale fluidelor vîscoase la numere Reynolds mici etc.

Între timp s-a realizat şi o parte importantă a bazei materiale, existentă şi în momentul de faţă.

Cercetătorii din cadrul institutului au realizat cu ajutorul unor întreprinderi o serie de aparate şi instalaţii. Astfel a fost construită o suflerie subsonică cu o balanţă modernă cu şase componente, o suflerie supersonică mare pentru experimentarea în domeniul aerodinamicii vitezelor mari, prima instalaţie de acest fel proiectată şi executată la noi. De asemenea a mai fost realizat şi un tub de şoc care serveşte la studierea multor probleme din domeniul aerodinamicii vitezelor mari. S-au mai creat încă : un laborator pentru studiul combustiei, un laborator pentru studiu pe machete hidrodinamice, un laborator de lubrificaţie a lagărelor şi de studiul ungerii în motoare, un laborator de chimia lubrifianţilor şi uzură, un laborator de metalizare, laboratoare de teoria mecanismelor, un laborator pentru studiul prelucrării metalelor, un laborator pentru studiul betonului, un laborator de geotehnică, un laborator de încercări mecanice şi elasticitate.

Baza materială a institutului a fost dezvoltată în continuare. Mai pot fi astfel menţionate construirea cu mijloace proprii a unui tub de şoc hipersonic, începerea construcţiei unei suflerii sonice, constituirea unui laborator pentru studiul turbulenţei în stratul-limită, a unei instalaţii pentru studiul mişcării fluidelor vîscoase, dezvoltarea unui laborator de lubrificaţie cu gaze, realizarea unei instalaţii mecanoelectronice pentru studiul mecanismelor etc.

Mai tîrziu, după 1956, preocupările institutului s-au conturat mai precis prin înfiinţarea unor noi sectoare de activitate sau prin trecerea unor sectoare în cadrul altor instituţii. Astfel, după ce într-o primă etapă s-au detaşat problemele de metalurgie, în 1957 au trecut în cadrul altor unităţi studiul problemelor de mecanica construcţiilor şi geotehnică.

Pentru sprijinirea secţiilor de cercetare, prin elaborarea metodelor moderne de măsurători şi experimentare s-a înfiinţat un sector de măsurători cu izotopi radioactivi şi mărimi electrice.

În decursul acestor ani a crescut numărul cadrelor de cercetare, ajungînd de la cîţiva colaboratori externi în primul an la peste 80 de cercetători şi un număr egal de personal tehnic auxiliar în 1956, în majoritate format din elemente tinere.

Documentarea, prima etapă în activitatea de cercetare, a fost asigurată încă de la început prin crearea unei secţii de documentare, menită să asigure informarea ştiinţifică şi materialul documentar necesar colectivelor de cercetare. S-au stabilit astfel o serie de forme de documentare cu caracter permanent, instrumente preţioase de sprijin în activitatea de cercetare.

Activitatea ştiinţifică a Institutului de mecanică aplicată, care a atras şi cadre din învăţămîntul superior şi din industrie, a urmat din primii ani o linie mereu ascendentă, obţinîndu-se realizări importante, grupate în jurul obiectivelor amintite, adică asistenţă sectoarelor de

producție pentru rezolvarea problemelor mai importante puse de economia națională, contribuții la dezvoltarea științei în general.

Cercetarea românească a atins după 1956 un stadiu de maturizare, s-au adîncit o serie de probleme, s-au specializat noi cadre, constituindu-se adevărate școli, sub conducerea cadrelor cu experiență, în domeniul aerodinamicii, al hidrodinamicii, al lubrificației, care și-au dobîndit recunoașterea și prețuirea și în afara hotarelor țării.

Este de relevat de asemenea că în ultimii ani au cunoscut o dezvoltare rapidă și au fost adîncite studii în domenii mai noi, ca : teoria elasticității, plasticității și vibrațiilor, teoria mecanismelor, frecare și uzură, scurgeri prin medii poroase, formîndu-se astfel noi școli de cercetare, care încep a avea o tradiție.

Se poate aprecia că într-un interval de timp relativ scurt s-au realizat salturi considerabile, obținîndu-se rezultate remarcabile atît pe tărîmul cercetării fundamentale, cît și al celei aplicative. Activitatea în domeniul mecanicii a început din 1956 să fie binecunoscută și peste hotare.

Răspîndirea lucrărilor în acest domeniu a fost asigurată atît de revistele „Studii și cercetări de mecanică aplicată" și „Revue Roumaine des Sciences Techniques — MÉCANIQUE APPLIQUÉE", cît și prin participările la diferite congrese internaționale. An de an publicațiile periodice amintite mai sus și-au ridicat nivelul științific, reușind să strîngă în jurul lor colaboratori numeroși și să se bucure de aprecieri elogioase atît în țară, cît și peste hotare.

Revista „Studii și cercetări de mecanică aplicată", care se află în al XVII-lea an de apariție, urmărește stimularea activității științifice și promovarea lucrărilor mai valoroase din domeniul mecanicii, iar publicația periodică în limbi străine are menirea să pună la îndemîna specialiștilor de peste hotare rezultatele cercetărilor românești.

Pe lîngă publicațiile periodice, activitatea Institutului de mecanică aplicată s-a reflectat și în monografiile și tratatele apărute în acești ani în domeniul vibrațiilor, rezistenței materialelor, elasticității, construcțiilor, mecanicii fluidelor, propagării căldurii, aerodinamicii, lubrificației, scurgerii prin medii poroase etc. Unele dintre aceste cărți au răspuns la început nevoilor stringente ale industriei și învățămîntului, altele reprezintă lucrări cu caracter științific fundamental.

Dintre acestea pot fi citate în domeniul mecanicii fluidelor tratatele *Aerodinamica* și *Aerodinamica vitezelor mari* de acad. E. Carafoli, *Hidroaerodinamica lubrificației* de N. Tipei, *Suprafețe permeabile* și *Studii de aerodinamica hipersustentației* de N. N. Patraulea, *Lagăre cu alunecare* de N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica și O. Biță, *Lubrificația cu gaze* de V. N. Constantinescu, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase* și *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase* de T. Oroveanu etc.

În domeniul mecanicii solidelor trebuie menționate : *Cromoplasticitatea* de Ștefan Bălan, S. Răutu și V. Petcu, *Elemente pentru calculul plăcilor curbe subțiri* de V. Visarion, *Paraboloidul eliptic și hiperbolic în construcții* de A. Beleș și M. Soare, *Metalizarea prin pulverizare* de V. Marcu etc.

În apariția acestor publicații atît periodice, cît și tematice — instrumente principale de difuzare a rezultatelor cercetării —, un rol principal revine *Editurii Academiei Republicii Socialiste România*. De la începutul înființării sale, editura a desfășurat o activitate stăruitoare, care an de an a înregistrat progrese deosebite în toate direcțiile acestui sector atît de dificil, aducînd astfel un sprijin prețios în valorificarea rezultatelor cercetării științifice românești.

Pe căile arătate au fost făcute cunoscute în străinătate lucrări de elasticitate neliniară și spațială, de aerodinamică, de lubrificație, lucrări de uzură, lucrări privitoare la mișcarea fluidelor grele, la teoria mecanismelor, lucrări de teoria învelitorilor subțiri, de măsurători cu izotopi radioactivi etc.

Acestea au sporit prestigiul științei românești peste hotare, iar eficiența lor din acest punct de vedere s-a manifestat prin traducerea în limbile germană și rusă a volumelor referitoare la *Aerodinamica aripii de avion* și la *Aerodinamica vitezelor mari* de E. Carafoli, prin apariția volumului *Theory of lubrication* de N. Tipei, tradus și reeditat în S.U.A. de către Universitatea Stanford, publicarea, în curs, în S.U.A. a cărții *Lubrificația cu gaze* de V. N. Constantinescu, ca și prin apariția în reviste străine a unor studii românești privind mecanismele, uzura, stabilitatea avionului, învelitorile subțiri etc.

★

În 1965, ca urmare a hotărîrii conducerii Academiei, Institutul de mecanică aplicată a fost reprofilat. Această reprofilare s-a axat pe cele două mari ramuri ale mecanicii aplicate : mecanica fluidelor și mecanica solidelor. S-au înființat astfel Institutul de mecanica fluidelor și Centrul de mecanica solidelor.

Cercetările în Institutul de mecanica fluidelor se desfășoară în cadrul următoarelor trei secții :

Secția de aeromecanică cuprinde studiul experimental al mișcărilor de gaze în regim sonic și mixt, cînd cele două regimuri subsonic și supersonic subzistă în același timp în diferitele regiuni ale spațiului fluid, studiul scurgerilor subsonice și al hipersustentației aerodinamice, al sustentației prin „pernă de aer", studii privind mișcarea gazelor rarefiate, studiul experimental la viteze mari și foarte mari cu ajutorul tuburilor de șoc, scurgerea gazelor ionizate și a plasmei în cîmp electromagnetic, studiul aripilor cu jeturi laterale, studiul turbulenței în stratul-limită, studii de aerodinamica combustiei, studii de aeroelasticitate, studii privind dinamica corpurilor solide în mediul fluid, unele aspecte de mecanica rachetelor și astronautică etc.

Secția de hidrodinamică studiază probleme de hidrodinamică, incluzînd și influențele reciproce dintre mișcarea fluidelor și procesele fizico-chimice, fenomene de difuziune, mișcările lichidelor polifazate etc. În domeniul fluidelor vîscoase se studiază scurgerile prin conducte și canale ale lichidelor reale la diferite numere Reynolds. Alte studii se ocupă de curgerile lichidelor prin medii poroase, urmărind stabilirea de legi de mișcare pentru o gamă largă de condiții la limită.

Secția de lubrificație se ocupă cu studiul mai general al lubrificației suprafețelor cu rostogolire și alunecare (rulmeți, angrenaje etc.), cercetarea condiției la limită a lubrificației, studiul problemei termice a lubrificației, lubrificația în regim turbulent, studiul regimurilor de lubrificație cu gaze.

În cadrul *Centrului de mecanica solidelor*, cercetările sînt grupate în următoarele secții :

Secția de solide deformabile studiază problemele generale ale solidului deformabil în domeniul elastic și plastic, unele fenomene reologice, propagarea undelor în solide, neliniaritatea și asimetria solicitărilor, bazele teoretice ale defectoscopiei cu radiații. Alte studii se ocupă cu sistemele elastice, și îndeosebi stabilitatea acestora, probleme de producere a vibrațiilor, disipării de energie în medii solide, rezonanțe etc.

Secția de teoria mecanismelor se ocupă, în cadrul problemelor de analiză și sinteză a mecanismelor, cu studiul elaborării unor noi metode în analiza și sinteza lanțurilor cinematice de corpuri rigide cu legături, studiul claselor de mecanisme pentru transmiterea informațiilor în cazul unor legi de mișcare prestabilite, structura mecanismelor cu elemente rigide și elastice, precum și cu programarea noilor metode de calcul la mașini electronice. Alte studii îmbrățișează condițiile dinamice în cazul mișcării sistemelor mecanice la viteze mari, mecanisme cu masă variabilă, interacțiunea elementelor mașinilor și automatelor complexe, uniformizarea și reglarea funcționării sistemelor mecanice.

În domeniul frecării și uzurii se studiază condițiile de apariție a regimurilor de frecare uscată și la limită, al posibilităților de influențare și controlare a evoluției uzurii, al determinării comportării fizico-mecanice a structurilor superficiale în procesele de frecare etc.

Secția de mecanica construcțiilor studiază probleme de interacțiune între teren, fundație și construcție, și anume : repartiția eforturilor unitare în terenul de fundație, cu luarea în considerare a proprietăților reologice ale terenului, interacțiunea dintre teren și fundație în cazul acțiunilor dinamice, interacțiunea dintre mai multe fundații învecinate etc.

În cadrul studiilor legate de calculul dinamic al construcțiilor sînt atacate probleme referitoare la comportarea și la calculul construcțiilor supuse la acțiuni dinamice provocate de mașini-unelte, vînt, seisme etc.

Alte studii cuprind : noi metode privind calculul structurii formate din bare, diafragme, pînze subțiri etc. supuse la solicitări statice și dinamice, stabilirea programării calculelor la mașini electronice, cercetări experimentale pe modele în scopul verificării noilor metode de calcul etc.

★

Întreaga activitate desfășurată în decursul a zece ani a fost trecută în revistă cu prilejul *Sesiunii științifice jubiliare* a Institutului de mecanică aplicată, care a avut loc în 1960. Evidențiind stadiul lucrărilor, Sesiunea jubiliară a făcut bilanțul unei rodnice activități și în același timp a relevat rezervele științifice ale viitorului. La sesiune au participat specialiști din domeniul mecanicii aplicate din institute de cercetare, din învățămîntul superior și din producție. S-au prezentat peste 180 de comunicări, referate,

studii de sinteză, în care au fost expuse rezultatele cercetării efectuate în diferite domenii ale mecanicii. Programul a cuprins lucrări de înalt nivel ştiinţific, teoretice şi aplicative, şi lucrări cu caracter aplicativ imediat. O mare parte din comunicări au fost îndreptate spre sprijinirea construcţiilor de maşini şi a construcţiilor civile şi industriale, precum şi a construcţiilor hidroenergetice, aerotehnice etc. Sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului de mecanică aplicată din 1960 a reprezentat o manifestare ştiinţifică importantă.

Eficienţa cercetărilor a crescut mereu, concretizîndu-se din ce în ce mai mult în recenziile şi aprecierile făcute în ţară şi în străinătate asupra lucrărilor respective, în articolele publicate şi protocoalele transmise beneficiarilor, în economiile realizate de către cei care aplică rezultatele expuse în lucrări, în creşterea nivelului ştiinţific al cadrelor de cercetare. S-au adus astfel contribuţii, la un nivel mereu mai ridicat, la dezvoltarea unor ramuri ale mecanicii, cît şi la rezolvarea unor probleme puse de economia noastră naţională, deschizîndu-se totodată perspective altor studii în viitor.

În ceea ce priveşte aplicarea în producţie a rezultatelor unor cercetări care au condus la importante economii, pot fi menţionate : studii asupra rezistenţei la vibraţia materialului izolant „Ampora", aplicarea cercetărilor asupra posibilităţilor de mărire a vitezei de lucru a maşinilor de tricotat, punerea în funcţiune a unei maşini de filigranat, cercetări asupra ambielajului motoarelor diesel MG-450, aplicarea metalizării, rodajul chimic aplicat pe scară largă la circa 10 000 de motoare de diferite tipuri, studiul traversărilor de conducte. De asemenea, trebuie amintite şi lucrările utilizate de întreprinderi ca material documentar la proiectări şi amenajări de maşini şi instalaţii industriale, precum şi consultaţiile tehnice-ştiinţifice.

Astfel se pot cita studiile pe diferite modele de construcţii hidrotehnice, cu indicarea soluţiilor optime, studiul aerodinamic al avionului 818, cercetările asupra deformaţiilor dinamice ale structurii vagoanelor de cale ferată şi asupra influenţei şocurilor la lagărele vagoanelor care au servit la proiectarea acestora, studiul consolidării centrifugelor de separare a zahărului care a dus la recondiţionarea utilajelor la unele fabrici de zahăr, proiectul unei instalaţii automate de control al bilelor de rulmenţi, studii privind vehiculele cu pernă de aer în vederea realizării unui vehicul cu caracteristice tehnice-economice superioare pentru recoltarea mecanizată a stufului în Deltă. Determinarea caracteristicilor funcţionale ale ventilatoarelor necesare unor uzine şi determinarea distribuţiei de viteze pe macheta electrofiltrului unor fabrici de ciment au format de asemenea obiectul altor studii solicitate de producţie. Rezultatele cercetărilor privind curgerea fluidelor reale prin labirinţii maşinilor hidraulice au fost folosite de unele uzine de pompe, iar pentru uzina „Tehnofrig" s-au efectuat studii asupra uzurii mecanice şi chimice la compresoarele frigorifice prin folosirea izotopilor radioactivi. De asemenea mai trebuie amintite studiile efectuate asupra oscilaţiilor disipative cu neliniaritate, care îşi găsesc aplicarea în special în industria de autovehicule, studii privind devierea jetului de ieşire în turbomaşinile de aviaţie, efectul zgomotului asupra structurilor cu pereţi subţiri etc.

Alte studii s-au ocupat de comportarea la uzură a unor aliaje de pistoane cu conținut redus de metal și fără nichel, cu suprafețele de frecare ale îmbinării arborelui cotit de la un motor de avion, cu pierderile de lichid la pompele de extracție etc.

Exemplificările de mai sus sînt departe de a epuiza lista diferitelor protocoale, numeroase și variate în conținut, prin care activitatea în domeniul mecanicii aplicate a adus importante contribuții la rezolvarea problemelor puse de producție, atestînd o dată mai mult că Institutul de mecanică aplicată a secundat astfel efortul industrial al patriei noastre în cele patru ramuri principale : construcția de mașini, mecanica generală, hidrotehnica și aeromecanica, care făceau parte din profilul Institutului.

Sînt binecunoscute și elogios apreciate atît în țară, cît și în străinătate rezultatele originale și deosebit de interesante ale cercetării românești în domeniul teoriei aripii de avion în regim supersonic și hipersonic, studiul scurgerii fluidelor grele, valoroasele contribuții românești în domeniul lubrificației, cercetările privind problemele moderne ale teoriei mecanismelor, ale teoriei elasticității, plasticității, studiul plăcilor curbe subțiri etc. De asemenea mai pot fi menționate lucrări de dată mai recentă care întrunesc unanime sufragii atît în țară, cît și în străinătate, ca cercetări privind stratul-limită laminar sau turbulent, rezultate privind aspectele statistice ale evoluției uzurii și influența metodei radioactive etc.

Este o enumerare sumară, incompletă, care totuși poate oferi o imagine pregnantă a stadiului actual al cercetării în domeniul mecanicii aplicate în cadrul Institutului de mecanica fluidelor și a Centrului de mecanica solidelor. Rezultă că problemele tratate în institutele amintite mai sus de către cercetătorii români se încadrează în cele ale științei contemporane.

★

O altă manifestare științifică importantă, care a avut ca obiect tocmai confirmarea activității științifice în ultimii cinci ani scurși de la *Sesiunea științifică jubiliară* a Institutului de mecanică aplicată, a fost *Conferința de mecanică* din septembrie 1965.

Conferința de mecanică a trecut în revistă realizările mai de seamă efectuate în această perioadă și a arătat, o dată mai mult, prin lucrările prezentate legătura strînsă între cercetarea fundamentală și cea aplicativă, precum și introducerea directă a unor rezultate în producție. Astfel s-a subliniat condiția arătată în raportul prezentat de tovarășul Nicolae Ceaușescu la Congresul al IX-lea al Partidului Comunist Român : „O condiție importantă a sporirii eficienței muncii științifice este *îmbinarea armonioasă a cercetării fundamentale cu cea aplicativă*. Preocuparea insuficientă față de un aspect sau altul duce inevitabil la îngustarea orizontului de cercetare, la stagnarea progresului științific" [2]).

Participarea la Conferința de mecanică a unui număr important de oameni de știință de peste hotare de renume mondial a dovedit din nou

[2]) Congresul al IX-lea al Partidului Comunist Român, București, Edit. politică, 1965, p. 61.

atenția de care se bucură activitatea românească în domeniul mecanicii în străinătate și interesul pe care l-a trezit această manifestare.

Conferința de mecanică din septembrie 1965 a constituit o dată mai mult mărturia cea mai concretă a rezultatelor cercetării științifice din acest domeniu în România. Din conținutul lucrărilor prezentate, din discuțiile care au avut loc și din contactele directe cu participanții străini s-a putut confirma din nou că problematica și preocupările diferitelor foruri de cercetare din țara noastră sînt asemănătoare cu acelea ale specialiștilor pe plan mondial, iar rezultatele obținute la noi se înscriu cu succes alături de cele ale țărilor cu o veche activitate în acest domeniu.

Azi în România socialistă se poate vorbi de o mișcare științifică susținută, în continuă creștere și care a atras intrarea țării noastre în arena marilor manifestări internaționale alături de alte țări cu o îndelungată tradiție.

Știința românească este azi prezentă și unanim apreciată pe toate meridianele. În mecanică, ca și în celelalte domenii de activitate, s-au obținut rezultate remarcabile. S-au fundamentat noi direcții în cercetare, s-au adus contribuții valoroase la dezvoltarea științei și s-au pus la dispoziția economiei naționale noi rezultate ale cercetării, menite să sprijine dezvoltarea impetuoasă a patriei noastre și ridicarea nivelului de viață al poporului român.

Activitatea desfășurată de oamenii noștri de știință, ca și de cadrele mai tinere, s-a bucurat mereu de încurajarea și de prețuirea partidului și a guvernului țării. Astfel, eforturile depuse au fost încununate cu premii de stat acordate în 1952, 1954, 1960, 1963 pentru realizări în domeniul mecanicii aplicate, iar un număr important de lucrări elaborate în cadrul Institutului de mecanică aplicată au fost distinse în diferiți ani cu premii ale Academiei. Mai mulți specialiști formați în cadrul institutului au fost aleși, în urma rezultatelor obținute, membri titulari și membri corespondenți ai Academiei.

Cercetătorii noștri sînt invitați să participe la marile manifestări științifice internaționale, li se acordă titluri științifice de către instituțiile științifice străine, rezultatele cercetărilor sînt solicitate pentru publicare sau adesea stau la baza elaborării unor lucrări ale oamenilor de știință străini.

Cărțile și periodicile noastre sînt prezente și mereu cerute de specialiști, mari laboratoare și biblioteci de pe întreg globul.

Oameni de știință de renume mondial trimit lucrări spre publicare în revistele noastre. La marile congrese, conferințe, colocvii și simpozioane internaționale de la Paris, Londra, München, Moscova, Bombay, Stockholm, Bruxelles, Tokio, Aachen, Washington etc., comunicările cercetătorilor români din diferite domenii ale mecanicii aplicate au suscitat viul interes al specialiștilor.

În ultimii ani, delegatul țării noastre, acad. E. Carafoli, a fost ales membru al marilor asociații științifice internaționale; astfel este membru în Comitetul de programe ale Congresului Consiliului internațional al științelor aeronautice, în Consiliul internațional al uniunilor științifice etc.

De asemenea și în alte domenii ale mecanicii, de altfel ca și în celelalte ramuri ale științei, oameni de știință români fac parte din diferite asociații științifice internaționale.

Iată atîtea dovezi ale prestigiului de care știința românească se bucură azi pe plan mondial, atîtea îndemnuri ca activitatea să se desfășoare în mod cît mai stăruitor, căutîndu-se mereu soluții noi și originale, sporindu-se continuu eficiența cercetării. Cercetarea științifică trebuie să răspundă cerințelor economiei naționale, asigurînd totodată formarea de noi forțe. În acest sens, crearea recentă a Consiliului Național al Cercetării Științifice, care are tocmai sarcina să elaboreze direcțiile de orientare și programul unitar al activității de cercetare științifică și de pregătire a cadrelor, asigurînd coordonarea activității în acest domeniu, constituie garanția că munca de cercetare nu se va risipi în încercări disparate și va fi astfel canalizată spre obiective care conduc, pînă în cele din urmă, la creșterea bunăstării poporului nostru.

Toate aceste înfăptuiri într-un interval de timp foarte scurt de cînd cercetarea științifică a căpătat în țara noastră un caracter organizat nu ar fi fost posibile fără sprijinul și îndrumarea continuă pe care știința și slujitorii ei au avut-o din partea partidului și a guvernului. Astfel, începuturile timide ale tradiției românești în domeniul mecanicii, străduniile unui Vlaicu sau Vuia, ca și ale atîtor fii ai poporului nostru, au constituit temeliile sigure pe care s-au ridicat înfăptuirile lucrătorilor științifici ale vieții noi de azi.

Toate rezultatele obținute, prestigiul de care se bucură azi știința românească reprezintă chezășia unor noi succese, constituind totodată și mărturia dragostei față de conducătorul victoriilor poporului nostru, Partidul Comunist Român.

Sărbătorirea centenarului Academiei are loc în noua etapă de desăvîrșire a construcției socialiste, în care Congresul al IX-lea al Partidului Comunist Român a trasat științei sarcini importante privind introducerea în toate ramurile producției materiale ale celor mai noi cuceriri, contribuind astfel la îndeplinirea programului de dezvoltare a economiei și culturii, care urmărește ridicarea nivelului de trai material și spiritual al oamenilor muncii din țara noastră.

Oamenii de știință români, toți lucrătorii din domeniul mecanicii și din celelalte domenii de activitate, însuflețiți de realizările de pînă acum și ținînd seama de condițiile create de statul nostru socialist pentru dezvoltarea științei și culturii, au astfel marea cinste să dea viață acestor sarcini pentru „a duce mai departe făclia luminoasă a progresului în patria noastră, a face să strălucească tot mai puternic chipul României socialiste" [3]).

---

[3]) N. Ceaușescu, Partidul Comunist Român — continuator al luptei revoluționare și democratice a poporului român, al tradițiilor mișcării muncitorești și socialiste din România, București, Edit. politică, 1966, p. 90—91.

STUDII

SCURGEREA UNUI FLUID PERFECT, CU GREUTATE, DINTR-UN REZERVOR CILINDRIC, PRINTR-UN ORIFICIU DE FUND[1])

de C. IANCU
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

532

În lucrare se studiază scurgerea unui fluid perfect, greu, dintr-un rezervor cilindric de rază R și înălțime H printr-un orificiu de fund de rază r_0, folosind metoda numerică de integrare prin diferențe finite. Considerînd mișcarea axial-simetrică, se determină suprafața liberă a venei de scurgere, se trasează spectrul hidrodinamic și repartiția vitezelor, radială, axială și totală în planul orificiului și în diverse plane sub orificiu și deasupra orificiului.
Se stabilește prin analiză dimensională o expresie a vitezei medii axiale în planul orificiului și un coeficient de viteză pentru care s-a determinat o relație semiempirică.
Se determină de asemenea un plan sub orificiu de la care viteza se poate considera constantă în toată secțiunea de scurgere a venei.
Se prezintă comparativ forma venei de scurgere cu cazul fluidului perfect fără greutate, determinată prin aceeași metodă de H. Rouse.

Considerăm ecuațiile diferențiale ale lui Euler în cazul mișcării fluidelor perfecte, scrise în coordonate cilindrice:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}(p-\rho U)=0,\\
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_r v_\theta}{r}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(p-\rho U)=0,\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(p-\rho U)=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

[1]) Lucrarea a fost realizată sub conducerea și îndrumarea acad. prof. D. Dumitrescu, căruia țin să-i mulțumesc pe această cale pentru sprijinul deosebit ce mi l-a acordat.
Publicată și în „Rev. roum. sci. techn.—Mécanique Appliquée", **11**, *4* (1966) (în limba franceză).

şi ecuaţia continuităţii

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \tag{2}$$

şi vom studia scurgerea unui fluid perfect, cu greutate, dintr-un rezervor cilindric printr-un orificiu practicat simetric în peretele de fund al vasului.

Lucrări mai recente care să trateze probleme similare cu cea pusă de noi a publicat Hunter Rouse [1], care a studiat cazul scurgerii unui fluid perfect dintr-un rezervor cilindric printr-un orificiu de fund, folosind atît metoda analogiei electrice, cît şi metoda relaxării, considerînd însă fluidul fără greutate şi admiţînd o presiune p la un anumit nivel din rezervor.

O soluţiune a problemei considerînd fluidul de asemenea fără greutate o obţine D. Dumitrescu [2], folosind soluţiuni particulare ale sistemului (1) şi ecuaţiei (2), prin utilizarea funcţiilor Bessel. Metoda analitică folosită în lucrare presupune ecuaţia liniilor de curent de forma

$$\psi = \frac{V_0^2}{2} r^2 + r \sum_{i=1}^{n} c_i J_1\left(\beta_i \frac{r}{R}\right) e^{-\beta_i \frac{z}{R}},$$

unde β_i sînt zerourile funcţiei Bessel de ordinul unu, $J_1\left(\beta_i \frac{r}{R}\right) = 0$, iar c_i sînt coeficienţi care se determină din condiţia ca punctele frontierei solide în număr de n să constituie o linie de curent.

K. Woronetz [3] tratează scurgerea plană prin orificii a unui fluid perfect, de asemenea fără greutate, în esenţă cazul rezolvat de Kirchoff, folosind aceleaşi relaţii, însă nu consideră constantă viteza de scurgere a fluidului după părăsirea orificiului. Admite pentru aceasta o variaţie de forma $V = V_m + \lambda V_m$ (V_m — viteza medie în planul orificiului), în care λ este o funcţie de coordonatele punctului (x, y) şi ţine seama de variaţia vitezei cu căderea y de sub planul orificiului. Această ipoteză ar introduce, de fapt, acţiunea asupra formei venei de scurgere a considerării greutăţii fluidului.

E. Carafoli [4] determină coeficientul de contracţie pentru orificii sub forma de fantă situate într-un plan infinit în cazul scurgerii unui fluid perfect fără greutate, admiţînd însă că la muchia orificiului viteza este dată de relaţia lui Torricelli. În lucrare se foloseşte teoria mişcărilor potenţiale şi a reprezentărilor conforme, teoria suprafeţelor de discontinuitate şi teorema impulsului.

În lucrarea de faţă ne-am propus să studiem scurgerea unui fluid perfect dintr-un rezervor cilindric printr-un orificiu de fund, prezentat schematic în figura 1, cu considerarea greutăţii fluidului, folosind pentru integrarea ecuaţiilor lui Euler (1) metoda de integrare numerică prin diferenţe finite în cazul unei mişcări potenţiale axial-simetrice.

Pentru aceasta este nevoie să facem următoarele remarce :

a) se consideră un sistem de axe în felul următor : axa z coincide cu axa cilindrului dirijată de jos în sus ; axa r în planul orificiului, deci

originea axelor se va găsi în centrul orificiului; raza cilindrului, R; raza orificiului, r_0; înălțimea apei în vas, H;

b) fluidul se găsește în vas la un anumit nivel H, menținut constant, și se scurge numai sub acțiunea forțelor de greutate, deci potențialul forțelor de masă (U) îl formează cîmpul gravitațional,

$$U = -gz; \tag{3}$$

c) mișcarea poate fi considerată după un anumit timp permanentă, deci toate derivatele parțiale în raport cu timpul sînt nule;

d) atunci cînd nivelul H se află într-un anumit raport cu raza orificiului r_0, mișcarea fluidului se face în planuri verticale ce conțin axa vasului și orificiului, vitezele nevariind cu unghiul θ, iar $v_\theta = 0$. Avem de-a face astfel cu o mișcare axial-simetrică;

e) vasul se alimentează pe la partea superioară cu o viteză V_0, constantă și uniformă pe toată suprafața lichidului, menținînd nivelul constant la înălțimea H.

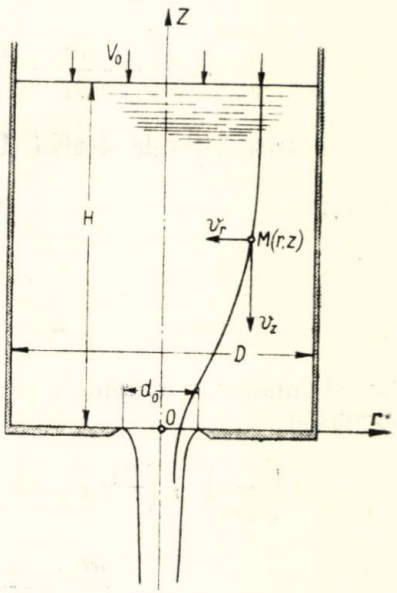


Fig. 1. — Schița rezervorului, datele geometrice și hidraulice ale scurgerii.

Sistemul de ecuații (1), (2) se reduce în urma acestor precizări la forma

$$\left.\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}(p - \rho U) = 0, \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(p - \rho U) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0. \tag{5}$$

Ecuațiile (4) se pot simplifica și mai mult, obținîndu-se forma

$$\frac{v_r^2 + v_z^2}{2} + \frac{1}{\rho}(p + \gamma z) = \text{const.}, \tag{6}$$

constanta determinîndu-se din condiția ca la $z = H$ presiunea să fie p_0, $v_r = 0$, iar $v_z = V_0$ conform punctului *e*, și ecuația (6) ia forma

$$\frac{v_r^2 + v_z^2}{2} + \frac{1}{\rho}(p - p_0) = \frac{V_0^2}{2} + g(H - z). \tag{7}$$

Sistemul de ecuații diferențiale (1) și ecuația continuității (2) s-au redus în definitiv la forma

$$\frac{v_r^2 + v_z^2}{2} + \frac{p - p_0}{\rho} = \frac{V_0^2}{2} + g(H - z), \tag{8}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0; \tag{9}$$

f) dacă vitezele derivă dintr-un potențial

$$\left.\begin{aligned} v_r &= -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ v_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ψ fiind funcția de curent, mișcarea este potențială, iar relațiile (8) și (9) iau forma

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = r^2\left[2\frac{p - p_0}{\rho} + V_0^2 + 2g(H - z)\right], \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \tag{12}$$

ecuația (12) fiind cunoscută sub denumirea de ecuație diferențială a funcției de curent sau ecuația diferențială a lui Stokes.

Dacă relația (11) se scrie într-un punct aparținînd suprafeței libere a venei de scurgere, pentru care $p = p_0$, iar $z = -z$, relațiile (11) și (12) se scriu

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = r^2[V_0^2 + 2g(H + z)], \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \tag{14}$$

Avem în definitiv de integrat ecuația cu derivate parțiale de ordinul doi (14), de tip eliptic sub formă canonică, în interiorul domeniului determinat de suprafața liberă a lichidului din vas, frontiera solidă, suprafața liberă a venei de scurgere și o secțiune de rază ρ prin vena de scurgere, situată la o distanță suficient de mare de planul orificiului. În plus, pe suprafața liberă a venei de scurgere trebuie verificată relația (13).

Cum funcția ψ se poate cunoaște pe conturul domeniului unde este definită, după cum vom vedea mai departe, și cu condiția să fie armonică,

deci să satisfacă ecuația lui Laplace, avem de-a face cu prima problemă la limită a ecuației de tip eliptic, o problemă Dirichlet, deci rezolvabilă.

Mișcarea fiind axial-simetrică, rezultă că domeniul este simetric față de ax, deci integrarea se va face pentru jumătate din scurgere.

Rezolvarea acestei probleme o vom face prin aplicarea metodei numerice de integrare prin diferențe finite.

Valorile funcției ψ pe conturul domeniului fluid se determină astfel ca axa de simetrie să fie o linie de curent ($\psi = 0$), iar frontiera solidă ABC și frontiera liberă CD (fig. 2) o altă linie de curent ($\psi = \psi_R$).

Scriind debitul ce se scurge printr-o secțiune z a venei și egalînd cu expresia debitului dată de continuitatea acestuia într-o secțiune a vasului, se obține valoarea ψ_R a funcției de curent:

$$Q = 2\pi \int_0^{\rho} r v_z \, dr = 2\pi \int_0^{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial r} \, dr = 2\pi (\psi_\rho - \psi_0).$$

Cum $\psi_\rho = \psi_R$, iar $\psi_0 = 0$, atunci

$$Q = 2\pi \psi_R, \tag{15}$$

dar, cum $Q = \pi R^2 V_0$, rezultă pentru ψ_R expresia

$$\psi_R = \frac{R^2}{2} V_0. \tag{16}$$

Valorile funcției ψ pe suprafața liberă din vas se determină pornind de la relația (10) a vitezei axiale, integrată pe suprafața liberă din vas, unde $v_z = V_0$:

$$\psi_r = \frac{V_0}{2} r^2 + \text{const.}$$

Pentru $r = 0$, constanta ia valoarea zero, deci

$$\psi_r = \frac{V_0}{2} r^2. \tag{17}$$

Valorile funcției ψ în secțiunea venei de scurgere ce limitează domeniul fluid se determină cu ajutorul relației

$$\psi_r = \psi_R \left(\frac{r}{\rho} \right)^2, \tag{18}$$

ρ fiind raza punctului de pe suprafața liberă, ales o dată cu aproximarea formei suprafeței libere a venei de scurgere și a limitării domeniului unde este definită funcția ψ.

În scopul generalizării ulterioare vom face relațiile (13) și (14) fără dimensiuni folosind ca mărime de bază raza orificiului (r_0), notațiile din figura 2, iar mărimile ce intervin în calcule date de relațiile (19):

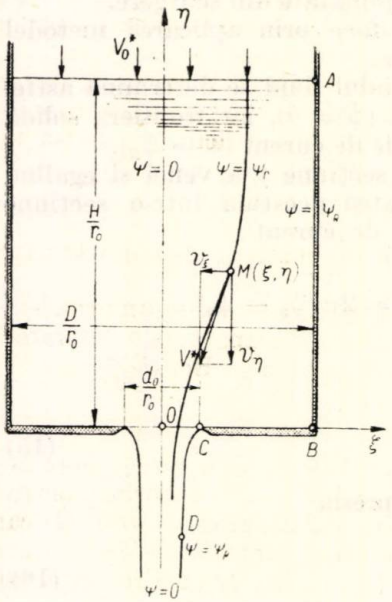


Fig. 2. — Schița rezervorului prezentată adimensional.

$$\frac{r}{r_0}=\xi \qquad v^*=\frac{v}{\sqrt{2gr_0}},$$

$$\frac{z}{r_0}=\eta \qquad \psi^*=\frac{\psi}{r_0^2\sqrt{2gr_0}},$$

$$\frac{H}{r_0}=\alpha \qquad v_\xi=-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi^*}{\partial\eta}, \tag{19}$$

$$\frac{R}{r_0}=\delta \qquad v_\eta=\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi^*}{\partial\xi}.$$

Ecuațiile (13) și (14), scrise adimensional cu notațiile de mai sus, devin

$$\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\eta}\right)^2=\xi^2\left(V_0^{*2}+\frac{H}{r_0}+\eta\right), \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\eta^2}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi^*}{\partial\xi}=0 \tag{21}$$

sau, folosind o altă notație a derivatelor,

$$\psi_\xi^2+\psi_\eta^2=\xi^2\left(\eta+\frac{H}{r_0}+V_0^{*2}\right), \tag{22}$$

$$\psi_{\xi\xi}=\psi_{\eta\eta}-\frac{1}{\xi}\psi_\xi=0. \tag{23}$$

Procedeul de calcul este asemănător celui expus în lucrarea [5] și constă în alegerea arbitrară a suprafeței libere a venei de scurgere, limitînd un domeniu ce se împarte într-o rețea pătrată în ale cărei noduri trebuiesc determinate valorile funcției ψ prin integrarea numerică prin diferențe finite a ecuației (14). Atunci cînd valorile calculate ale funcției în fiecare nod nu se mai schimbă de la o trecere la alta de recalculare decît cu o valoare sub o eroare admisă, deci rețeaua se stabilizează, se verifică alegerea suprafeței libere a venei de scurgere prin satisfacerea ecuației (13). Dacă această ecuație nu se verifică, însemnează că suprafața liberă a venei nu a fost bine aleasă și se modifică într-un sens sau altul pînă ce această relație se satisface.

După cum se constată din relațiile (16), (17) și (18), valorile funcției ψ pe contur sînt funcție de raza vasului, R, de raza venei de scurgere în

secțiunea ce limitează domeniul, ρ, și de viteza V_0 de alimentare a rezervorului (sau debitul de alimentare Q).

Din teoria scurgerilor libere prin orificii și din experiențele noastre și ale altor cercetători [6] s-a constatat că în cazul unor astfel de scurgeri viteza V_0 (respectiv debitul) nu poate lua orice valoare, ci numai una singură, bine determinată, funcție de mărimile geometrice H, R, r_0.

Dependența de mărimile geometrice ale scurgerii și criteriul de alegere a valorii vitezei V_0 nu sînt cunoscute. Noi am reușit să determinăm variația unei alte viteze, și anume viteza medie din orificiu, v_m, scrisă sub forma dată de Torricelli :

$$v_m = k_0\sqrt{2gH}, \tag{24}$$

în care k_0 reprezintă un coeficient de viteză neconstant, determinat experimental.

Admiterea acestei ipoteze sîntem îndreptățiți a o face și din următorul raționament : în vîrful muchiei orificiului, punct ce aparține și suprafeței libere a venei de scurgere, viteza este dată de relația lui Bernoulli

$$V = \sqrt{V_0^2 + 2gH}. \tag{25}$$

După cum se știe, viteza fluidului în interiorul venei de scurgere față de viteza la suprafața liberă a venei este mai mică, atît datorită contracției prin prezența muchiei orificiului în fluid, cît și datorită presiunii care este mai mare în interiorul venei față de presiunea atmosferică de la suprafață. Putem admite astfel că viteza medie în orificiu după direcția axială este proporțională cu viteza la suprafața liberă V_0 și un coeficient k :

$$v_m = k\sqrt{V_0^2 + 2gH}. \tag{26}$$

Cum $V_0 = \dfrac{r_0^2}{R^2} v_m$, rezultă pentru v_m expresia

$$v_m = \frac{k}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{r_0}{R}\right)^2 k^2}}\sqrt{2gH}, \tag{27}$$

relație similară expresiei (24), din care se obține coeficientul k_0 :

$$k_0 = \frac{k}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{r_0}{R}\right)^2 k^2}}. \tag{28}$$

Să considerăm acum că nu cunoaștem debitul ce se scurge din vas și să presupunem că viteza la suprafața liberă din vas a lichidului este zero, $V_{01} = 0$. În acest caz, viteza de scurgere la suprafața liberă în planul orificiului este $\sqrt{2gH}$, iar o viteză medie în orificiu, $v_{m1} = k_0\sqrt{2gH}$. Acum putem determina o viteză V_{02} la suprafața liberă, $V_{02} = \dfrac{r_0^2}{R^2} v_{m1} = \dfrac{r_0^2}{R^2} k_0\sqrt{2gH}$,

iar în orificiu $v_{m2} = \sqrt{V_{02}^2 + v_{m1}^2} = k_0 \sqrt{1 + \left(\frac{r_0}{R}\right)^4}\sqrt{2gH}$. Apoi o nouă viteză V_{03} și v_{m3}, astfel că putem scrie după n aproximări:

$$v_m = k_0 \sqrt{\sum_0^n \left(\frac{r_0}{R}\right)^{4n}}\sqrt{2gH}. \tag{29}$$

Or, pentru valori ale raportului $\frac{r_0}{R} < \frac{1}{2}$, cum se întîlnesc de obicei în cazuri uzuale, valoarea radicalului sumei este cu 2—3% mai mare ca 1 $\left(\text{pentru } \frac{r_0}{R} = \frac{1}{2} \text{ rezultă } \sqrt{\sum_0^n \left(\frac{r_0}{R}\right)^{4n}} = 1{,}03\right)$, deci poate fi luată egală cu unitatea. Avem în definitiv

$$v_m = k_0\sqrt{2gH},$$

expresie admisă prin relația (24).

Admiterea unei viteze medii în orificiu se face de altfel și în lucrarea lui Anwar [10], care presupune constantă distribuția vitezelor în planul orificiului, fără a determina însă variația acestuia cu datele geometrice ale scurgerii.

Factorii de care depinde coeficientul de viteză k_0 se determină prin aplicarea teoremei produselor asupra mărimilor caracteristice ale scurgerii H, R, r_0, g și v_m. Alegînd ca parametri fundamentali r_0 și v_m, se obține relația

$$\varphi\left(\frac{R}{r_0}, \frac{H}{r_0}, \frac{v_m^2}{gr_0}\right) = 0$$

sau

$$v_m = \sqrt{f\left(\frac{R}{r_0}, \frac{H}{r_0}\right) gr_0} = \sqrt{\frac{r_0}{H}}\sqrt{\frac{Fr}{2}}\sqrt{2gH},$$

deci

$$v_m = \lambda\left(\frac{r_0}{H}, \frac{R}{r_0}\right)\sqrt{2gH}, \tag{30}$$

relație analogă debitului evacuat de un deversor [7].

Relația (30) fiind de forma (24), rezultă pentru coeficientul k_0 expresia

$$k_0 = \sqrt{\frac{r_0}{H}}\sqrt{\frac{Fr}{2}} = \lambda\left(\frac{r_0}{H}, \frac{R}{r_0}\right), \tag{31}$$

a cărui valoare se poate determina experimental. În primă aproximație s-a determinat pentru k_0 expresia

$$k_0 = 0{,}6 + 0{,}7\,\frac{r_0}{H} \tag{32}$$

din experienţe în care $R = \text{const.}$, iar $\frac{R}{r_0} = 3$, urmînd ca în cercetările experimentale ulterioare să se determine variaţia lui k_0 în funcţie şi de R. O remarcă în acest sens o face Hunter Rouse [1], tratînd aceeaşi problemă, însă cu considerarea fluidului fără greutate, şi anume arată că pentru rapoarte $\left(\frac{r_0}{R}\right)^2 < 0{,}25$, pereţii cilindrului nu mai influenţează asupra formei suprafeţei libere a venei, deci nici asupra vitezelor de scurgere.

În cazul fluidului real, valoarea $\frac{R}{r} > 2$ este prea mică şi este de aşteptat ca pentru rapoarte $\frac{R}{r} > 3$ raza vasului (R) să nu mai influenţeze asupra scurgerii.

Acestea fiind stabilite, se poate exprima viteza V_0 în funcţie de v_m. Cum $V_0 = \frac{Q}{\pi R^2}$ şi $v_m = \frac{Q}{\pi r_0^2}$, rezultă

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= v_m\left(\frac{r_0}{R}\right)^2 = k_0\sqrt{2gH}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2, \\ V_0^* &= v_m^*\left(\frac{r_0}{R}\right)^2 = k_0\sqrt{\frac{H}{r_0}}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Expresia adimensională a funcţiei de curent (16) este

$$\psi_R^* = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r_0}\right)^2 V_0^* \tag{34}$$

şi, introducînd pe V_0 şi V_0^* din (33) în (16) şi (34), se obţine pentru funcţia ψ pe conturul $ABCD$ expresiile

$$\left.\begin{aligned} \psi_R &= \frac{k_0}{2}\sqrt{2gH}\, r_0^2, \\ \psi_R^* &= \frac{k_0}{2}\sqrt{\frac{H}{r_0}}, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

valoarea lui k_0 fiind dată de (32).

Se poate scrie acum din (17) valoarea funcţiei şi pe suprafaţa liberă din vas:

$$\psi_r = k_0\sqrt{2gH}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\frac{r^2}{2}$$

sau, ţinînd seama şi de (35),

$$\left.\begin{aligned} \psi_r &= \psi_R\left(\frac{r}{R}\right)^2, \\ \psi_r^* &= \psi_R^*\left(\frac{r}{R}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

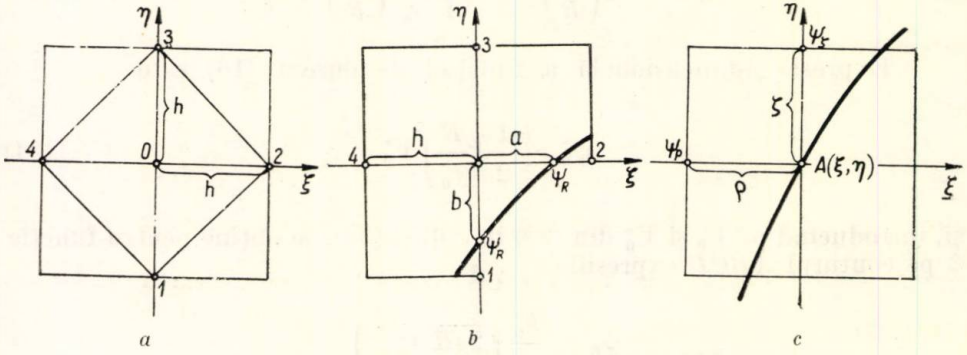
Relaţia (23) scrisă în diferenţe finite ne furnizează valorile funcţiei ψ într-un punct oarecare al reţelei. Dacă punctele sînt de forma arătată în figura 3*a*, atunci valoarea funcţiei în punctul O este dată de expresia

$$\psi_0 = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4}{4} - \frac{h}{8\xi}(\psi_2 - \psi_4), \tag{37}$$

folosind pentru derivatele parţiale ale funcţiei de curent valorile

$$(\psi_\xi)_0 = \frac{\psi_2 - \psi_4}{2h} \qquad (\psi_{\xi\xi})_0 = \frac{\psi_2 + \psi_4 - 2\psi_0}{h^2},$$

$$(\psi_\eta)_0 = \frac{\psi_3 - \psi_1}{2h} \qquad (\psi_{\eta\eta})_0 = \frac{\psi_1 + \psi_3 - 2\psi_0}{h^2}.$$



a *b* *c*

Fig. 3. — Scheme de calcul ale punctelor reţelei.

Dacă punctele reţelei sînt aşezate ca în figura 3*b*, atunci calculul se face după relaţia

$$\psi_0 = \frac{ah}{(a+b)(b+h)}\psi_R + \frac{bh}{(a+b)(a+h)}\psi_R + \frac{ab}{(a+b)(b+h)}\psi_3 +$$

$$+ \frac{ab}{(a+b)(a+h)}\psi_4 - \frac{1}{2\xi}\,\frac{abh}{(a+b)(a+h)}(\psi_2 - \psi_4). \tag{38}$$

Relația (22) pentru verificarea alegerii suprafeței libere a venei de scurgere, scrisă în diferențe finite, ia forma (39) în fiecare punct A al acesteia, situat ca în figura 3*c*,

$$\left(\frac{\psi_R - \psi_\rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\psi_R - \psi_\xi}{\xi}\right)^2 = \xi^2\left(\eta + \frac{H}{r_0} + V_0^{*2}\right). \tag{39}$$

REZOLVAREA UNUI CAZ NUMERIC

Spre exemplificare, vom rezolva un caz numeric prin alegerea următoarelor date geometrice ale vasului și scurgerii:

$$r_0 = 5\text{cm},\ R = 20\ \text{cm},\ H = 50\ \text{cm}.$$

Din relația (32) rezultă pentru k_0 valoarea, $k_0 = 0{,}67$. Atunci

$v_m = 209{,}7$ cm/s; $V_0 = 13{,}1$ cm/s; $Q = 16{,}45$ l/s; $\psi_R = 2{,}62$ l/s

$v_m^* = 2{,}117$ $V_0^* = 0{,}132$ $Q^* = 6{,}63$ $\psi_R^* = 1{,}056$

Inițial s-a trasat o rețea de pas $h_0^* = \frac{1}{2}$, valorile ψ^* ale funcției de curent pe suprafața liberă a fluidului din vas fiind determinate cu ajutorul relației (36), prin împărțirea cilindrului în opt cilindri coaxiali de raze proporționale cu $\frac{R}{8}$. La cele opt raze, funcția de curent are următoarele valori:

$\psi_R^* = 1{,}06$ $\psi_5^* = 0{,}414$ $\psi_2^* = 0{,}066$

$\psi_7^* = 0{,}812$ $\psi_4^* = 0{,}205$ $\psi_1^* = 0{,}017$

$\psi_6^* = 0{,}596$ $\psi_3^* = 0{,}149$ $\psi_0^* = 0{,}000$

valori ce au fost amplificate în calcule cu 1 000 pentru a evita calculul cu zecimale.

Aceleași valori le ia funcția de curent și în secțiunea de rază ρ. a venei de scurgere pentru opt raze proporționale cu $\frac{\rho}{8}$.

Rezolvarea ecuației (23) și verificarea relației (22) ne-au permis să determinăm și să trasăm atît suprafața liberă a venei de scurgere, cît și liniile de curent, prezentate în figurile 4, 5 și 6.

Figura 4 cuprinde jumătate din planul meridian de scurgere, cu valorile numerice ale funcției de curent ψ^* în nodurile rețelei inițial aleasă de pas $h_0 = \frac{r_0}{2}$ și în nodurile primei îndesiri de pas $h_1 = \frac{r_0}{4}$ în domeniul EFBCGH. De asemenea s-au trasat încă șapte linii de curent echidistante cu $\frac{R}{8}$, în afara celor două linii care delimitează domeniul de integrare.

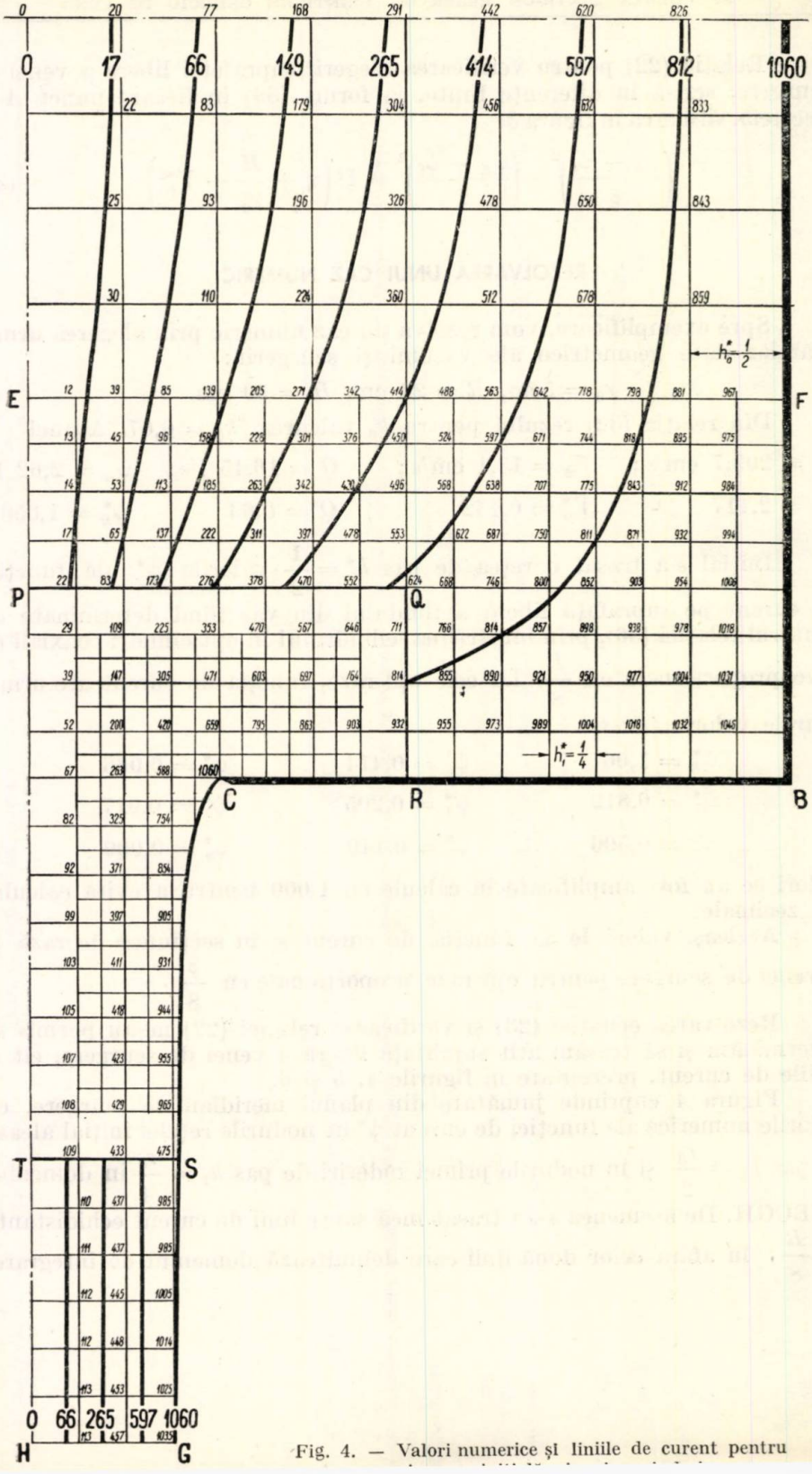


Fig. 4. — Valori numerice și liniile de curent pentru

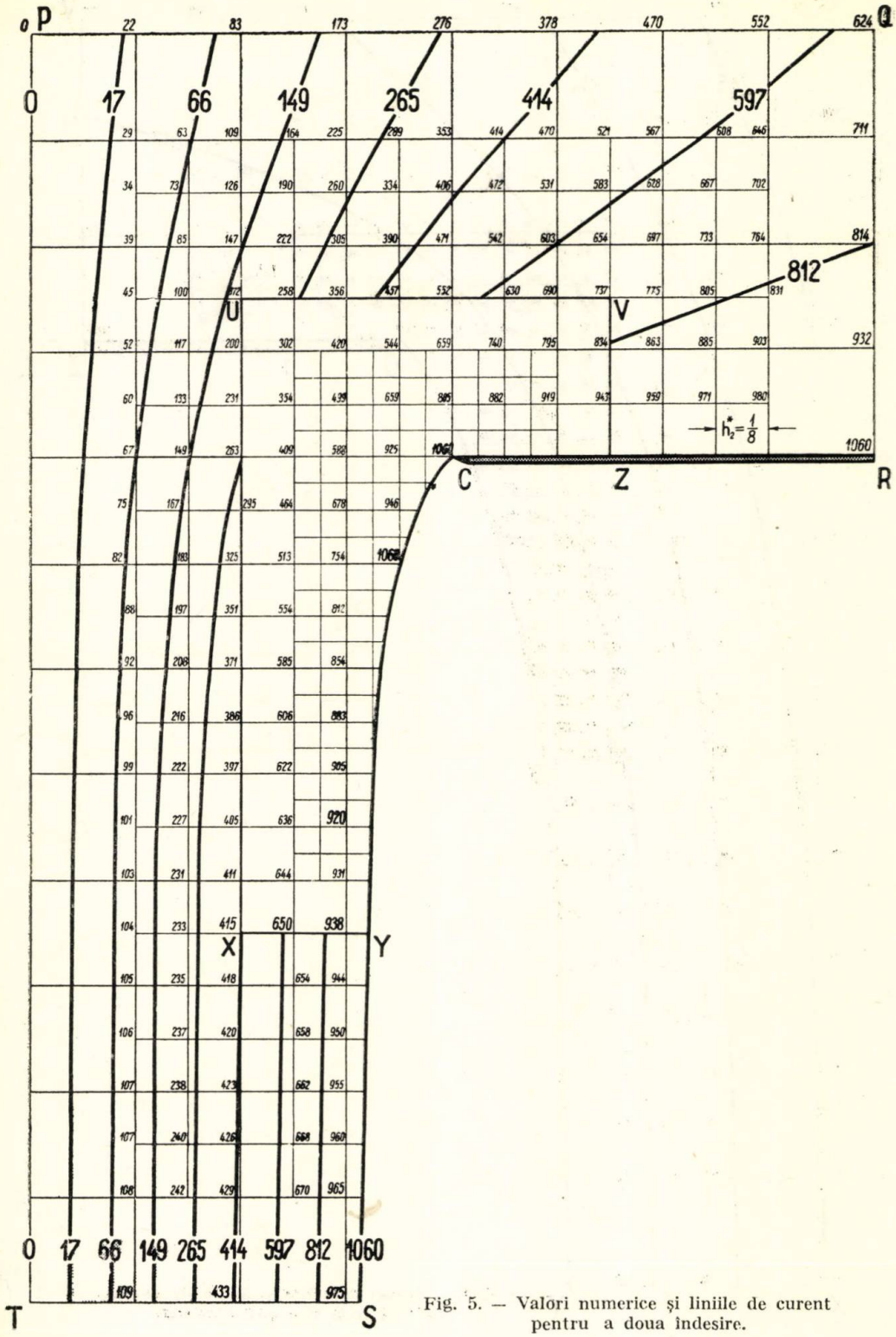


Fig. 5. — Valori numerice şi liniile de curent pentru a doua îndesire.

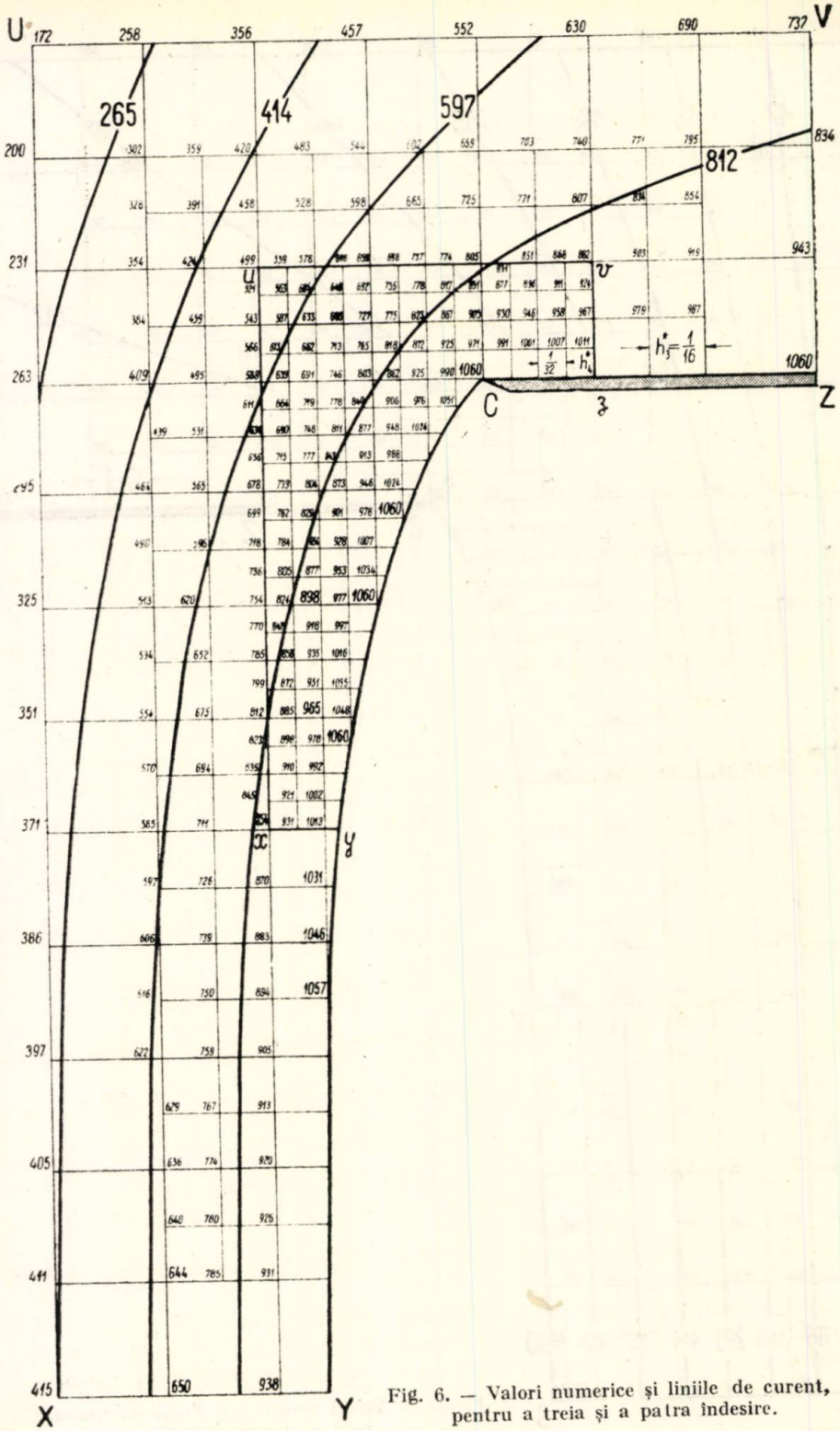


Fig. 6. — Valori numerice şi liniile de curent, pentru a treia şi a patra îndesire.

Valorile funcției de curent ψ^* și liniile de curent s-au limitat la o înălțime $4r_0$ deasupra orificiului, deoarece variația acestora pînă la suprafața liberă a lichidului din cilindru este mică și în plus ar fi lungit inutil desenul.

Figura 5 cuprinde a doua îndesire a rețelei, de pas $h_2 = \frac{r_0}{8}$ în domeniul PQRCST, cu valorile funcției de curent în nodurile rețelei și liniile de curent în acest domeniu.

Figura 6 cuprinde a treia îndesire a rețelei, de pas $h_3 = \frac{r_0}{16}$ în domeniul UVZCYX, și a patra îndesire a rețelei, de pas $h_4 = \frac{r_0}{32}$ în domeniul uvzCyx, cu valorile funcției de curent în nodurile rețelei și liniile de curent corespunzătoare domeniului.

Calculele au fost efectuate cu ajutorul unei mașini electronice de calcul, necesitînd o muncă laborioasă la verificarea relației (22), datorită modificărilor formei suprafeței libere a venei care nu mai puteau fi programate.

În figura 7 se prezintă comparativ forma suprafeței libere a venei de scurgere cu aceea obținută de Hunter Rouse pentru același raport al razelor, $\frac{R}{r_0} = 4$.

Diferența care există între cele două curbe se datorește influenței greutății fluidului asupra formei suprafeței libere a venei de scurgere, deci

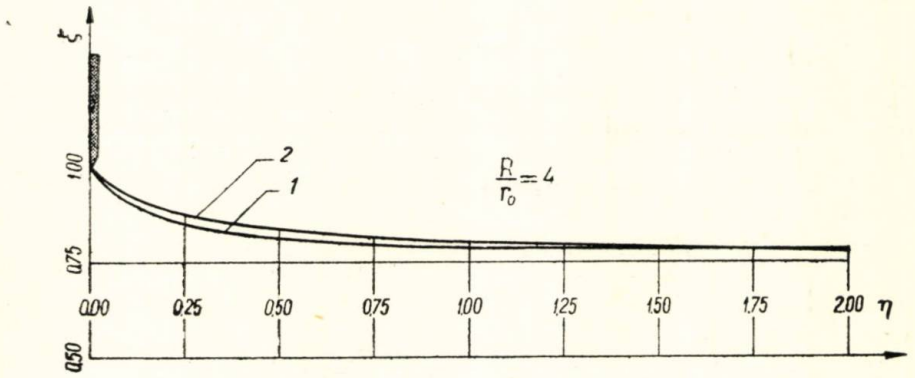


Fig. 7. — Suprafața liberă a venei de scurgere a fluidului fără greutate (1) și a fluidului cu greutate (2).

a faptului că într-un caz fluidul este considerat cu greutate, iar în celălalt caz fără greutate.

În porțiunea imediat de sub orificiu, diferența se explică prin aceea că, în cazul fluidului cu greutate, componenta verticală a vitezei în planul orificiului are o pondere mai mare față de cazul fluidului fără greutate,

ceea ce face ca secțiunea venei în același plan să fie mai mare. Același rezultat se obține și atunci cînd se consideră un orificiu de scurgere mai mare la care se păstrează celelalte mărimi constante.

Pentru distanțe mai mari de planul orificiului, diferența este pusă în evidență în special din punctul $z = 1{,}75\ r_0$, de unde curba fluidului cu greutate variază numai cu distanța punctului la planul de apă (după cum vom vedea mai departe).

Pe baza rezultatelor obținute se poate determina repartiția vitezelor în planul orificiului (atît componentele v_r și v_z, cît și viteza totală V),

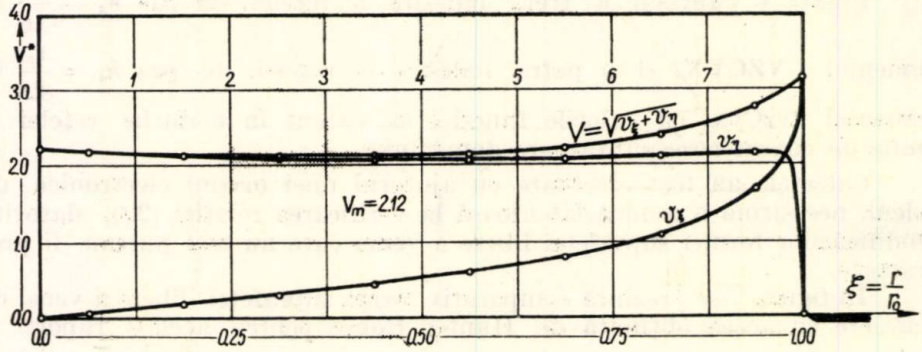


Fig. 8. — Repartiția vitezelor în planul orificiului.

precum și viteza medie în orificiu, folosind relația de integrare grafică sub forma

$$v_m = \frac{2}{r_0^2} \sum_{r=0}^{r_0} r \Delta r\, v_z, \tag{40}$$

astfel încît se poate deduce valoarea coeficientului k_0 și verifica cu cea admisă la începutul calculelor prin (32). Cum acest coeficient s-a verificat, rezultă că calculele au fost corect conduse.

Pentru calculul componentelor vitezei s-au folosit expresiile (10) și (19) scrise în diferențe finite.

$$\begin{aligned} v_\xi &= -\frac{1}{\xi}\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} = -\frac{1}{\xi}\frac{\psi_1 - \psi_3}{2h^*}, \\ v_\eta &= \frac{1}{\xi}\frac{\partial \psi^*}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi}\frac{\psi_2 - \psi_4}{2h}, \end{aligned} \tag{41}$$

iar pentru viteza totală

$$V = \sqrt{v_\xi^2 + v_\eta^2} = \frac{1}{2\xi h^*}\sqrt{(\psi_1 - \psi_3)^2 + (\psi_2 - \psi_4)^2}. \tag{42}$$

Repartiția vitezelor în planul orificiului este arătată în figura 8 și se observă că pentru raze mai mici decît raza orificiului viteza totală V este mai mică decît viteza la muchia orificiului ($V^*_{r_0} = 3{,}165$). Cum pre-

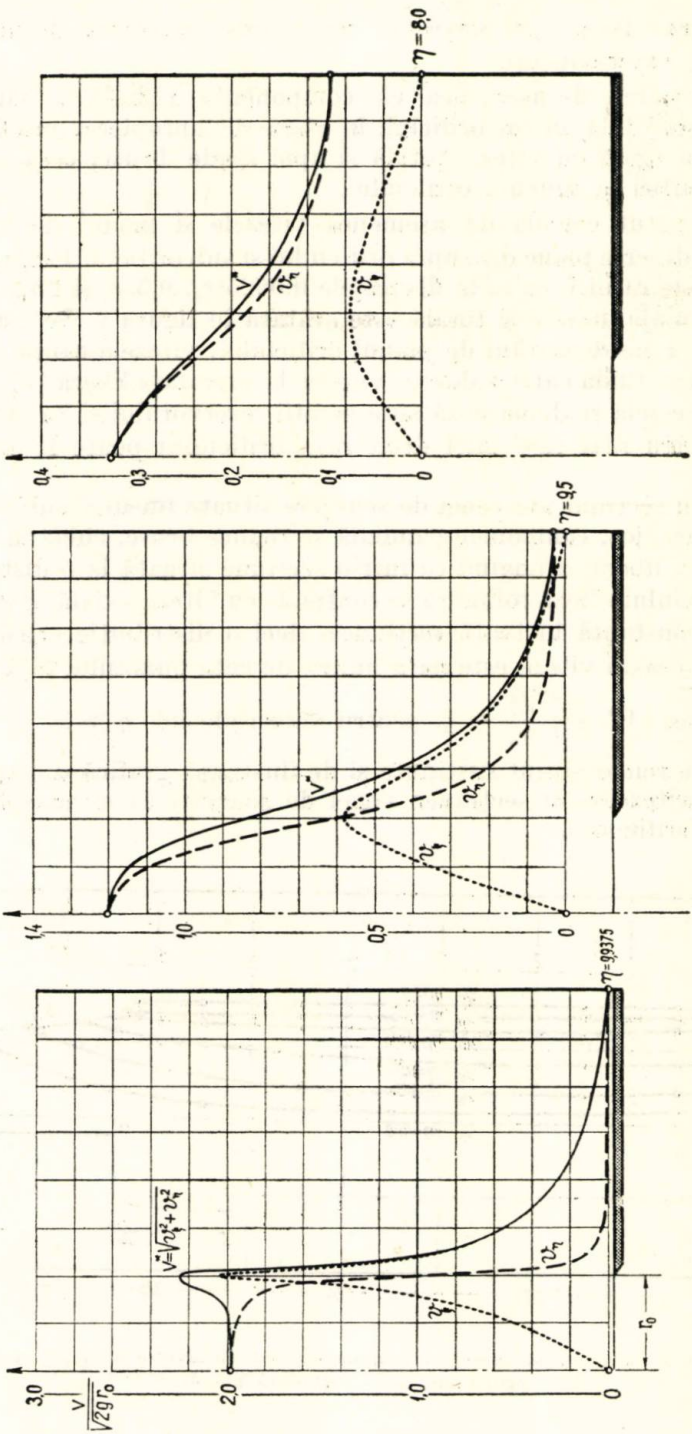


Fig. 9. — Distribuția vitezelor în plane situate la 0,0625, 0,5 și $2r_0$ distanță de planul orificiului (. . . radială, — — — — axială și ——— totală).

siunea variază invers proporțional cu viteza, concluzia de mai sus se verifică și experimental.

Se remarcă de asemenea că componenta radială a vitezei este aproape neglijabilă în tot orificiul, în afară de apropierea muchiei, unde are valoarea egală cu viteza totală și apoi scade brusc, ceea ce asigură tangența curbei la muchia orificiului.

S-au putut calcula de asemenea vitezele și modul de variație al acestora în diverse plane deasupra orificiului și sub orificiu. Pentru secțiuni situate deasupra orificiului la distanțele 0,0625 r_0, 0,5 r_0 și 2 r_0, repartiția vitezelor radială, axială și totală este arătată în figura 9. Se constată că, pe măsură ce ne depărtăm de planul orificiului, vitezele caută să se uniformizeze și să tindă către valoarea vitezei la suprafața liberă ($V_0^* = 0{,}132$), maximul acesteia se deplasează spre pereții rezervorului și variația vitezei radiate pentru raze mai mici decît raza orificiului poate fi considerată liniară.

Pentru secțiuni ale venei de scurgere situate imediat sub planul orificiului și mai jos, componenta radială se reduce brusc, chiar în apropiere de suprafața liberă, ajungînd ca într-o secțiune situată la o distanță β de planul orificiului viteza totală să se confunde cu viteza axială și să admită o valoare constantă în toată secțiunea, deci o distribuție cvasiuniformă. Totodată, această viteză este dată numai de cota punctului față de planul de apă, adică $V^* = \sqrt{\frac{H}{r_0} + \eta}$, pentru valori ale lui $\eta \geqslant \beta$.

Aceste remarce sînt susținute și de ilustrația grafică din figura 10 a repartiției vitezelor în secțiunea venei de scurgere la diverse distanțe η de planul orificiului.

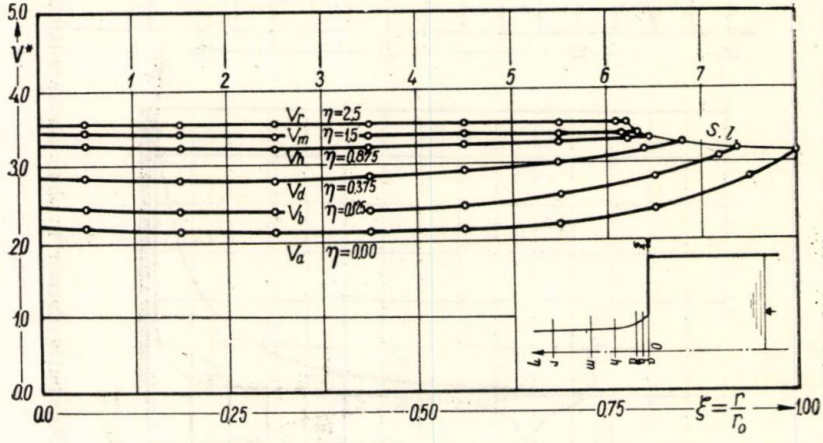


Fig. 10. — Distribuția vitezei în vena de scurgere la diverse distanțe de planul orificiului : *Sl* — suprafață liberă.

Valoarea β, fiind legată direct de vena de scurgere, se poate admite a fi dată în funcție de datele geometrice inițiale ale scurgerii :

$$\beta = f\left(\frac{R}{r_0}, \frac{H}{r_0}\right),$$

Din experiențele noastre a rezultat următoarea expresie pentru β :

$$\beta = 0{,}1\,\frac{H}{r_0} + 0{,}4\,\frac{r_0}{R}, \tag{43}$$

care pentru cazul numeric ales ia valoarea $\beta = 1{,}1$.

Deoarece prin relația (24) s-a arătat că viteza medie axială în planul orificiului poate fi scrisă sub forma $v_m = k_0\sqrt{2gH}$, se poate presupune în mod analog că și viteza medie dintr-o secțiune a venei, situată la o distanță $\eta > 0$, va avea o expresie asemănătoare :

$$\left.\begin{aligned} v_m &= K_z\sqrt{2g\,(H+z)}, \\ v_m^* &= K_\eta\sqrt{\eta + \frac{H}{r_0}}, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

astfel încît pentru $\eta = 0$ (în planul orificiului) coeficientul de viteză K_z sau K_η să fie egal cu k_0, iar pentru $\eta = \beta$ să fie egal cu 1.

Prin utilizarea figurii 10 și relația (40) a fost posibilă determinarea unei viteze axiale medii pentru diferite plane η sub orificiu și calcularea coeficientului de viteză K_η din relația (44). Variația acestui coeficient în funcție de η este prezentată în figura 11 pentru valori $\eta \leqslant \beta$.

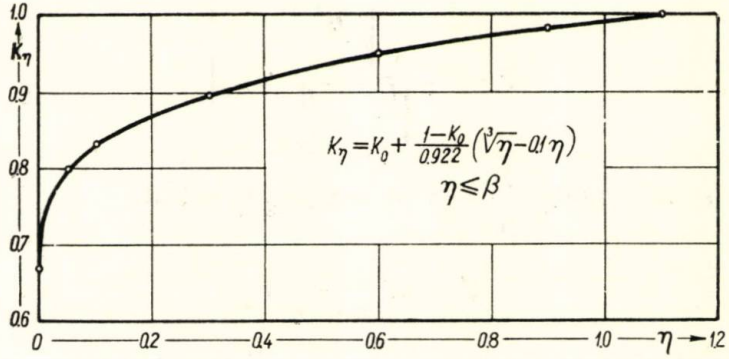


Fig. 11. — Variația coeficientului de viteză K_η în funcție de distanța η a secțiunii venei.

În acest fel s-a putut determina o relație semiempirică pentru coeficientul de viteză K_η sub forma (45), care să exprime variația din figura 11 a acestuia :

$$K_\eta = k_0 + \frac{1-k_0}{0{,}922}\,(\sqrt[3]{\eta} - 0{,}1\eta), \tag{45}$$

valabilă pentru $\eta \leqslant \beta$.

Suprafața liberă a venei poate fi definită și analitic, folosind rezultatele obținute în lucrare cu privire la punctul X al venei, de la care în jos viteza fluidului este constantă în toată secțiunea venei. Aceasta se determină pe porțiuni : pentru $\eta \geqslant \beta$ și pentru $0 < \eta \leqslant \beta$.

Așa cum s-a amintit, pentru $\eta \geqslant \beta$, viteza de la suprafața liberă a venei se regăsește în toată secțiunea venei ca o constantă, deci viteza nu mai este influențată de orificiu, fiind dată de expresia lui Torricelli :

$$\left.\begin{aligned} V &= \sqrt{2g\,(H+z)}, \\ V^* &= \sqrt{\eta + \frac{H}{r_0}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Bazați pe continuitatea debitului

$$\left.\begin{aligned} \pi r^2 V &= \pi r_0^2 k_0 \sqrt{2gH}, \\ \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 V^* &= k_0 \sqrt{\frac{H}{r_0}}, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

și folosind relația (46) pentru viteză, se poate deduce expresia razei unui punct de de vână situat într-un plan la distanța $\eta \geqslant \beta$ sub orificiu :

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= k_0\, r_0^2 \sqrt{\frac{H}{H+z}}, \qquad (48) \\ \xi^2 &= k_0 \frac{\sqrt{\frac{H}{r_0}}}{\sqrt{\eta + \frac{H}{r_0}}}\,. \qquad (49) \end{aligned}\right\}$$

sau, dacă se înlocuiește $\dfrac{H}{r_0} = \alpha$ și se ridică la pătrat,

$$\xi^4 = k_0^2 \frac{\alpha}{\alpha + \eta}, \tag{50}$$

care reprezintă de fapt și ecuația suprafeței libere a venei.

Coordonatele punctului X, punct de unde suprafața liberă de scurgere este dată de o parabolă prin ecuația (50), sînt următoarele :

$$\left.\begin{aligned} \xi_x &= \sqrt{\frac{\alpha k_0^2}{\alpha + \beta}}, \\ \eta_x &= \beta. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

De asemenea și porțiunea venei de scurgere de sub planul orificiului pînă la punctul X, poate fi exprimată analitic ca fiind o porțiune dintr-o

strofoidă [8]. În cazul axelor de coordonate luate ca la noi, ecuația acesteia se poate scrie

$$\eta = (\xi_0 - \xi)\sqrt{\frac{a + \xi_0 - \xi}{a + \xi - \xi_0}}, \tag{52}$$

relație valabilă pentru $\eta \leqslant \beta$, în care

$$a = \xi_0 - \xi_a,$$

ξ_0 fiind abscisa curbei pentru care $\eta = 0$, iar ξ_a abscisa asimptotei la curbă. Valoarea a se determină în așa fel, încît punctul X să aparțină și strofoidei. Astfel că, înlocuind pe $\eta = \beta$ din relația (43) și $\xi = \xi_x$ din relația (51), se poate scoate din relația (52) următoarea expresie a lui a:

$$a = (\xi_0 - \xi_x)\frac{\beta^2 + (1 - \xi_x)^2}{\beta^2 - (1 - \xi_x)^2}. \tag{53}$$

Tangenta la curbă în punctul de coordonate $\eta = 0$, $\xi = \xi_0 = 1$, adică în vîrful muchiei orificiului, este 45°, deci curba nu este tangentă la muchia orificiului, așa cum ar trebui să rezulte (deoarece în vîrful muchiei viteza are componentă numai după orizontală). Avînd în vedere că în realitate acest unghi crește foarte repede spre interiorul orificiului și cum din calculele noastre curba rămîne tangentă numai pentru o porțiune extrem de scurtă, se poate asimila curba reală a venei de scurgere cu curba analitică propusă.

Reprezentarea grafică a suprafeței libere a venei de scurgere obținută prin folosirea relațiilor (50) pentru $\eta \geqslant \beta$ și (52) pentru $0 < \eta \leqslant \beta$ confirmă întru totul cele susținute mai sus, diferența maximă pe rază față de curba obținută prin integrare numerică fiind de $3^0/_{00}$. Din această cauză, o prezentare grafică comparată nu a fost posibilă, și în tabela 1 prezentăm

Tabela 1

ξ \ η	0,125	0,250	0,375	0,500	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75
Numeric	0,920	0,875	0,848	0,830	0,810	0,800	0,795	0,790	0,782
Analitic	0,918	0,874	0,847	0,829	0,809	0,800	0,795	0,790	0,782
H. Rouse	0,897	0,852	0,828	0,812	0,795	0,788	0,785	0,783	0,782

valoric coordonatele punctelor suprafeței libere a venei, obținută prin calcul numeric și prin folosirea relațiilor analitice amintite, scrise sub forma relațiilor

$$\eta = (1 - \xi)\sqrt{\frac{1{,}217 - \xi}{\xi - 0{,}783}} \quad \text{pentru } 0 < \eta \leqslant \beta, \tag{54}$$

$$\xi^2 = 0{,}67\,\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10 + \eta}} \quad \text{pentru } \eta \geqslant \beta, \tag{55}$$

punctul X de racordare dintre porțiunile de curbă date de relațiile de mai sus avînd coordonatele

$$\xi_x = 0{,}797, \tag{56}$$

$$\eta_x = \beta = 1{,}1.$$

În tabelă s-au mai trecut și coordonatele punctelor curbei obținută de H. Rouse prin considerarea fluidului fără greutate.

Primită la redacție la 25 martie 1966.

BIBLIOGRAFIE

1. Hunter Rouse, Abul-Tetouth Abdel-Hadi, *Caracteristic of Irotatational Flow Trough Axially Symmetric Orifices*, Journal of Applied Mechanics, December, 1950.
2. D. Dumitrescu, *Determinarea coeficientului de contracție la ajutajele cilindrice*, Buletin științific, Secțiunea de științe tehnice și chimice, **IV**, 3—4 (1952).
3. K. Woronetz, *L'influence des forces extérieurs sur l'écoulement par des orifices*, Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences, Beograd, **V** (1953).
4. E. Garafoli, *Determinarea debitului de scurgere prin orificii și deversoare*, St. cerc. mec. metalurg., **I** (1950).
5. D. Dumitrescu, V. Ionescu, C. Iancu, *Contribuții teoretice și experimentale la studiul mișcării peste deversoare*, St. cerc. mec. apl., **IX**, 3 (1958).
6. C. Camichel, L. Escande, *Similitude hydraudynamique et tehnique des modèles réduits*, Paris, Gauthiers-Villars, 1938.
7. D. Dumitrescu, C. Iancu, *Contributions à l'étude des déversoirs en mince paroi*, Rev. Roum. Sci. Tech. — Mécanique Applique, **VII**, *3*, 259 (1962).
8. Ladislav Liskovec, *Studio vtoku Nakovehovy pustného potrubi*, Údolnich prehrad, Praha, 1950.
9. Ivan Báno, Hydraulika v Prícladoch, S.V.T.L., Bratislava, 1956.
10. H. O. Anwar, *Coeficients of discharge for gravity flow into vertical pipes*, Journal of Hydraulic Research, *1* (1965).

UNELE CONTRIBUȚII LA ANALOGIA HIDRODINAMICĂ A LAMINĂRII [1])

de E. D. DECIU
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

532

În lucrare se studiază unele aspecte mecanice ale fenomenului laminării materialului printre cilindrii laminorului cu ajutorul analogiei hidrodinamice, pornindu-se de la ecuațiile lui Navier-Stokes.
Dintre ipotezele făcute se amintește că se admite o variație a viscozității în direcția laminării.
Se studiază atît mișcarea într-un ajutaj convergent, care corespunde ipotezei că materialul suferă doar o deformare plastică, cît și mișcarea într-un ajutaj convergent-divergent, care corespunde ipotezei că materialul, după ce suferă o deformație plastică, are o revenire elastică.
În lucrare se obține expresia vitezei în direcția laminării, legea de variație a presiunii pe cilindrii laminorului și se studiază coeficientul de avansare al materialului.
Rezultatele teoretice obținute sînt confirmate de cele experimentale.

1. GENERALITĂȚI

Analogia hidrodinamică se numără printre metodele cu ajutorul cărora se studiază distribuția presiunilor care se dezvoltă în cursul procesului de laminare a unui material între doi cilindri.

Plecînd de la analogia care există între fenomenele fizice ale laminării materialului și ale scurgerii unui fluid vîscos printr-un ajutaj de aceeași formă, se utilizează pentru studiul unor aspecte mecanice ale laminării ecuațiile lui Navier-Stokes de mișcare ale fluidelor vîscoase [1]—[5].

[1]) Prezentată la Conferința de mecanică, București, Septembrie, 1965.

Se consideră un laminor ai cărui cilindri au raza R și se rotesc cu viteză unghiulară ω. Înălțimea materialului înainte de laminare este $2H_0$ și după laminare $2H_1$. Se notează cu $2h$ valoarea variabilă a înălțimii în zona deformării.

Se studiază problema plană, adică cea corespunzătoare neglijării deformațiilor laterale ale materialului laminat, care sînt mici.

Se studiază cazul laminării fără tracțiune.

Una dintre ipotezele de bază care se fac este aceea că cilindrii de laminor suferă deformații neglijabile, adică își păstrează practic în zona de contact forma unui arc de cerc. Această ipoteză se justifică prin robustețea cilindrilor și este aplicabilă în special în cazul laminării metalelor la cald sau a maselor plastice.

Se fac de asemenea și unele ipoteze simplificatoare și anume că forțele masice și de inerție sînt neglijabile în comparație cu celelalte forțe, că componenta v a vitezei și variațiile ei în lungul axelor Ox și Oy sînt neglijabile și că variația componentei u a vitezei în lungul axei Ox este sensibil mai mică decît cea în lungul axei Oy, fapt pentru care se poate neglija. Astfel se ajunge la utilizarea ecuațiilor lui Navier-Stokes simplificate la forma ecuațiilor stratului de lubrifiant ale lui Reynolds și la ecuația continuității

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

În lucrările citate [1]—[5], problema este abordată considerîndu-se viscozitatea constantă.

În cursul laminării, datorită deformațiilor, materialul suferă modificări ale proprietăților sale mecanice, care depind de gradul de deformare prin laminare [6]—[9].

În lucrarea de față, pentru a se realiza o apropiere de fenomenele reale, se va admite o variație a viscozității în direcția laminării (în lungul axei Ox). Variația viscozității după normala la direcția laminării (după Oy) se neglijează, deoarece se consideră că într-o secțiune normală nu apar variații sensibile de temperatură. În consecință se va admite o variație a viscozității de aceeași formă generală care se utilizează în lucrările de lubrificație [10]:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{h}{H_0}\right)^q. \tag{3}$$

În lucrarea de față se consideră cazul $q = 1$, care corespunde unei variații liniare a viscozității în funcție de secțiune.

În cele ce urmează, problema laminării se va studia în două situaţii :

a) ajutaj convergent, cînd materialul suferă doar o deformaţie plastică şi se desprinde de cilindri în planul axelor, unde secţiunea este minimă ;

b) ajutaj convergent-divergent, cînd materialul suferă pînă în dreptul secţiunii minime o deformaţie plastică, urmată apoi de o revenire elastică.

2. STUDIUL MIŞCĂRII ÎNTR-UN AJUTAJ CONVERGENT

Se consideră ajutajul ABA_1B_1, definit de pereţii cilindrilor, în interiorul căruia are loc reducerea secţiunii de la $2H_0$ la $2H_1$ (fig. 1).

Condiţiile la limită ale problemei de care se ţine seama la rezolvarea ecuaţiilor de mişcare sînt : la periferie materialul are aceeaşi viteză ca şi cilindrii ; pentru $y = 0$ mişcarea are loc doar în lungul axei absciselor, totodată fiind şi viteză maximă ; la intrarea şi ieşirea din zona studiată, adică în secţiunea AA_1 şi BB_1, presiunea este nulă (fig. 1). Deci condiţiile la limită sînt

$$\left.\begin{array}{lll} y = h, & u = -\omega(R + H_1 - h); & v = -\omega x, \\ y = 0, & \dfrac{\partial u}{\partial x} = ; & v = 0, \\ x = 0 \text{ şi } x = l, & p = 0. & \end{array}\right\} \quad (4)$$

Din ecuaţiile (1), integrînd în raport cu y şi luînd în considerare condiţiile (4), se obţine legea de variaţie a componentei u a vitezii în direcţia laminării :

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(y^2 - h^2) - \omega(R + H_1 - h). \quad (5)$$

Din ecuaţia (2) se obţine următoarea expresie generală pentru gradientul presiunii :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{3\mu\omega}{h^3}[h^2 - (R + H_1)h + C]. \quad (6)$$

Pentru studiul variaţiei presiunii, ţinînd seama că AB este un arc de cerc, se înlocuieşte

$$h = R + H_1 - \sqrt{R^2 - x^2} \quad (7)$$

şi se face schimbarea de variabilă

$$x = R \sin \varphi, \quad (8)$$

deci în final se face substituţia

$$h = R + H_1 - R\cos\varphi. \quad (9)$$

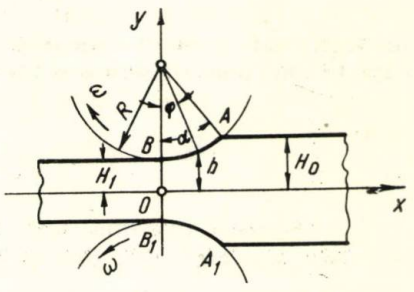


Fig. 1. — Schema laminării în cazul ajutajului convergent.

În continuare se ia în considerare faptul că viscozitatea este variabilă. Ținînd seama de ipotezele expuse mai înainte ($q = 1$), relația (3) devine

$$\frac{\mu}{h} = \frac{\mu_0}{H_0} = \psi, \tag{10}$$

deci

$$\mu = \psi h. \tag{11}$$

Introducînd mărimile adimensionale δ și η definite de relațiile

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{H_0}{R}, \\ \eta &= \frac{H_0}{H_1}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

legea de variație a presiunii se obține din (6) ținînd seama de condițiile la limită (4)

$$p(\varphi) = 3\omega\psi\left\{R\left[(\delta+1)\varphi + \sin\varphi + \left(\frac{C}{R^2\delta(\delta+2)} - (\delta+1)^2\right)\xi\right] + \frac{C(\delta+1)\sin\varphi}{R\delta(\delta+2)(\delta+1-\cos\varphi)}\right\}, \tag{13}$$

unde s-a notat [3]

$$\xi = \frac{2(\delta+1)}{\sqrt{\delta(\delta+2)}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\delta+2}{\delta}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right). \tag{14}$$

Constanta de integrare C are valoarea

$$C = R^2\delta(\delta+2)\,\frac{(\delta+1)\{(\delta+1)\xi_0 - \arccos[1-\delta(\eta-1)]\} - \sqrt{\delta(\eta-1)[2-\delta(\eta-1)]}}{\frac{\delta+1}{\delta\eta}\sqrt{\delta(\eta-1)[2-\delta(\eta-1)]} + \xi_0}, \tag{15}$$

unde cu ξ_0 s-a notat valoarea lui ξ definit de relația (14) cînd $\varphi = \alpha$ și care se mai poate calcula și cu următoarea formulă:

$$\xi_0 = \frac{2}{\sqrt{\delta(\delta+2)}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(\delta+2)(\eta-1)}{2-\delta(\eta-1)}}. \tag{16}$$

Presiunea maximă este plasată în secțiunea definită de unghiul φ_0, care se determină din condiția

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{17}$$

care conduce la soluția de formă generală

$$\varphi_0 = \arccos \frac{1}{2}\left[1 + \delta + \sqrt{(1+\delta)^2 - 4\frac{C}{R^2}}\right]. \tag{18}$$

Introducînd valoarea constantei C din relația (15), se obține

$$\varphi_0 = \arccos \frac{1}{2}\left[1 + \delta + \sqrt{(1+\delta)^2 - 4\delta(\delta+2)\frac{(\delta+1)\{(\delta+1)\xi_0 - \arccos[1-\delta(\eta-1)]\} - \sqrt{\delta(\eta-1)[2-\delta(\eta-1)]}}{\frac{\delta+1}{\delta\eta}\sqrt{\delta(\eta-1)[2-\delta(\eta-1)]} + \xi_0}}\right], \tag{19}$$

3. STUDIUL MIȘCĂRII ÎNTR-UN AJUTAJ CONVERGENT-DIVERGENT

Urmărind o apropiere a rezultatelor teoretice de cele reale, mișcarea se studiază în două porțiuni: prima, definită de unghiul α (fig. 2), care corespunde zonei de deformare plastică, și a doua, definită de unghiul β, care corespunde revenirii elastice. Astfel se ajunge la ajutajul convergent-divergent $ABCA_1B_1C_1$, notîndu-se cu $2H_0$ înălțimea materialului înainte de laminare, $2H_1$ înălțimea materialului după laminare și cu $2H_2$ distanța dintre cilindri în planul axelor.

a) *Studiul mișcării în partea convergentă a ajutajului* se aseamănă în unele privințe cu studiul făcut pentru ajutajul convergent.

Condițiile la limită ale problemei de care se ține seama sînt: la periferie materialul are aceeași viteză ca și cilindrii; pentru $y = 0$ mișcarea are loc doar după axa Ox, viteza fiind în același timp maximă; la intrarea între cilindri, adică în secțiunea AA_1 presiunea este nulă. În secțiunea minimă BB_1, unde se termină zona de deformare plastică și, prin urmare, materialul a atins o stare de modificare maximă a dimensiunilor sale geometrice, facem ipoteza că s-a atins o tensiune σ_x proporțională cu limita de curgere k_f a materialului la gradul de deformare respectiv.

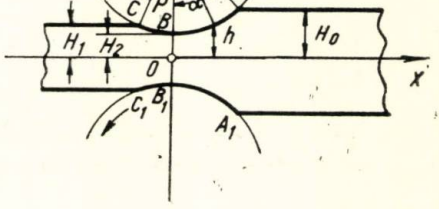


Fig. 2. — Schema laminării în cazul ajutajului convergent-divergent.

Legătura dintre tensiune și presiune fiind dată de legea plasticității

$$\sigma_1 - \sigma_3 \approx 1{,}15\ k_f \tag{20}$$

și ținînd seama de schema de tensiuni adoptată curent în teoria laminării, care conduce la

$$\sigma_3 = \nu k_f\ ;\ \sigma_1 = p_2, \tag{21}$$

se obține valoarea presiunii în secțiunea BB_1

$$p_2 \approx (1{,}15 + \nu)k_f. \tag{22}$$

Limita de curgere k_f depinde de material și de temperatură și este variabilă cu gradul de reducere prin laminare [6]—[9]. Coeficientul de proporționalitate ν depinde în general de aceiași parametri și, cînd se face ipoteza că în secțiunea BB_1 s-a atins limita de curgere, atunci $\nu = 1$ și ca urmare

$$p_2 \approx 2{,}15\, k_f. \tag{22'}$$

Deci condițiile la limită pentru partea convergentă a ajutajului sînt

$$\left.\begin{array}{lll} y = h, & u = -\omega(R + H_1 - h); & v = -\omega x, \\ y = 0, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0; & v = 0, \\ \varphi = \alpha, & p = 0, & \\ \varphi = 0, & p = p_2 \approx (1{,}15 + \nu)k_f. & \end{array}\right\} \tag{23}$$

Pentru studiul mișcării în partea convergentă a ajutajului, în calcule se face ipoteza simplificatoare

$$H_1 \approx H_2. \tag{24}$$

Etapele de rezolvare sînt aceleași ca și în cazul ajutajului convergent studiat mai înainte și se obțin aceleași expresii pentru componenta u a vitezei și pentru gradientul presiunii, adică relațiile (5), respectiv (6).

Făcînd schimbarea de variabilă (9) și ținînd seama și de relațiile (11) și (24), din (6), cu ajutorul condițiilor la limită (23), se obține legea de variație a presiunii:

$$p(\varphi) = 3\omega\psi\left\{ R\left[(\delta+1)\varphi + \sin\varphi + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{C}{R^2\delta(\delta+2)} - (\delta+1)^2\right)\xi\right] + \frac{C(\delta+1)\sin\varphi}{R\delta(\delta+2)(\delta+1-\cos\varphi)} + C_1\right\}, \tag{25}$$

unde s-au utilizat și notațiile date de relațiile (12) și (14).

Constantele de integrare au valorile

$$C_1 = \frac{p_2}{3\omega\psi}, \tag{26}$$

$$C = R^2\delta(\delta+2)\frac{(\delta+1)\{(\delta+1)\xi_0 - \arccos[1-\delta(\eta-1)]\} - \sqrt{\delta(\eta-1)[2-\delta(\eta-1)]} - \dfrac{p_2}{3\omega\psi R}}{\dfrac{\delta+1}{\delta\eta}\sqrt{\delta(\eta-1)[2-\delta(\eta-1)]} + \xi_0}, \tag{27}$$

unde ξ_0 are aceeaşi semnificaţie ca mai sus şi se poate calcula cu ajutorul relaţiei (16).

Pentru calculul valorii unghiului φ_0, unde este plasată presiunea maximă, se utilizează relaţia (18) şi se ajunge la

$$\varphi_0 = \arccos \frac{1}{2} \left[1+\delta+ \right.$$

$$\left. + \sqrt{(1+\delta)^2 - 4\delta(\delta+2) \frac{(\delta+1)\{(\delta+1)\xi_0 - \arccos[1-\delta(\eta-1)]\} - \sqrt{\delta(\eta-1)[2-\delta(\eta-1)]} - \frac{p_2}{3R\omega\psi}}{\frac{\delta+1}{\delta\eta}\sqrt{\delta(\eta-1)[2-\delta(\eta-1)]} + \xi_0}} \right]. \tag{28}$$

b) *Studiul mişcării în partea divergentă a ajutajului* se va face cu unele simplificări. Astfel, ţinînd seama că zona divergentă are o extindere mică şi în interiorul ei are loc o revenire elastică, se poate considera că nu se mai produc modificări importante de structură şi de temperatură şi, prin urmare, se poate considera viscozitatea constantă.

Pe baza celor dezvoltate pînă aici, valoarea viscozităţii este

$$\mu_1 = \psi H_1 = \frac{H_1}{H_0}\mu_0 = \frac{\mu_0}{\eta}, \tag{29}$$

adică aceeaşi din secţiunea BB_1, cum a rezultat din calculele făcute pentru partea convergentă a ajutajului. În aceste condiţii se pot utiliza rezultatele obţinute în lucrarea [4]. Se aminteşte că în secţiunea de ieşire CC_1 se admite o ipoteză utilizată în teoria lubrificaţiei, anume că presiunea p^* se anulează o dată cu $\frac{\partial p^*}{\partial x}$. Condiţiile la limită pentru mişcarea în partea divergentă a ajutajului sînt:

$$\left.\begin{array}{lll} y = 0, & \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & v = 0, \\ y = h, & u = -\omega(R + H_2 - h), & v = -\omega x, \\ \varphi = 0, & p^* = p_2 \approx (1{,}15 + \nu) k_f, & \\ \dfrac{\partial p^*}{\partial x} = 0, & p^* = 0. & \end{array}\right\} \tag{30}$$

În această parte a ajutajului se renunţă la ipoteza simplificatoare (24). Se utilizează notaţia p^* pentru a face distincţie de rezultatele obţinute pentru zona convergentă.

Legea de variaţie a componentei u a vitezei este

$$u = \frac{1}{2\mu_1}\frac{\partial p^*}{\partial x}(y^2 - h^2) - \omega(R + H_2 - h). \tag{31}$$

Legea de variație a presiunii este

$$p^*(\varphi) = 3\mu_1\omega\left\{(\Delta+1)\left[\frac{1}{\Delta(\Delta+2)} + \frac{3C^*}{2R^2\Delta^2(\Delta+2)^2}\right]\xi^* + \right.$$
$$+ \frac{C^*}{2R^2\Delta(\Delta+2)}\left[1 + \frac{3}{\Delta(\Delta+2)} + \frac{\Delta+1}{\Delta+1-\cos\varphi} + \right. \tag{32}$$
$$\left.\left. + \frac{2R^2(\Delta+1)^2}{C^*}\right]\zeta^* + C_1^*\right\},$$

unde s-au folosit notațiile

$$\left.\begin{aligned} \xi^* &= \frac{2}{\sqrt{\Delta(\Delta+2)}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\Delta+2}{\Delta}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right), \\ \zeta^* &= \frac{\sin\varphi}{\Delta+1-\cos\varphi}, \\ \Delta &= \frac{H_2}{R} = \delta - 1 - \cos\beta. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Constantele de integrare au valorile

$$\left.\begin{aligned} C_1^* &= -\frac{p_2}{3\mu_1\omega}, \\ C^* &= -\delta R^2(\delta + \cos\beta). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Calculele valorii unghiului β se face de la caz la caz, pornind de la relația (32) și punînd ultimele din condițiile (30), ceea ce conduce în cele din urmă la rezolvarea unei ecuații implicite. Cu ajutorul valorii unghiului β se poate calcula și valoarea înălțimii minime

$$H_2 = H_1 - R(1 - \cos\beta). \tag{35}$$

4. STUDIUL COEFICIENTULUI DE AVANSARE AL MATERIALULUI

Coeficientul de avansare al materialului este definit [1] de relația

$$k = \frac{Q - Q_1}{Q_1}, \tag{36}$$

unde Q este debitul de material care trece prin secțiunea minimă, iar Q_1 debitul care ar trece prin aceeași secțiune dacă toate particulele ar avea viteza egală cu viteza periferică a cilindrului, adică

$$\left.\begin{aligned} Q &= -2\int_0^{H_1} u_0\,dy, \\ Q_1 &= 2\omega R H_1, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

unde s-a notat cu u_0 viteza u pentru $x = 0$.

Forma generală a coeficientului de avansare al materialului este [3]

$$k = \frac{C}{RH_1} - 1. \tag{38}$$

Efectuînd calculele pentru cele două situații studiate în lucrarea de față, se obține :

a) pentru ajutajul convergent :

$$k=(\delta+2)\frac{(\delta+1)\{(\delta+1)\xi_0-\arccos[1-\delta(\eta-1)]\}-\sqrt{\delta(\eta-1)[2-\delta(\eta-1)]}}{\frac{\delta+1}{\delta\eta}\sqrt{\delta(\eta-1)[2-\delta(\eta-1)]}+\xi_0}-1; \tag{39}$$

b) pentru ajutajul convergent-divergent :

$$k=(\delta+2)\frac{(\delta+1)\{(\delta+1)\xi_0-\arccos[1-\delta(\eta-1)]\}-\sqrt{\delta(\eta-1)[2-\delta(\eta-1)]}-\frac{p_2}{3R\omega\psi}}{\frac{\delta+1}{\delta\eta}\sqrt{\delta(\eta-1)[2-\delta(\eta-1)]}+\xi_0}-1. \tag{40}$$

5. CONCLUZII

Prin luarea în considerație a variației viscozității o dată cu secțiunea în zona deformării materialului de către cilindrii laminorului, se caută o apropiere a rezultatelor teoretice de cele practice.

În scopul efectuării unei comparații între rezultatele obținute în lucrarea de față pentru cazul ajutajului convergent și alte formule din literatură, s-au trasat diagramele din figura 3. Se consideră o laminare cu un laminor la care diametrul cilindrilor este $D = 600$ mm, dimensiunile laminatului fiind $H_0 = 18$ mm și $H_1 = 9$ mm, deci $\delta = 0{,}03$. Se prezintă rezultatele obținute cu formula (13) în comparație cu rezultatele obținute tot pe baza analogiei hidrodinamice cînd $\mu = \text{const.}$ (adică $q = 0$) în lucrarea [3]

$$\left.\begin{aligned} p(\varphi) &= 3\mu\omega\left\{-\varphi+(\delta+1)\left[1-\frac{1}{\delta(\delta+2)}+\frac{3C}{2R^2\delta^2(\delta+2)^2}\right]\xi+\right.\\ &\left.+\frac{C}{2R^2\delta(\delta+2)}\left[1+\frac{3}{\delta(\delta+2)}+\frac{\delta+1}{\delta+1-\cos\varphi}-\frac{2R^2(\delta+1)^2}{C}\right]\zeta\right\},\\ &\text{unde}\\ C&=2R^2\delta(\delta+2)\frac{\alpha+(\delta+1)\left[\left(\frac{1}{\delta(\delta+2)}-1\right)\xi_0+\frac{\delta+1}{\delta(\delta+2)}\zeta_0\right]}{\frac{3(\delta+1)}{\delta(\delta+2)}\xi_0+\left(1+\frac{3}{\delta(\delta+2)}+\frac{\delta+1}{\delta+1-\cos\alpha}\right)\zeta_0}, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

și cele obținute de Targ [1], care consideră cilindrii deformabili

$$\left.\begin{aligned} p(h) &= \frac{3\mu\omega}{m}\left[\ln\frac{h}{H_1} + (R+H_1)\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{H_1}\right) - \frac{C}{2}\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{H_1^2}\right)\right], \\ &\text{unde} \\ C &= \frac{2H_0H_1}{H_0+H_1}\left(R + H_1 - \frac{H_0H_1}{H_0-H_1}\ln\frac{H_0}{H_1}\right) \\ m &\approx \frac{H_0-H_1}{a}. \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Pe aceeași diagramă, la altă scară, sînt trasate și diagramele obținute pe baza legilor plasticității, cînd se admite o frecare uscată cu cilindrii laminorului, în lucrarea [6]:

— pentru zona de întîrziere:

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= k_0\frac{\lambda-1}{\lambda}\left\{\left[1+\frac{\psi-1}{\varepsilon(\lambda+1)}\right]\left(\frac{H_0}{H_1}\right)^{\lambda} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\lambda-1}\left[\psi - \frac{\psi-1}{\Delta h}2\left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}h - H_1\right)\right]\right\} - \sigma_0\left(\frac{H_0}{h}\right)^{\lambda}; \end{aligned}\right.$$

— pentru zona de avans

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= k_0\frac{\lambda+1}{\lambda}\left\{\left(\psi - \frac{\psi-1}{\lambda-1}\cdot\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left(\frac{h}{H_1}\right)^{\lambda} - \right. \\ &\left. - \frac{\lambda}{\lambda+1}\left[\psi - \frac{\psi-1}{\Delta h}2\left(\frac{2\lambda}{\lambda-1}h - H_1\right)\right]\right\} - \sigma_1\left(\frac{h}{H_1}\right)^{\lambda}, \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

unde s-a notat

$$\lambda = \frac{\mu}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\ ;\quad \varepsilon = \frac{\Delta h}{H_0}\ ;\ \Delta h = 2(H_0 - H_1);$$

în lucrarea [9]:

— pentru zona de întîrziere:

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{1+\mu\operatorname{tg}\varphi}\left\{k_0\left(\psi - \frac{\psi-1}{\Delta h}2R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\varphi\right) + \right. \\ &+ [\exp(-I)]\left[C - k_0\psi\sum_{n=0}^{4}\frac{u_n}{n+1}\varphi^{n+1} + \right. \\ &\left.\left. + 2R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}k_0\frac{\psi-1}{\Delta h}\sum_{n=0}^{4}\left(u_n\sum_{i=0}^{n}\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\varphi^i}(\varphi^n)\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\varphi^i}(-\cos\varphi)\right)\right]\right\}; \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

— pentru zona de avans :

$$p(x) = \frac{1}{1 - \mu \operatorname{tg} \varphi} \left\{ k_0 \left(\psi - \frac{\psi - 1}{\Delta h} 2 R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin \varphi \right) + \right.$$

$$+ [\exp(-I^*)] \left[C^* - k_0 \psi \sum_{n=0}^{4} \frac{u_n^*}{n+1} \varphi^{n+1} + \right. \qquad (44)$$

$$\left. \left. + 2 R k_0 \frac{\psi - 1}{\Delta h} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sum_{n=0}^{4} \left(u_n^* \sum_{i=0}^{n} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\varphi^i} (\varphi^n) \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\varphi^i} (-\cos \varphi) \right) \right] \right\};$$

în lucrarea [11] :

— pentru zona de întîrziere :

$$p(x) = \frac{k_0}{\lambda} \left\{ \left[\left(1 - \frac{\sigma_0}{k_0} \right) \lambda - 1 \right] \left(\frac{H_0}{h} \right)^{\lambda} + 1 \right\};$$

— pentru zona de avans : (45)

$$p(x) = \frac{k_0}{\lambda} \left\{ \left[\left(1 - \frac{\sigma_1}{k_0} \right) \lambda + 1 \right] \left(\frac{h}{H_1} \right)^{\lambda} - 1 \right\}.$$

În exemplele tratate s-a lucrat cu valoarea coeficientului de frecare $f = 0{,}6$, cu limita de curgere $k_0 = 8{,}63$ kgf/mm² şi cu $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$. Diagramele din figura 3 confirmă că rezultatele obţinute cu ajutorul analogiei hidrodinamice se apropie de cele experimentale, curbele avînd aceeaşi alură.

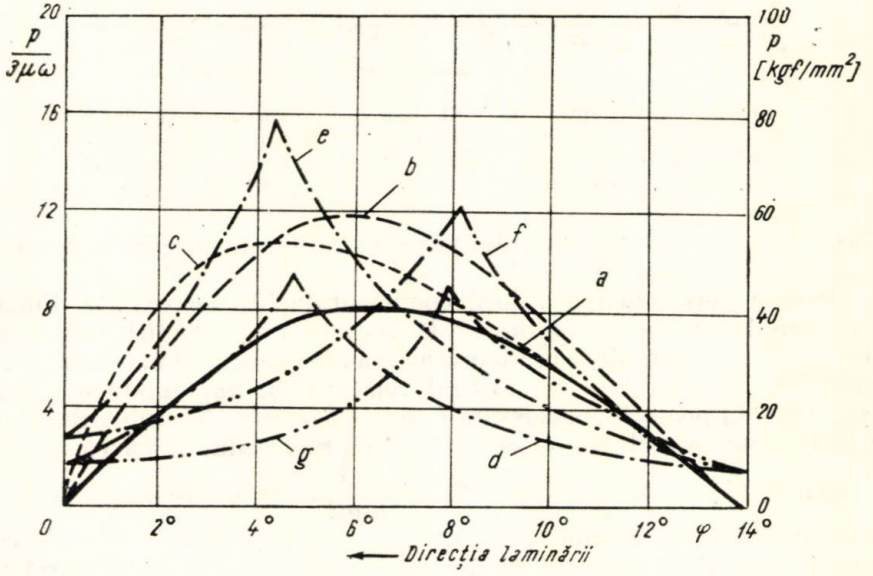


Fig. 3. — Distribuţia presiunii. Curba *a* trasată cu formula (13) ; curba *b* trasată cu formula (41) după lucrarea [3] ; curba *c* trasată cu formula (42) după lucrarea [1] ; curba *d* trasată cu formula (44) după lucrarea [9], pentru $\psi = 1$; curba *e* trasată cu formulele (44) după lucrarea [9], pentru $\psi = 2$; curba *f* trasată cu formulele (43) după lucrarea [6] ; curba *g* trasată cu formulele (45) după lucrarea [11].

Pentru compararea rezultatelor obținute în lucrarea de față pentru cazul ajutajului convergent-divergent s-a recurs la o laminare experimentală la rece fără tracțiune [6], laminatul fiind oțel St. 1010, cu dimensiunile $2H_0 = 1{,}9$ mm, $2H_1 = 1{,}45$ mm. Viteza cilindrilor a fost $v = 77$mm/s.

Diagrama experimentală a presiunii este trasată după oscilogramă [6]. Pentru determinarea limitei de curgere s-a recurs la un oțel cu proprietăți apropiate de St. 1010, deoarece nu am avut la dispoziție

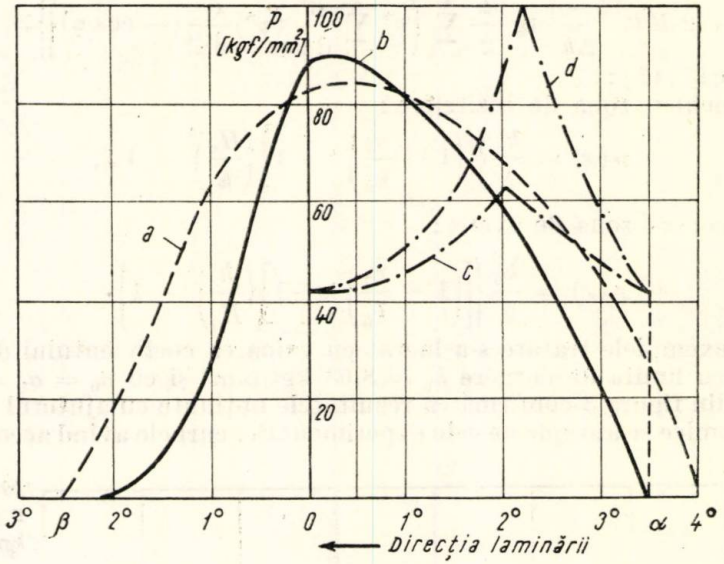


Fig. 4. — Distribuția presiunii. Curba a experimentală după lucrarea [6]; curba b trasată cu formulele (25) și (32); curba c trasată cu formulele (45) după lucrarea [11], pentru $f = 0{,}1$; curba d trasată cu formulele (45) după lucrarea [11], pentru $f = 0{,}2$.

curbele care dau pentru acest oțel variația limitei de curgere cu gradul de deformare. S-a lucrat cu $\nu = 1$.

Pentru determinarea valorii coeficientului de viscozitate dinamică μ s-a recurs la o valoare experimentală. Astfel s-a pus condiția ca cele două curbe, cea experimentală și cea teoretică, să aibă maximul plasat în aceeași secțiune, cu alte cuvinte s-a utilizat relația (28), impunîndu-se valoarea lui φ_0. Aceasta poate fi considerată o metodă pentru determinarea experimentală a coeficientului de viscozitate μ și a raportului ψ. În cazul tratat s-a obținut $\psi = 0{,}392$ și $\mu_0 = 0{,}744 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2}$. Cu aceste date s-a trasat curba din figura 4. Pe aceeași diagramă s-au mai figurat curbele ce se obțin cu formulele (45) din lucrarea [11], cu valorile coeficientului de frecare $f = 0{,}1$ și, respectiv, $f = 0{,}2$.

Rezultatele obținute în lucrarea de față se apropie mulțumitor de cele experimentale. Faptul că unghiul de prindere α teoretic este mai mic decît cel experimental se datorește, pe de o parte, faptului că s-au făcut calculele

pentru secțiunea minimă cu $2H_1$ în loc de $2H_2$ și, pe de altă parte, faptului că, datorită dimensiunilor sale, traductorul începe să înregistreze înainte ca secțiunea sa mediană să vină în contact cu laminatul. Acest ultim fapt poate explica de asemenea de ce unghiul β, care caracterizează partea de ajutaj divergent, este mai mic decît cel experimental.

O altă comparație cu rezultatele experimentale și cele teoretice din literatură se poate face prin intermediul coeficientului de avansare al materialului. În tabela 1 sînt date valorile coeficientului k de avansare al materialului calculat cu formula (39), în comparație cu datele experimentale ale lui I. M. Pavlov [1] pentru o laminare la cald efectuată în domeniul de temperaturi $t = 700-900°C$. În tabelă mai sînt trecute și rezultatele teoretice obținute în lucrarea [3], cînd s-a considerat $\mu = \text{const.}$, adică $q = 0$:

$$k = 2\frac{(\delta+1)[1-\delta(\delta+2)]\,\xi_0+(\delta+1)^2\zeta_0+\delta(\delta+2)\arccos[1-\delta(\eta_1-1)]}{\frac{3(\delta+1)}{\delta+2}\,\xi_0+\delta\left[1+\frac{\delta+1}{\delta\eta_1}+\frac{3}{\delta(\delta+2)}\right]\zeta_0}-1, \quad (46)$$

și în lucrarea lui Targ [1], cînd s-a considerat $\mu = \text{const.}$ și cilindrii deformabili :

$$k = \frac{\eta_1-1}{\eta_1+1}\left[1-2\delta\eta_1\left(1-\frac{5}{6}\eta_1+\frac{1}{3}\eta_1^2\right)\right]. \quad (47)$$

Tabela 1

Parametrii laminării		Coeficientul de avansare al materialului k, în %			
$\delta = \frac{H_1}{R}$	$\eta_1 = \frac{H_0}{H_1}$	Valori experimentale (I.M.Pavlov)	Valori teoretice		
			după formula (39)	după lucrarea [3]	după lucrarea [1]
0,225	1,1	2–3	2,3	2,6	3,6
0,255	1,2	4–6	4,3	4,4	6,7

Rezultatele din tabela 1 confirmă ipotezele și rezultatele teoretice din lucrarea de față.

Comparînd între ele rezultatele obținute în cele două situații studiate, ajutajul convergent și ajutajul convergent-divergent, se observă că rezultatele obținute în cel de-al doilea caz se apropie mai mult de specificul fiecărei laminări.

Legile de variație a presiunii date de formulele (13), (25) și (32), valorile unghiului φ_0 unde este plasată presiunea maximă date de formulele (19) și (28) și valorile coeficientului de avansare al materialului k date de formulele (39) și (40) exemplifică cele afirmate mai înainte. Astfel, în cazul ajutajului convergent-divergent, rezultatele obținute

reflectă influenţa materialului şi a temperaturii prin $\psi = \frac{\mu_0}{H_0}$ şi $p_2 = p_2(k_f)$, a vitezei de deformare prin factorul $v = R\omega$, a gradului de deformare prin $\eta_l = \frac{H_0}{H_1}$ şi $p_2 \approx (1{,}15 + \nu) k_f$ şi a condiţiilor geometrice ale laminării prin $\delta = \frac{H_1}{R}$.

Rezultatele obţinute în lucrarea de faţă confirmă faptul că analogia hidrodinamică a laminării este o metodă utilă de studiu, cu ajutorul căreia se obţin rezultate în bun acord cu cele experimentale.

Primită la redacţie la 20 octombrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. С. М. ТАРГ, *Основные задачи теории ламинарных течений*, Москва-Ленинград Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951, p. 78.
2. Н. А. СЛЕЗКИН, *Динамика вязкой несжимаемой жидкости*, Москва, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955, p. 218.
3. M. POPOV, E. DECIU, I. MITRICĂ, *Consideraţii asupra unei analogii hidrodinamice a laminării*, St. cerc. mec. apl., **VIII**, 3, 905, (1957).
4. M. POPOV, E. DECIU, I. MITRICĂ, *Asupra unei condiţii la limită în analogia hidrodinamică a laminării*, St. cerc. mec. apl., **VIII**, *4*, 1 229, (1957).
5. A. KNESCHKE, *Zur hydrodynamischen Theorie des Warmwalzens*, Archiv für Eisenhüttenwesen, **29**, *1*, 11, (1958).
6. А. А. КОРОЛЕВ, *Новые исследования деформации металла при прокатке*, Москва Машгиз, 1953.
7. E. SIEBEL, *Die Bedeutung der Fliesskurve bei der Kaltformgebung* V.D.I., **98**, *4*, (1956).
8. P. W. WHITON, *Computation of roll force and torque in cold rolling by modern theory*, Journal of Applied Mechanics, **23**, *2*, (1956).
9. M. POPOV, I. MITRICĂ, E. DECIU, *Studiul presiunilor specifice pe suprafaţa de contact în procesul de laminare*. St. cerc. mec. apl., **VII**, *2*, 557, (1956).
10. N. TIPEI, *Hidro-aerodinamica lubrificaţiei*, Bucureşti, Edit. Acad. R.P.R., 1957.
11. A. I. TELIKOV, *Instalaţii de laminoare*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1952.

DEVIEREA UNUI CURENT SUPERSONIC PLAN-PARALEL CU AJUTORUL UNEI PÎNZE DE JET SUBȚIRI[1)]

de E. CARAFOLI și D. PANTAZOPOL
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

În lucrare se propune o metodă de calcul al devierii unui curent plan-paralel supersonic sau hipersonic de gaz ideal, cauzată de un jet auxiliar sub formă de pînză subțire. Metoda este bazată pe utilizarea unei formule unitare de determinare a presiunilor în funcție de deviații, stabilită într-o lucrare anterioară [7]. Sînt deduse apoi ecuațiile parametrice ale pînzei de jet, limitele practice în care poate varia parametrul ales, precum și formulele aplicabile în cazul deviațiilor mici. Sînt date exemple de calcul, diagrame și tabele comparative.

1. INTRODUCERE

Problemele legate de comanda direcției jeturilor gazoase cu ajutorul altor jeturi (avînd de obicei formă de pînză subțire) prezintă un interes deosebit pentru aviația modernă și cosmonautică, precum și pentru alte sectoare ale tehnicii.

În cazul scurgerilor subsonice s-au efectuat diverse cercetări teoretice și experimentale, care au condus totodată și la realizări practice importante privind comanda evoluțiilor de zbor și frînarea la aterizare cu inversorii de jet. Din publicațiile apărute menționăm lucrările [1], [2], [3], [4] și [5].

În cazul jeturilor supersonice însă, studiul devierii în prezența pînzelor de jet auxiliare este mai puțin avansat, în special din punct de vedere teoretic. În această direcție, menționăm lucrările lui C. Dupuisch [6], care propune și o metodă teoretică aproximativă de calcul pentru devieri nu prea mari bazată pe unele observații experimentale și care dă,

[1)] Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, *4* (1966) (în limba franceză).

în limitele indicate de autor, rezultate bune. Consideraţiile teoretice ale acestui autor înglobează influenţa stratului-limită asupra devierii şi urmăresc obţinerea unor indicaţii de ordin general asupra scurgerii. O serie de caracteristici locale ale mişcării, printre care forma pînzei de jet, nu pot fi însă determinate uşor prin metoda sus-amintită.

Considerăm că pentru o abordare sistematică a problemei este mai întîi necesar ca într-o primă etapă să se obţină un număr suficient de soluţii în cazul fluidului perfect, pentru ca apoi, într-o a doua etapă, după obţinerea şi a datelor experimentale necesare, să se stabilească corecţii adecvate privind influenţa stratului-limită şi a turbulenţei libere.

2. IPOTEZE ŞI FORMULE DE BAZĂ

În lucrarea de faţă ne propunem să studiem devierea unui curent de gaz perfect plan-paralel, supersonic sau hipersonic, cauzată de un jet auxiliar în formă de pînză subţire. Se presupune că scurgerea gazului este limitată de un perete solid rectiliniu NA (fig. 1); din punctul A al peretelui ţîşneşte, sub unghiul δ_A faţă de perete, pînza de jet, a cărei urmă în planul mişcării este linia AP.

Sub pînza de jet gazul este în repaus la presiunea p_0. În punctul A ia naştere o undă de şoc AS, în spatele căreia numărul Mach se micşorează

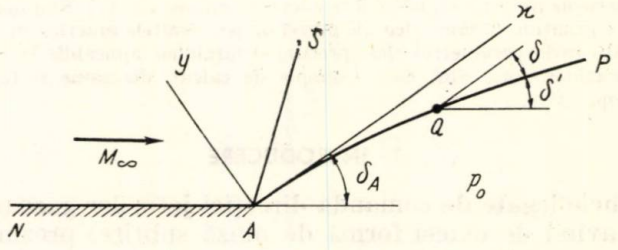


Fig. 1

la o valoare M_A, iar presiunea creşte pînă la o valoare p_A. Valorile M_A şi P_A, sînt, după cum se ştie, funcţii de M_∞, p_∞ şi δ_A. Vom dezvolta calculele numai în cazul în care δ_A nu depăşeşte valoarea critică, corespunzătoare numărului M_∞, caz în care unda de şoc OS rămîne ataşată în punctul A, iar curentul de gaz rămîne supersonic în aval.

Vom presupune totodată că presiunea p_0 a gazului în repaus sub linia de jet AP este mai mică decît presiunea p_A din spatele undei de şoc, în imediata vecinătate a punctului A. Aşadar vom presupune că inegalitatea

$$p_0 < p_A \tag{1}$$

este mereu satisfăcută.

În această ipoteză, după compresiunea prin şoc de la p_∞ la p_A, care are loc în punctul A, urmează o destindere continuă pînă la p_0. Curba

AP va avea astfel concavitatea îndreptată către gazul în repaus; cu alte cuvinte, unghiul δ' (fig. 1) pe care-l face tangenta la curbă într-un punct oarecare Q cu direcția peretelui NA scade asimptotic de la valoarea δ_A la o valoare δ'_0, care depinde de raportul presiunilor $\frac{p_0}{p_\infty}$.

Asupra acestui raport, dintre presiunea p_0 a gazului în repaus și presiunea p_∞ a curentului plan-paralel neperturbat nu vom face deocamdată nici o restricție. Adică acest raport va putea fi sau supraunitar, sau subunitar. În cazul cînd raportul este supraunitar ($p_0 > p_\infty$), valoarea sa este totuși limitată, în mod implicit, prin condiția (1), deoarece între p_∞ și p_A există o relație bine determinată de condițiile trecerii gazului prin unda de șoc.

Vom considera, așa cum se obișnuiește, că pînza de jet este infinit de subțire, dar are un debit finit.

Fie ρ_j, v_j, q_j densitatea, viteza și debitul fluidului care alcătuiește pînza de jet. Este un fapt constatat experimental că mărimea

$$I = \rho_j v_j q_j \tag{2}$$

se păstrează aproximativ constantă pe o lungime destul de mare a pînzei de jet. În cadrul calculelor ulterioare vom presupune că I este constant pînă la infinit aval, în lungul pînzei de jet. În această ipoteză, utilizată de altfel în general în teoriile de *jet-flap*, se poate admite că rezultatele teoretice vor corespunde realității cel puțin într-o regiune apropiată punctului A.

Într-un punct oarecare Q se obține pe cale elementară următoarea relație, care reprezintă condiția la limită pe linia de jet:

$$p - p_0 = -I \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}s}, \tag{3}$$

unde $\mathrm{d}s$ este elementul de arc al liniei de jet în punctul Q, în care presiunea curentului supersonic de gaz este p și unghiul de deviație este δ. Pentru comoditatea calculelor ulterioare, unghiul δ va fi măsurat în raport cu tangenta la linia de jet în punctul A (fig. 1). Așadar, în A $\delta = 0$, iar în oricare alt punct al liniei de jet δ va fi negativ.

În vederea determinării formei liniei de jet, vom utiliza formula coeficientului de presiune în funcție de deviație, stabilită în lucrarea [7], luînd ca valori de referință numărul Mach și presiunea din punctul A și măsurînd unghiul de deviație de la tangenta în A la linia de jet:

$$C_p = \frac{\gamma+1}{2} m_A^2 \sin^2 \delta + \frac{2 m_A}{M_A} \sin\delta \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 M_A^2 m_A^2 \sin^2\delta}, \tag{4}$$

unde γ este raportul căldurilor specifice (pentru aer $\gamma \approx 1{,}4$), C_p este coeficientul de presiune:

$$C_p = \frac{p - p_A}{\frac{1}{2}\rho_A U_A^2} = \frac{p - p_A}{p_A} \cdot \frac{2}{\gamma M_A^2}, \tag{5}$$

iar cu m_A s-a notat raportul

$$m_A = \frac{M_A}{\sqrt{M_A^2 - 1}}. \tag{6}$$

Formula (4) este valabilă atît pentru compresiunea prin şoc, cît şi pentru detenta continuă. Ea este aplicabilă într-un larg interval de unghiuri de deviaţie, atît în regim supersonic, cît şi în regim hipersonic, avînd totodată şi avantajul unei mari simplităţi [8], [9].

Pentru comoditatea calculelor vom face următoarele notaţii:

$$C_p^* = \frac{\gamma + 1}{8} M_A^2 C_p, \tag{7}$$

$$K_1 = \frac{\gamma + 1}{4} K = \frac{\gamma + 1}{4} M_A m_A \sin \delta. \tag{7'}$$

Introducînd notaţiile de mai sus în expresia (4), obţinem formula simplificată

$$C_p^* = K_1^2 + K_1 \sqrt{1 + K_1}, \tag{8}$$

iar corespunzător expresiei (5) obţinem

$$C_p^* = \frac{\gamma + 1}{4} \left(\frac{p}{p_A} - 1 \right). \tag{9}$$

Deoarece coeficientul C_p^* nu depinde de numărul Mach, aşa cum este cazul pentru C_p, vom conveni să-l denumim coeficient de presiune *absolut*.

În funcţie de noile notaţii, condiţia la limită (3) poate fi scrisă sub forma

$$C_p^* - C_{p_0}^* = - \frac{\gamma + 1}{4\gamma} \cdot \frac{I}{p_A} \cdot \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}s}, \tag{10}$$

unde $C_{p_0}^*$ s-a notat coeficientul de presiune absolut corespunzător gazului în repaus la presiune p_0.

3. ECUAŢIILE LINIEI DE JET

Vom considera două axe de coordonate rectangulare cu originea în A, astfel încît axa absciselor să fie tangentă în A la linia de jet. În acest caz, unghiul de deviaţie δ se va măsura de la această axă (deci în A, $\delta = 0$) şi va avea în permanenţă valori negative.

Dacă ţinem seama că pe linia de jet avem

$$\mathrm{d}x = \cos\delta \, \mathrm{d}s, \qquad \mathrm{d}y = \sin\delta \, \mathrm{d}s, \tag{11}$$

deducem din (11)

$$dx = \frac{\gamma + 1}{4\gamma} \cdot \frac{I}{p_A} \frac{\cos\delta\, d\delta}{C_{p_0}^* - C_p^*}, \tag{12}$$

$$dy = \frac{\gamma + 1}{4\gamma} \cdot \frac{I}{p_A} \frac{\sin\delta\, d\delta}{C_{p_0}^* - C_p^*} . \tag{12'}$$

Pentru integrarea relațiilor de mai sus vom face mai întîi următoarea schimbare de variabilă

$$K_1 = \frac{\gamma + 1}{4} M_A m_A \sin\delta = \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) . \tag{13}$$

În funcție de noua variabilă ζ, coeficientul de presiune absolut, dat de (9), capătă expresia

$$C_p^* = \frac{1}{2}(\zeta^2 - 1). \tag{14}$$

Să observăm mai departe că valoarea maximă negativă a coeficientului de presiune $C_{p_0}^*$ are loc pentru $p_0 = 0$ și este

$$C_0^* = -\frac{\gamma + 1}{4\gamma} > -\frac{1}{2}, \tag{15}$$

deoarece, în general, $\gamma > 1$. Rezultă, așadar, că pentru toate valorile pe care le poate lua $C_{p_0}^*$ putem face notația

$$0 < 1 + 2\, C_{p_0}^* = \beta^2. \tag{16}$$

Ținînd seama de (14) și de (16), deducem din (12) și (12') ecuațiile parametrice ale liniei de jet :

$$x = \frac{I}{\gamma M_A m_A p_A} \cdot \int_1^\zeta \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2(\beta^2 - \xi^2)}\, d\xi, \tag{17}$$

$$y = \frac{I}{\gamma M_A m_A p_A} \int_1^\zeta \frac{(\xi^4 - 1)\, d\xi}{\xi^2(\beta^2 - \xi^2)\sqrt{-\xi^4 + 2n^2\xi^2 - 1}}, \tag{17'}$$

unde s-a introdus coeficientul

$$n^2 = 1 + 2\left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 M_A^2 m_A^2 . \tag{18}$$

Integralele de mai sus se vor efectua începînd din punctul A, unde $\delta = 0$ și deci $\zeta = 1$, conform relației (14).

Integrala (17) se poate efectua fără dificultăți, dar integrala eliptică (17') nu se poate exprima suficient de simplu în funcție de integralele

eliptice tabulate, de prima, a doua şi a treia speţă, pentru a putea fi adaptată calculului numeric. De aceea în cele ce urmează vom proceda, pe baza cîtorva observaţii, la efectuarea unor aproximaţii simplificatoare.

4. ASUPRA LIMITELOR PRACTICE ALE DOMENIULUI DE INTEGRARE PENTRU DETERMINAREA LINIEI DE JET

Intervalul teoretic maxim de variaţie a coeficientului de presiune absolut C_p^* se realizează în cazul cînd sub linia de jet este vid ($p_0 = 0$); ţinînd seama de (15), acest interval este

$$-\frac{\gamma+1}{4\gamma} \leqslant C_p^* \leqslant 0. \tag{19}$$

Scoţînd din (8) pe K_1 în funcţie de C_p^* şi ţinînd seama de (19), rezultă

$$-\frac{\gamma+1}{2\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}} \leqslant K_1 \leqslant 0. \tag{20}$$

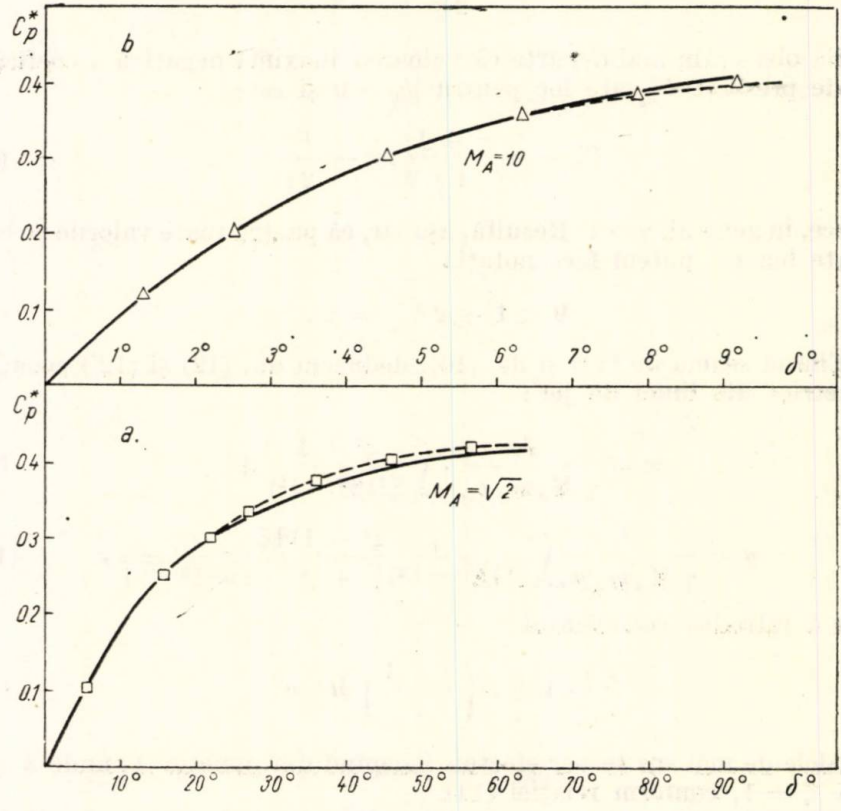


Fig. 2. — După formulele (7) şi (4). După detenta Prandtl — Meyer b) Formulele (7′) şi (4). După detenta Prandtl — Meyer.

De asemenea din (14) deducem

$$0 < \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \leqslant \zeta \leqslant 1. \tag{21}$$

Intervalele practice de variație a mărimilor de mai sus sînt însă mai mici decît cele indicate. Într-adevăr, formula (4) se aplică pentru o gamă largă de unghiuri de deviație, dar nu chiar pînă la valoarea deviației maxime, corespunzătoare din punct de vedere teoretic vidului absolut ($p_0 = 0$). Evident, intervalul unghiurilor de deviație va fi cu atît mai mare, cu cît numărul M_A va fi mai aproape de unitate. Pentru numere M_A mari, deviațiile vor fi mici, deoarece însăși deviația maximă pînă la $p_0 = 0$ (corespunzătoare la $M = \infty$) este mică.

În diagrama din figura 2 este indicată variația lui C_p^* în funcție de deviația δ, după formulele (7) și (4), în comparație cu valorile calculate după formulele detentei Prandtl-Meyer [10]. Calculele au fost făcute pentru $M_A = \sqrt{2}$ și pentru $M_A = 10$. Pentru ușurarea citirii diagramei, deviațiile corespunzătoare ultimului caz ($M_A = 10$) au fost mărite pe figură de zece ori.

În diagrama din figura 3 se indică variația coeficientului C_p^* în funcție de K_1 după formula (8), în comparație cu valorile calculate după formulele detentei Prandtl-Meyer.

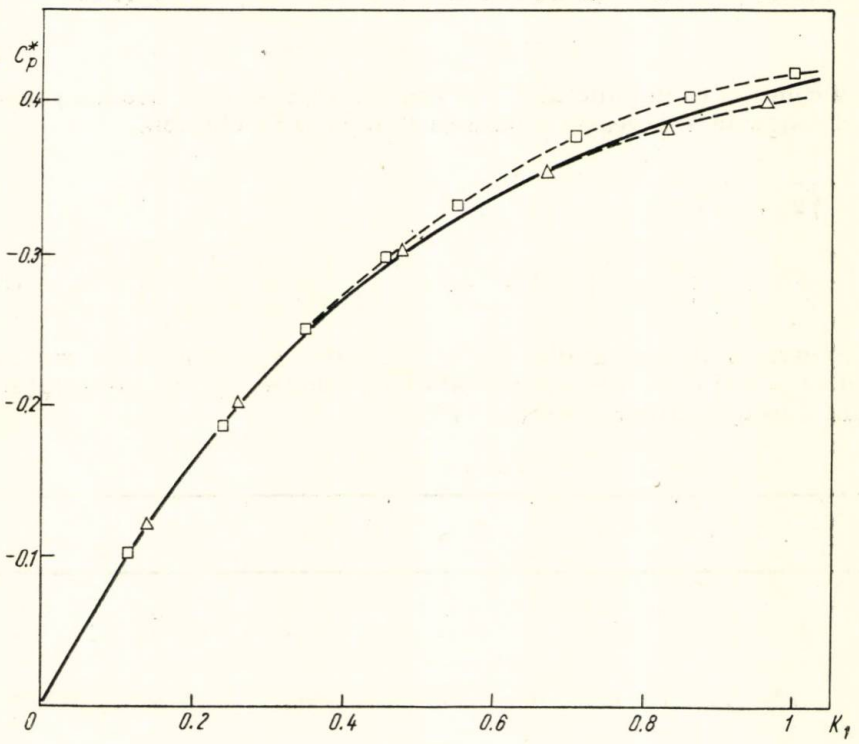


Fig. 3. — După formula (8). După detenta Prandtl — Meyer.

Din examinarea diagramelor se observă că valorile calculate cu formula (8) sînt în concordanţă bună cu cele deduse din formulele detentei Pradtl-Meyer, pînă la valori ale parametrului K_1 cuprinse între $-0{,}6$ şi $-0{,}7$, concordanţa fiind mai bună pentru numere M_A mari. Acestor valori ale lui K_1 le corespund deviaţii de circa $25-30°$ pentru $M_A = \sqrt{2}$ şi de de circa $5-6°$ pentru $M_A = 10$.

Se observă, aşadar, că intervalul practic de variaţie a parametrului K_1 este

$$\sim -0{,}7 < K_1 \leqslant 0, \tag{22}$$

ceea ce corespunde la următoarele intervale pentru ζ şi C_p^*.

$$\sim 0{,}5 < \zeta \leqslant 1, \quad \sim -0{,}33 < C_p^* \leqslant 0. \tag{23}$$

5. ECUAŢIILE APROXIMATIVE ALE LINIEI DE JET

Să ne referim la integrala (17′) şi să facem următoarea notaţie:

$$\eta(\xi) = \sqrt{-\xi^4 + 2n^2\xi^2 - 1}. \tag{24}$$

În intervalul (23) vom aproxima funcţia de mai sus prin expresia

$$\eta^*(\xi) = a_0(\xi - a_1)(\xi - a_2). \tag{25}$$

Punînd condiţia ca în punctul $\xi = 1$ funcţia $\eta^*(\xi)$ să aibă aceeaşi valoare, aceeaşi tangentă şi aceeaşi curbură ca funcţia $\eta(\xi)$, obţinem

$$a_0 = -\frac{2}{\sqrt{2(n^2-1)}}, \tag{26}$$

$$a_1 = \frac{n^2+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 - 1}, \quad a_2 = \frac{n^2+1}{2} - \sqrt{\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 - 1}. \tag{26′}$$

Pentru a ilustra gradul de aproximaţie introdus, s-au calculat, pentru $n^2 = 4$ şi $n^2 = 100$, cîteva valori ale funcţiei $\eta(\xi)$ în comparaţie cu valorile corespunzătoare funcţiei $\eta^*(\xi)$:

Tabela 1

	ξ	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
$n^2 = 4$	$\eta(\xi)$	2,450	2,20	1,93	1,64	1,32	0,97
	$\eta^*(\xi)$	2,450	2,20	1,93	1,64	1,33	1,02
$n^2 = 100$	$\eta(\xi)$	14,07	12,65	11,24	9,84	8,42	6,99
	$\eta^*(\xi)$	14,07	12,65	11,25	9,85	8,44	7,03

După cum se observă, concordanța este bună pînă aproape de limita intervalului, fiind mai bună pentru numere n (respectiv M_A) mari.

Introducînd în integrala (17',) funcția $\eta^*(\xi)$ în locul funcției $\eta(\xi)$, vom obține o foarte bună aproximare și integrala se va putea efectua fără dificultăți.

Într-adevăr, ecuațiile parametrice aproximative ale liniei de jet (17) devin în acest caz

$$x = \frac{I}{\gamma M_A m_A p_A} \cdot \left[\frac{1+\beta^2}{2\beta^3} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta} \cdot \frac{\zeta+\beta}{\zeta-\beta} - \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{1-\zeta}{\zeta} \right], \tag{27}$$

$$y = \frac{I}{\gamma M_A m_A p_A} \cdot \frac{1}{a_0} \left[\frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{1-\zeta}{\zeta} - \frac{n^2+1}{\beta^2} \ln \zeta \frac{1-\beta^4}{2\beta^3(a_1-\beta)(\beta-a_2)} \ln \frac{\zeta-\beta}{1-\beta} - \right.$$

$$\left. - \frac{1-\beta^4}{2\beta^3(\beta+a_1)(\beta+a_2)} \ln \frac{\zeta+\beta}{1+\beta} - \frac{n^2+1}{a_1^2-\beta^2} \ln \frac{a_1-\zeta}{a_1-1} + \frac{n^2+1}{\beta^2-a_2^2} \ln \frac{\zeta-a_2}{1-a_2} \right]. \tag{27'}$$

Cu ajutorul ecuațiilor de mai sus se poate trasa linia de jet, dînd diferite valori parametrului ζ.

Remarcăm că valoarea-limită a parametrului ζ este

$$\zeta_0 = \beta, \tag{28}$$

care corespunde punctului de la infinit aval, spre care linia de jet tinde asimptotic către o direcție cu înclinarea

$$\mu_0 = \operatorname{tg} \delta_0 = \lim_{\zeta \to \beta} \left(\frac{dy}{dx} \right) = - \frac{1-\beta^2}{\sqrt{2n^2\beta^2 - (1+\beta^4)}} \cong - \frac{1-\beta^2}{a_0(\beta-a_1)(\beta-a_2)} \tag{29}$$

sau, în funcție de coeficientul de presiune absolut $C^*_{p_0}$,

$$\mu_0 = \operatorname{tg} \delta_0 = \frac{2 C^*_{p_0}}{\sqrt{2(n^2-1)(1+2C^*_{p_0}) - 4 C^{*2}_{p_0}}}. \tag{30}$$

Ecuația asimptotei se poate obține pe o cale elementară și are forma

$$y = \operatorname{tg} \delta_0 (x - x_1), \tag{31}$$

unde x_1 este dat de expresia

$$x_1 = \frac{n^2+1}{\beta^2(1-\beta^2)(\beta+a_1)(\beta+a_2)} \left[(a_1^2-\beta^2)(\beta-a_2^2) \ln \beta + (1-\beta^4) \ln \frac{2\beta}{1+\beta} + \right.$$

$$\left. + \beta^2(\beta^2-a_2^2) \ln \frac{a_1-\beta}{a_1-1} - \beta^2(a_1^2-\beta^2) \ln \frac{\beta-a_2}{1-a_2} \right] - \frac{(n^2+1)-2\beta}{\beta^2(1+\beta)}. \tag{32}$$

6. EXEMPLU DE CALCUL

Pentru ilustrarea formulelor precedente vom trata în cele ce urmează un exemplu de calcul concret.

Să presupunem că în lungul peretelui solid NA (fig. 1) se scurge un curent supersonic caracterizat de un număr M_∞ şi de o presiune p_∞. Din A ţîşneşte un jet subţire, caracterizat de constanta I (2), sub un unghi $\delta = \delta_A$ faţă de direcţia peretelui. Cu ajutorul formulei (4), care se pune acum sub forma generală, în funcţie de numărul Mach al curentului de la infinit (M_∞),

$$C_p = \frac{\gamma+1}{2} m^2 \sin^2 \delta_A + \frac{2m}{M_\infty} \sin \delta_A \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 M_\infty^2 m^2 \sin^2 \delta_A}, \quad (33)$$

$$m = \frac{M_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \quad (33')$$

se deduce coeficientul de presiune corespunzător, apoi presiunea p_A şi urmînd calea indicată în [9], numărul M_A.

Odată M_A şi p_A determinaţi, putem aplica formulele deduse în lucrarea de faţă, presupunînd că axa absciselor este tangentă în A la linia de jet şi axa ordonatelor perpendiculară pe prima în A.

Mai jos s-a presupus că M_A şi p_A sînt gata determinaţi şi s-au luat două exemple, şi anume:

1) $n^2 = 4$, ceea ce corespunde unui număr

$$M_A \approx 1{,}42; \quad (34)$$

2) $n^2 = 100$, care corespunde unui număr

$$M_A \approx 11{,}7. \quad (35)$$

Ambele exemple au fost calculate pentru

$$\beta = 0{,}6, \quad (36)$$

ceea ce corespunde unei presiuni p_0 a gazului în repaus de sub linia de jet de circa patru ori mai mică decît presiunea p_A:

$$p_0 = 0{,}253\, p_A. \quad (37)$$

Pentru simplificarea calculelor şi a trasării liniei de jet, s-au considerat coordonatele adimensionale

$$X = \frac{\gamma M_A m_A p_A}{I} x, \quad Y = \frac{\gamma M_A m_A p_A}{I} y. \quad (38)$$

În figura 4 sînt trasate liniile de jet corespunzătoare celor două cazuri considerate, iar în tabela 2 sînt date cîteva din valorile cu care s-au trasat curbele respective.

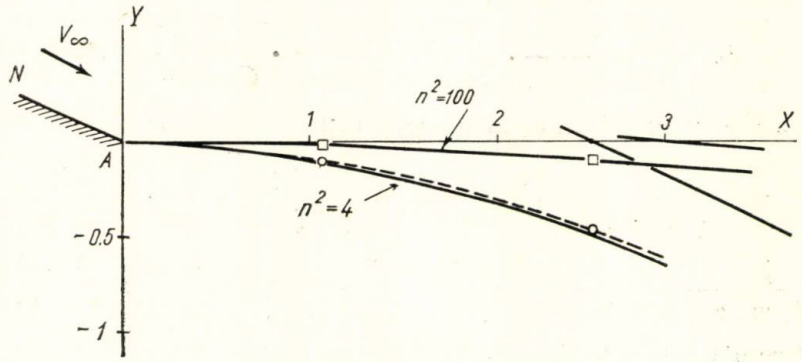


Fig. 4. — Formulele (27). Formulele (42) pentru $n^2 = 4$. Formulele (42) pentru $n^2 = 100$.

Tabela 2

	ξ	1	0,9	0,8	0,7	0,,5
$n^2 = 4$	X	0	0,394	1,067	2,520	∞
$x_1 = 2,5$						
$\delta_0 = -25,67°$	Y	0	0,02233	0,1220	−0,5004	$-\infty$
$n^2 = 100$	X	0	0,3940	1,067	2,520	∞
$x_1 = 2,865$						
$\delta_0 \cong -4,33°$	Y	0	−0,00464	−0,02139	−0,08436	$-\infty$

7. CAZUL DEVIAȚIILOR MICI

Dacă deviația δ este mică, putem utiliza aproximația

$$\sin\delta \approx \delta, \quad \cos\delta \approx 1. \tag{39}$$

În acest caz formula (7′) devine

$$K_1 = \frac{\gamma + 1}{4} M_A m_A \delta; \tag{40}$$

ţinînd seama mai departe de (40), (12), (13), (14) şi (16), se obţin cu uşurinţă în locul relaţiilor (17)

$$dx = \frac{I}{\gamma M_A m_A p_A} \cdot \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2(\beta^2 - \zeta^2)}\, d\zeta, \tag{41}$$

$$dy = \frac{I}{\gamma M_A m_A p_A} \cdot \frac{2}{(\gamma + 1) M_A m_A} \cdot \frac{\zeta^4 - 1}{\zeta^3(\beta^2 - \zeta^2)}\, d\zeta. \tag{41'}$$

Cu ajutorul acestor relaţii se deduc uşor ecuaţiile parametrice ale liniei de jet :

$$x = \frac{I}{\gamma M_A m_A p_A} \cdot \left[\frac{1 + \beta^2}{2\beta^3} \ln \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \cdot \frac{\zeta + \beta}{\zeta - \beta} - \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{1 - \zeta}{\zeta}\right], \tag{42}$$

$$y = \frac{I}{\gamma M_A m_A p_A} \cdot \frac{2}{(\gamma + 1) M_A m_A} \cdot \left[\frac{1}{2\beta^2} \frac{1 - \zeta^2}{\zeta^2} - \frac{1}{\beta^4} \ln \zeta + \frac{1 - \beta^4}{2\beta^4} \ln \frac{\zeta^2 - \beta^2}{1 - \beta^2}\right]. \tag{42'}$$

Formula (41) este identică cu formula (27), în schimb formula (41') este simplă decît formula (26'), fapt care duce la simplificarea calculelor.

Pentru a căpăta o idee asupra gradului de aproximaţie introdus, deducem din (41) şi din (18)

$$\mu_0^{(1)} = \operatorname{tg} \delta_0^{(1)} = \lim_{\zeta \to \beta} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\Gamma} = -\frac{1}{\sqrt{2(n^2 - 1)}} \cdot \frac{1 - \beta^2}{\beta}, \tag{43}$$

formulă care, în comparaţie cu (29), dă următoarele valori :

Tabela 3

	β	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
$n^2 = 4$	δ_0	0	−0,0865	−0,1866	−0,3110		
	δ_0	0	∼−4,95°	∼−10,56°	∼−17,27°		
	$\mu_0^{(1)}$	0	−0,0864	−0,1837	−0,2975		
	$\delta_0^{(1)}$	0	∼−4,95°	∼−10,42°	∼−16,58°		
$n^2 = 100$	μ_0	0	−0,01501	−0,0320	−0,0518	−0,0758	−0,1067
	δ_0	0	∼−51,7′	∼−1,83°	∼−2,97°	∼−4,33°	∼−6,08°
	$\mu_0^{(1)}$	0	−0,01501	−0,0320	−0,0518	−0,0758	−0,1066
	$\delta_0^{(1)}$	0	∼−51,7′	∼−1,83°	∼−2,97°	∼−4,33°	∼−6,08°

Din examinarea tabelei de mai sus se observă că formulele (42), respectiv (43), pot fi utilizate cu o foarte bună aproximaţie pînă la deviaţii de circa 10—15°. Deoarece pentru numere Mach mari (respectiv n^2) deviaţiile sînt mici în interiorul intervalului de valabilitate a ecuaţiilor liniei de jet, rezultă că în acest caz formulele (42) pot înlocui cu succes formulele mai complicate (27), fără erori sensibile.

În figura 4 sînt trasate pentru ilustrare liniile de jet deduse din formulele (42). După cum se vede, pentru numere Mach mari, formulele (42) dau satisfacție deplină.

Dacă admitem ca acceptabilă precizia obținută cu ajutorul formulelor (42) pentru deviații mai mici de $\sim 10°$, de exemplu, și considerînd totodată ca limite de variație a lui ζ domeniul (23), obținem pentru $\beta \cong 0{,}5$ și $\delta_0 \cong 10°$

$$M_A \cong 7. \tag{44}$$

Începînd așadar, de la $M_A = 7$, putem aplica fără restricții formulele (42). Pentru numere M_A mai mici, formulele (42) se mai pot aplica încă, cu condiția ca raportul presiunilor $\frac{p_A}{p_0}$ să nu fie prea mare pentru a nu depăși deviația acceptabilă.

Primită la redacție la 13 februarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. F. F. Ehrich, *Penetration and deflection of a jet oblique to a general stream.* Journal of the Aeronautical Sciences, 1953, **20** (1953).
2. J. Bertin, M. Kadosch, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **241**, 623, *1912* (*Notes*) (1955).
3. M. Kadosch, *Mécanisme de la déviation des jets propulsifs.* Thèse de doctoral, 1957.
4. N. N. Patraulea, *Contribution théorique à l'étude des profils à volet fluide, IXe Congres International de Mécanique appliquée, Actes*, t I, Bruxelles, 1957, p. 457–463.
5. D. Pantazopol, T. Comănescu, *Influența unei pinze de jet asupra devierii unui jet plan*, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *5* (1963).
6. G. Dupuisch, *Action d'un jet transversal à un écoulement supersonique*, Thèse de doctorat, 1961.
7. E. Carafoli, *Stabilirea unei formule unitare pentru compresiune-expansiune în regim supersonic-hipersonic.* Comunicările Academiei R.S.R., **XII**, *3* (1962).
8. E. Carafoli, C. Berbente, *Aerodynamic characteristics of profils in supersonic-hypersonic flow in the case of neglecting the pressure lesses due to schock-waves*, Rev. Roum. Sci. Tech. — Mécanique Appliquée, **VIII**, *5*, (1963).
9. — *Determination of the characteristics of aerodynamic profiles in supersonic-hypersonic flow, considering the presure losses through shockwaves*, Rev. Roum. Sci. Tech. — Mécanique Appliquée, **3**, *5*, 1964.
10. E. Carafoli, *Aerodinamica vitezelor mari*, București Edit. Acad. R.P.R., 1957, 345–351.

CARACTERISTICILE AERODINAMICE ALE ARIPILOR POLIGONALE DE GROSIME SIMETRICĂ ÎN REGIM SUPERSONIC [1]

de DAN MATEESCU
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

Lucrarea are drept scop determinarea caracteristicilor aerodinamice ale aripilor poligonale de grosime simetrică situate în curent supersonic. Pentru studiul acestora, autorul utilizează metoda analogiei hidrodinamice, elaborată de prof. E. Carafoli, precum și unele rezultate stabilite într-o lucrare anterioară.
Ca exemple de calcul, în lucrare se determină distribuția de presiuni și rezistența de undă ale unor aripi poligonale de grosime simetrică de formă uzuală.

NOTAȚII

U_∞ — viteza curentului neperturbat;

a_∞ — viteza sunetului în condițiile curentului neperturbat;

$M_\infty = \dfrac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach;

$B = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\mu}$, unde μ este unghiul Mach;

$h,\ f,\ b,\ b_1$ — dimensiunile geometrice ale aripilor poligonale definite în figura 1, în funcție de care $l,\ L,\ l_1,\ h$ sînt definite prin relațiile

$$l = \frac{b}{h},\quad L = \frac{b_1}{f},\quad l_1 = \frac{b_1 - b}{f},\quad h_1 = 1 + f - h; \tag{1}$$

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", *11*, *4* (1966) (în limba engleză).

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 22 NR. 4 P. 959–987, BUCUREȘTI 1966

$Ox_1\ x_2\ x_3$ — sistem triortogonal de coordonate avînd axa Ox_1 paralelă cu viteza curentului neperturbat U_∞, iar axa Ox_3 fiind normală pe planul aripii $(Ox_1\ x_2)$;

$u,\ v,\ w$ — vitezele de perturbație după axele Ox_1, Ox_2, Ox_3 din mișcarea în jurul aripii poligonale considerate;

$C_p = -2\dfrac{u}{U_\infty}$ — coeficientul de presiune exprimat în ipoteza micilor perturbații;

ρ — densitatea aerului;

S — suprafața unei jumătăți din aripa poligonală considerată;

R — rezistența de undă a aripii poligonale;

$C_d = \dfrac{R}{\rho S U_\infty^2}$ — coeficientul rezistenței de undă;

$FX_1x_2x_3,\ O_1\xi_1\xi_2x_3,\ O_3\xi_1^*\xi_2x_3$ — sisteme triortogonale de coordonate definite prin relațiile

$$X_1 = x_1 - 1,\quad \left(Y = \frac{x_2}{X_1} = \frac{x_2}{x_1 - 1}\right), \tag{2}$$

$$\xi_1 = x_1 - h,\quad \xi_2 = x_2 - b,\quad \left(\eta = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{x_2 - b}{x_1 - h}\right), \tag{2'}$$

$$\xi_1^* = x_1 - 1 - f\frac{b}{b_1},\quad \left(\eta^* = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{x_2 - b}{x_1 - 1 - f\dfrac{b}{b_1}}\right); \tag{2''}$$

$\boldsymbol{x} = \varphi + \mathrm{i}\,\vartheta$ — plan complex definit prin transformarea

$$\varphi = \frac{y}{1 - B^2z^2},\quad \vartheta = \frac{z\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2z^2},\quad \left(y = \frac{x_2}{x_1},\ z = \frac{x_3}{x_1}\right), \tag{3}$$

în care axa reală $o\varphi$ reproduce la aceeași scară axa oy din planul fizic, deoarece pentru $x_3 = 0$ $(z = 0)$ avem

$$x = \varphi = y; \tag{4}$$

$X,\ \xi,\ \xi^*$ — plane complexe auxiliare obținute prin transformări analoge cu (3), care vor fi utilizate pentru studiul mișcărilor conice din vîrfurile F, O_1 și, respectiv, O_3. Pe aripă $(x_3 = 0)$ vom avea în mod asemănător

$$X = Y,\ \xi = \eta,\ \xi^* = \eta^*. \tag{5}$$

1. INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [1], am tratat, utilizînd metoda analogiei hidrodinamice elaborată de prof. E. Carafoli [2] — [5], scurgerea supersonică în jurul aripilor poligonale, determinînd ca exemplu de calcul portanța unor aripi poligonale subțiri de formă uzuală. În această lucrare ne propunem să determinăm caracteristicile aerodinamice ale aripilor poligonale de grosime simetrică, adică distribuția de presiuni și rezistență de undă, utilizînd în acest scop unele din rezultatele obținute în lucrarea precedentă.

Să considerăm o aripă poligonală de grosime simetrică avînd forma în plan ca în figura 1, din care se pot deduce prin particularizare diferi-

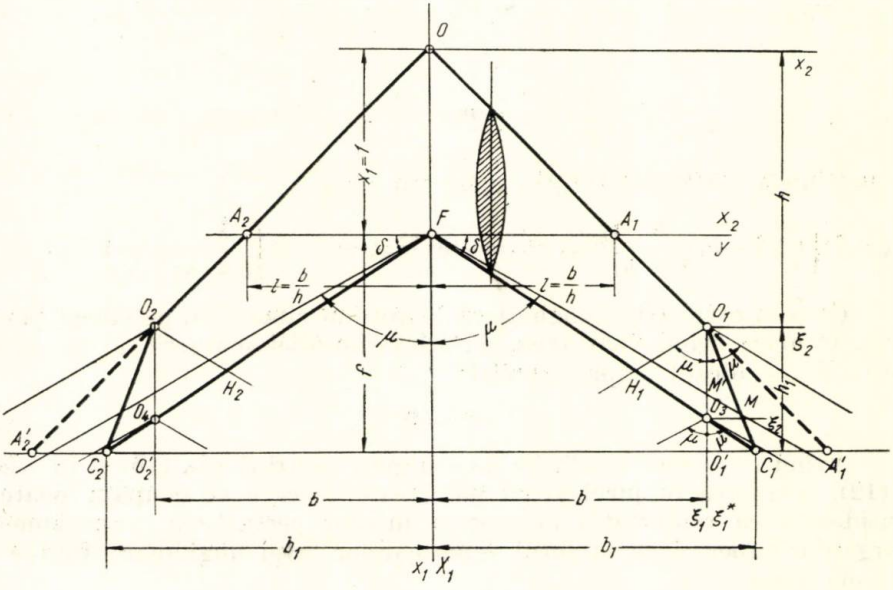


Fig. 1

tele forme curente pentru aplicațiile practice. Deoarece pentru a evita creșterea rezistenței la înaintare grosimea aripii trebuie să fie nulă pe toate bordurile care o mărginesc, vom considera că suprafața extradosului acestei aripi este definită de ecuația

$$Z = 4t\left(x_1 \mp \frac{h}{b}\, x_2\right)\left(1 - x_1 \pm \frac{f}{b_1}\, x_2\right) \tag{6}$$

pe porțiunea centrală $OO_1O_3FO_4O_2$, unde primele semne se referă la $x_2 > 0$, iar celelalte la $x_2 < 0$, și unde t reprezintă jumătate din grosimea maximă a aripii, și de ecuația

$$Z' = 4t\left[x_1 - h - \frac{h_1}{b_1 - b}\,(x_2 - b)\right]\left(1 - x_1 + \frac{f}{b_1}\, x_2\right) \tag{7}$$

pe porțiunea extremală $O_1C_1O_3$, precum și de o ecuație analogă cu (7) pe porțiunea $O_2C_2O_4$ din stînga.

Avînd în vedere simetria aripii față de axa Ox_1, pentru simplificarea expunerii, în cele ce urmează ne vom referi în mod deosebit la jumătatea din dreapta a aripii, pe cealaltă jumătate scurgerea fiind simetrică.

Ținînd seama de ecuațiile (6) și (7), viteza verticală de perturbație pe extradosul aripii considerate va fi dată de expresiile

$$w = \frac{\partial Z}{\partial x_1} U_\infty = w_{00} + w_{10} x_1 + w_{01} x_2 = w_{00} + x_1 (w_{10} \pm w_{01} y) \tag{8}$$

pe porțiunea centrală a aripii $OO_1O_3FO_4O_2$, unde am notat

$$w_{00} = 4t\, U_\infty, \quad w_{10} = -8t\, U_\infty, \quad w_{01} = 4t \left(\frac{h}{b} + \frac{f}{b_1} \right) U_\infty, \tag{9}$$

și

$$w' = \frac{\partial Z'}{\partial x_1} U_\infty = w'_{00} + w'_{10} x_1 + w'_{01} x_2 \tag{10}$$

pe porțiunea extremală $O_1C_1O_3$, unde am notat

$$w'_{00} = 4t \left(1 + h - h_1 \frac{b}{b_1 - b} \right) U_\infty, \; w'_{10} = -8t\, U_\infty, \; w'_{01} = 4t \left(\frac{h_1}{b_1 - b} + \frac{f}{b_1} \right) U_\infty. \tag{11}$$

Ca și în cazul aripii unghiulare de grosime simetrică, pe întreg planul Ox_1x_2 în afara aripii vom avea, datorită simetriei scurgerii de pe extradosul și intradosul aripii, condiția

$$w = 0. \tag{12}$$

Avînd în vedere condițiile de scurgere pe aripă (8), (10) și în afara ei (12), scurgerea în jurul aripii poligonale de care ne ocupăm poate fi considerată că reprezintă, în ipoteza micilor perturbații, suprapunerea scurgerilor supersonice în jurul următoarelor aripi unghiulare fictive de grosime simetrică :

a) aripa triunghiulară $OA'_1A'_2$, pe extradosul căreia viteza verticală este dată de relația

$$w = w_{00} + x_1 (w_{10} \pm w_{01} y), \tag{13}$$

unde w_{00}, w_{10}, w_{01} au fost definite în (9);

b) aripa triunghiulară fictivă FC_1C_2, pe extradosul căreia viteza verticală, pe care o vom nota prin w^F, este dată de relația

$$w^F = -w = -[w_{00} + (X_1 + 1) w_{10} \pm w_{01} x_2] = -[W_{00} + X_1 (W_{10} \pm W_{01} Y)], \tag{14}$$

unde X_1 și Y au fost definite mai sus (2) și unde W_{00}, W_{10}, W_{01} au expresiile

$$W_{00} = w_{00} + w_{10} = -4tU_\infty, \; W_{10} = w_{10} = -8tU_\infty, \; W_{01} = w_{01} = 4t \left(\frac{h}{b} + \frac{f}{b_1} \right) U_\infty; \tag{15}$$

c) aripa triunghiulară fictivă $O_1A_1'O_1'$, pe extradosul căreia viteza verticală, pe care o vom nota prin β, este dată de relațiile

$$\beta = -w = -[w_{00} + w_{10}(\xi_1 + h) + w_{01}(\xi_2 + b)] = -[\beta_{00} + \xi_1(\beta_{10} + \beta_{01}\eta)] \tag{16}$$

pe porțiunea $O_1A_1'C_1$, unde ξ_1, ξ_2, η au fost definite prin relațiile (2') și unde am notat prin β_{00}, β_{10}, β_{01}, respectiv

$$\beta_{00} = w_{00} + w_{10}\,h + w_{01}\,b = 4t\left(1 - h + f\frac{b}{b_1}\right)U_\infty, \tag{17}$$

$$\beta_{10} = w_{10} = -8t\,U_\infty,\quad \beta_{01} = w_{01} = 4t\left(\frac{h}{b} + \frac{f}{b_1}\right)U_\infty, \tag{17'}$$

și

$$\begin{aligned}\beta = w' - w = w_{00}' - w_{00} + (\xi_1 + h)(w_{10}' - w_{10}) + (\xi_2 + b)(w_{01}' - w_{01}) = \\ = \beta_{00}' - \beta_{00} + \xi_1[\beta_{10}' - \beta_{10} + (\beta_{01}' - \beta_{01})\eta]\end{aligned} \tag{18}$$

pe porțiunea $O_1C_1O_1'$, unde am notat prin β_{00}', β_{10}', β_{01}', respectiv

$$\beta_{00}' = w_{00}' + h\,w_{10}' + b\,w_{01}' = 4t\left(1 - h + f\frac{b}{b_1}\right)U_\infty, \tag{19}$$

$$\beta_{10}' = w_{10}' = -8t\,U_\infty,\quad \beta_{01}' = w_{01}' = 4t\left(\frac{h_1}{b_1 - b} + \frac{f}{b_1}\right)U_\infty; \tag{19'}$$

d) aripa triunghiulară fictivă $O_3C_1O_1'$, pe extradosul căreia viteza verticală, pe care o vom nota prin β^*, este dată de relația

$$\begin{aligned}\beta^* = -w' = -\left[w_{00}' + w_{10}'\left(\xi_1^* + 1 + f\frac{b}{b_1}\right) + w_{01}'(\xi_2 + b)\right] = \\ = -[\beta_{00}^* + \xi_1^*(\beta_{10}^* + \beta_{01}^*\eta^*)],\end{aligned} \tag{20}$$

unde ξ_1^*, ξ_2, η^* au fost definiți mai sus (2'), (2'') și unde am notat

$$\beta_{00}^* = w_{00}' + \left(1 + f\frac{b}{b_1}\right)w_{10}' + bw_{01}' = -4t\left(1 - h + f\frac{b}{b_1}\right)U_\infty, \tag{21}$$

$$\beta_{10}^* = w_{10}' = -8t\,U_\infty,\quad \beta_{01}^* = w_{01}' = 4t\left(\frac{h_1}{b_1 - b} + \frac{f}{b_1}\right)U_\infty; \tag{21'}$$

e) aripa triunghiulară fictivă $O_2A_2'O_2'$, care este simetrică cu aripa $O_1A_1'O_1'$ față de axa Ox_1;

f) aripa triunghiulară fictivă $O_2C_2O_2'$, simetrică cu aripa $O_1C_1O_1'$ față de axa Ox_1.

Este ușor de văzut că scurgerea în jurul fiecăreia dintre aceste aripi reprezintă suprapunerea unor scurgeri conice de ordinul întîi și doi care pot fi determinate utilizînd metodele cunoscute [5].

2. DETERMINAREA VITEZEI AXIALE DE PERTURBAȚIE

Din cele arătate mai sus rezultă cu ușurință că viteza axială de perturbație în jurul aripii poligonale considerate poate fi exprimată sub forma

$$u = u^{O} + u^{F} + u^{I} + u^{II} + u^{III} + u^{IV}, \tag{22}$$

în care u^{O}, u^{F}, u^{I}, u^{II}, u^{III}, u^{IV} reprezintă vitezele axiale de perturbație în jurul aripilor triunghiulare fictive definite mai sus, avînd vîrfurile în O, F, O_1, O_2, O_3 și, respectiv, O_4.

a) *Determinarea vitezei* u^{O}. După cum am arătat mai sus, u^{O} se obține prin însumarea vitezelor axiale din mișcările conice de ordinul unu și doi în jurul aripii triunghiulare $OA_1'A_2'$, putînd astfel fi scrisă sub forma

$$u^{O} = u_0^{O} + x_1 u_1^{O} = \operatorname{Re}\left(\mathcal{U}_0^{O} + x_1 \mathcal{U}_1^{O}\right), \tag{23}$$

în care funcțiile vitezelor axiale $\mathcal{U}_0^{O}$ și $\mathcal{U}_1^{O}$ au următoarele expresii, deduse prin utilizarea metodei analogiei hidrodinamice [5]:

$$\mathcal{U}_0^{O} = \frac{K_{10}^{O}}{\sqrt{1 - B^2 l^2}}\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 - Bx)}{2B(l - x)}} + \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 + Bx)}{2B(l + x)}}\right], \tag{24}$$

$$\mathcal{U}_1^{O} = \frac{K_{20}^{O} + K_{21}^{O} x}{\sqrt{1 - B^2 l^2}} \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 - Bx)}{2B(l - x)}} + \frac{K_{20}^{O} - K_{21}^{O} x}{\sqrt{1 - B^2 l^2}} \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 + Bx)}{2B(l + x)}} + D_{20}^{O}\sqrt{1 - B^2 x^2}. \tag{24'}$$

Constantele $K_{n,q}^{O}$ și D_{20}^{O} care apar în aceste relații se determină în modul indicat în [1] și au expresiile

$$K_{10}^{O} = -\frac{2 w_{00} l}{\pi}, \qquad K_{20}^{O} = -\frac{2l}{\pi}\frac{(2 - B^2 l^2) w_{10} + l w_{01}}{1 - B^2 l^2}, \tag{25}$$

$$K_{21}^{O} = \frac{2}{\pi}\frac{w_{10} + B^2 l^3 w_{01}}{1 - B^2 l^2}, \qquad D_{20}^{O} = \frac{2}{\pi}\frac{l(w_{10} + l w_{01})}{1 - B^2 l^2}, \tag{25'}$$

în care w_{00}, w_{10}, w_{01} sînt date de relațiile (9).

Vom remarca că expresiile (24) își păstrează valabilitatea și în cazul cînd bordurile aripii devin supersonice $\left(l > \frac{1}{B}\right)$, trebuind însă în acest caz să se țină seama de relația cunoscută

$$\frac{\operatorname{arg\,ch}\Theta}{\sqrt{1 - B^2 l^2}} = \frac{\arccos\Theta}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}. \tag{26}$$

b) *Determinarea vitezei* u^F. În mod asemănător, u^F reprezintă suma vitezelor axiale de perturbație din mișcările conice de ordinul unu și doi în jurul aripii triunghiulare fictive FC_1C_2 și deci

$$u^F = u_0^F + X_1 u_1^F = \mathrm{Re}\,(\mathcal{U}_0^F + X_1 \mathcal{U}_1^F), \tag{27}$$

în care funcțiile axiale din cele două mișcări conice au expresiile

$$\mathcal{U}_0^F = \frac{K_{10}^F}{\sqrt{1 - B^2L^2}}\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-BX)}{2B(L-X)}} + \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1+BX)}{2B(L+X)}}\right], \tag{28}$$

$$\mathcal{U}_1^F = \frac{K_{20}^F + K_{21}^F X}{\sqrt{1 - B^2L^2}}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-BX)}{2B(L-X)}} + \frac{K_{20}^F - K_{21}^F X}{\sqrt{1 - B^2L^2}}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1+BX)}{2B(L+X)}} + D_{20}^F\sqrt{1 - B^2X^2}, \tag{28'}$$

unde pentru constantele $K_{n,q}^F$, D_{20}^F se obține, după determinarea lor în modul indicat în [1],

$$K_{10}^F = \frac{2W_{00}L}{\pi}, \qquad K_{20}^F = \frac{2L}{\pi}\frac{(2 - B^2L^2)\,W_{10} + LW_{01}}{1 - B^2L^2}, \tag{29}$$

$$K_{21}^F = -\frac{2}{\pi}\frac{W_{10} + B^2L^3W_{01}}{1 - B^2L^2}, \qquad D_{20}^F = -\frac{2L}{\pi}\frac{W_{10} + LW_{01}}{1 - B^2L^2}, \tag{29'}$$

coeficienții W_{00}, W_{10}, W_{01} care apar în aceste relații fiind definiți în (15).

Vom observa că, dacă conul Mach din vîrful F nu intersectează aripa $\left(\mu < \frac{\pi}{2} - \delta\right)$, atunci pe aripă $u^F = 0$.

c) *Determinarea vitezei* u^{I}. Din condițiile (16) și (18) rezultă că u^{I} reprezintă suma vitezelor axiale din mișcările conice de ordinul unu și doi în jurul aripii triunghiulare fictive de grosime simetrică $O_1A_1'O_1'$, care, în afara bordurilor situate în $\eta = l$ și $\eta = 0$, mai prezintă și o muchie plasată în punctul $\eta = l_1$. Vom putea scrie astfel

$$u^{\mathrm{I}} = u_0^{\mathrm{I}} + \xi_1 u_1^{\mathrm{I}} = \mathrm{Re}\,(\mathcal{U}_0^{\mathrm{I}} + \xi_1 \mathcal{U}_1^{\mathrm{I}}), \tag{30}$$

unde

$$\mathcal{U}_0^{\mathrm{I}} = \frac{K_{10}^{\mathrm{I}}}{\sqrt{1 - B^2l^2}}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-B\xi)}{2B(l-\xi)}} + \frac{G_{10}^{\mathrm{I}}}{\sqrt{1 - B^2l_1^2}}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-B\xi)}{2B(l_1-\xi)}}, \tag{31}$$

$$\mathcal{U}_1^{\mathrm{I}} = \frac{K_{20}^{\mathrm{I}} + K_{21}^{\mathrm{I}}\xi}{\sqrt{1 - B^2 l^2}} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 - B\xi)}{2B(l - \xi)}} +$$

$$+ \frac{G_{20}^{\mathrm{I}} + G_{21}^{\mathrm{I}}\xi}{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - B\xi)}{2B(l_1 - \xi)}} + \tag{31'}$$

$$+ Q_{21}^{\mathrm{I}}\xi \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{1}{B^2\xi^2}} + D_{20}^{\mathrm{I}} \sqrt{1 - B^2\xi^2},$$

în care constantele $K_{n,q}^{\mathrm{I}}$, $G_{n,q}^{\mathrm{I}}$, Q_{21}^{I}, D_{20}^{I} se exprimă în funcție de coeficienții $\beta_{n-1,q}$ (17) și $\beta'_{n-1,q}$ (19) sub forma

$$K_{10}^{\mathrm{I}} = \frac{2\beta_{00} l}{\pi}, \qquad K_{20}^{\mathrm{I}} = \frac{2l}{\pi} \frac{(2 - B^2 l^2) B_{10} + l\beta_{01}}{1 - B^2 l^2},$$

$$K_{21}^{\mathrm{I}} = -\frac{2}{\pi} \frac{B_{10} + B^2 l^3 \beta_{01}}{1 - B^2 l^2}, \tag{32}$$

$$G_{10}^{\mathrm{I}} = -\frac{2\beta'_{00} l_1}{\pi}, \qquad G_{20}^{\mathrm{I}} = -\frac{2l_1}{\pi} \frac{(2 - B^2 l_1^2)\beta'_{10} + l_1\beta'_{01}}{1 - B^2 l_1^2},$$

$$G_{21}^{\mathrm{I}} = \frac{2}{\pi} \frac{\beta'_{10} + B^2 l_1^3 \beta'_{01}}{1 - B^2 l_1^2}, \tag{32'}$$

$$Q_{21}^{\mathrm{I}} = \frac{\beta_{10} - \beta'_{10}}{\pi}, \qquad D_{20}^{\mathrm{I}} = \frac{l_1}{\pi} \frac{\beta'_{10} + l_1\beta'_{01}}{1 - B^2 l_1^2} - \frac{l}{\pi} \frac{\beta_{10} + l\beta_{01}}{1 - B^2 l^2}. \tag{32''}$$

Expresiile (31) rămîn valabile și în cazul cînd $l > \frac{1}{B}$ sau $l_1 > \frac{1}{B}$, în aceste cazuri trebuind să se țină seama de relația (26) și, respectiv, de relația

$$\frac{\operatorname{arg\,ch}\Theta}{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}} = \frac{\operatorname{arc\,cos}\Theta}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}. \tag{33}$$

d) *Determinarea vitezei axiale* U^{III}. Ținînd seama de condiția (20), vom putea scrie pentru u^{III}

$$u^{\mathrm{III}} = u_0^{\mathrm{III}} + \xi_1^* u_1^{\mathrm{III}} = \operatorname{Re}(\mathcal{U}_0^{\mathrm{III}} + \xi_1^* \mathcal{U}_1^{\mathrm{III}}), \tag{34}$$

în care funcțiile vitezei axiale $\mathcal{U}_0^{\mathrm{III}}$ și $\mathcal{U}_1^{\mathrm{III}}$ din mișcările conice de ordinul unu și doi în jurul aripii triunghiulare fictive $O_3C_1O_1'$ au expresiile

$$\mathcal{U}_0^{\mathrm{III}} = \frac{K_{10}^{\mathrm{III}}}{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - B\xi^*)}{2B(l_1 - \xi^*)}}, \tag{35}$$

$$\mathcal{U}_1^{\mathrm{III}} = \frac{K_{20}^{\mathrm{III}} + K_{21}^{\mathrm{III}}\xi^*}{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - B\xi^*)}{2B(l_1 - \xi^*)}} + \\ + Q_{21}^{\mathrm{III}}\xi^* \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{1}{B^2\xi^{*2}}} + D_{20}^{\mathrm{III}}\sqrt{1 - B^2\xi^{*2}}, \tag{35'}$$

unde ξ^* a fost definit mai sus (5).

Constantele $K_{n,q}^{\mathrm{III}}$, Q_{21}^{III} și D_{20}^{III} sînt date de relațiile

$$K_{10}^{\mathrm{III}} = \frac{2\beta_{00}^* l_1}{\pi}, \qquad K_{20}^{\mathrm{III}} = \frac{2l_1}{\pi}\frac{(2 - B^2 l_1^2)\beta_{10}^* + l_1\beta_{01}^*}{1 - B^2 l_1^2}, \\ K_{21}^{\mathrm{III}} = -\frac{2}{\pi}\frac{\beta_{10}^* + B^2 l_1^3 \beta_{01}^*}{1 - B^2 l_1^2}, \tag{36}$$

$$Q_{21}^{\mathrm{III}} = \frac{\beta_{10}^*}{\pi}, \qquad D_{20}^{\mathrm{III}} = -\frac{l_1}{\pi}\frac{\beta_{10}^* + l_1\beta_{01}^*}{1 - B^2 l_1^2}, \tag{36'}$$

în care coeficienții β_{00}^*, β_{10}^*, β_{01}^* sînt definiți prin relațiile (21).

Vom observa de asemenea că, dacă $\mu < \frac{\pi}{2} - \delta$, atunci pe aripă $u^{\mathrm{III}} = 0$.

În ceea ce privește vitezele axiale u^{II} și u^{IV}, acestea se vor putea deduce, dată fiind simetria aripii, din expresiile stabilite pentru u^{I} și u^{III}.

3. REZISTENȚA DE UNDĂ A ARIPILOR POLIGONALE DE GROSIME SIMETRICĂ

Luînd în considerație simetria aripii și notînd prin S suprafața unei jumătăți de aripă, coeficientul rezistenței de undă pentru aripa considerată se calculează cu relația

$$C_d = -\frac{4}{SU_\infty^2}\left[\int_S uw'\,\mathrm{d}S + \int_{OO_1O_3F} u(w - w')\,\mathrm{d}S\right], \tag{37}$$

unde elementul de suprafață se poate exprima în cele patru sisteme de coordonate sub forma

$$\mathrm{d}S = x_1\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y = X_1\,\mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}Y = \xi_1\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\eta_1 = \xi_1^*\,\mathrm{d}\xi_1^*\,\mathrm{d}\eta^*. \tag{38}$$

Ținînd seama de expresia (22) a vitezei axiale de perturbație și utilizînd în continuare observația cu privire la simetria aripii față de axa Ox_1, coeficientul de rezistență poate fi exprimat sub forma

$$C_d = C_d^{\mathrm{O}} + C_d^{*\mathrm{O}} + C_d^F + C_d^{*F} + C_d^{\mathrm{I}} + C_d^{*\mathrm{I}} + C_d^{*\mathrm{III}}, \tag{39}$$

în care, pentru poziția din figura 1 a bordurilor față de conurile Mach,

$$C_d^{\mathrm{O}} = -\frac{4}{SU_\infty^2}\iint_{OO_1O_3F} u^{\mathrm{O}}(w - w')\,x_1\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y, \tag{40}$$

$$C_d^{*0} = -\frac{4}{SU_\infty^2}\iint_S u^0 w' x_1 \, dx_1 \, dy, \qquad (40^{I})$$

$$C_d^{F} = -\frac{4}{SU_\infty^2}\iint_{FM'O_3} u^F (w - w') X_1 \, dX_1 \, dY, \qquad (40^{II})$$

$$C_d^{*F} = -\frac{4}{SU_\infty^2}\iint_{FMC_1} u^F w' X_1 \, dX_1 \, dY, \qquad (40^{III})$$

$$C_d^{I} = -\frac{4}{SU_\infty^2}\iint_{O_1H_1O_3} u^I w \xi_1 \, d\xi_1 \, d\eta, \qquad (40^{IV})$$

$$C_d^{*I} = -\frac{4}{SU_\infty^2}\iint_{O_1C_1O_3} u^I w' \xi_1 \, d\xi_1 \, d\eta, \qquad (40^{V})$$

$$C_d^{*III} = -\frac{4}{SU_\infty^2}\iint_{O_3NC_1} u^{III} w' \xi_1^* \, d\xi_1^* \, d\eta^*. \qquad (40^{VI})$$

În cele ce urmează vom calcula cu ajutorul acestor relații rezistența de undă a unor aripi poligonale de grosime simetrică de formă uzuală.

ARIPA DUBLU TRAPEZOIDALĂ

Să considerăm aripa dublu trapezoidală din figura 2 și să observăm că, bordurile O_1C_1 și O_2C_2 fiind paralele cu viteza curentului neperturbat U_∞, grosimea aripii poate să nu fie nulă pe aceste borduri, astfel încît

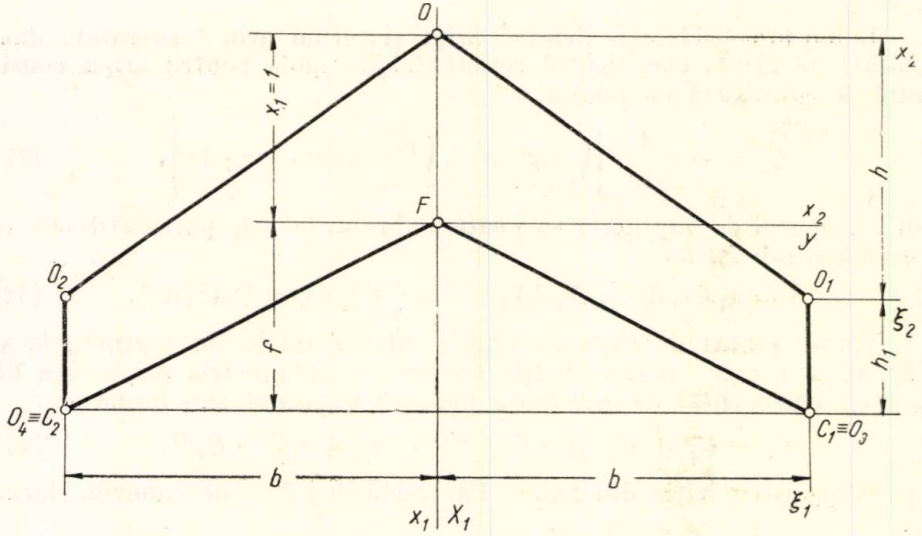


Fig. 2

ecuația suprafeței extradosului poate fi considerată pe întreaga aripă de forma (6). Viteza verticală pe extradosul acestei aripi fiind în acest caz dată de expresia (8), viteza axială de perturbație va putea fi scrisă sub forma

$$u = u^{O} + u^{F} + u^{I} + u^{II}, \tag{41}$$

în care vitezele axiale u^{O} și u^{F} au expresiile stabilite mai sus prin relațiile (23), (24) și, respectiv, (27), (28). În ceea ce privește viteza axială u^{I}, aceasta este dată de asemenea de relația (30), în care însă $\mathcal{U}_0^{I}$, $\mathcal{U}_1^{I}$ au expresiile

$$\mathcal{U}_0^{I} = \frac{K_{10}^{I}}{\sqrt{1 - B^2 l^2}} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 - B\xi)}{2B(1 - \xi)}}, \tag{42}$$

$$\mathcal{U}_1^{I} = \frac{K_{20}^{I} + K_{21}^{I}\xi}{\sqrt{1 - B^2 l^2}} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 - B\xi)}{2B(l - \xi)}} + Q_{21}^{I}\xi \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{1}{B^2\xi^2}} + D_{20}^{I}\sqrt{1 - B^2\xi^2}, \tag{42'}$$

unde constantele $K_{n,q}^{I}$ sînt definite prin (32), iar constantele Q_{21}^{I}, D_{20}^{I} se deduc din (32''), făcînd $l_1 = 0$ și $\beta_{10}' = 0$.

Ținînd seama de relația (41), precum și de (23), (27), (30), coeficientul de rezistență va fi dat în acest caz de relația

$$C_d = C_d^{O} + C_d^{F} + C_d^{I} = \sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}[C_{dm}^{On} + C_{dm}^{Fn} + C_{dm}^{In}], \tag{43}$$

unde

$$C_{dm}^{On} = -\operatorname{Re}\frac{4}{SU_\infty^2}\left[\int_0^{\frac{L}{L-y}} x_1^{m+n-1}\,dx_1 \int_0^{\frac{b}{1+f}} \left(\sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k}\, y^k\right)\mathcal{U}_{n-1}^{O}\,dy + \int_0^{\frac{b}{y}} x_1^{m+n-1}\,dx_1 \int_{\frac{b}{1+f}}^{l} \left(\sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k}\, y^k\right)\mathcal{U}_{n-1}^{O}\,dy\right], \tag{44}$$

$$C_{dm}^{Fn} = -\operatorname{Re}\frac{4}{SU_\infty^2}\left[\int_0^{\frac{b}{Y}} X_1^{m+n-1}\,dX_1 \int_L^a \left(\sum_{k=0}^{m-1} W_{m-k-1,k}\, Y^k\right)\mathcal{U}_{n-1}^{F}\,dY + \int_0^{\frac{l}{Y-l}} X_1^{m+n-1}\,dX_1 \int_a^{\frac{1}{B}} \left(\sum_{k=0}^{m-1} W_{m-k-1,k}\, Y^k\right)\mathcal{U}_{n-1}^{F}\,dY\right], \tag{44'}$$

$$C_{dm}^{In} = -\operatorname{Re}\frac{4}{SU_\infty^2}\int_0^{\frac{h_1 L}{L-\eta}} \xi_1^{m+n-1}\,d\xi_1 \int_{-\frac{1}{B}}^{0} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \beta_{m-k-1,k}\, \eta_1^k\right)\mathcal{U}_{n-1}^{I}\,d\eta. \tag{44''}$$

Coeficienții $w_{m-\varkappa-1,\,\varkappa}$, $W_{m-\varkappa-1,\,\varkappa}$, $\beta_{m-k-1,\,k}$ care apar în aceste relații au fost definiți mai sus în (9), (15) și (17), S este dat de relația

$$S = \frac{(1 + h_1)\, b}{2} = \frac{(2 + f - b)\, b}{2}, \quad (b = hl = fL), \tag{45}$$

iar în ceea ce privește limita de integrare a, aceasta va avea valoarea

$$a = \frac{1}{B} \tag{46}$$

în cazul cînd conul Mach din vîrful F intersectează bordul $O_1 C_1$ $\left(\frac{1}{B} < \frac{b}{h-1}\right)$,

și

$$a = \frac{b}{h-1} \tag{47}$$

în cazul cînd conul Mach din F intersectează bordul OO_1 $\left(\frac{1}{B} > \frac{b}{h-1}\right)$.

Remarcăm că în cazul cînd conul Mach din vîrful F nu interesează aripa $\left(\mu < \frac{\pi}{2} - \delta\right)$ avem

$$C_d^F = 0. \tag{48}$$

Efectuînd calculele, vom obține pentru coeficienții C_{dm}^{On}, C_{dm}^{Fn}, C_{dm}^{In} următoarele expresii:

$$C_{d1}^{O1} = -\frac{2w_{00}}{SU_\infty^2} K_{10}^0 (E_{20}^0 + b^2 H_{20}^0), \tag{49}$$

$$C_{d1}^{O2} = -\frac{4w_{00}}{3SU_\infty^2} \{K_{20}^0 (E_{30}^0 + b^3 H_{30}^0) + K_{21}^0 [L(E_{31}^0 - E_{21}^0) + b^3 H_{21}^0] + D_{20}^0 (P_3^0 + b^3 R_3^0)\}, \tag{49'}$$

$$C_{d2}^{O1} = -\frac{4K_{10}^0}{3SU_\infty^2} \{w_{10} (E_{30}^0 + b^3 H_{30}^0) + w_{01} [L(E_{30}^0 - E_{20}^0) + b^3 H_{20}^0]\}, \tag{49''}$$

$$C_{d2}^{O2} = -\frac{w_{10}}{SU_\infty^2} \{K_{20}^0 (E_{40}^0 + b^4 H_{40}^0) + K_{21}^0 [L(E_{41}^0 - E_{31}^0) + b^4 H_{31}^0] + D_{20}^0 (P_4^0 + b^4 R_4^0)\} - \frac{w_{01}}{SU_\infty^2} \{K_{20}^0 [L(E_{40}^0 - E_{30}^0) + b^4 H_{30}^0] + K_{21}^0 [L^2 (E_{41}^0 - 2E_{31}^{01} + E_{21}^0) + b^4 H_{21}^0] + D_{20}^0 [L(P_4^0 - P_3^0) + b^4 R_3^0]\}, \tag{49'''}$$

în care am notat prin $E^0_{t,q}$, $H^0_{t,q}$, P^0_t, R^0_t următoarele integrale:

$$E^0_{t,q} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\sqrt{1-B^2l^2}}\int_0^{\frac{b}{1+f}} \frac{L^t}{(L-y)^t}\left[\operatorname{arg ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-By)}{2B(l-y)}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^q \operatorname{arg ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+By)}{2B(l+y)}}\right]\mathrm{d}y, \tag{50}$$

$$H^0_{t,q} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\sqrt{1-B^2l^2}}\int_{\frac{b}{1+f}}^{l} \frac{1}{y^t}\left[\operatorname{arg ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-By)}{2B(l-y)}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^q \operatorname{arg ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+By)}{2B(l+y)}}\right]\mathrm{d}y, \tag{50'}$$

$$P^0_t = \mathrm{Re}\int_0^{\frac{b}{1+f}} \frac{L^t}{(L-y)^t}\sqrt{1-B^2y^2}\,\mathrm{d}y, \quad R^0_t = \int_{\frac{b}{1+f}}^{l} \frac{1}{y^t}\sqrt{1-B^2y^2}\,\mathrm{d}y, \tag{50''}$$

ale căror expresii sînt date în anexa de calcul de la sfîrșitul lucrării;

$$C^{F1}_{d1} = -\frac{2W_{00}}{SU^2_\infty}K^F_{10}(b^2H^F_{20} + E^F_{20}), \tag{51}$$

$$C^{F2}_{d1} = -\frac{4W_{00}}{3SU^2_\infty}\{K^F_{20}(b^3H^F_{30} + E^F_{30}) + K^F_{21}[b^3H^F_{21} + l(E^F_{31} + E^F_{21})] + D^F_{20}(b^3R^F_3 + P^F_3)\}, \tag{51'}$$

$$C^{F1}_{d2} = -\frac{4K^F_{10}}{3SU^2_\infty}\{W_{10}(b^3H^F_{30} + E^F_{30}) + W_{01}[b^3H^F_{20} + l(E^F_{30} + E^F_{20})]\}, \tag{51''}$$

$$C^{F2}_{d2} = -\frac{W_{10}}{SU^2_\infty}\{K^F_{20}(b^4H^F_{40} + E^F_{40}) + K^F_{21}[b^4H^F_{31} + l(E^F_{41} + E^F_{31})] + D^F_{20}(b^4R^F_4 + P^F_4)\} - \frac{W_{01}}{SU^2_\infty}\{K^F_{20}[b^4H^F_{30} + l(E^F_{40} + E^F_{30})] + K^F_{21}[b^4H^F_{21} + l^2(E^F_{41} + 2E^F_{31} + E^F_{21})] + D^F_{20}[b^4R^F_3 + l(P^F_4 + P^F_3)]\}, \tag{51'''}$$

în care am folosit următoarele integrale:

$$H^F_{t,q} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\sqrt{1-B^2L^2}}\int_L^a \frac{1}{Y^t}\left[\operatorname{arg ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-BY)}{2B(L-Y)}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^q \operatorname{arg ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1+BY)}{2B(L+Y)}}\right]\mathrm{d}Y, \tag{52}$$

$$E^F_{l,q} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\sqrt{1-B^2L^2}}\int_a^{1/B}\frac{l^l}{(Y-l)^l}\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-BY)}{2B(L-Y)}}+\right.$$

$$\left.+(-1)^q\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1+BY)}{2B(L+Y)}}\right]\mathrm{d}Y, \tag{52'}$$

$$R^F_l = \mathrm{Re}\int_L^a\frac{1}{Y^l}\sqrt{1-B^2Y^2}\,\mathrm{d}Y, \quad P^F_l = \mathrm{Re}\int_a^{\frac{1}{B}}\frac{l^l}{(Y-l)^l}\sqrt{1-B^2Y^2}\,\mathrm{d}Y, \tag{52''}$$

ale căror expresii sînt date în anexa de calcul;

$$C^{\mathrm{I}1}_{d1} = -\frac{2\beta_{00}h_1^2}{SU_\infty^2}K^{\mathrm{I}}_{10}E^{\mathrm{I}}_2, \tag{53}$$

$$C^{\mathrm{I}2}_{d1} = -\frac{4\beta_{00}h_1^3}{3SU_\infty^2}[K^{\mathrm{I}}_{20}E^{\mathrm{I}}_3 + K^{\mathrm{I}}_{21}L(E^{\mathrm{I}}_3-E^{\mathrm{I}}_2) + Q^{\mathrm{I}}_{21}L(M^{\mathrm{I}}_3-M^{\mathrm{I}}_2) + D^{\mathrm{I}}_{20}P^{\mathrm{I}}_3], \tag{53'}$$

$$C^{\mathrm{I}1}_{d2} = -\frac{4h_1^3K^{\mathrm{I}}_{10}}{3SU_\infty^2}[\beta_{10}E^{\mathrm{I}}_3 + \beta_{01}L(E^{\mathrm{I}}_3 - E^{\mathrm{I}}_2)], \tag{53''}$$

$$C^{\mathrm{I}2}_{d2} = -\frac{h_1^4}{SU_\infty^2}\{\beta_{10}[K^{\mathrm{I}}_{20}E^{\mathrm{I}}_4 + K^{\mathrm{I}}_{21}L(E^{\mathrm{I}}_4 - E^{\mathrm{I}}_3) + Q^{\mathrm{I}}_{21}L(M^{\mathrm{I}}_4 - M^{\mathrm{I}}_3) +$$

$$+ D^{\mathrm{I}}_{20}P^{\mathrm{I}}_4] + \beta_{01}[K^{\mathrm{I}}_{20}L(E^{\mathrm{I}}_4 - E^{\mathrm{I}}_3) + K^{\mathrm{I}}_{21}L^2(E^{\mathrm{I}}_4 - 2E^{\mathrm{I}}_3 + E^{\mathrm{I}}_2) +$$

$$+ Q^{\mathrm{I}}_{21}L^2(M^{\mathrm{I}}_4 - 2M^{\mathrm{I}}_3 + M^{\mathrm{I}}_2) + D^{\mathrm{I}}_{20}L(P^{\mathrm{I}}_4 - P^{\mathrm{I}}_3)]\}, \tag{53'''}$$

unde am introdus notațiile

$$E^{\mathrm{I}}_l = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\sqrt{1-B^2l^2}}\int_{-\frac{1}{B}}^0\frac{L^l}{(L-\eta)^l}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-B\eta)}{2B(l-\eta)}}\,\mathrm{d}\eta, \tag{54}$$

$$M_l = \mathrm{Re}\int_{-\frac{1}{B}}^0\frac{L^l}{(L-\eta)^l}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{1}{B^2\eta^2}}\,\mathrm{d}\eta, \tag{54'}$$

$$P^{\mathrm{I}}_l = \mathrm{Re}\int_{-\frac{1}{B}}^0\frac{L^l}{(L-\eta)^l}\sqrt{1-B^2\eta^2}\,\mathrm{d}\eta, \tag{54''}$$

ale căror expresii sînt date în anexa de la sfîrșitul lucrării.

Remarcăm că, în cazul bordurilor supersonice $\left(l>\frac{1}{B}\text{ sau }l_1>\frac{1}{B}\right)$, la extragerea părții reale din aceste expresii va trebui să se țină seama de relațiile (26) și (33).

ARIPA ÎN COADĂ DE RÎNDUNICĂ

Este evident că în cazul aripii în coadă de rîndunică din figura 3, care se obţine din aripa dublu-trapezoidală făcînd

$$h_1 = 0, \quad (h = 1 + f), \tag{55}$$

avem

$$u^{\mathrm{I}} = 0, \quad C_d^{\mathrm{I}} = 0. \tag{56}$$

Coeficientul de rezistenţă pentru această aripă se va putea obţine astfel din expresiile stabilite în cazul aripii dublu trapezoidale, în care va trebui să se ţină seama de (55), (56), precum şi de relaţiile

$$a = \frac{b}{h-1} = \frac{b}{f} = L, \quad \frac{b}{1+f} = \frac{b}{h} = l, \tag{57}$$

din care rezultă imediat, respectiv,

$$H_{l,q}^{F} = R_l^{F} = 0, \quad H_{l,q}^{\mathrm{O}} = R_l^{\mathrm{O}} = 0. \tag{58}$$

Un caz interesant de studiat îl constituie aripa în coadă de rîndunică la care conul Mach din vîrful F nu intersectează aripa $\left(\mu < \frac{\pi}{2} - \delta\right)$ şi deci $u^F = 0$ pe aripă, pentru care se poate stabili cu uşurinţă o expresie generală a coeficientului rezistenţei de undă.

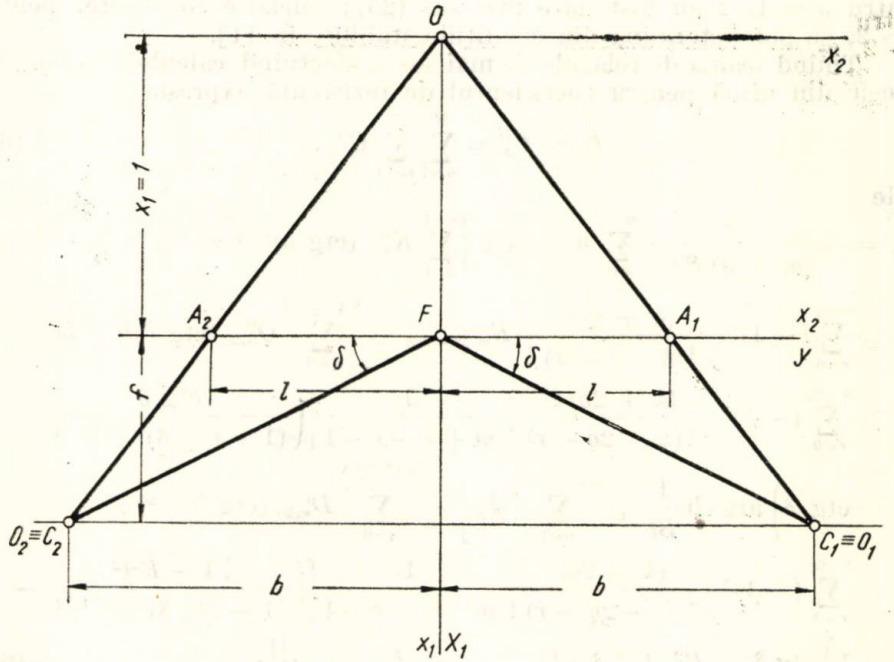


Fig. 3

Într-adevăr, dacă considerăm o astfel de aripă pe extradosul căreia viteza verticală este dată sub forma generală

$$w = \sum_{m=1}^{N} x_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,\,k}\, y^k, \tag{59}$$

viteza axială de perturbație va avea expresia

$$u = u^{\mathrm{O}} = \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1}\, \mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{O}}, \tag{60}$$

unde

$$\mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{O}} = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{K_{n,q}^{\mathrm{O}}}{\sqrt{1 - B^2 l^2}}\, x^q \left[\arg \mathrm{ch} \sqrt{\frac{(1 + Bl)\,(1 - Bx)}{2B\,(l - x)}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^q \arg \mathrm{ch} \sqrt{\frac{(1 + Bl)\,(1 + Bx)}{2B\,(l + x)}} \right] + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} Q_{n,2q}^{\mathrm{O}}\, x^{2q} \arg \mathrm{ch} \sqrt{\frac{1}{B^2 x^2}} +$$

$$+ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} D_{n,2q}^{\mathrm{O}}\, x^{2q} \sqrt{1 - B^2 x^2}, \tag{61}$$

în care $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$ și $E\left(\frac{n-2}{2}\right)$ reprezintă cel mai mare întreg conținut în $\frac{n-1}{2}$ și, respectiv, $\frac{n-2}{2}$ și în care constantele $K_{n,q}^{\mathrm{O}}$, $D_{n,2q}^{\mathrm{O}}$ pentru $n = 1, 2$ au fost date mai sus (25); celelalte constante, pentru $n > 2$, se pot determina din condițiile stabilite în [1].

Ținînd seama de relațiile de mai sus și efectuînd calculele, se obține în cele din urmă pentru coeficientul de rezistență expresia

$$C_d = C_d^{\mathrm{O}} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} C_{dm}^{\mathrm{O}n}, \tag{62}$$

unde

$$C_{dm}^{\mathrm{O}n} = -\frac{8}{(m+n)\,S U_\infty^2} \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,\,k} \left\{ \sum_{q=0}^{n-1} K_{n,q}^{\mathrm{O}} (\mathrm{ctg}\ \delta)^{k+q} \times \right.$$

$$\times \sum_{r=0}^{k+q} (-1)^r \frac{(k+q)!}{r!\,(k+q-r)!}\, E_{m+n-r,\,q} + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} Q_{n,2q}^{\mathrm{O}} (\mathrm{ctg}\ \delta)^{2q+k} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{k+2q} (-1)^r \frac{(k+2q)!}{r!\,(k+2q-r)!}\, \frac{1}{m+n-r-1} \left[\left(\frac{\mathrm{ctg}\ \delta}{(1 - l\ \mathrm{tg}\ \delta)^{m+n-r-1}} - \right. \right.$$

$$\left. - \mathrm{ctg}\ \delta \right) \arg \mathrm{ch} \frac{1}{Bl} + \sum_{p=1}^{m+n-r-1} J_p \Bigg] + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} D_{n,2q}^{\mathrm{O}} (\mathrm{ctg}\ \delta)^{k+2q} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{k+2q} (-1)^r \frac{(k+2q)}{r!\,(k+2q-r)!}\, \frac{1}{m+n-r-1} \left[\left(\frac{\sqrt{1 - B^2 l^2}}{(1 - l\ \mathrm{tg}\ \delta)^{m+n-r-1}} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 1 \right) \mathrm{ctg}\ \delta + B^2\, \mathrm{ctg}^2\, \delta\, (J_{m+n-r-1} - J_{m+n-r-2}) \right] \Bigg\}, \tag{63}$$

în care $E_{t,q}$ și J_p au expresiile

$$E_{t,q} = \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{1-B^2l^2}} \int_0^l \frac{1}{(1-y\operatorname{tg}\delta)^t} \left[\operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-By)}{2B(l-y)}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^q \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1+By)}{2B(l+y)}} \right] dy = \operatorname{Re} \frac{\operatorname{ctg}\delta}{2(t-1)\sqrt{1-B^2l^2}} \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{(1+l\operatorname{tg}\delta)^{t-1} + (-1)^q (1-l\operatorname{tg}\delta)^{t-1}}{(1-l^2\operatorname{tg}^2\delta)^{t-1}} - 1 - (-1)^q \right] \operatorname{arg\,ch} \frac{1}{Bl} + \right.$$

$$\left. + (-1)^q \frac{2[(1+l\operatorname{tg}\delta)^{t-1} - (1-l\operatorname{tg}\delta)^{t-1}]}{(1-l^2\operatorname{tg}^2\delta)^{t-1}} \operatorname{arg\,ch} \frac{1+Bl}{2\sqrt{Bl}} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2(t-1)} \sum_{p=1}^{t-1} \frac{(1+l\operatorname{tg}\delta)^{t-p} + (1-l\operatorname{tg}\delta)^{t-p}}{(1-l^2\operatorname{tg}^2\delta)^{t-p}} J_p, \tag{64}$$

$$J_p = \operatorname{Re} \int_0^l \frac{dy}{(1-y\operatorname{tg}\delta)^p \sqrt{1-B^2y^2}} = \operatorname{Re} \frac{B^2}{B^2 - \operatorname{tg}^2\delta} \left\{ \frac{\operatorname{tg}\delta}{(p-1)B^2} \left[1 - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\sqrt{1-B^2l^2}}{(1-l\operatorname{tg}\delta)^{p-1}} \right] + \frac{2p-3}{p-1} J_{p-1} - \frac{p-2}{p-1} J_{p-2} \right\}, \tag{64'}$$

$$J_1 = \operatorname{Re} \int_0^l \frac{dy}{(1-y\operatorname{tg}\delta)\sqrt{1-B^2y^2}} = \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{B^2 - \operatorname{tg}^2\delta}} \times$$

$$\times \left[2 \arccos \sqrt{\frac{(\operatorname{tg}\delta + B)(1-Bl)}{2B(1-l\operatorname{tg}\delta)}} - \arccos \frac{\operatorname{tg}\delta}{B} \right] \tag{64''}$$

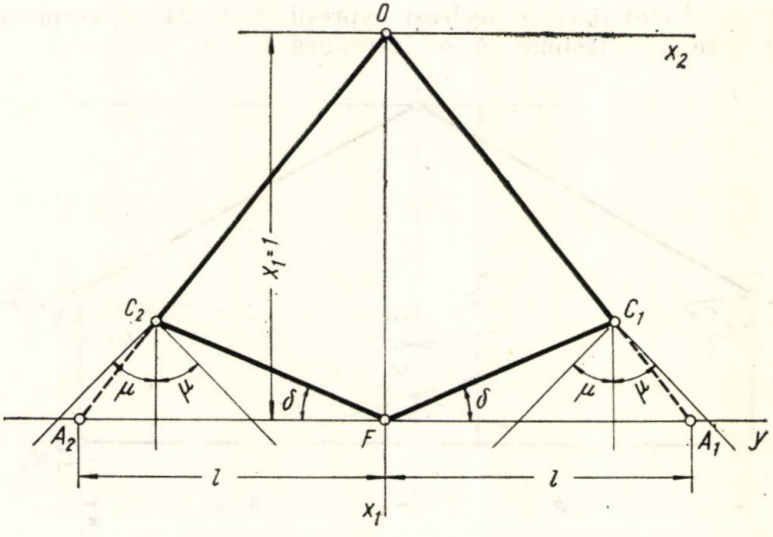


Fig. 4

și unde am notat

$$\frac{b}{f} = L = \operatorname{ctg} \delta. \tag{65}$$

În cazul bordurilor supersonice $\left(l > \frac{1}{B}\right)$, la extragerea părții reale se va ține seama de relația (26).

Vom menționa că aceste expresii își păstrează valabilitatea și în cazul aripii rombice (fig. 4), cu observația că în acest caz δ trebuie înlocuit prin $-\delta$.

ARIPA PENTAGONALĂ

Să considerăm aripa pentagonală din figura 5, avînd suprafața extradosului definită prin ecuația

$$Z = 4t(x_1 \mp \frac{h}{b} x_2)(1 - x_1), \tag{66}$$

care corespunde unei viteze verticale de forma

$$w = w_{00} + x_1 (w_{10} \pm w_{01} y), \tag{67}$$

unde

$$w_{00} = 4t\, U_\infty, \quad w_{10} = -8t\, U_\infty, \quad w_{01} = 4t \frac{h}{b} U_\infty. \tag{68}$$

Viteza axială de perturbație va fi dată în acest caz de relația

$$u = u^0 + u^I + u^{II}, \tag{69}$$

unde u^0 și u^I sînt dați de aceleași expresii (23), (24) și, respectiv, (30), (42), în care însă trebuie să se introducă $f = 0$.

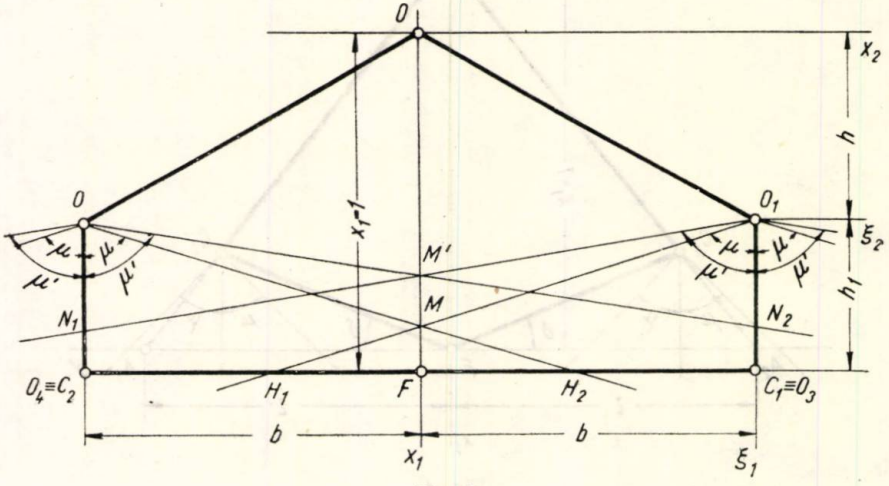


Fig. 5

Ținînd seama de aceste relații, coeficientul de rezistență va fi dat pentru această aripă de relațiile

$$C_d = C_d^{\mathrm{O}} + C_d^{\mathrm{I}} = \sum_{n=1}^{2} \sum_{m=1}^{2} [C_{dm}^{\mathrm{O}n} + C_{dm}^{\mathrm{I}n}], \tag{70}$$

$$C_{dm}^{\mathrm{O}n} = -\mathrm{Re}\,\frac{4}{SU_\infty^2}\left[\int_0^1 x_1^{m+n-1}\,\mathrm{d}x_1 \int_0^b \left(\sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,\,k}\, y^k\right) \mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{O}}\,\mathrm{d}y + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\frac{b}{y}} x_1^{m+n-1}\,\mathrm{d}x_1 \int_b^l \left(\sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,\,k}\, y^k\right) \mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{O}}\,\mathrm{d}y\right], \tag{71}$$

$$C_{dm}^{\mathrm{I}n} = -\mathrm{Re}\,\frac{4}{SU_\infty^2}\left[\int_0^1 \xi_1^{m+n-1}\,\mathrm{d}\xi_1 \int_{-a}^0 \left(\sum_{k=0}^{m-1} \beta_{m-k-1,\,k}\, \eta^k\right) \mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{I}}\,\mathrm{d}\eta + \right.$$
$$\left. + \int_0^{-\frac{2b}{\eta}} \xi_1^{m+n-1}\,\mathrm{d}\xi_1 \int_{-\frac{1}{B}}^{-a} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \beta_{m-k-1,\,k}\, \eta^k\right) \mathcal{U}_{n-1}^{\mathrm{I}}\,\mathrm{d}\eta\right], \tag{71'}$$

unde coeficienții $\beta_{m-k-1,\,k}$ sînt dați de relațiile (17), în care însă acum $f = 0$, suprafața S are expresia

$$S = \frac{(2-h)\,b}{2} = \frac{(1+h_1)\,b}{2}, \tag{72}$$

iar limita de integrare a are valoarea

$$a = 2b \text{ pentru } \frac{1}{B} > 2b, \tag{73}$$

$$a = \frac{1}{B} \text{ pentru } \frac{1}{B} < 2b, \tag{73'}$$

după cum conul Mach din vîrful O_1 intersectează bordul $O_2\,C_2$ sau, respectiv, bordul C_1C_2.

După efectuarea calculelor se obține pentru coeficienții de rezistență $C_{dm}^{\mathrm{O}n}$ și $C_{dm}^{\mathrm{I}n}$:

$$C_{d1}^{\mathrm{O}1} = -\frac{2\,w_{00}}{SU_\infty^2}\,K_{10}^{\mathrm{O}}(\Omega_{00}^{\mathrm{O}} + b^2 H_{20}^{\mathrm{O}}), \tag{74}$$

$$C_{d1}^{\mathrm{O}2} = -\frac{4\,w_{00}}{3SU_\infty^2}\,[K_{20}^{\mathrm{O}}(\Omega_{00}^{\mathrm{O}} + b^3 H_{30}^{\mathrm{O}}) + K_{21}^{\mathrm{O}}(\Omega_{11}^{\mathrm{O}} + b^3 H_{21}^{\mathrm{O}}) +$$
$$+ D_{20}^{\mathrm{O}}(\Lambda_0^{\mathrm{O}} - B^2 \Lambda_2^{\mathrm{O}} + b^3 R_3^{\mathrm{O}})], \tag{74'}$$

$$C_{d2}^{\mathrm{O}1} = -\frac{4K_{10}^{\mathrm{O}}}{3SU_\infty^2}\,[w_{10}(\Omega_{00}^{\mathrm{O}} + b^3 H_{30}^{\mathrm{O}}) + w_{01}(\Omega_{10}^{\mathrm{O}} + b^3 H_{20}^{\mathrm{O}})], \tag{74''}$$

$$C_{d2}^{O2} = -\frac{w_{10}}{SU_\infty^2}\left[K_{20}^{O}(\Omega_{00}^{O} + b^4 H_{40}^{O}) + K_{21}^{O}(\Omega_{11}^{O} + b^4 H_{31}^{O}) + \right.$$

$$+ D_{20}^{O}(\Lambda_0^{O} - B^2 \Lambda_2^{O} + b^4 R_4^{O})] - \frac{w_{01}}{SU_\infty^2}[K_{20}^{O}(\Omega_{10}^{O} + b^4 H_{30}^{O}) + \quad (74''')$$

$$\left. + K_{21}^{O}(\Omega_{21}^{O} + b^4 H_{21}^{O}) + D_{20}^{O}(\Lambda_1^{O} - B^2 \Lambda_3^{O} + b^4 R_3^{O})\right],$$

$$C_{d1}^{I1} = -\frac{2\beta_{00}}{SU_\infty^2} K_{10}^{I}(\Omega_0^{I} + 4b^2 H_2^{I}), \quad (75)$$

$$C_{d1}^{I2} = -\frac{4\beta_{00}}{3SU_\infty^2}\{K_{20}^{I}(\Omega_0^{I} - 8b^3 H_3^{I}) + K_{21}^{I}(\Omega_1^{I} - 8b^3 H_2^{I}) + \quad (75')$$

$$+ Q_{21}^{I}(\Gamma_1^{I} - 8\, b^3 N_2^{I}) + D_{20}^{I}[\Lambda_0^{I} - B^2 \Lambda_2^{I} - 8b^3(J_3^{I} - B^2 J_1^{I})],$$

$$C_{d2}^{I1} = -\frac{4K_{10}^{I}}{3SU_\infty^2}[\beta_{10}(\Omega_0^{I} - 8b^3 H_3^{I}) + \beta_{01}(\Omega_1^{I} - 8b^3 H_2^{I})]. \quad (75'')$$

$$C_{d2}^{I2} = -\frac{\beta_{10}}{SU_\infty^2}\{K_{20}^{I}(\Omega_0^{I} + 16b^4 H_4^{I}) + K_{21}^{I}(\Omega_1^{I} + 16b^4 H_3^{I}) +$$

$$+ Q_{21}^{I}(\Gamma_1^{I} + 16b^4 N_3^{I}) + D_{20}^{I}[\Lambda_0^{I} - B^2 \Lambda_2^{I} + 16b^4(J_4^{I} - B^2 J_2^{I})]\} - \quad (75''')$$

$$- \frac{\beta_{01}}{SU_\infty^2}\{K_{20}^{I}(\Omega_1^{I} + 16b^4 H_3^{I}) + K_{21}^{I}(\Omega_2^{I} + 16b^4 H_2^{I}) +$$

$$+ Q_{21}^{I}(\Gamma_2^{I} + 16b^4 N_2^{I}) + D_{20}^{I}[\Lambda_1^{I} - B^2 \Lambda_3^{I} + 16b^4(J_3^{I} - B^2 J_1^{I})]\},$$

în care am notat :

$$\Omega_{l,q}^{O} = \operatorname{Re}\frac{1}{\sqrt{1-B^2 l^2}}\int_0^b y^t\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-By)}{2B(l-y)}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^q \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+By)}{2B(l+y)}}\right]dy =$$

$$= \operatorname{Re}\frac{1}{(t+1)\sqrt{1-B^2 l^2}}\left\{(b^{t+1} - l^{t+1})\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bb)}{2B(l-b)}} + \right. \quad (76)$$

$$+ (-1)^q[b^{t+1} - (-l)^{t+1}]\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bb)}{2B(l+b)}} +$$

$$\left. + \frac{1+(-1)^{t-q+1}}{2} l^{t+1}\operatorname{arg\,ch}\frac{1}{Bl}\right\} + \frac{1}{t+1}\sum_{p=0}^{t}\frac{1+(-1)^{t-q-p}}{2} l^{t-p}\Lambda_p^{O},$$

$$\Lambda_{2r}^{0} = \operatorname{Re}\int_0^b \frac{y^{2r}\,dy}{\sqrt{1-B^2y^2}} = \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2\,B^{2r+1}}\operatorname{Re}\left[\arcsin Bb - \right.$$
$$\left. - \sqrt{1-B^2b^2}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}(Bb)^{2k+1}\right], \tag{76'}$$

$$\Lambda_{2r+1}^{0} = \operatorname{Re}\int_0^b \frac{y^{2r+1}\,dy}{\sqrt{1-B^2y^2}} = \frac{2^{2r}(r!)^2}{(2r+1)!\,B^{2(r+1)}}\operatorname{Re}\left[1 - \right.$$
$$\left. - \sqrt{1-B^2b^2}\sum_{k=0}^{r}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}(Bb)^{2k}\right]. \tag{76''}$$

$$\Omega_t^{I} = \operatorname{Re}\frac{1}{\sqrt{1-B^2l^2}}\int_{-a}^{0}\eta^t \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-B\eta)}{2B(l-\eta)}}\,d\eta =$$
$$= -\operatorname{Re}\frac{l^{t+1}}{(t+1)\sqrt{1-B^2l^2}}\left\{\frac{1}{2}\operatorname{arg\,ch}\frac{1}{Bl} + \right. \tag{77}$$
$$\left. + \left[1-\left(-\frac{a}{l}\right)^{t+1}\right]\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Ba)}{2B(l+a)}}\right\} + \frac{1}{2(t+1)}\sum_{p=0}^{t} l^{t-p}\Lambda_p^{I},$$

$$\Gamma_t^{I} = \operatorname{Re}\int_{-a}^{0}\eta^t \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{1}{B^2\eta^2}}\,d\eta = \frac{1}{t+1}\left[-\operatorname{Re}(-a)^{t+1}\operatorname{arg\,ch}\frac{1}{Ba} + \Lambda_t^{I}\right], \tag{77'}$$

$$\Lambda_{2r}^{I} = \operatorname{Re}\int_{-a}^{0}\frac{\eta^{2r}\,d\eta}{\sqrt{1-B^2\eta^2}} = \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2\,B^{2r+1}}\operatorname{Re}\left[\arcsin Ba - \right.$$
$$\left. - \sqrt{1-B^2a^2}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}(Ba)^{2k+1}\right]. \tag{77''}$$

$$\Lambda_{2r+1}^{I} = \operatorname{Re}\int_{-a}^{0}\frac{\eta^{2r+1}\,d\eta}{\sqrt{1-B^2\eta^2}} = -\frac{2^{2r}(r!)^2}{(2r+1)!\,B^{2(r+1)}}\operatorname{Re}\left[1 - \right.$$
$$\left. - \sqrt{1-B^2a^2}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}(Ba)^{2k}\right]. \tag{77'''}$$

$$H_t^{I} = \operatorname{Re}\frac{1}{\sqrt{1-B^2l^2}}\int_{-\frac{1}{B}}^{-a}\frac{1}{\eta^t}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-B\eta)}{2B(l-\eta)}}\,d\eta =$$
$$= \operatorname{Re}\frac{1}{(t-1)\sqrt{1-B^2l^2}}\left[\frac{1}{l^{t-1}} - \left(\frac{-1}{a}\right)^{t-1}\right]\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Ba)}{2B(l+a)}} +$$
$$+ \frac{1}{2(t-1)\,l^{t-1}}\sum_{p=1}^{t-1} l^{p-1}J_p^{I}, \tag{78}$$

$$N_t^{\mathrm{I}} = \mathrm{Re}\int_{-\frac{1}{B}}^{-a} \frac{1}{\eta^t} \arg \mathrm{ch} \sqrt{\frac{1}{B^2\eta^2}}\, \mathrm{d}\eta = -\frac{1}{t+1}\left[\mathrm{Re}\left(\frac{-1}{a}\right)^{t-1} \arg \mathrm{ch}\frac{1}{Ba} + J_t^{\mathrm{I}}\right], \tag{78'}$$

$$J_{2r+1}^{\mathrm{I}} = \mathrm{Re}\int_{-\frac{1}{B}}^{-a} \frac{\mathrm{d}\eta}{\eta^{2r+1}\sqrt{1-B^2\eta^2}} = -\frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2 a^{2r}}\mathrm{Re}\left[(Ba)^{2r} \arg \mathrm{ch}\frac{1}{Ba} + \right. \tag{78''}$$

$$\left. + \sqrt{1-B^2a^2}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}(Ba)^{2(r-k-1)}\right],$$

$$J_{2r+2}^{\mathrm{I}} = \mathrm{Re}\int_{-\frac{1}{B}}^{-a} \frac{\mathrm{d}\eta}{\eta^{2r+2}\sqrt{1-B^2\eta^2}} = \tag{78'''}$$

$$= \frac{2^{2r}(r!)^2}{(2r+1)!\,a^{2r+1}}\mathrm{Re}\sqrt{1-B^2a^2}\sum_{k=0}^{r}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}(Ba)^{2(r-k)}.$$

În ceea ce privește integralele $H_{t,q}^{\mathrm{o}}$ și R_t^{o}, acestea sînt definite în relațiile (50′), (50″) și au expresiile date în anexa de calcul (95), (95′), în care însă se va introduce $f = 0$.

ARIPA TRAPEZOIDALĂ

Să considerăm acum aripa trapezoidală din figura 6, avînd suprafața extradosului definită prin ecuațiile

$$Z = 4t\, x_1 (1 - x_1) \tag{79}$$

pe porțiunea $OO_1O_3O_4O_2$ și

$$Z' = 4t\left(x_1 - \frac{x_2 - b}{b_1 - b}\right)(1 - x_1) \tag{80}$$

pe porțiunea $O_1C_1O_3$, din care se deduc pentru viteza verticală pe aripă expresiile

$$w = w_{00} + w_{10}\, x_1 = w_{00} + w_{10}\, \xi_1 \tag{81}$$

pe porțiunea $O_1O_3O_4O_2$ și

$$w' = w_{00} + w_{10}\, x_1 + w'_{01}(x_2 - b) = w_{00} + w_{10}\, \xi_1 + w'_{01}\, \xi_2 \tag{82}$$

pe porțiunea $O_1C_1O_3$, unde am notat

$$w_{00} = 4t\, U_\infty,\quad w_{01} = -8t\, U_\infty,\quad w'_{01} = \frac{4t}{b_1 - b}\, U_\infty, \tag{83}$$

$$\xi_1 = x_1, \qquad \xi_2 = x_2 - b, \qquad \left(\eta = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{x_2 - b}{x_1}\right). \tag{83'}$$

În ceea ce privește porțiunea O_2, C_2, O_4, aceasta este considerată simetrică cu porțiunea $O_1C_1O_3$ față de axa Ox_1.

Ținînd seama de cele arătate mai sus, viteza axială de perturbație va fi dată de aceeași relație (69), în care însă u^0 reprezintă viteza axială dintr-o mișcare plană și are expresia

$$u^0 = -\frac{w}{B} = -\frac{w_{00} + w_{10}\, x_1}{B}, \tag{84}$$

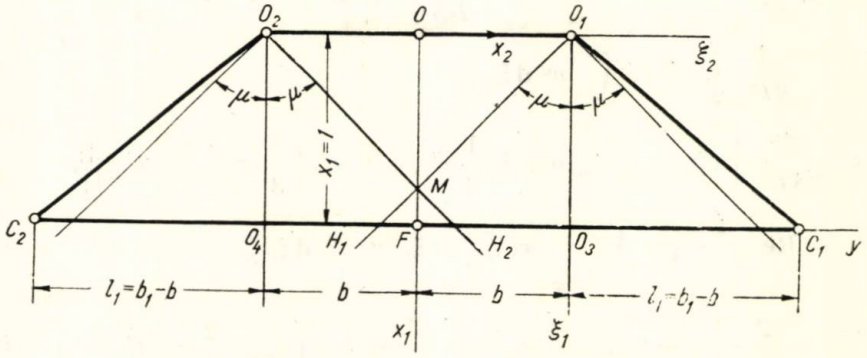


Fig. 6

în timp ce u^{I} va fi dat de aceeași relație (30), în care însă expresiile funcțiilor $\mathcal{U}_0^{\mathrm{I}}$ și $\mathcal{U}_1^{\mathrm{I}}$ se deduc din (31), făcînd pe l să tindă către infinit ($l \to \infty$), obținîndu-se astfel

$$\mathcal{U}_0^{\mathrm{I}} = \frac{2w_{00}}{\pi B} \arccos \sqrt{\frac{1 - B\xi}{2}} + \frac{G_{10}^{\mathrm{I}}}{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - B\xi)}{2B(l_1 - \xi)}}, \tag{85}$$

$$\mathcal{U}_1^{\mathrm{I}} = \frac{2w_{10}}{\pi B} \arccos \sqrt{\frac{1 - B\xi}{2}} + \frac{G_{20}^{\mathrm{I}} + G_{21}^{\mathrm{I}}\, \xi}{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + B\, l_1)\,(1 - B\xi)}{2B(l_1 - \xi)}} + D_{20}^{\mathrm{I}} \sqrt{1 - B^2 \xi^2}. \tag{85'}$$

Ținînd seama de (32), (83), pentru coeficienții $G_{n.q}^{\mathrm{I}}$, D_{20}^{I} din relațiile de mai sus vor rezulta expresiile

$$G_{10}^{\mathrm{I}} = -\frac{2w_{00}\, l_1}{\pi}, \quad G_{20}^{\mathrm{I}} = -\frac{2l_1}{\pi} \frac{(2 - B^2 l_1^2)\, w_{10} + l_1\, w'_{01}}{1 - B^2 l_1^2}, \tag{86}$$

$$G_{21}^{\mathrm{I}} = \frac{2}{\pi} \frac{w_{10} + B^2 l_1^3\, w'_{01}}{1 - B^2 l_1^2}, \quad D_{20}^{\mathrm{I}} = \frac{l_1}{\pi} \frac{w_{10} + l_1\, w'_{01}}{1 - B^2 l_1^2}. \tag{86'}$$

Pentru calculul coeficientului de rezistență să considerăm cazul cînd conurile Mach din vîrfurile O_1 și O_2 se intersectează pe aripă în

$M\left(\frac{1}{B} < 2b\right)$ și să observăm că, datorită simetriei aripii, efectul vitezei u^{I} asupra porțiunii MFH_1 este identic cu cel al vitezei u^{II} asupra porțiunii MFH_2. Vom putea scrie în acest caz

$$C_d = C_d^{\mathrm{o}} + C_d^{*\mathrm{o}} + C_d^{\mathrm{I}} + C_d^{*\mathrm{I}}, \tag{87}$$

unde

$$C_d^{\mathrm{o}} = -\frac{4}{SU_\infty^2}\int_0^1 u^{\mathrm{o}}\, w\, \mathrm{d}x_1 \int_0^b \mathrm{d}x_2 = \frac{4b}{BSU_\infty^2}\left(w_{00}^2 + w_{00}\, w_{10} + \frac{1}{3}\, w_{10}^2\right), \tag{88}$$

$$\begin{aligned} C_d^{*\mathrm{o}} &= -\frac{4}{SU_\infty^2}\int_0^1 u^{\mathrm{o}}\, \mathrm{d}\xi_1 \int_0^{\xi_1 l_1} w'\, \mathrm{d}\xi_2 = \\ &= \frac{2l_1}{BSU_\infty^2}\left[w_{00}^2 + \frac{4}{3}\, w_{00}\, w_{10} + \frac{1}{2}\, w_{10}^2 + l_1\, w'_{01}\left(\frac{1}{3}\, w_{00} + \frac{1}{4}\, w_{10}\right)\right], \end{aligned} \tag{88'}$$

$$\begin{aligned} C_d^{\mathrm{I}} &= -\mathrm{Re}\,\frac{4}{SU_\infty^2}\int_{\xi_1=0}^1 \int_{\eta=-\frac{1}{B}}^0 w(\mathcal{U}_0^{\mathrm{I}} + \xi_1\, \mathcal{U}_1^{\mathrm{I}})\, \xi_1\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\eta = \\ &= -\frac{2}{SU_\infty^2}\left\{\frac{1}{\pi B^2}\left(w_{00}^2 + \frac{4}{3}\, w_{00}\, w_{10} + \frac{1}{2}\, w_{10}^2\right) + \left(w_{00} + \frac{2}{3}\, w_{10}\right) G_{10}^{\mathrm{I}}\, \Omega_0 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{2}{3}\, w_{00} + \frac{1}{2}\, w_{10}\right)\left[G_{20}^{\mathrm{I}}\, \Omega_0 + G_{21}^{\mathrm{I}}\, \Omega_1 + D_{20}^{\mathrm{I}}(\Lambda_0 - B^2\, \Lambda_2)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{88''}$$

$$\begin{aligned} C_l^{*\mathrm{I}} &= -\mathrm{Re}\,\frac{4}{SU_\infty^2}\int_{\xi_1=0}^1 \int_{\eta=0}^{l_1} w'(\mathcal{U}_0^{\mathrm{I}} + \xi_1\, \mathcal{U}_1^{\mathrm{I}})\, \xi_1\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\eta = \\ &= -\frac{2}{SU_\infty^2}\left\{\frac{1}{\pi B}\left[\left(2w_{00}^2 + \frac{4}{3}\, w_{00}\, w_{10} + w_{10}^2\right)\Phi_0^* + \right.\right. \\ &+ w'_{01}\left(\frac{4}{3}\, w_{00} + w_{10}\right)\Phi_1^*\Big] + \left(w_{00} + \frac{2}{3}\, w_{10}\right) G_{10}^{\mathrm{I}}\, \Omega_0^* + \frac{2}{3}\, w'_{01}\, G_{10}^{\mathrm{I}}\, \Omega_1^* + \\ &+ \left(\frac{2}{3}\, w_{00} + \frac{1}{2}\, w_{10}\right)\left[G_{20}^{\mathrm{I}}\, \Omega_0^* + G_{21}^*\, \Omega_1^* + D_{20}^{\mathrm{I}}(\Lambda_0^* - B^2\, \Lambda_2^*)\right] + \\ &\left.\left. + \frac{1}{2}\, w'_{01}\left[G_{20}^{\mathrm{I}}\, \Omega_1^* + G_{21}^{\mathrm{I}}\, \Omega_2^* + D_{20}^{\mathrm{I}}(\Lambda_1^* - B^2\, \Lambda_3^*)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{88'''}$$

în care am notat:

$$\begin{aligned} \Omega_t &= \mathrm{Re}\,\frac{1}{\sqrt{1 - B^2\, l_1^2}}\int_{-\frac{1}{B}}^0 \eta^t\, \mathrm{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 + B\, l_1)\,(1 - B\, \eta)}{2B(l_1 - \eta)}}\, \mathrm{d}\eta = \\ &= \frac{1}{2(t+1)}\left[-\mathrm{Re}\,\frac{l_1^{t+1}}{\sqrt{1 - B^2\, l_1^2}}\,\mathrm{arg\,ch}\,\frac{1}{B\, l_1} + \sum_{p=0}^{t} l^{t-p}\, \Lambda_p\right], \end{aligned} \tag{89}$$

$$\Lambda_{2r} = \mathrm{Re}\int_{-\frac{1}{B}}^{0} \frac{\eta^{2r}\,\mathrm{d}\eta}{\sqrt{1-B^2\eta^2}} = \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2\,B^{2r+1}}\,\frac{\pi}{2}, \tag{89'}$$

$$\Lambda_{2r+1} = \mathrm{Re}\int_{-\frac{1}{B}}^{0} \frac{\eta^{2r+1}\,\mathrm{d}\eta}{\sqrt{1-B^2\eta^2}} = -\frac{2^{2r}(r!)^2}{(2r+1)!\,B^{2(r+1)}}. \tag{89''}$$

$$\begin{aligned}\Phi_l^* &= \mathrm{Re}\int_0^{l_1} \eta^t \arccos\sqrt{\frac{1-B\eta}{2}}\,\mathrm{d}\eta = \\ &= \frac{1}{t+1}\left[\mathrm{Re}\, l^{t+1}\arccos\sqrt{\frac{1-Bl_1}{2}} - \frac{B}{2}\Lambda_{l+1}^*\right],\end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned}\Omega_l^* &= \mathrm{Re}\,\frac{1}{\sqrt{1-B^2l_1^2}}\int_0^{l_1}\eta^t \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-B\eta)}{2B(l_1-\eta)}}\,\mathrm{d}\eta = \\ &= \frac{1}{2(t+1)}\left[\mathrm{Re}\,\frac{l_1^{t+1}}{\sqrt{1-B^2l_1^2}}\operatorname{arg\,ch}\frac{1}{Bl_1} + \sum_{p=0}^{t} l^{t-p}\,\Lambda_p^*\right],\end{aligned} \tag{90'}$$

$$\Lambda_{2r}^* = \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2B^{2r+1}}\mathrm{Re}\left[\arcsin Bl_1 - \sqrt{1-B^2l_1^2}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}(Bl_1)^{2k+1}\right], \tag{90''}$$

$$\Lambda_{2r+1}^* = \frac{2^{2r}(r!)^2}{(2r+1)!\,B^{2(r+1)}}\mathrm{Re}\left[1-\sqrt{1-B^2l_1^2}\sum_{k=0}^{r}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}(Bl_1)^{2k}\right]. \tag{90'''}$$

$$S = \frac{b+b_1}{2}. \tag{91}$$

Dacă în expresiile de mai sus se face $b_1 = b$, $l_1 = 0$, $w' = 0$, se obțin cu ușurință caracteristicile aerodinamice ale unei aripi dreptunghiulare (fig. 7), avînd ecuația suprafeței extradosului definită prin relația (79). Este ușor de văzut că în cazul aripii dreptunghiulare avem

$$C_d^{*0} = 0, \quad C_d^{*I} = 0. \tag{92}$$

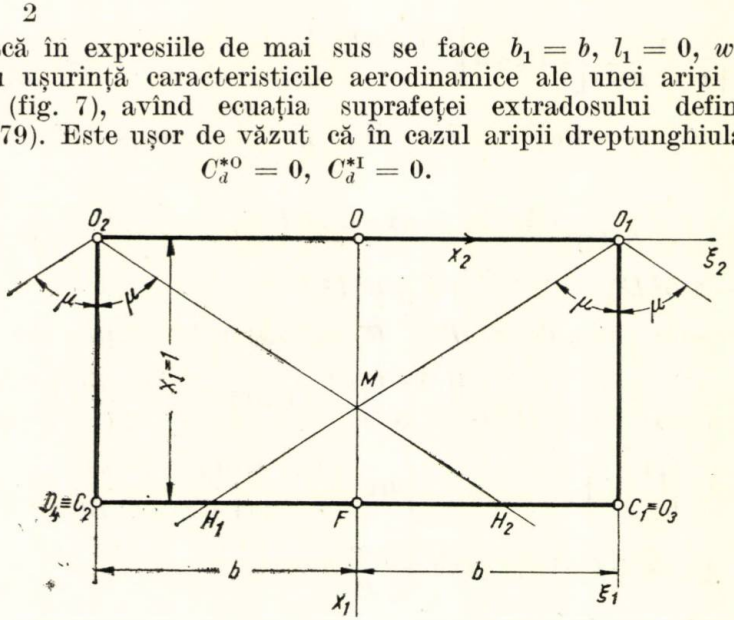


Fig. 7

ANEXĂ DE CALCUL

Expresiile integralelor $E^0_{t,q}$, P^0_t definite prin relațiile (50), (50'').

$$E^0_{t,q} = \operatorname{Re}\frac{L}{(t-1)\sqrt{1-B^2l^2}}\left\{\left[(1+f)^{t-1} - \right.\right.$$

$$\left. - \left(\frac{h}{h-f}\right)^{t-1}\right]\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+f-hBl)}{2B(1+f-h)l}} +$$

$$+ (-1)^q\left[(1+f)^{t-1} - \left(\frac{h}{h+f}\right)^{t-1}\right]\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+f+hBl)}{2(1+f+h)Bl}} - \quad (93)$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^q - \left(\frac{h}{h-f}\right)^{t-1} - (-1)^q\left(\frac{h}{h+f}\right)^{t-1}\right]\operatorname{arg\,ch}\frac{1}{Bl}\right\} +$$

$$+ \frac{L}{2(t-1)}\sum_{p=1}^{t-1}\left[\left(\frac{h}{h-f}\right)^{t-p} + (-1)^q\left(\frac{h}{h+f}\right)^{t-p}\right]I^0_p,$$

$$P^0_t = \frac{L}{(t-1)B}\left[\operatorname{Re}(1+f)^{t-2}\sqrt{(1+f)^2 - f^2B^2L^2} - 1 + \right.$$

$$\left. + B^2L^t I^0_{t-1} - B^2L^{t-1} I^0_{t-2}, \right. \quad (93')$$

unde

$$I^0_1 = \operatorname{Re}\frac{1}{\sqrt{1-B^2L^2}}\left[2\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1+f-fBL)}{2BL}} - \operatorname{arg\,ch}\frac{1}{BL}\right], \quad (94)$$

$$I^0_2 = \frac{1}{L(1-B^2L^2)}[\operatorname{Re}\sqrt{(1+f)^2 - f^2B^2L^2} - 1 - B^2L^2 I^0_1], \quad (94')$$

$$I^0_3 = \frac{1}{2L^2(1-B^2L^2)^2}[\operatorname{Re}(1+f-(4-f)B^2L^2)\sqrt{(1+f)^2 - f^2B^2L^2} - \quad (94'')$$

$$- (1-4B^2L^2) + (1+2B^2L^2)B^2L^2 I^0_1].$$

Expresiile integralelor $H^0_{t,q}$, R^0_t definite prin relațiile (50'), (50''):

$$H^0_{t,q} = \operatorname{Re}\frac{1}{(t-1)l^{t-1}\sqrt{1-B^2l^2}}\left\{\left[\left(\frac{1+f}{h}\right)^{t-1} - 1\right]\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+f-4Bl)}{2(1+f-h)Bl}} + \right.$$

$$+ (-1)^q\left[\left(\frac{1+f}{h}\right)^{t-1} - (-1)^{t-1}\right]\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+f+hBl)}{2(1+f+h)Bl}} -$$

$$\left. - (-1)^q[1 + (-1)^t]\operatorname{arg\,ch}\frac{1+Bl}{2\sqrt{Bl}}\right\} + \quad (95)$$

$$+ \frac{1}{2(t-1)l^t}\sum_{p=1}^{t-1}[1 + (-1)^{t+q-p}]\,l^p J^0_p,$$

$$R_l^0=-\frac{1}{(t-1)Bl^{t-1}}\mathrm{Re}\left[\sqrt{1-B^2L^2}-\frac{(1+f)^{t-2}}{h^{t-1}}\sqrt{(1+f)^2-h^2B^2l^2}+B^2l^{t-1}J_{t-2}^0\right], \tag{95'}$$

unde

$$J_{2r+1}^0=-\frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2\,l^{2r}}\mathrm{Re}\left\{(Bl)^{2r}\left[\arg\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{Bl}-\arg\,\mathrm{ch}\,\frac{1+f}{h\,Bl}\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{r-1}\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}(Bl)^{2(r-k-1)}\left[\sqrt{1-B^2l^2}-\frac{(1+f)^{2k+1}}{h^{2k+2}}\sqrt{(1+f)^2-h^2B^2l^2}\right]\right\}, \tag{96}$$

$$J_{2r+2}^0=-\frac{2^{2r}(r!)^2}{(2r+1)!\,l^{2r+1}}\sum_{k=0}^{r}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}(Bl)^{2(r-k)}\left[\sqrt{1-B^2l^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{(1+f)^{2k}}{h^{2k+1}}\sqrt{(1+f)^2-h^2B^2l^2}\right]. \tag{96'}$$

Expresiile integralelor $H_{l,q}^F$, R_l^F *definite prin relaţiile* (52), (52''):

$$H_{l,q}^F=\mathrm{Re}\,\frac{1}{(t-1)L^{t-1}\sqrt{1-B^2L^2}}\left\{\left[1-\left(\frac{L}{a}\right)^{t-1}\right]\arg\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-Ba)}{2B(a-L)}}+\right.$$
$$+(-1)^q\left[(-1)^{t-1}-\left(\frac{L}{a}\right)^{t-1}\right]\arg\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1+Ba)}{2B(L+a)}}+ \tag{97}$$
$$\left.+(-1)^q[1-(-1)^{t-1}]\arg\,\mathrm{ch}\,\frac{1+BL}{2\sqrt{BL}}\right\}+\frac{1}{2(t-1)l^t}\sum_{p=1}^{t-1}[1+(-1)^{t+q-p}]l^pJ_p^F,$$

$$R_t^F=\mathrm{Re}\,\frac{1}{(t-1)BL^{t-1}}\left[\sqrt{1-B^2L^2}-\left(\frac{L}{a}\right)^{t-1}\sqrt{1-B^2a^2}-B^2L^{t-1}J_{t-2}^F\right], \tag{97'}$$

unde

$$J_{2r+1}^F=\mathrm{Re}\,\frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2L^{2r}}\left\{(BL)^{2r}\left[\arg\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{BL}-\arg\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{Ba}\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{r-1}\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}(BL)^{2(r-k-1)}\left[\sqrt{1-B^2L^2}-\left(\frac{L}{a}\right)^{2k+2}\sqrt{1-B^2a^2}\right]\right\}, \tag{98}$$

$$J_{2r+2}^F=\mathrm{Re}\,\frac{2^{2r}(r!)^2}{(2r+1)!\,L^{2r+1}}\sum_{k=0}^{r}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}(BL)^{2(r-k)}\left[\sqrt{1-B^2L^2}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{L}{a}\right)^{2k+1}\sqrt{1-B^2a^2}\right]. \tag{98'}$$

Expresiile integralelor $E^F_{t,q}$, R^F_t *definite prin relațiile* (52'), (52''):

$$E^F_{t,q}=\operatorname{Re}\frac{(-1)^{t+1}\,l}{(t-1)\sqrt{1-B^2L^2}}\left\{\left[\left(\frac{l}{l-a}\right)^{t-1}-\left(\frac{f}{f-h}\right)^{t-1}\right]\operatorname{arg\,sh}\sqrt{\frac{(1+BL)(1-Ba)}{2B(a-L)}}+\right.$$

$$+(-1)^q\left[(-1)^{t-1}-\left(\frac{L}{a}\right)^{t-1}\right]\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BL)(1+Ba)}{2B(L+a)}}+ \tag{99}$$

$$\left.+\frac{(-1)^t\,l^{t-1}}{2(t-1)}\sum_{p=1}^{t-1}\left[\left(\frac{f}{f-h}\right)^{t-1}+(-1)^q\left(\frac{f}{f+h}\right)^{t-1}\right]I^F_p\right\},$$

$$P^F_t=\operatorname{Re}\frac{(-1)^{t+1}l}{(t-1)B}\left[\left(\frac{l}{l-a}\right)^{t-1}\sqrt{1-B^2a^2}-B^2\,l^t I^F_{t-1}+B^2\,l^{t-1}I^F_{t-2}\right], \tag{99'}$$

unde

$$I^F_1=\operatorname{Re}\frac{-2}{\sqrt{1-B^2l^2}}\operatorname{arg\,sh}\sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1-Ba)}{2B\,(a-l)}}, \tag{100}$$

$$I^F_2=\operatorname{Re}\frac{-1}{l\,(1-B^2l^2)}\left[\frac{l}{l-a}\sqrt{1-B^2a^2}+B^2\,l^2I^F_1\right], \tag{100'}$$

$$I^F_3=\operatorname{Re}\frac{-1}{2l^2(1-B^2\,l^2)^2}\left[(1-4B^2l^2+3B^2la)\left(\frac{l}{l-a}\right)^2\sqrt{1-B^2a^2}-\right.$$

$$\left.-\,(1+2\,B^2\,l^2)\,B^2\,l^2\,I^F_1\right]. \tag{100''}$$

Expresiile integralelor E^I_t, M^I_t, P^I_t *definite prin relațiile* (54):

$$E^I_t=\frac{1}{2(t-1)}\left\{\operatorname{Re}\left[1-\left(\frac{h}{h-f}\right)^{t-1}\right]\frac{L}{\sqrt{1-B^2\,l^2}}\operatorname{arg\,ch}\frac{1}{Bl}+\sum_{p=1}^{t-1}\left(\frac{h}{h-f}\right)^{t-p}L^pI^I_p\right\}, \tag{101}$$

$$M^I_t=\frac{1}{4(t-1)}\sum_{p=1}^{t-1}L^p\,I^I_p, \tag{101'}$$

$$P^I_t=\frac{L}{(t-1)\,B}\,[1+B^2L^tI^I_{t-1}-B^2L^{t-1}I^I_{t-2}], \tag{101''}$$

unde

$$I^I_1=\operatorname{Re}\frac{1}{\sqrt{1-B^2L^2}}\operatorname{arg\,ch}\frac{1}{BL}, \tag{102}$$

$$I^I_2=\frac{1}{L(1-B^2L^2)}\,[1-B^2L^2I^I_1], \tag{102'}$$

$$I^I_3=\frac{1}{2L^2(1-B^2L^2)^2}[1-4B^2L^2+(1+2B^2L^2)B^2L^2I^I_1]. \tag{102''}$$

REMARCĂ. La extragerea părții reale din expresiile de mai sus va fi necesar în anumite cazuri să se țină seama de relațiile (26), (33), precum și de relații de forma

$$\operatorname{Re}\,[\arcsin Bx]_{Ex=By>1}=\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}\left[\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1+Bx)}{2B\,(l+x)}}\right]_{Bx=By>1}=0,$$
$$\operatorname{Re}\,[\sqrt{1-B^2x^2}]_{Bx=By>1}=0. \tag{103}$$

Primită la redacție la 8 aprilie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. DAN MATEESCU, *Supersonic flow around polygonal wings : Thin wings and wings of symmetrical thickness*, Rev. Roum. Sci. Tech. — Mécanique Appliqué, **XI**, *3* (1966).
2. E. CARAFOLI, *Asupra caracterului hidrodinamic al soluțiilor din mișcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale*, Comunicările Academiei R.P.R., **II**, *9—10* (1952).
3. — *Extinderea analogiei hidrodinamice din mișcările conice la aripile groase și cu rezistență variabilă*, Comunicările Academiei R.P.R., **III**, *3—4* (1953).
4. E. CARAFOLI, M. IONESCU, *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires à epaisseur symétrique*, Rev. Roum. Sci. Tech. — Mécanique Appliquée, **II**, *1* (1957).
5. E. CARAFOLI, *High Speed Aerodynamics*, București, Edit. tehnică, 1956.
6. E. CARAFOLI, DAN MATEESCU, *Sur une classe d'ailes delta à incidence et pente variable d'après des fonctions homogènes, en régime supersonique*, Rev. Roum. Sci. Tech. — Mécanique Appliquée, **X**, *2* (1965).
7. MATEESCU DAN, *Tragflügel mit besonderer Abschlussfläche in Überschallströmung*, Rev. Roum. Sci. Tech. — Mécanique Appliquée, **VIII**, *1* (1963).

ASUPRA TEORIEI ARIPII DELTA SUBȚIRI CU SEPARAȚIA CURENTULUI LA BORDURILE DE ATAC

de E. CARAFOLI și ȘT. STAICU
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

Lucrarea studiază scurgerea supersonică în jurul aripii delta subțiri, luînd în considerație desprinderile de curent din jurul bordurilor de atac subsonice.
Pornind în acest mod, se determină viteza axială de perturbație, distribuția de presiuni diferită de cea dată de teoria liniară clasică și caracteristicile aerodinamice ale aripii delta subțiri. Rezultatele teoretice sînt în bun record cu cele experimentale.

În prezenta lucrare se studiază scurgerea supersonică în jurul aripii delta subțiri, luînd în considerație desprinderile de curent din jurul bordurilor subsonice.

Cît timp incidența α a unei aripi delta plane este foarte mică, presiunile pe aripă ascultă aproximativ de legile stabilite în ipoteza micilor perturbații, în afară de punctele din imediata apropiere a bordurilor de atac, unde viteza reală și presiunile corespunzătoare nu sînt infinite, așa cum ar rezulta din teorie. Pe măsură ce incidența crește, curentul se desprinde la bordurile de atac, avînd ca efect o distribuție a vitezelor de perturbație și a presiunilor respective cu totul diferită de cele rezultate din prima teorie.

1. DETERMINAREA UNEI ARIPI ECHIVALENTE, PRODUCÎND ACELAȘI EFECT GLOBAL AL DESPRINDERII CURENTULUI

După cum s-a constatat și experimental, la o aripă cu bordurile de atac subsonice, curentul se separă la aceste borduri, dînd naștere unui sistem complex de vîrtejuri care se localizează pe spațiul dinspre extra-

dosul aripii. O schemă a acestui fenomen este reprezentată în figura 1. Un strat de vîrtejuri se desprinde de la bordurile de atac ale aripii și se înfășoară în formă de cornet, transformîndu-se apoi în cea mai mare parte a intensității sale turbionare în două nuclee concentrate de vîrtejuri, de abscise c și ordonată t (fig. 1). Analize amănunțite ale acestui fenomen, în subsonic și în supersonic, au fost făcute de mulți autori.

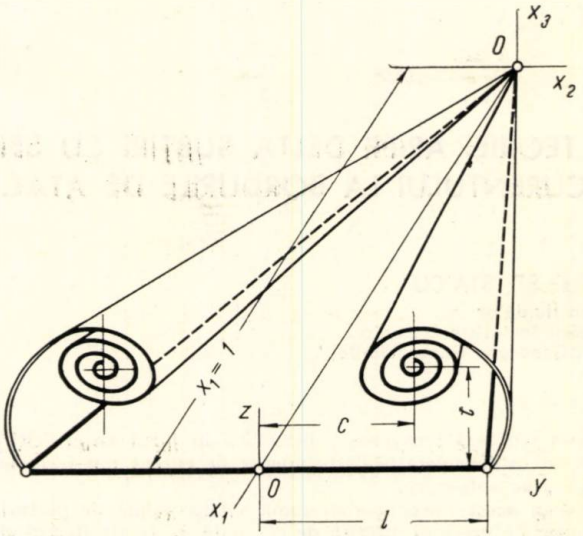


Fig. 1

Fotografiile din figura 2 ilustrează evoluția acestui fenomen în funcție de incidență [2], publicate cu aprobarea H.M.S.O.

Mișcarea rămîne conică și se poate trata utilizînd aceeași metodă a mișcărilor conice. Problema aceasta a fost amplu tratată și dezbătută în ultimul timp de mulți autori, ajungîndu-se uneori la rezultate foarte importante, mai ales pentru aripile zvelte pentru care $Bl \ll 1$ [3]. În cazul cînd Bl este destul de mare și se apropie de unu, problema se tratează mai greu; de aceea vom căuta s-o abordăm pe o cale indirectă.

Astfel vom admite că efectul desprinderii curentului la bordurile de atac ale aripii și apariției vîrtejurilor de pe extrados este acela de a produce un cîmp complex de viteze verticale care modifică scurgerea și duce astfel la *evitarea vitezei infinite la bordurile de atac*. În acest sens vom considera o distribuție a vitezei verticale pe extrados diferită de cea de pe intrados, astfel ca să corespundă cazului real al aripii delta cu vîrtejuri dorsale, respectînd indicațiile date de experiențe: deci o *aripă conică* cu incidența variabilă după o lege oarecare.

Urmînd o sugestie a lui Küchemann [4] și Squire [5], vom considera că aripa reală subțire, avînd vitezele finite la bordurile de atac prin efectul desprinderii curentului, se poate echivala cu o astfel de aripă subțire fictivă, avînd o variație convenabilă de incidențe.

În acest sens vom presupune că, pe aripa fictivă, incidența variabilă α', respectiv viteza verticală w', variază după liniile U pe extrados

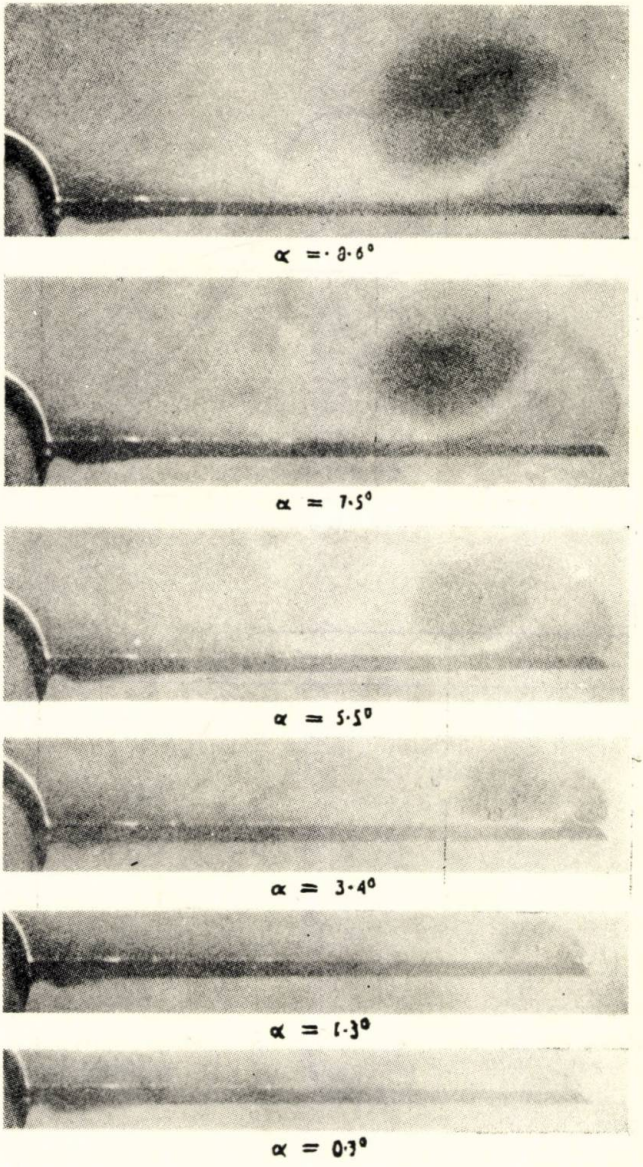


Fig. 2

și L pe intrados, avînd drept linie medie dreapta care reprezintă tocmai incidența α sau viteza verticală w a aripii subțiri reale :

$$w = -\alpha U_\infty, (w'_u = -\alpha'_u U_\infty, w'_l = -\alpha'_l U_\infty, w_0 = -\alpha_0 U_\infty, w_1 = -\alpha_1 U_\infty). \quad (1)$$

Incidența sau viteza verticală medie rezultă din următoarea relație, pe care o deducem urmărind figura 3 :

$$\int_0^l w'_u \, dy + \int_0^l w'_l \, dy = 2 \, wl. \tag{2}$$

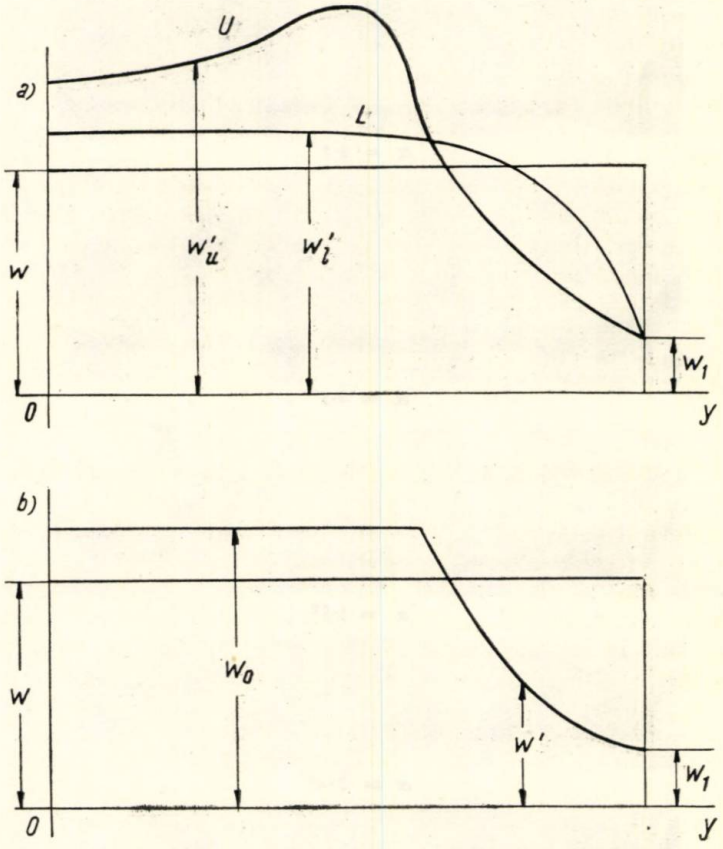


Fig. 3

Să remarcăm, pe de altă parte, că variația vitezelor verticale pe intervalul $[y = 0, y = l)$, se realizează pe baza unei repartiții de surse de intensitate q', de care este legată prin relația următoare, dedusă din teoria mișcărilor conice [1] :

$$q' = \frac{y}{\sqrt{1 - B^2 y^2}} \frac{dw'}{dy}, \tag{3}$$

pe care o vom introduce în (2) pentru a obține o relație între constantele variației de viteze w' și w (sau între incidențele α' și α).

Rămîne, în continuare, să găsim distribuția de surse q', convenabil aleasă pentru a corespunde la distribuția vitezelor verticale considerate, prin aplicarea formulei (3). În acest scop vom descompune aripa fictivă considerată în trei componente :

a) o aripă *subțire* cu *variația de incidență* convenabil aleasă pentru a reprezenta într-o oarecare măsură fenomenele de pe extrados ;

b) o aripă de *grosime simetrică* cu *panta* variind după aceeași lege ca și incidența de la (*a*). Prin aceasta vom evita ca viteza axială de perturbație să fie egală și de sens contrar pe cele două fețe ale aripii, așa cum rezultă din ipoteza (*a*) ;

c) o aripă de *grosime simetrică* avînd *panta* în contrast cu cea precedentă, să poată să se combine cu aceasta spre a obține o pantă medie nulă. În felul acesta, cele două aripi groase se comportă împreună ca o aripă subțire medie, de *incidență nulă*, așa cum este cazul real.

Alegerea distribuției de viteze verticale sau de surse care să le reprezinte trebuie legată de fenomenul real și de indicațiile date de experiențe. Problema devine foarte dificilă ; de aceea vom căuta s-o simplificăm, alegînd expresiile cele mai simple cu care vom căuta să încadrăm pe cît posibil fenomenul real. În cele ce urmează vom căuta să determinăm variația vitezei axiale de perturbație pe aripă.

2. DETERMINAREA VITEZELOR AXIALE DE PERTURBAȚIE

Considerînd cele trei aripi componente definite mai sus, vom determina mai jos vitezele axiale de perturbație.

a) ARIPA SUBȚIRE. Să presupunem, pentru simplificare, că viteza verticală este constantă și egală cu w_0 de la 0 la s și variază după o lege oarecare de la s la l, unde această viteză este w_1 (fig. 3). Vom admite că această variație este dată de o repartiție liniară de surse pe intervalul $[s, l]$:

$$q' = q_0\left(1 - \frac{y}{l}\right). \tag{4}$$

Pornind de la relația (3) și ținînd seama de (4), punem condițiile la limită pentru viteza verticală w' și vom avea

$$w_1 - w_0 = q_0 \int_s^l \left(1 - \frac{y}{l}\right) \frac{\sqrt{1 - B^2 y^2}}{y}\, dy, \tag{5}$$

de unde obținem relația

$$w_1 - w_0 = \frac{q_0}{2Bl}\left[Bl\left(\sqrt{1 - B^2 l^2} - \sqrt{1 - B^2 s^2}\right) - B(l - s)\sqrt{1 - B^2 s^2} + \right.$$

$$\left. + 2Bl\left(\cos h^{-1}\frac{1}{Bs} - \cos h^{-1}\frac{1}{Bl}\right) + \sin^{-1} Bs - \sin^{-1} Bl\right], \tag{6}$$

din care se exprimă q_0 în funcție de w_0 și w_1.

Aplicînd formulele stabilite în [1] şi ţinînd seama de (3) şi (4), unde vom înlocui y prin η pentru a evita o confuzie cu y din $x = y + i\delta$, vom obţine viteza axială de perturbaţie pentru prima aripă componentă definită mai sus :

$$\mathcal{U}_l' = \frac{A_{10}}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi} q_0 \int_s^l \left(1 - \frac{\eta}{l}\right)\left[\cos h^{-1} \sqrt{\frac{(l+\eta)(l-x)}{2l(\eta - x)}} + \right.$$

$$\left. + \cos h^{-1} \sqrt{\frac{(l+\eta)(l+x)}{2l(\eta + x)}}\right] d\eta. \tag{7}$$

Efectuînd integrala de mai sus, vom găsi

$$\mathcal{U}_l' = \frac{A_{10}}{\sqrt{l^2 - x^2}} - \frac{q_0}{\pi}\left[(s-x)\left(1 - \frac{s+x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{l^2 - sx}{l(s-x)} + \right.$$

$$\left. + (s+x)\left(1 - \frac{s-x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{l^2 + sx}{l(s+x)} + \left(\sqrt{1 - \frac{s^2}{l^2}} - 2\cos^{-1}\frac{s}{l}\right)\sqrt{l^2 - x^2}\right]. \tag{8}$$

Constanta A_{10} se va determina ţinînd seama de condiţiile la limită a vitezei verticale, aşa cum se procedează în mod obişnuit în teoria mişcărilor conice [1]. În acest sens, se ia în consideraţie variaţia vitezei verticale de la un punct de pe aripă pînă la un punct de pe conul Mach.

Pentru a evita unele calcule foarte laborioase la determinarea acestei constante, vom face o aproximaţie, considerînd o sursă concentrată, situată în $y = s'$, de intensitate Q_0 egală cu intensitatea totală a surselor, date amîndouă de relaţiile următoare :

$$s' = s + \frac{l - s}{3}, \quad Q_0 = \frac{q_0}{2l}(l - s)^2. \tag{9}$$

Procedînd în acest mod, vom putea scrie

$$\operatorname{Re} i \int_{(y=\delta=0)}^{(y=0,\ \delta=\infty)} \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{x} d\mathcal{U}_l' = - w_0, \tag{10}$$

în care $\mathcal{U}_l'$ este viteza axială de perturbaţie pentru cazul sursei concentrate în $y = s'$ şi dată de expresia următoare [1] :

$$\mathcal{U}_l' = \frac{A_{10}}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi} Q_0 \left[\cos h^{-1}\sqrt{\frac{(l+s')(l-x)}{2l(s'-x)}} + \cos h^{-1}\sqrt{\frac{(l+s')(l+x)}{2l(s'+x)}}\right] =$$

$$= \frac{A_{10}}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi} Q_0 \cos h^{-1}\sqrt{\frac{l^2 - x^2}{s'^2 - x^2}}. \tag{11}$$

Efectuînd integrarea pe axa ordonatelor ($x = i\delta$) între limitele $(0, \infty)$, vom obține

$$A_{10} = -\frac{w_0 l^2}{E(k)} - \frac{2Q_0 (Bl)^2 \sqrt{l^2 - s'^2}\, \Pi(\rho, k)}{\pi E(k)} =$$

$$= -\frac{w_0 l^2}{E(k)} - \frac{2q_0}{3\pi E(k)} B^2 l (l - s)^{5/2} \sqrt{2l + s}\, \Pi(\rho, k), \tag{12}$$

în care $E(k)$ și $\Pi(\rho, k)$ reprezintă integralele eliptice complete de a doua, respectiv a treia speță, avînd modulul k și parametrul ρ, dați de relațiile

$$k = \sqrt{1 - B^2 l^2}, \quad \rho = B^2 s'^2 - 1 = \frac{1}{9} B^2 (l + 2s)^2 - 1. \tag{13}$$

Impunînd acum condiția ca viteza să fie *finită* la bordurile de atac subsonice, vom anula constanta A_{10} și vom obține astfel o nouă relație între w_0 și q_0 :

$$3\pi l w_0 + 2q_0 B^2 (l - s)^{5/2} \sqrt{2l + s}\, \Pi(\rho, k) = 0. \tag{14}$$

Pe de altă parte, viteza verticală medie w, sau incidența medie α, se obține aplicînd relația (2)

$$wl = w_0 s + \int_s^l w'\, dy = w_0 s + w' y \Big|_s^l - \int_s^l y\, dw'; \tag{15}$$

efectuînd calculele, ținînd seama de (3), se obține

$$w_1 - w = \frac{q_0}{2Bl}\left[Bl\sqrt{1 - B^2 l^2} - Bs\sqrt{1 - B^2 s^2} + \sin^{-1} Bl - \sin - 1\, Bs + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3Bl}((1 - B^2 l^2)^{3/2} - (1 - B^2 s^2)^{3/2})\right], \tag{16}$$

care reprezintă a treia relație, între w_0, w_1 și q_0.

Din relațiile (6), (14) și (16) deducem pe w_0, w_1 și q_0 în funcție de incidența reală α a aripii sau de viteza verticală w pe aripă ($w = -\alpha U_\infty$).

Să remarcăm mai departe că, în urma anulării constantei A_{10}, corespunzătoare termenului $(l^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, funcția vitezei axiale de perturbație pentru *aripa portantă* fictivă este

$$\mathcal{U}_l = -\frac{q_0}{\pi}\left[(s - x)\left(1 - \frac{s + x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{l^2 - sx}{l(s - x)} + \right.$$

$$+ (s + x)\left(1 - \frac{s - x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{l^2 + sx}{l(s + x)} +$$

$$\left. + \left(\sqrt{1 - \frac{s^2}{l^2}} - 2\cos^{-1}\frac{s}{l}\right)\sqrt{l^2 - x^2}\right], \tag{17}$$

în care constanta q_0 poate fi exprimată în funcție de α, *incidența reală a aripii*.

b) ARIPA DE GROSIME SIMETRICĂ, AVÎND PANTA EGALĂ CU INCIDENȚA α A ARIPII FICTIVE. Această aripă componentă are rolul de a nivela vîrful de presiune pe intrados, obținîndu-se prin suprapunerea cu aripa subțire de la (*a*) o distribuție de presiuni diferită pe cele două fețe ale aripii. Urmînd metoda generală a mișcărilor conice [1], corespunzătoare unei aripi de grosime simetrică, avînd variația de pantă definită prin aceeași distribuție de surse ca (4), vom putea scrie pentru funcția vitezei axiale de perturbație, pe care o vom nota cu $\mathcal{U}_t$, următoarea expresie:

$$\mathcal{U}_t = \frac{2}{\pi} q_0 \int_s^l \left(1 - \frac{\eta}{l}\right)\left[\cos h^{-1} \sqrt{\frac{(1 + B\eta)(1 - Bx)}{2B(\eta - x)}} + \right.$$

$$\left. + \cos h^{-1} \sqrt{\frac{(1 + B\eta)(1 + Bx)}{2B(\eta + x)}}\right] d\eta + L, \tag{18}$$

care devine, după efectuarea calculelor,

$$\mathcal{U}_t = \frac{q_0}{\pi}\left[(l - x)\left(1 - \frac{l + x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{1 - B^2 lx}{B(l - x)} + \right.$$

$$+ (l + x)\left(1 - \frac{l - x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{1 + B^2 lx}{B(l + x)} -$$

$$- (s - x)\left(1 - \frac{s + x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{1 - B^2 sx}{B(s - x)} -$$

$$- (s + x)\left(1 - \frac{s - x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{1 + B^2 sx}{B(s + x)} +$$

$$\left. + \frac{2}{B}\left(\sin^{-1} Bl - \sin^{-1} Bs + \frac{\sqrt{1 - B^2 l^2} - \sqrt{1 - B^2 s^2}}{2Bl}\right)\sqrt{1 - B^2 x^2}\right] + L, \tag{19}$$

unde termenul L este datorit bordului de atac care are viteza verticală W_1 sau panta $\gamma_1 = \alpha_1$. În expresia (18), y a fost înlocuit prin η pentru a se evita vreo confuzie cu y, care reprezintă abscisa unui punct oarecare din planul $x = y + i\beta$.

c) ARIPA DE GROSIME SIMETRICĂ COMPENSATOARE DE PANTĂ. Vom remarca în continuare că prin introducerea efectului aripii de grosime simetrică de la punctul (*b*) aripa rezultantă a devenit, într-un *sens fictiv*, aripă de *grosime simetrică*, ceea ce este contrar cu realitatea. Pentru a compensa acest lucru și a readuce aripa la o grosime medie nulă, vom introduce o nouă distribuție de surse de o formă oarecare care să corespundă la extremitate vitezei verticale, $-w_1$, sau unei pante, $\gamma_1 = -\alpha_1$. Acestei variații de viteză verticală w'' îi va corespunde o *aripă compensatoare* de grosime

simetrică. Acest lucru este necesar pentru a anula panta medie și, în același timp, pentru anularea efectului pantei $\gamma_1 = \alpha_1$ de la aripa groasă (b), dînd într-adevăr un termen $-L$ care anulează pe cel precedent. În felul acesta se elimină termenul care produce la bordul de atac o viteză tinzînd către infinit după o expresie logaritmică.

În ceea ce privește variația vitezei w'' a acestei noi aripi sau, ținînd seama de (3), a distribuției de surse q'', acestea vor trebui să creeze pe intrados o distribuție de presiuni lentă, cu excepția regiunilor din jurul bordurilor de atac.

În acest scop, pentru simplificare, vom admite că legea de distribuție a surselor este dată de expresia

$$q'' = k_0 y (1 + k_1 y). \tag{20}$$

Analog cu (3), vom avea pentru această aripă

$$q'' = \frac{y}{\sqrt{1 - B^2 y^2}} \frac{\mathrm{d}w''}{\mathrm{d}y}. \tag{21}$$

Luînd în considerație rolul acestei aripi, care va avea ca pantă medie $-w$, vom putea scrie

$$-wl = \int_0^l w'' \,\mathrm{d}y = w'' y \Big|_0^l - \int_0^l y \,\mathrm{d}w'', \tag{22}$$

de unde, ținînd seama de (20) și (21), obținem relația următoare :

$$w - w_1 = \frac{k_0}{l}\left[\frac{1}{3B^2}(1 - (1 - B^2 l^2)^{3/2}) + \right.$$

$$\left. + \frac{k_1}{8B^3}(\sin^{-1} Bl + Bl\sqrt{1 - B^2 l^2} - 2Bl(1 - B^2 l^2)^{3/2})\right]. \tag{23}$$

Adunînd (23) cu (16), obținem următoarea relație între q_0, k_0 și k_1 :

$$\frac{1}{2} q_0 \left[Bl\sqrt{1 - B^2 l^2} - Bs\sqrt{1 - B^2 s^2} + \sin^{-1} Bl - \sin^{-1} Bs + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3Bl}((1 - B^2 l^2)^{3/2} - (1 - B^2 s^2)^{3/2})\right] + k_0\left[\frac{1}{3B}(1 - (1 - B^2 l^2)^{3/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{k_1}{8B^2}(Bl\sqrt{1 - B^2 l^2} + \sin^{-1} Bl - 2Bl(1 - B^2 l^2)^{3/2})\right] = 0 \cdot \tag{24}$$

În acest mod am realizat ca cele două aripi *groase* componente (b) și (c) să se reducă la o aripă de pantă medie nulă.

Pentru această *aripă compensatoare*, funcţia vitezei axiale, pe care o vom nota cu $\mathcal{U}_c$, va fi dată de o expresie analoagă cu (18), unde vom ţine seama de indicaţiile date în [1] cu privire la scurgerile conice, înlocuind y prin η :

$$\mathcal{U}_c = \frac{2}{\pi} k_0 \int_0^l \eta (1 + k_1 \eta) \left[\cos h^{-1} \sqrt{\frac{(1 + B\eta)(1 - Bx)}{2B(\eta - x)}} + \right.$$
$$\left. + \cos h^{-1} \sqrt{\frac{(1 + B\eta)(1 + Bx)}{2B(\eta + x)}} \right] d\eta - L. \tag{25}$$

Efectuînd aceste integrale, obţinem

$$\mathcal{U}_c = \frac{k_0}{2\pi B^2} \left[B^2 (l^2 - x^2) \left(\cos h^{-1} \frac{1 - B^2 lx}{B(l - x)} + \cos h^{-1} \frac{1 + B^2 lx}{B(l + x)} \right) + \right.$$
$$+ 2B^2 x^2 \cos h^{-1} \frac{1}{Bx} + 2(1 - \sqrt{1 - B^2 l^2}) \sqrt{1 - B^2 x^2} \Big] +$$
$$+ \frac{k_0 k_1}{3\pi B^3} \left[B^3 (l^3 - x^3) \cos h^{-1} \frac{1 - B^2 lx}{B(l - x)} + \right.$$
$$+ B^3 (l^3 + x^3) \cos h^{-1} \frac{1 + B^2 lx}{B(l + x)} + (2 \sin^{-1} Bl\, B^2 x^2 +$$
$$\left. + \sin^{-1} Bl - Bl \sqrt{1 - B^2 l^2}) \sqrt{1 - B^2 x^2} \right] - L, \tag{26}$$

în care L este acelaşi termen ca în (19).

Adunînd expresiile (17), (19) şi (26), vom găsi în cele din urmă funcţia vitezei axiale de perturbaţie totale :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_l + \mathcal{U}_t + \mathcal{U}_c. \tag{27}$$

Să remarcăm însă că viteza axială U_l de pe intrados este egală cu cea de pe extrados, dar de semn contrar.

3. CALCULUL DISTRIBUŢIEI DE PRESIUNI ŞI AL CARACTERISTICILOR AERODINAMICE

În expresiile (17) şi (19) ale vitezelor axiale U_l şi U_t intră constanta q_0, care se deduce din ecuaţiile (6), (14) şi (16). Într-adevăr, eliminînd pe w_0 şi w_1 din aceste ecuaţii, găsim pe q_0 în funcţie de incidenţa reală α a aripii :

$$\frac{q_0}{\alpha U_\infty} = Bl \left[\frac{2B^3 l^3}{3\pi} \left(1 - \frac{s}{l}\right)^{5/2} \sqrt{2 + \frac{s}{l}}\, \Pi(\varrho, k) + Bl \left(1 - \frac{s}{l}\right) \sqrt{1 - B^2 s^2} + \right.$$
$$+ \frac{1}{3Bl} \left((1 - B^2 l^2)^{3/2} - (1 - B^2 s^2)^{3/2} \right) +$$
$$\left. + Bl \left(\cos h^{-1} \frac{1}{Bl} - \cos h^{-1} \frac{1}{Bs} \right) + \sin^{-1} Bl - \sin^{-1} Bs \right]^{-1}, \tag{28}$$

unde $\Pi(\rho, k)$ este integrala eliptică completă de speța a treia în care modulul k și parametrul ρ au fost definiți, mai sus (13). Pentru a utiliza tabelele uzuale de calcul, vom exprima $\Pi(\rho, k)$ în funcție de integralele eliptice de speța întîi și a doua, complete și incomplete, respectiv $K(k)$ și $F(\varphi_0, k')$, $E(k)$ și $E(\varphi_0, k')$:

$$\Pi(\rho, k) = K(k) + \frac{\sqrt{1 - B^2 s'^2}}{B^2 s' \sqrt{l^2 - s'^2}} \left[\frac{\pi}{2} - K(k) E(\varphi_0, k') + (K(k), -E(k)) F(\varphi_0, k') \right], \tag{29}$$

unde s' este dat de (9), ρ și k de (13), iar φ_0 și k' respectiv de următoarele expresii :

$$\varphi_0 = \sin^{-1} \frac{s'}{l}, \quad k' = Bl. \tag{30}$$

Să remarcăm mai departe că în expresia (26) a vitezei axiale $\mathcal{U}_e$ intră celelalte două constante, k_0 și k_1. Pentru simplificare se poate da lui k_1 valoarea

$$k_1 = -\frac{1}{2l}, \tag{31}$$

cu care se obține o distribuție convenabilă a presiunilor pe această aripă compensatoare de grosime simetrică, adică o presiune aproape constantă pe toată aripa, în afară de regiunea din apropierea bordului de atac. În acest caz, introducînd valoarea de mai sus a lui k_1 în ecuația (24), se obține expresia lui k_0 :

$$k_0 = -24 B^2 l q_0 \left[Bl \sqrt{1 - B^2 l^2} - Bs \sqrt{1 - B^2 s^2} + \sin^{-1} Bl - \sin^{-1} Bs + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3Bl} \left((1 - B^2 l^2)^{3/2} - (1 - B^2 s^2)^{3/2} \right) \right] \times$$

$$\times \left[2Bl \left(8 - 5 (1 - B^2 l^2)^{3/2} \right) - 3 \left(\sin^{-1} Bl + Bl \sqrt{1 - B^2 l^2} \right) \right]^{-1}. \tag{32}$$

Vom trece în continuare la calculul coeficientului de portanță. Pentru aceasta, întrucît aripile de grosime simetrică nu dau portanță, vom considera numai coeficientul de presiune datorită *aripii portante subțiri* :

$$C_p = -2 \frac{u_l}{U_\infty} = -2 \operatorname{Re} \frac{\mathcal{U}_l}{U_\infty}. \tag{33}$$

Introducînd această valoare în formula coeficientului de portanță C_z [1].

$$C_z = \frac{4}{l U_\infty} \int_0^l u_l \, dy, \tag{34}$$

vom obţine mai departe, punînd $u_l = \mathrm{Re}\,\mathcal{U}_l$ şi ţinînd seama de (17), următoarea expresie :

$$C_z = \frac{2q_0 l}{U_\infty}\left[\cos^{-1}\frac{s}{l} - \frac{s}{l}\left(1 - \frac{s^2}{l^2}\right)^{1/2} - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{s^2}{l^2}\right)^{3/2}\right]. \tag{35}$$

În ceea ce priveşte însă distribuţia de presiuni, trebuie să considerăm viteza axială totală (27) şi să punem

$$C_p = -2\frac{u}{U_\infty} = -2\mathrm{Re}\,\frac{\mathcal{U}}{U_\infty}. \tag{36}$$

În expresiile de mai sus ale coeficientului de portanţă şi de presiune nu rămîne decît să fixăm, parametrul $\frac{s}{l}$ care intră în componenţa acestor expresii. În acest sens vom remarca că, în cazul distribuţiei de surse variind după relaţia (4), considerată drept ipoteză de bază, valoarea absolută a lui u devine maximă cam în jurul abscisei $y = c$, dată de ecuaţia

$$\frac{c}{l} = \frac{s}{l} + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{s}{l}\right), \quad \left(\frac{s}{l} = 1{,}2\frac{c}{l} - 0{,}2\right). \tag{37}$$

Din punct de vedere fizic, este uşor de admis că c este tocmai abscisa centrului nucleului de vîrtej definit schematic în figura 1.

Vom face mai jos cîteva consideraţii asupra poziţiei acestor nuclee de vîrtejuri.

Poziţia centrului nucleului de vîrtej. Schema formării nucleului de vîrtej, reprezentată în figura 1, este simplă ; în realitate, fenomenul este foarte complicat. Cornetul de vîrtejuri se transformă într-un nucleu principal (cam în proporţie de 80%), de al cărui efect ne vom ocupa în mod special, iar parte rămîne pe cornet în formă de strat de vîrtejuri sau se transformă într-un nucleu mic de margine (tip vortex). La incidenţele mari poate să apară şi alt vîrtej interior (*inboard*), între nucleul principal şi cel mic de margine, de sens contrar cu primele. Nu se poate face o analiză mai strînsă din cauza complexităţii acestui fenomen ; de aceea vom considera schema simplă de mai sus (fig. 1), admiţînd în acelaşi timp şi existenţa acelei mici porţiuni de vîrtejuri de margine care are ca efect reducerea intensităţii totale a nucleului principal, al cărui centru are abscisa $y = c$ pe aripă, pe care tocmai vrem s-o determinăm în mod aproximativ.

Pentru cazul $Bl \ll 1$, tratarea exactă a problemei [3] arată într-adevăr că $c = l$ pentru $\alpha = 0$ şi variază după o lege foarte complicată spre interiorul aripii atunci cînd incidenţa creşte ; însă distanţa c prezisă de teorie se îndepărtează de cea găsită pe cale experimentală.

De aceea, pentru cazul general, vom urma un raționament simplu, care să ne ducă totuși la un rezultat apropiat de realitate. Astfel, spre exemplu, pentru incidențe foarte mici ($\alpha \to 0$), vîrtejurile concentrate ar putea fi considerate ca lipite de suprafața superioară a aripii, ceea ce duce, oricît de mică ar fi intensitatea lor, la viteze locale foarte mari, incompatibile tocmai cu efectele reale ale desprinderii curentului. Trebuie să admitem deci că pentru incidența $\alpha = 0$ corespunde $c = l$, în acord de altfel cu rezultatele teoretice obținute pe aripa efilată ($Bl \ll 1$).

Pentru incidențele mai mari, admițînd că firele de vîrtejuri — care ar porni aproximativ de pe bordurile de atac, fiind proporționale cu lărgimea aripii din aceste puncte — se înfășoară pe o axă reprezentînd linia centrelor de greutate și aduc astfel nucleul la o poziție convenabilă $y = c$.

Vom remarca totuși, după cum s-a menționat mai sus, că intensitatea nucleului de vîrtej este ceva mai mică decît intensitatea turbionară totală, restul fiind în stratul subțire care formează suprafața cornetului și care în general ne dă vîrtejul mic de vîrf. De aceea, așa cum arată și experiența, această distanță minimă oscilează între valorile :

$$c \cong 0{,}6\ l - 0{,}5\ l, \tag{38}$$

care ar corespunde cu centrul de greutate a numai o parte din intensitatea totală a vîrtejurilor (circa 80%), reprezentînd tocmai intensitatea nucleului de vîrtejuri, așa cum s-a spus mai sus.

Ceea ce face ca această poziție să fie greu de stabilit este și faptul că la incidențele mari apar nuclee de vîrtejuri de sens contrar.

Între aceste poziții-limite, ținînd seama și de rezultatele experimentale obținute de diverși autori, care sînt de altfel destul de discordante între ele, vom putea admite o lege aproximativă :

$$\frac{c}{l} \cong \frac{1}{1 + 1{,}7\,(\alpha)^{1/2}}. \tag{39}$$

Valoarea lui c astfel determinată o vom înlocui în (37), pentru a obține pe s care se va introduce în formulele coeficientului de presiune și de portanță, și vom obține astfel expresiile lor în funcție de $\frac{\alpha}{l}$.

4. COMPARAȚIE CU EXPERIENȚELE

S-a stabilit mai sus modul în care se calculează poziția c (39) a nucleului de vîrtejuri, din care se deduce apoi parametrul s (37). Acest parametru va fi introdus în formula coeficientului de portanță C_z (35), pe care l-am calculat pentru diferite valori ale lui Bl și ale incidenței α, pentru care avem și rezultate experimentale, prin măsurători directe efectuate de A. O. Ormerod și A. B. Haines [5].

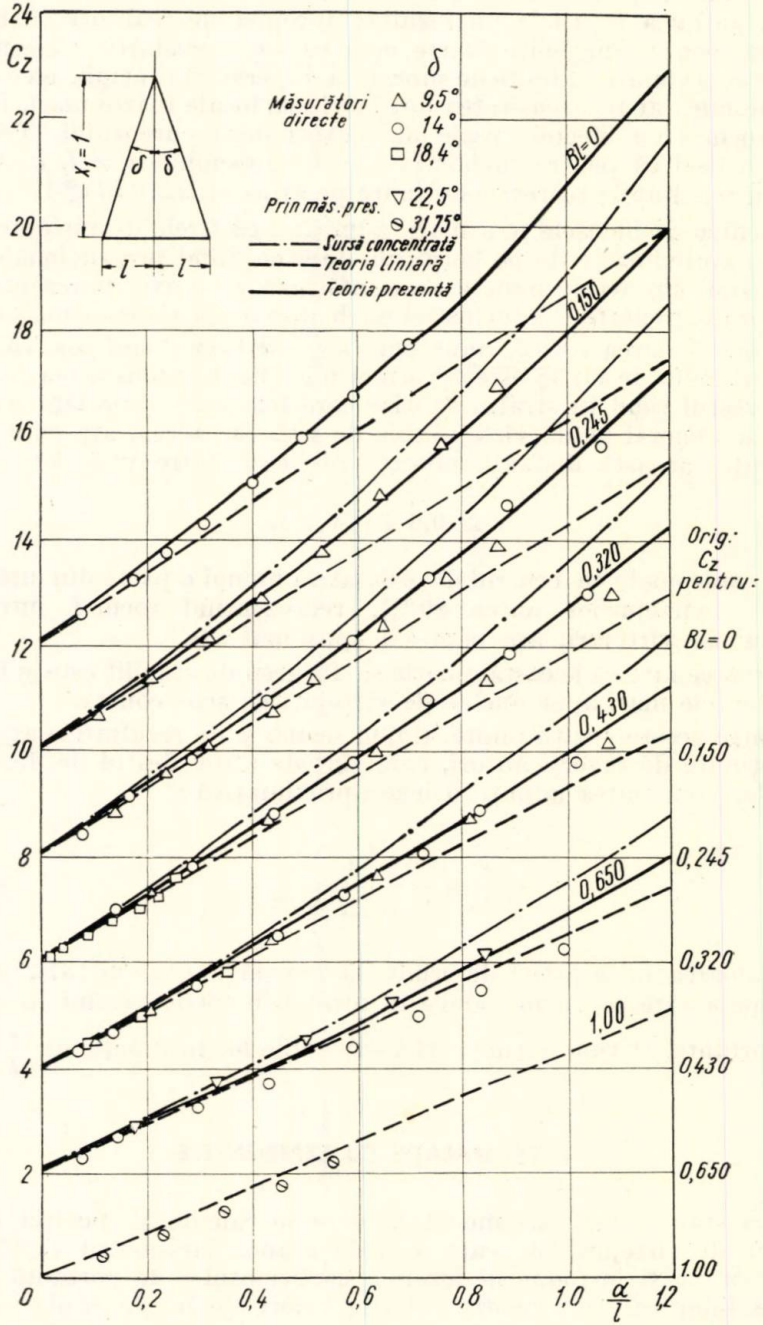
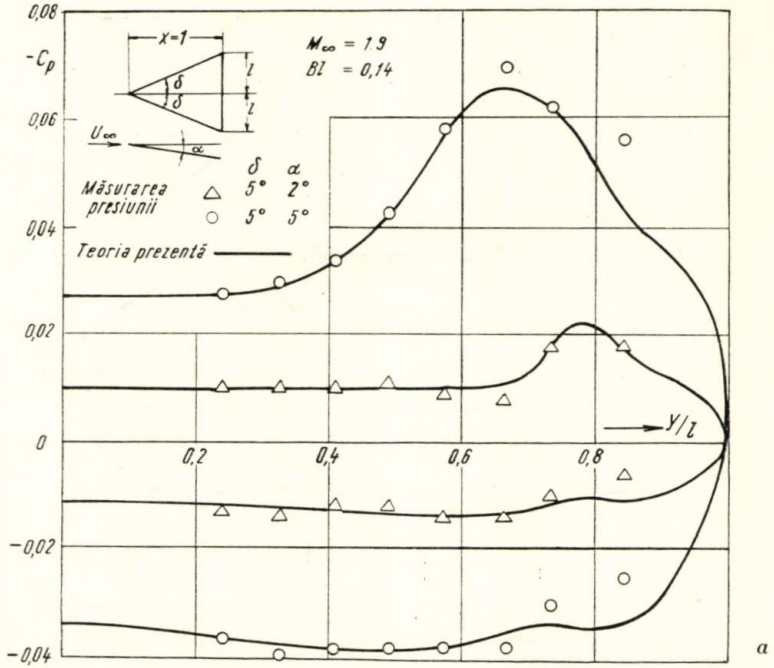
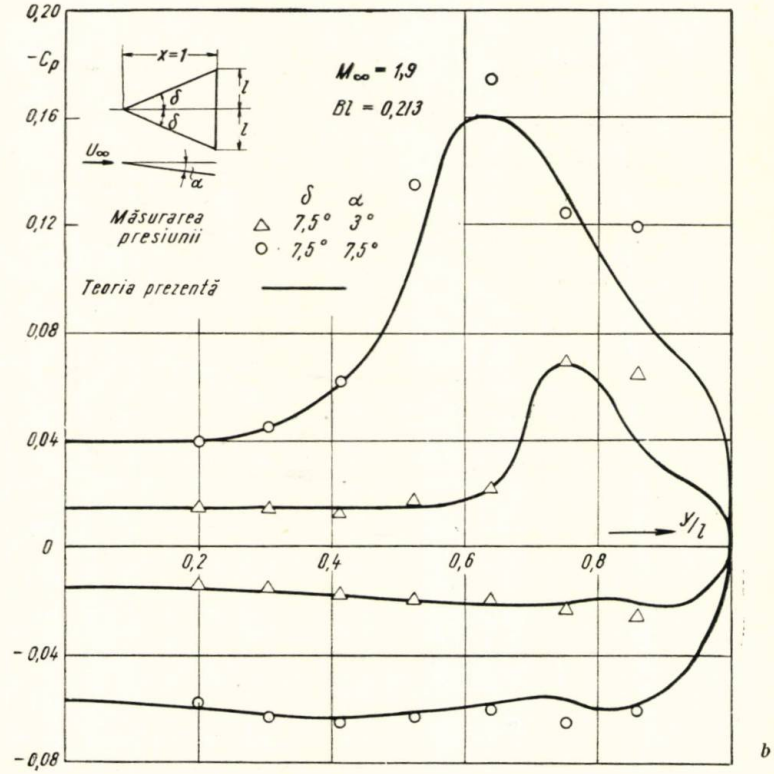

C_z
δ
Măsurători directe
9,5°
14°
18,4°
Prin măs. pres.
22,5°
31,75°
Sursă concentrată
Teoria liniară
Teoria prezentă
$\lambda_1 = 1$
δ δ
l l
Bl=0
0,150
0,245
0,320
0,430
0,650
1.00
Orig.: C_z pentru:
Bl=0
0,150
0,245
0,320
0,430
0,650
1.00
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
$\frac{\alpha}{l}$

Fig. 4

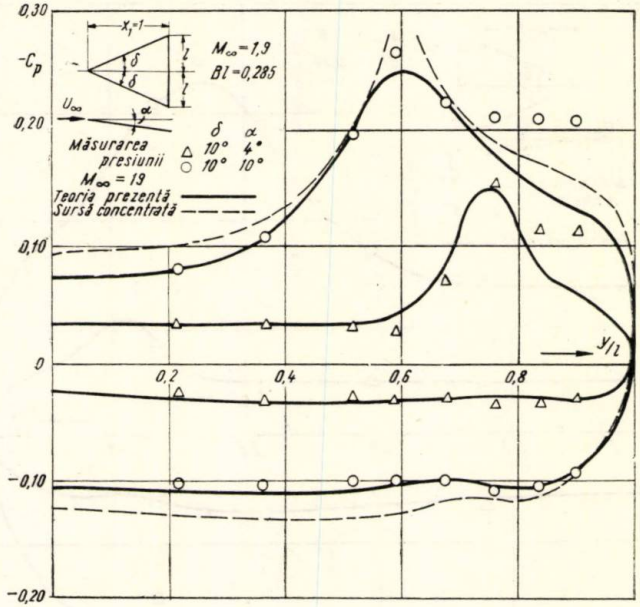

0,08
-Cp
0,06
0,04
0,02
0
-0,02
-0,04
x=1
δ
δ
l
l
U∞
α
M∞ = 1,9
Bl = 0,14
Măsurarea presiunii
δ α
5° 2°
5° 5°
Teoria prezentă
0,2
0,4
0,6
0,8
y/l

a

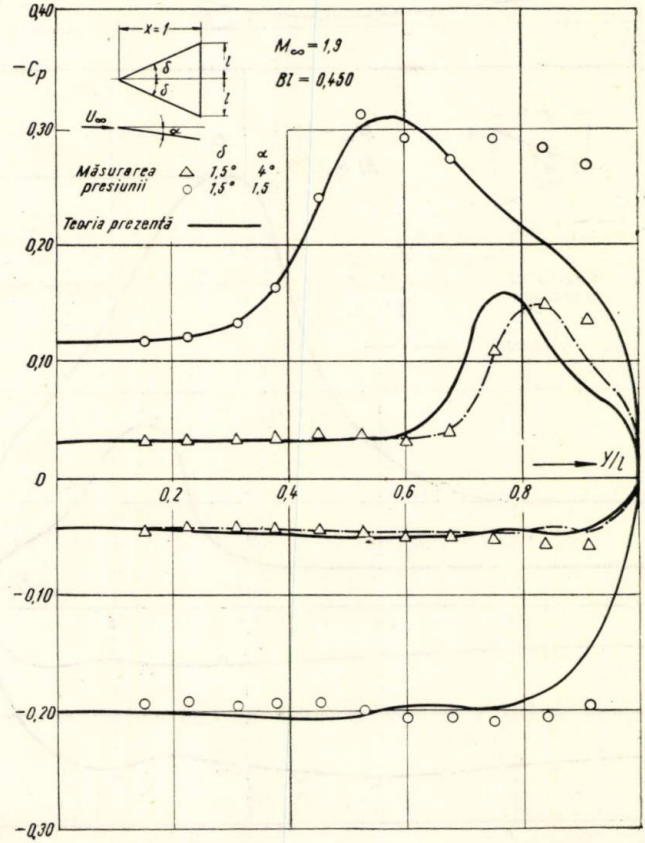

0,20
-Cp
0,16
0,12
0,08
0,04
0
-0,04
-0,08
x=1
δ
δ
l
l
U∞
α
M∞ = 1,9
Bl = 0,213
Măsurarea presiunii
δ α
7,5° 3°
7,5° 7,5°
Teoria prezentă
0,2
0,4
0,6
0,8
y/l

b

Fig. 5 *a*, *b*.


0,30
$-C_p$
0,20
0,10
0
−0,10
−0,20
$x_1=1$
$M_\infty=1,9$
$Bl=0,285$
U_∞
Măsurarea presiunii
δ α
△ 10° 4°
○ 10° 10°
$M_\infty=19$
Teoria prezentă
Sursă concentrată
y/l
0,2
0,4
0,6
0,8

c


0,40
$-C_p$
0,30
0,20
0,10
0
−0,10
−0,20
−0,30
$x=1$
$M_\infty=1,9$
$Bl=0,450$
U_∞
Măsurarea presiunii
δ α
△ 1,5° 4°
○ 1,5° 1,5
Teoria prezentă
y/l
0,2
0,4
0,6
0,8

d

Fig. 5 *c*, *d*.

După cum se vede din diagramele figurii 4, se poate spune că există un bun acord între teorie și experiență.

Acest acord este mai mic, comparînd coeficienții de portanță rezultați prin integrarea presiunilor măsurate de W. H. Michael [6].

Deși considerăm că aceste presiuni au fost foarte bine măsurate, totuși, avînd în vedere dificultățile trasării unei diagrame de presiuni

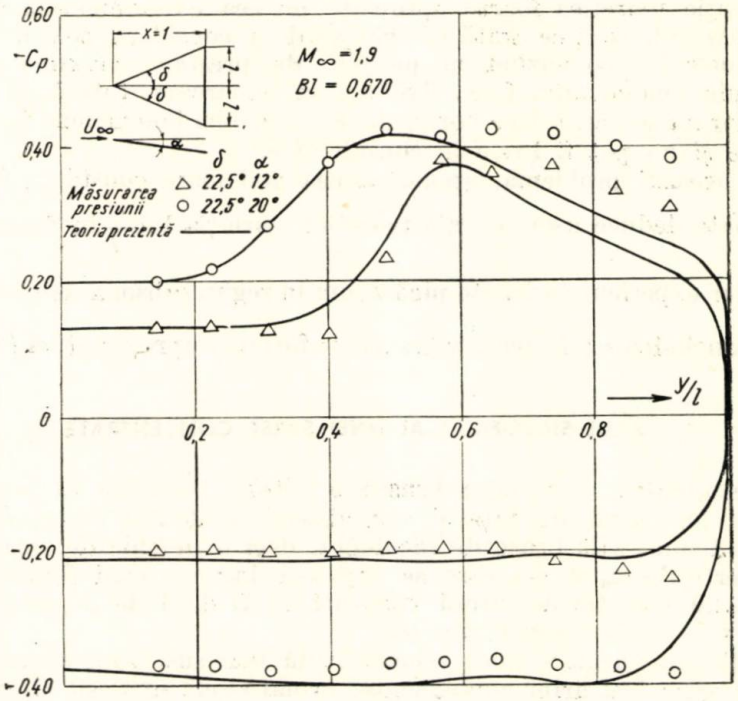


Fig. 5 *e*

experimentale exactă — mai ales în ceea ce privește presiunile din regiunea bordurilor de atac, unde acestea ar putea să fie în mod brusc coborîte —, s-ar putea ca din această cauză integrarea grafică să ducă la o valoare diferită a coeficientului de portanță. Pe de altă parte, s-ar putea admite că măsurătorile directe înlătură unele dintre aceste neajunsuri; de aceea înclinăm să considerăm că măsurătorile directe ar reflecta situația reală. Și într-un caz, și într-altul, la bordul de ieșire al aripii avem influența dîrei din spate și a stratului-limită.

În ceea ce privește distribuția presiunilor pe aripă (fig. 5) se observă un bun acord între presiunile teoretice și rezultatele experimentale obținute de W. H. Michael [6] pentru diferite valori ale lui *Bl* și diferite incidențe α. Într-adevăr, în diagramele din fig. 5 *a*, *b*, *c*, *d*, *e* coeficientul de presiuni urmează de aproape, nu numai calitativ,

dar şi cantitativ, valorile experimentale, ceea ce arată că calea teoretică de tratare a problemei propuse este bine aleasă. În acest sens, făcînd să corespundă poziţia de maximum al depresiunilor cu poziţia centrului nucleului, acolo unde formula (39) nu redă întocmai acest maximum, aşa cum este cazul din figura 5 *d*, pentru $Bl = 0{,}45$, $\frac{\alpha}{l} = 0{,}26$ şi $\alpha = 4°$, şi refăcînd din nou calculul cu noua poziţie experimentală a lui c, obţinem o distribuţie teoretică foarte apropiată de cea experimentală (fig. 5 *d*, linia punctată), ceea ce arată că ipoteza de a considera poziţia c a centrului nucleului coincizînd cu punctul de presiune maximă pe aripă corespunde fenomenului fizic. Trebuie să remarcăm, totuşi, că formula presiunilor nu se verifică pe bordurile de atac, aici fenomenele fiind foarte complexe şi nu pot fi luate în consideraţie.

În această problemă, greutatea cea mai mare constă în faptul că nu se poate deduce uşor pe cale teoretică variaţia lui $\frac{c}{l}$ în funcţie de α sau $\frac{\alpha}{l}$, iar experienţele făcute pînă acum în regim subsonic sau supersonic nu sînt concludente; de aceea vom utiliza formula aproximativă (39).

5. CAZUL SIMPLIFICAT AL UNEI SURSE CONCENTRATE

Presupunînd o variaţie bruscă a vitezei verticale în punctul de abscisă s' (în cazul de faţă $s' = c$, abscisa centrului vîrtejului), vom avea cazul unui salt brusc de incidenţă, deci o muchie de separaţie de viteze verticale w_0 şi w_1, care se tratează într-un mod foarte simplu [1]. Această variaţie de viteză verticală va fi dată de o sursă concentrată în $s' = c$, de intensitatea Q_0.

Dacă vom urmări calea schematizată mai sus, vom obţine, corespunzător celor trei aripi componente, următoarele expresii ale vitezelor axiale de perturbaţie:

$$\mathcal{U}_l' = \frac{2}{\pi} Q_0 \left[\cos h^{-1} \sqrt{\frac{(l+c)(l-x)}{2l(c-x)}} + \cos h^{-1} \sqrt{\frac{(l+c)(l+x)}{2l(c+x)}} \right] +$$

$$+ \frac{A_{10}}{\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{2}{\pi} Q_0 \cos h^{-1} \sqrt{\frac{l^2 - x^2}{c^2 - x^2}} + \frac{A_{10}}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \tag{40}$$

exact ca (11), în care însă am înlocuit s' prin c, pentru *aripa portantă*, ceea ce corespunde aripii subţiri imaginată de Squire [5],

$$\mathcal{U}_l' = \frac{2}{\pi} Q_0 \left[\cos h^{-1} \sqrt{\frac{(1+Bc)(1-Bx)}{2B(c-x)}} + \cos h^{-1} \sqrt{\frac{(1+Bc)(1+Bx)}{2B(c+x)}} \right] + L =$$

$$= \frac{2}{\pi} Q_0 \cos h^{-1} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (c^2 - x^2)}} + L, \tag{41}$$

pentru *aripa de grosime simetrică*, avînd panta egală cu incidența α a primei aripi fictive, care s-a dedus din (18), considerînd însă sursa Q_0 concentrată în c, în locul acelei distribuite liniar [1], și

$$\mathcal{U}'_c \equiv \mathcal{U}_c, \tag{42}$$

pentru *aripa compensatoare* de pantă, unde $\mathcal{U}_c$ are expresia dată de (26).

Remarcînd că semnul vitezei axiale $\mathcal{U}'_l$ pe extrados este diferit de cel de pe intrados, vom găsi funcția vitezei axiale de perturbație totală, însumînd cele trei viteze de mai sus,

$$\mathcal{U}' = \mathcal{U}'_l + \mathcal{U}'_l + \mathcal{U}'_c, \tag{43}$$

cu ajutorul căruia se obține distribuția de presiuni pe aripă (37).

Să observăm mai departe că în expresiile vitezelor axiale de perturbație (41), (42) și (43) apar constantele Q_0, k_0 și k_1, care urmează a fi determinate. Astfel, determinînd constanta A_{10} ca mai sus (12) și egalînd-o cu zero pentru ca viteza să fie *finită* la bordul de atac, se găsește

$$-\frac{w_0 l^2}{E(k)} - \frac{2Q_0 (Bl)^2 \sqrt{l^2 - c^2}\, \Pi(\rho, k)}{\pi E(k)} = A_{10} = 0, \tag{44}$$

unde $E(k)$ și $\Pi(\rho, k)$ sînt integralele eliptice complete de speța a doua și a treia de modul k și parametru ρ dați de (13), în care însă s' va fi înlocuit cu c. Utilizînd mai departe ecuațiile (15), (5) și (22) pentru cazul simplificat al sursei concentrate, vom avea relațiile următoare:

$$w_0 C + w_1 (l - c) = wl, \tag{47}$$

$$\frac{(w_0 - w_1)\, c}{\sqrt{1 - B^2 c^2}} = Q_0, \tag{46'}$$

$$k_0 \left[\frac{1}{3B^2} (1 - (1 - B^2 l^2)^{3/2}) + \frac{k_1}{8B^3} (\sin^{-1} Bl + Bl \sqrt{1 - B^2 l^2} - \right.$$
$$\left. - 2Bl (1 - B^2 l^2)^{3/2}) \right] = (w - w_1)\, l. \tag{45''}$$

Dacă vom considera și de această dată $k_1 = -\dfrac{1}{2l}$, rămîn ca necunoscute Q_0, k_0, w_0 și w_1, ale căror expresii, obținute în același mod ca în cazul general tratat mai sus, vor fi, respectiv,

$$\frac{Q_0}{\alpha U_\infty} = \frac{\pi lc}{2B^2 cl \sqrt{l^2 - c^2}\, \Pi(\rho, k) - \pi \sqrt{1 - B^2 c^2}\, (l - c)}, \tag{46}$$

$$\frac{w_0}{w} = \frac{2B^2 cl \sqrt{l^2 - c^2}\, \Pi(\rho, k)}{2B^2 cl \sqrt{l^2 - c^2}\, \Pi(\rho, k) - \pi \sqrt{1 - B^2 c^2}\, (l - c)}, \tag{46'}$$

$$\frac{w_1}{w} = \frac{2B^2 cl \sqrt{l^2 - c^2}\, \Pi(\rho, k) - \pi l \sqrt{1 - B^2 c^2}}{2B^2 cl \sqrt{l^2 - c^2}\, \Pi(\rho, k) - \pi \sqrt{1 - B^2 c^2}\, (l - c)}, \tag{46''}$$

$$k_0 = 48 B^2 l\, Q_0 \sqrt{1 - B^2 c^2}\, [2Bl (8 - 5 (1 - B^2 l^2)^{3/2}) - 3 (\sin^{-1} Bl +$$
$$+ Bl \sqrt{1 - B^2 l^2})]^{-1}. \tag{46'''}$$

Pentru determinarea coeficientului de portanță, vom porni de la (34), în care vom introduce expresia lui $u_l' = \mathrm{Re}\, u_l'$ și vom obține

$$C_z = \frac{4}{lU_\infty} \int_0^l u_l' \, dy = \frac{4\,Q_0}{U_\infty} \sqrt{1 - \frac{c^2}{l^2}}, \tag{47}$$

Pentru comparația cu experiențele și cu rezultatele teoretice obținute în cazul sursei distribuite, am reprezentat punctat în figura 5 *c* distribuția de presiuni pentru $Bl = 0{,}285$, $\alpha = 10^\circ$ $\left(\frac{\alpha}{l} = 1\right)$. Se observă că variația presiunilor urmărește de aproape pe cea obținută în aceleași condiții, dar, considerînd o distribuție liniară de surse, în locul sursei concentrate. În figura 4 am reprezentat punctat, folosind formula (48), variația coeficientului de portanță în funcție de incidența α pentru diverse valori ale lui *Bl*. Aceste curbe sînt similare cu cele ale lui Squire [5], deosebindu-se numai prin abscisa centrului vîrtejului (39). Se constată că valorile obținute sînt cu puțin mai mari ca cele obținute mai sus în cazul unei surse distribuite liniar, dar sînt în bun acord cu rezultatele experimentale deduse prin integrarea presiunilor, pe care nu le-am reprezentat în diagramă, pentru motivele arătate mai sus, în legătură cu cele două metode de calcul ale coeficientului de portanță, prin măsurători directe și prin integrarea presiunilor [6].

Primită la redacție la 23 februarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *High-Speed Aerodynamics*, București, Edit. tehnică, 1956.
2. L. C. Squire, *The Characteristics of Some Slender Gothic Wings at Mach Numbers from 0.4 to 2.00*, R & M, *3370* (1964).
3. K. W. Mangler, J. H. Smith, *A Theory of the Flow Past a Slender Delta Wing with Leading Edge Separation*, Proc. Roy. Soc., May, 1959.
4. D. Küchemann, *A Non-Linear Lifting-Surface Theory for Wings of Small Aspect-Ratio With Edge Separation*, R.A.E. Rep. 2 540, April, 1955.
5. L. C. Squire, *The Estimation of the Non-Linear Lift of Delta Wings at Supersonic Speeds*, Journ. R.A.S., Aug. 1963.
6. W. H. Michael, *Flow Studies on Flat-Plate Delta Wings at Supersonic Speed*, NACA TN 3 472, July, 1955.
7. E. Carafoli, D. Mateescu, *Sur une clase d'ailes delta à incidence et pente variables d'après des fonctions homogènes, en régime supersonique*, Rev. Roum. Sci. Tech. — Mécanique Appliquée, **X**, *2* (1965).
8. P. Germain, *Théorie générale des mouvements coniques et ses applications à l'aérodynamique supersonique*, Thèse Sorbonne, Paris, 1949. Publication No. 34 de l'ONERA, Paris, France.
9. P. Germain, *La théorie des mouvements homogènes et son application au calcul de certaines ailes delta en régime supersonique*, La Rech. Aéron, *7* (1949).
10. C. E. Brown, W. H. Michael, *Effect of Leading-Edge Separation on the Lift of a Delta Wing*, J.A.S., *21*, 690 (1954).
11. C. E. Brown, W. H. Michael, *On Slender Delta Wings with Leading Edge Separation*, NACA TN 3 430.

12. M. Roy, *Caractères de l'écoulement autour d'une aile en flèche accentuée*, C.R. Ac. Sc., *234*, 2 501 (1952).
13. — *Sur la théorie de l'aile delta. Tourbillons d'apex et nappes en cornets*, C.R. Ac. Sc., R.A. *56* (1957).
14. — *Remarques sur l'écoulement autour des ailes en flèche*, Zeits. f. ang. Math. w. Phys., 554 (1958).
15. — *De la formation des zones tourbillonnaires dans les écoulements à faible viscosité*, Conf. L. Prandtl, mai 1959 (și Zeits. f. Flugw., Aug. 1959).
16. R. Legendre, *Nappes de tourbillons déferlant des bords d'attaque des ailes en delta*, ONERA, Commun. Présentée au Symposium IUTAM, Ann-Arbor, 6—10 juillet 1964.
17. — *Nappes en cornets au bords d'attaque d'une aile en delta*, R.A., *70* (1959).
18. — *Tourbillons en cornets des ailes delta*, C.R. Ac. Sc., Déc., 1963.
19. — *Nappes des tourbillons en cornets*, C.R. Ac. Sc., Janv., 1964.
20. H. Werlé, C. Fiant, *Visualisation hydrodynamique de l'écoulements a basse vitesse autour d'une maquette d'avion du type „Concorde"*, ONERA, La Recherche Aérospatiale, *102* (1964).
21. R. H. Edwards, *Leading-Edge Separation from Delta Wings*, J.A.S., Feb., 1954.

ASUPRA LUBRIFICAȚIEI MAGNETOGAZODINAMICE[1)]

de V. N. CONSTANTINESCU
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

Se studiază mișcarea unui gaz în straturi subțiri în ipoteza că acesta posedă o conductibilitate electrică și că mișcarea este influențată de existența unor cîmpuri electromagnetice exterioare.
Plecînd de la ecuațiile generale ale magnetogazodinamicii și operînd o serie de simplificări similare cazului curent al lubrificației cu gaze, se deduc ecuațiile de mișcare în stratul de lubrifiant în condițiile existenței unor cîmpuri electrice și magnetice oarecare. Se operează apoi o serie de particularizări în privința condițiilor electromagnetice, ținînd seama și de posibilitățile practice de realizare a lor, reținîndu-se două situații mai interesante : (I) cazul existenței unui cîmp magnetic transversal cu suprafețele lubrifiante izolatoare și (II) cazul existenței unui cîmp magnetic tangențial combinat cu un cîmp electric transversal (curent normal pe suprafețe, acestea jucînd rolul unor electrozi).
Pentru cele două cazuri menționate se integrează ecuațiile de mișcare, deducîndu-se distribuțiile de viteză, iar apoi, cu ajutorul ecuației de continuitate, se scriu ecuațiile diferențiale ale presiunilor. Ultima parte a lucrării cuprinde un studiu calitativ al ecuației presiunilor, cu scopul de a pune în evidență particularitățile și avantajele lubrificației magnetogazodinamice.

INTRODUCERE

Este cunoscut faptul că în lubrificația cu lichide sau cu gaze formarea filmului de lubrifiant se datorește în mod obișnuit unui efect pur hidrodinamic (sau gazodinamic), care se bazează pe antrenarea lubri-

[1)] Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, *4* (1966) (în limba engleză).

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 22 NR. 4 P. 1011–1037 BUCUREȘTI 1966

fiantului de către suprafețe datorită viscozității acestuia. În acest mod, în fiecare moment există un echilibru între variația tensiunilor de frecare după normala la stratul de lubrifiant și gradientul de presiune în direcția mișcării, gradient care apare astfel ca datorit în exclusivitate variației grosimii filmului de lubrifiant în direcția mișcării, respectiv în sensul de deplasare a suprafeței mobile sau a vitezei relative dintre suprafețe. Ca rezultat apare o distribuție a presiunii, care depinde, în afară de forma și de dimesiunile filmului de lubrifiant, de vitezele tengențiale (și eventual normale) ale suprafețelor și de viscozitatea lubrifiantului.

În cazul lubrificației cu lichide, presiunile care apar ca urmare a efectului hidrodinamic de lubrificație sînt relativ mari, deoarece viscozitatea lubrifiantului are, în genere, valori mari. În plus, în cazurile extreme cînd viteza suprafețelor se anulează (de exemplu la pornire și oprire) și cînd capacitatea portantă a peliculei se anulează, proprietățile fizico-chimice ale lubrifiantului (îndeosebi capacitatea de adeziune pe suprafețe, onctuozitatea) fac ca filmul de lubrifiant să nu poată fi expulzat în întregime, astfel încît asemenea regimuri pot fi în genere suportate în condiții satisfăcătoare de către ansamblul de frecare (lagăr).

În cazul lubrificației cu gaze, problema asigurării unei capacități portante corespunzătoare a peliculei este mult mai dificilă. Astfel, în comparație cu lubrifianții lichizi, gazele au o viscozitate considerabil mai redusă, fapt care reduce în mod corespunzător presiunile care se nasc. În plus, efectul compresibilității lubrifiantului tinde să mărginească mărimea presiunilor, a căror variație în funcție de viteza suprafeței mobile se depărtează continuu de la relația liniară existentă în cazul incompresibil, iar la limită devine o funcție mărginită care depinde exclusiv de poziția momentană a suprafețelor. În sfîrșit, în situațiile extreme în care viteza suprafețelor se anulează (porniri, opriri) se produce o frecare uscată care nu întotdeauna poate fi admisă fără consecințe defavorabile importante pentru funcționrea ansamblului de frecare.

Din aceste motive, pentru lubrificația cu gaze este deosebit de importantă căutarea unor posibilități de mărire a presiunilor sau realizarea de noi sisteme de lubrificație. În această privință, cel mai simplu mod de creare a unor presiuni suplimentare în peliculă este introducerea de energie din exterior direct sub formă potențială, respectiv alimentarea cu gaze sub presiune, situația care este în momentul de față folosită pe scară largă în construcția lagărelor lubrificate cu gaze.

Și, totuși, alimentarea sub presiune nu rezolvă decît în parte problema, deoarece, pe de o parte, capacitatea portantă rămîne în continuare redusă (limitată de obicei la presiuni medii efective de ordinul a cel mult cîteva kilograme pe centimetrul pătrat), iar pe de altă parte debitele necesare, mult mai mari, devenind prohibitive pentru lagăre de dimensiuni mari. În consecință, căutarea altor posibilități de realizare a unor presiuni cît mai mari în filmul de gaz rămîne o problemă în per-

manență actuală și de mare importanță pentru extinderea domeniului de aplicații posibile a lubrificației cu gaze.

De aceea, chiar dacă pentru moment prezintă un interes mai mult academic, apare totuși oportună examinarea posibilităților de introducere de energie în stratul de lubrifiant sub alte forme decît cea pur mecanică, cu scopul de a mări presiunile și eventual, dacă este posibil, de a reduce frecările. Astfel, o posibilitate (menționată încă în lucrarea [1] și ulterior de Gross cu ocazia trecerii în revistă a stadiului de dezvoltare a problemei lubrificației cu gaze [2]) este aceea de a introduce în filmul de gaz o energie electromagnetică. Pentru aceasta este însă necesar ca gazul lubrifiant să fie bun conducător de electricitate, respectiv să fie în stare ionizată. Din păcate, o plasmă stabilă se poate obține de obicei numai la temperaturi ridicate, prohibitive unor aplicații tehnice în stadiul actual. Totuși, există cel puțin principial posibilitatea de a obține un gaz ionizat chiar la temperaturi ordinare, folosind acțiunea ionizantă a unor radiații exterioare sau a înseși suprafețelor lagărului sau eventual a unor descărcări electrice de înaltă tensiune. Astfel, cel puțin în unele situații speciale, în prezența unor radiații puternice, ca agregatele din unele instalații nucleare sau de pe nave cosmice, există posibilitatea principială a unei folosiri a lubrificației magnetogazodinamice.

Din punct de vedere teoretic, problema este abordabilă cu ajutorul ecuațiilor mecanicii fluidelor vîscoase și ale electromagnetismului, considerînd, bineînțeles, interacțiunea ce apare între cîmpul de viteze, presiune etc. și cîmpul magnetic. Aceste ecuații sînt de altfel cunoscute și pot fi urmărite în tratatele de specialitate [3]. Pentru fluide incompresibile, cele două tipuri de mișcări care prezintă interes în lubrificație (Poiseuille și Couette) au fost studiate în ipoteza existenței unui cîmp magnetic transversal încă din 1937 de Hartmann [4]. Recent, aceste rezultate au fost folosite pentru studiul lubrificației cu lichide (magnetohidrodinamice) într-un număr de lucrări aplicabile în cazul lubrificației cu metale lichide (mercur, sodiu sau alte metale topite etc). Astfel, Snyder [5] și apoi Osterlee și Young [6] au examinat cazul unui lagăr plan supus unui cîmp magnetic uniform transversal. Rezultatele obținute de Snyder au fost extinse la cazul lagărelor circulare supuse unui cîmp magnetic radial de Kuzma [7], [8] și Fucks și Uhlenbusch [9]. În același timp, într-o serie de lucrări, Hughes și Elco au examinat influența unor curenți electrici și a unui cîmp magnetic asupra lagărelor hidrostatice (alimentate sub presiune) [10], [11] și, respectiv, influența unui cîmp magnetic tangențial combinat cu circuite electrice asupra lagărelor plane și circulare [12], [13]. În sfîrșit, influența unor cazuri speciale de condiții la limită a fost studiată recent de Snyder [14], iar influența mișcării de apropiere și depărtare a două suprafețe paralele de Kuzma [15]. După cum știm, cazul lubrificației cu medii compresibile sub acțiunea unor cîmpuri electrice sau magnetice nu a fost încă abordat. De altfel, cu anumite particularizări sau extensiuni, rezultatele menționate în lucrările citate pot fi utilizate, cel puțin în privința ecuațiilor de bază, la construirea unei teorii a lubrificației magnetogazodinamice, care este tocmai scopul prezentei lucrări.

ECUAȚIILE LUBRIFICAȚIEI MAGNETOGAZODINAMICE

Ecuațiile lubrificației magnetogazodinamice pot fi deduse fie plecînd de la ecuațiile generale ale magnetogazodinamicii [3] și operînd simplificările care decurg din faptul că mișcarea are loc în straturi foarte subțiri, fie direct, plecînd de la ecuațiile lubrificației cu gaze, în care se introduc termeni noi, datorită influenței cîmpului electromagnetic asupra mișcării. Pentru simplitate vom alege această din urmă cale.

Vom considera totodată gazul ca un mediu macroscopic continuu atît din punctul de vedere al proprietăților mecanice, cît și electromagnetice. În realitate, ultima ipoteză reprezintă o aproximație în sensul că ar fi necesară considerarea gazului ca un amestec de mai multe specii : ioni, electroni, particule neutre etc., cu un grad de ionizare care poate fi uniform în spațiu sau timp și cu viteze de difuziuni ale diferitelor specii de asemenea neuniforme. Deși studiul în asemenea condiții este în principiu posibil [3], el este însă deosebit de dificil. Astfel, pe de o parte, gazul nu mai poate fi studiat în ansamblu ca un singur mediu continuu, ci trebuie scrise sisteme de ecuații pentru fiecare din cele n specii care îl compun. Apoi trebuie să se țină seama de însuși mecanismul de ionizare (prin coliziuni termice, fotoionizare, prin coliziuni de electroni, efecte simultane sau ionizări cumulative etc.) și, în final, de gradul de ionizare, definit ca raportul dintre numărul de ioni din specia r și numărul de atomi neutri inițial din aceeași specie care există în unitatea de volum, grad de ionizare care poate fi variabil în timp sau funcție de punct. Ca urmare, o serie de parametri mecanici pot fi influențați. De exemplu, ecuația de stare pentru specia r depinde de gradul de ionizare și, de asemenea, energia internă, ca și coeficienții de transfer ai gazului global (viscozitatea μ, coeficientul de conductibilitate termică $\varkappa_T$), depinde de gradul de ionizare. În sfîrșit, influența cea mai importantă o are gradul de ionizare asupra coeficientului de conductibilitate electrică al gazului și, prin intermediul acestuia, asupra efectului pe care cîmpul electromagnetic îl are asupra mișcării. Mai mult, legea lui Ohm, care leagă cîmpul electromagnetic de curentul electric care apare, nu mai este riguroasă sau, cel puțin, prin aceasta conductibilitatea electrică nu mai poate fi privită ca un scalar, ci ca un tensor care depinde nu numai de punct, ci și de direcția considerată. În concluzie, considerarea corectă a problemei trebuie efectuată pe baza unui studiu microscopic, oarecum analog în cazul lubrificației cu gaze considerării caracterului molecular al mișcării.

Într-o primă aproximație se poate totuși admite gazul ca un mediu continuu și izotrop, afectat de anumite caracteristici mecanice și electromagnetice globale. În asemenea condiții, ecuațiile de stare și de continuitate se pot scrie sub formele obișnuite

$$\frac{p}{\rho} = RT \tag{1}$$

și, respectiv,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0, \tag{2}$$

iar ecuațiile de mișcare (dacă se neglijează și influența presiunii de radiație) se scriu de asemenea sub forma obișnuită, în care apar în plus, ca o componentă a forțelor exterioare, forțele ponderomotorii datorite cîmpului electromagnetic

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + (\vec{v}\tau_0) + \vec{f}_g + \vec{f}_e, \tag{3}$$

unde ρ este densitatea, p presiunea, R constanta gazului, T temperatura absolută, t timpul, $\vec{v}(u, v, w)$ viteza într-un punct, τ_0 tensorul tensiunilor minus presiunea de înmulțit cu tensorul unitar, $\vec{f}_g$ forțele exterioare neelectrice pe unitatea de masă și, în sfîrșit, $\vec{f}_e$ forțele datorită cîmpului electromagnetic.

Ecuațiile de mișcare (3) pentru cazul lubrificației se vor scrie, considerînd axa y dirijată după normala la una dintre suprafețe, sub forma obișnuită, la care se adaugă componentele forței $\vec{f}_e$, respectiv

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_{e_x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= f_{e_y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_{e_z} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

sau, dacă se consideră și influența forțelor de inerție,

$$\left.\begin{aligned} \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_{e_x} \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} + f_{e_y} \\ \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_{e_z} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

unde μ este viscozitatea gazului.

La rîndul său, forța $\vec{f}_e$ poate fi scrisă în funcție de cîmpul electric $\vec{E}$, de cîmpul magnetic $\vec{H}$ (sau de inducția magnetică $\vec{B}$) și de densitatea de curent electric $\vec{J}$ sub forma [3]

$$\vec{f}_e = \rho_e \vec{E} + \mu_e (\vec{J} \times \vec{H}) = \rho_e \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \tag{6}$$

unde μ_e este permeabilitatea magnetică $\left(\mu_e = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{kgm}}{\text{coulomb}^2} \text{ în sistemul MKS}\right)$, iar ρ_e densitatea de sarcină electrică (pentru un gaz complet ionizat, la care numărul de ioni este aproximativ egal cu numărul de electroni, pentru cazul considerat în ansamblu este zero).

La rîndul lor, mărimile $\vec{E}$, $\vec{J}$, $\vec{H}$ sînt legate între ele prin ecuațiile lui Maxwell [3]

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \varepsilon \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \mu_e \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

unde $\varepsilon \mu_e = 1/c^2$ (c — viteza luminii), iar $\vec{D}$ inducția electrică, prin ecuația de conservare a sarcinii electrice

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \vec{J} = 0 \tag{8}$$

și prin legea lui Ohm generalizată (în care se neglijează o serie de efecte considerate secundare într-o primă aproximație: curentul Hall, anizotropia proprietăților electromagnetice etc.)

$$\vec{J} = \vec{i} + \rho_e \vec{v} = \sigma [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] + \rho_e \vec{v} = \sigma [\vec{E} + \mu_e \vec{v} \times \vec{H}] + \rho_e \vec{v} \tag{9}$$

unde σ este conductibilitatea electrică, ca și unele relații ajutătoare derivate din relațiile de mai sus:

$$\nabla \vec{B} = \mu_e \nabla \vec{H} = 0 \tag{10}$$

și

$$\nabla \vec{D} = \rho_e \text{ sau } \nabla \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon}. \tag{11}$$

Ecuaţiile de mai sus pot fi simplificate în anumite condiţii, şi anume dacă vitezele $\vec{v}$ sînt mult mai reduse în valoare absolută decît viteza luminii, dacă nu se iau în considerare mişcări cu variaţii în timp prea rapide (mai precis, scara timpului să fie de ordinul l/v, unde l este o lungime caracteristică, iar v o viteză caracteristică, de exemplu viteza suprafeţei mobile) şi, în sfîrşit, dacă energia cîmpului electric $\frac{\varepsilon E^2}{2}$ este mai mică sau cel mult de acelaşi ordin de mărime cu energia cîmpului magnetic $\frac{\mu_e H^2}{2}$. Cazul $\frac{\varepsilon E^2}{2} \ll \frac{\mu_e H^2}{2}$ este cazul magnetogazodinamicii cînd se consideră în primul rînd influenţa unor cîmpuri magnetice exterioare, iar cazul $\frac{\varepsilon E^2}{2} \sim \frac{\mu_e H^2}{2}$ reprezintă de fapt electromagnetogazodinamica. Pentru ambele cazuri, simplificările care se pot opera sînt aceleaşi, şi anume: inducţia electrică poate fi neglijată în ecuaţia cîmpului magnetic (7), iar curentul de convecţie $\rho_e \vec{v}$ este neglijabil în legea lui Ohm (9), respectiv ρ_e este neglijabil în relaţiile (8) şi (11).

În aceste condiţii, atît expresia forţelor $\vec{f}_e$ (6), cît şi ecuaţiile lui Maxwell şi cele derivate din acestea (7), (10) se pot scrie exact sub aceeaşi formă ca pentru cazul lubrificaţiei cu lichide bune conducătoare de electricitate [4]—[15], respectiv

$$\left.\begin{aligned} \vec{f}_e &= \vec{J} \times \vec{B} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \vec{J} &= 0 \\ \vec{J} &= \sigma\,[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \\ \nabla \vec{H} &= 0 \\ \nabla \vec{E} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

În cazul lubrificaţiei cu metale lichide, relaţiile (12) pot fi scrise direct, datorită faptului că la acestea σ are valori foarte mari. În cazul gazelor ionizate, relaţiile (12) apar ca aproximative (în special aproximaţia $\rho_e \simeq 0$ poate constitui obiectul unor discuţii în cazul gazelor incomplet ionizate). În sfîrşit, pentru regimuri staţionare, ecuaţia cîmpului electric se reduce la $\nabla \times \vec{E} = 0$.

Sistemul de ecuaţii (12), ca şi ecuaţiile de mişcare (4), are exact aceeaşi formă ca şi pentru cazul lubrifianţilor incompresibili. Regăsim

MUSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

astfel și pentru cazul magnetohidrodinamic proprietatea importantă existentă pentru lubrificația obișnuită, și anume : compresibilitatea nu influențează forma ecuațiilor de mișcare. În consecință, distribuția vitezelor va avea calitativ aceeași natură că și pentru lubrifianții incompresibili, urmînd ca numai în final densitatea să intervină prin modificarea valorilor presiunilor și a derivatelor acesteia.

Rezultă deci că pentru distribuția vitezelor se pot folosi direct rezultatele deja obținute în studiul lubrificației magnetohidrodinamice [4] — — [15]. Aceste rezultate nu au fost puse încă sub o formă generală, deoarece depind de condițiile exterioare electromagnetice, care pot fi de o mare varietate : poate exista, de exemplu, un cîmp magnetic uniform sau variabil dirijat după anumite direcții, poate exista un curent (cîmp electric) în absența unui cîmp magnetic exterior și, în sfîrșit, pot exista diferite combinații ale cazurilor precedente. Cu toate acestea, ținînd seama de caracterul mișcării (straturi foarte subțiri) există posibilitatea efectuării unor aproximații generale independente de natura condițiilor electromagnetice exterioare. Astfel variațiile în raport cu x și z ale cîmpului electric, cîmpului magnetic și curentului pot fi în genere neglijate în raport cu derivatele acelorași mărimi în raport cu y. În plus, din ecuațiile (12), $\nabla\vec{H} = 0$, $\nabla\vec{E} = 0$, $\nabla\vec{J} = 0$ rezultă că derivatele în raport cu y ale componentelor H_y (B_y), E_y, J_y sînt de același ordin de mărime cu derivatele componentelor $H_{x,z}$, $E_{x,z}$, $J_{x,z}$ în raport cu x, z, deci neglijabile :

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} \cong 0\,; \quad \frac{\partial B_y}{\partial y} \cong 0\,; \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} \cong 0\,; \quad \frac{\partial J_y}{\partial y} \cong 0 \tag{13}$$

și deci pot fi considerate constante în raport cu y.

În același timp, din ecuația lui Ohm, ținînd seama că $v \cong 0$, se deduce

$$\begin{aligned} J_x &\cong \sigma\,[E_x - wB_y], \\ J_y &\cong \sigma\,[E_y + wB_x - uB_z] \cong \sigma E_y, \\ J_z &\cong \sigma\,[E_z + uB_y], \end{aligned} \tag{14}$$

de unde se vede că un cîmp magnetic transversal H_y sau B_y poate induce curent numai în direcțiile x, z iar un cîmp tangențial numai în direcția y.

În sfîrșit, din ecuația cîmpului electric $\Delta\times\vec{E} = 0$ sau descompus

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0\,; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0\,; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \tag{15}$$

se deduce că în condiții obișnuite componentele E_x, E_y, E_z pot fi considerate aproximativ constante din punctul de vedere al integrării ecuațiilor de mișcare (4).

Pentru cazul magnetogazodinamic propriu-zis, cînd se aplică din exterior numai un cîmp magnetic, atunci poate fi uneori mai comodă eli-

minarea parametrilor E, J, respectiv exprimarea lor în funcție de H. Rezultă astfel din (12)

$$\left.\begin{aligned} \vec{f}_e &= (\nabla \times \vec{H}) \times \vec{B} = \mu_e \left[(\vec{H}\nabla)\vec{H} - \nabla \left(\frac{H^2}{2} \right) \right] \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}) - \nabla \times [\nu_H (\nabla \times \vec{H})] = (\vec{H}\nabla)\vec{v} - \\ &- (\vec{v}\nabla)\vec{H} - \vec{H}(\nabla \vec{v}) + \nu_H \nabla^2 \vec{H} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

cu $\nu_H = 1/\sigma\mu_e$. Operînd simplificările menționate, rezultă din cele două ecuații vectoriale de mai sus

$$\left.\begin{aligned} f_{e_x} &\cong \mu_e H_y \frac{\partial H_x}{\partial y}; \quad \nu_H \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + H_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ f_{e_y} &\cong -\mu_e \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right); \quad 0 \\ f_{e_z} &\cong \mu_e H_y \frac{\partial H_z}{\partial y}; \quad \nu_H \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + H_y \frac{\partial w}{\partial y} \cong 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

de unde se constată că, dacă nu există un cîmp magnetic exterior transversal $H_y = H_{y0}$, ecuațiile de mișcare (4) pe direcțiile x și z care interesează nu sînt alterate de influența cîmpului magnetic. În consecință, singurul caz interesant este acela al unui cîmp magnetic transversal. Componentele H_x, H_z sau, mai precis, derivatele acestora în raport cu y se datoresc existenței cîmpului H_y și vitezelor u, w, conform celui de-al doilea sistem (17).

Din cel de-al doilea sistem (17), rezultă, integrînd o dată în raport cu y,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -\sigma\mu_e H_y u + C_{x_1} \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} &= -\sigma\mu_e H_y w + C_{z_1}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

iar din compararea cu relațiile (14), ținînd cont că $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$, rezultă

$$C_{x_1} = -\sigma E_z; \quad C_{z_1} = \sigma E_x, \tag{19}$$

astfel încît

$$f_{e_x} \cong -\sigma B_y^2 u - \sigma E_z B_y; \quad f_{e_z} \cong -\sigma B_y^2 w + \sigma E_x B_y, \tag{20}$$

iar ecuațiile (4) se vor scrie

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sigma B_y^2 u - \sigma E_z B_y,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \cong 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial p}{yz} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \sigma B_y^2 w + \sigma E_x B_y,$$

unde, conform celor spuse, $B_y \cong B_{y_0}$, iar E_x, E_z pot fi considerate constante în raport cu y. Dacă cele două suprafețe sînt conductori electrici perfecți (scurtcircuit), atunci $E_x = E_z = 0$. În cealaltă situație extremă, cînd suprafețele sînt izolatori perfecți, E_x, E_z se deduce din condițiile ca H_x, H_z să fie zero la $y = 0$ și $y = h$. Integrînd sistemul (18) și punînd aceleași condiții, rezultă

$$E_z = -\frac{B_y}{h}\int_0^h u\,dy = -\frac{B_y Q_x}{h}; \quad E_x = \frac{B_y}{h}\int_0^h w\,dy = \frac{B_y Q_z}{h}, \tag{22}$$

relații care reprezintă în același timp (14) și condiția ca curenții totali elementari

$$I_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dz \int_0^h J_x dy; \quad I_z = \int_0^l dx \int_0^h J_z dy \tag{23}$$

să fie nuli.

În cele de mai sus s-a examinat cazul aplicării unui cîmp magnetic transversal. În cealaltă situație extremă, cînd se aplică numai un cîmp electric, respectiv curenți, rezultă

$$J_x \cong \sigma E_x; \quad J_y \cong \sigma E_y; \quad J_z \cong \sigma E_z. \tag{24}$$

Pe de altă aprte, cîmpul magnetic indus de curent se deduce din ecuația (12) $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$. Ținînd seama de aproximațiile menționate care se pot face datorită faptului că mișcarea se efectuează în straturi subțiri, rezultă că H_y poate fi neglijat și

$$\left.\begin{aligned} J_x &\cong \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\ J_y &\cong \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ J_z &\cong -\frac{\partial H_x}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

iar forțele $\vec{f}_e$ au componentele

$$\left.\begin{aligned} f_{e_x} &\cong J_y B_z, \\ f_{e_y} &\simeq J_z B_x - J_x B_z, \\ f_{e_z} &\cong -J_y B_x, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

de unde se constată că, analog sistemului (17), pe direcțiile x și z, care interesează pentru determinarea distribuțiilor de viteză u, v și ulterior a presiunilor, intervine numai curentul J_y, care, analog cîmpului H_y sau B_y, este singurul interesant pentru aplicații.

În ipoteza existenței exclusiv a componentei $J_y \cong J_{y_0}$, ecuațiile de mișcare se scriu

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + J_y B_z \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - J_y B_x. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Apoi din sistemul (25), asociat cu ecuația $\nabla \vec{H} = 0$, rezultă că H_x, H_z, respectiv B_x, B_z, vor fi independente de y și cel mult funcție liniară de z, respectiv x. Cum nici J_y nu depinde de y, termenii $J_y B_z$ și $J_y B_x$ pot fi considerați drept constante în ecuațiile (27). De altfel, realizarea practică a unor curenți în direcțiile x, z este greu de imaginat, deoarece ar trebui să se prevadă electrozi pe înălțimea h a stratului de lubrifiant la $x = 0$, l, respectiv $z = \pm b/2$, electrozi care trebuie să fie poroși pentru a lăsa gazul să se deplaseze. În schimb, realizarea unui curent J_y este simplă, electrozii putînd fi construiți sau plasați pe înseși suprafețele lubrificate.

În sfîrșit, se pot imagina o serie de situații care reprezintă diferite combinații ale cazurilor extreme de mai sus. Din păcate, deși ecuațiile de mișcare în absența forțelor de inerție sînt liniare în raport cu vitezele și cu presiunea, iar ecuațiile electromagnetice sînt de asemenea liniare, expresia forței $\vec{f}_e$ nu este liniară în raport cu cîmpul magnetic, astfel că în general nu se poate folosi metoda suprapunerii efectelor în mod riguros. Totuși, din cauza faptului că mișcarea are loc în straturi subțiri, există unele situații în care însăși expresia forței $\vec{f}_e$ rezultă liniară sau constantă față de parametrii care variază, astfel încît se pot lua în considerare unele condiții electromagnetice combinate.

De exemplu, se poate combina un cîmp magnetic tangențial (J_{x_0}, H_{z_0}) cu un cîmp electric J_y, respectiv cu curentul J_y. Din legea lui Ohm (14) rezultă

$$J_x \cong 0; \quad J_y = \sigma(E_y + wB_x - uB_z); \quad J_z \cong 0. \tag{28}$$

Forța $\vec{f}_e$, respectiv ecuațiile de mișcare se scriu sub aceeași formă ca în cazul precedent (27), cu deosebirea că în acest caz J_y și B_x, B_z se datoresc atît valorilor inițiale, cît și celor induse (cîmpul magnetic indus de curentul σE_y, respectiv curentul indus de cîmpul magnetic). Dacă energia cîmpului electric este de același ordin cu a cîmpului magnetic, atunci din ecuațiile $\vec{B} = \mu_e \vec{H}$ și $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ se deduce că se poate neglija atît curentul indus de cîmpul magnetic, cît și cîmpul magnetic indus de curentul σE_y, astfel încît

$$J_y \cong \sigma E_y; \quad B_x \cong B_{x_0}; \quad B_y = B_{y_0}, \tag{29}$$

iar sistemul (27) rămîne valabil în continuare cu mărimile J_x, B_x, B_z constante.

În sfîrșit, este de remarcat faptul observat și de Hughes și Elco [11], [13] că, dacă de exemplu $B_{x_0} = 0$, existînd numai B_z și J_y, ecuația de mișcare pe direcția z nu mai este afectată de cîmpul electromagnetic.

În final să considerăm un caz mai general în care se aplică un cîmp magnetic oarecare și un cîmp electric oarecare. Să considerăm cîmpul magnetic existent într-un punct sub forma

$$\left.\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{H}_0 + \vec{h}'; & H_x &= H_{x_0} + h'_x, \\ H_y &= H_{y_0} + h'_y; & H_z &= H_{z_0} + h'_z, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

unde $\vec{h}'$ este cîmpul indus, cu valori reduse față de cîmpul alicat $\vec{H}_0$. Ținînd cont de aproximațiile ce pot fi efectuate datorită grosimii reduse a stratului de lubrifiant, rezultă că toate derivatele de ordinul întîi ale componentelor h'_x, h'_y, h'_z sînt neglijabile, cu excepția derivatelor $\frac{\partial h'_x}{\partial y}$ și $\frac{\partial h'_z}{\partial y}$. În plus, $h'_y \cong 0$.

Pentru cîmpul electric putem proceda analog. Este însă de remarcat că $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ nu depinde de y, ci cel mult de x și z. Într-adevăr, din ecuația $\nabla \vec{E} = 0$ rezultă ca și pentru $H_y(B_y)$, că E_y nu depinde de y, iar din proiecțiile pe direcțiile x, z, ale ecuației $\nabla \times \vec{E} = 0$ rezultă $\frac{\partial E_x}{\partial y} \cong \frac{\partial E_z}{\partial y} \cong 0$. Deci componentele E_x, E_y, E_z pot fi considerate constante pentru integrarea ecuațiilor de mișcare (4).

De asemenea relațiile (29) pot fi direct transcrise pentru $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}'$. Legea lui Ohm (14) se va scrie atunci

$$\begin{aligned} J_x &\cong \sigma E_x - \sigma w B_{y_0}, \\ J_y &\cong \sigma E_y + \sigma\,[(w B_{x_0} - u B_{z_0}) + (w b_x - u b_z)] \cong \sigma E_y + \sigma\,(w B_{x_0} - u B_{z_0}), \\ J_z &\cong \sigma E_z + \sigma u\, B_{y_0}. \end{aligned} \tag{31}$$

Forțele $\vec{f}_e$ vor fi deci egale cu

$$\begin{aligned} f_{ex} &= J_y (B_{z_0} + b_z) - J_z B_{y_0}, \\ f_{ey} &= J_z (B_{x_0} + b_x) - J_x (B_{z_0} + b_z), \\ f_{ez} &= J_x B_{y_0} - J_y (B_{x_0} + b_x) \end{aligned} \tag{32}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} f_{ex} &= \sigma (E_y + wB_{x_0} - uB_{z_0}) (B_{z_0} + b_z) - \sigma (E_z + uB_{y_0}) B_{y_0}, \\ f_{ey} &= \sigma (E_z + uB_{y_0}) (B_{x_0} + b_x) - \sigma (E_x - wB_{y_0}) (B_{z_0} + b_z), \\ f_{ez} &= \sigma (E_x - wB_{y_0}) B_{y_0} - \sigma (E_y + wB_{x_0} - uB_{z_0}) (B_{x_0} + b_x). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

În plus, dacă $B_{x_0} \neq 0$, $B_{z_0} \neq 0$, cîmpurile induse b_x, b_z pot fi neglijate. Dacă însă $B_{x_0} = 0$ sau $B_{z_0} = 0$ și $E_y \neq 0$, atunci termenii b_x sau b_z trebuie luați în considerare, în special în prima și ultima ecuație a sistemului (33). Pe direcția y (a doua ecuație a sistemului) termenii b_x, b_z pot fi neglijați în aproape toate cazurile. Mai precis, deoarece și curenții J_x, J_z sînt reduși cînd $B_{x_0} = B_{z_0} = 0$, produsele dintre aceștia și b_x, respectiv b_z, pot fi neglijate.

Este ușor de observat că expresiile (33), deși aproximative, sînt suficient de generale, înglobînd toate cazurile care pot interesa în aplicații. De exemplu, pentru a deduce sistemul (21) din (33), este suficient să se pună $B_{x_0} = B_{z_0} = 0$ și să se observe că E_y este neglijabil. Sistemul (27), în cazul cînd există numai curent, se deduce considerînd $B_{x_0} = B_{y_0} = B_{z_0} = 0$ și J_x, J_z neglijabili (atunci $J_y = \sigma E_y$ și $B_x = b_x$, $B_z = b_z$). În sfîrșit, sistemul (27), în cazul existenței unui cîmp magnetic tangențial și a unui cîmp E_y, se deduce considerînd numai $B_{y_0} = 0$, b_x, b_z neglijabile și E_x, E_z de asemenea neglijabile.

Ecuațiile de mișcare (4) se scriu deci în general

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + J_y (B_{z_0} + b_z) - \sigma (E_z + uB_{y_0}) B_{y_0}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &\cong \sigma (E_z + uB_{y_0}) B_{x_0} - \sigma (E_x - wB_{y_0}) B_{z_0}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - J_y (B_{x_0} + b_x) + \sigma (E_x - wB_{y_0}) B_{y_0} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

și se aplică direct sub forma de mai sus dacă se admite existența unui cîmp magnetic exterior $\vec{H}_0$ sau $\vec{B}_0$ (de componente B_{0x}, B_{0y}, B_{0z}) și a unui curent I_y ($I_y = \int_s J_y \, dx \, dz$).

În sfîrșit, cîmpul electric nu se poate determina direct, așa cum este cazul cîmpului magnetic, ci indirect, prin intermediul curentului total I (I_y, eventual și I_x, I_z dacă există) sau prin diferența de potențial elec-

tric aplicat între suprafețe sau în general între electrozi. Prin definiție, din faptul că $\nabla \times \vec{E} = 0$, rezultă că $\vec{E}$ derivă dintr-un potențial Φ [3]

$$\vec{E} = - \nabla \Phi_i , \tag{35}$$

astfel încît, de exemplu,

$$\Phi_{iy} = \int_0^h E_y \, dy \cong E_y h \cong - \frac{J_y h}{\sigma} + Q_z B_{x_0} - Q_x B_{z_0} , \tag{36}$$

unde Q_x și Q_z sînt debitele volumetrice de gaz pe unitatea de lățime, respectiv lungime în direcțiile x, z.

În general, condițiile la limită pentru cîmpul electromagnetic pe cele două suprafețe lubrifiate se deduc din condițiile cunoscute [3], și anume : componenta normală a inducției magnetice și componenta tangențială a cîmpului electric sînt continue la traversarea frontierei, iar componenta tangențială a cîmpului electric și componenta normală a inducției electrice sînt continue sau cel mult suferă un salt egal cu densitatea curentului de suprafață și, respectiv, densitatea sarcinii libere de suprafață. Notînd cu indicii 1, 2 valorile corespunzătoare de o parte și de cealaltă a frontierei și cu $\vec{n}$ versorul normalei la frontieră, aceste condiții se scriu

$$\left.\begin{aligned} &\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \vec{n}(\mu_{e_2} \vec{H}_2 - \mu_{e_1} \vec{H}_1) = 0, \\ &\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_S , \\ &\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0, \\ &\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \vec{n}(\varepsilon_2 \vec{E}_2 - \varepsilon_1 \vec{E}_1) = \rho_{es}, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

unde pentru σ finit densitatea curentului J_s și sarcina liberă de suprafață poate fi de obicei neglijate. Se constată că $\vec{H}_2 = \vec{H}_1$ și $F_2 = E_1$ numai dacă $\mu_{e_2} = \mu_{e_1}$ și $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, ceea ce în genere nu are loc. Din condițiile generale (37) se pot deduce apoi prin particularizare o serie de cazuri care pot interesa în aplicații, ca, de exemplu, cazul conductanței finite a corpurilor care formează lagărul [14] etc.

Înainte de a integra ecuațiile (34) pentru a obține distribuția vitezelor u, w, să observăm că, deși în unele situații particulare (21) (27) se poate considera aproximativ $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, în cazul general (34) această condiție poate să nu fie satisfăcută, respectiv $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$. Situația este întrucîtva similară lubrificației în regim turbulent [16]. Am observat cu acea ocazie că faptul că presiunea variază după normală în interiorul stratului de lubrifiant nu afectează într-o primă aproximație nici distribuția vite-

zelor și nici distribuția presiunilor pe cele două suprafețe (la $y = 0$ și $y = h$). Un raționament similar poate fi folosit pentru a reliefa aceeași proprietate și în cazul de față. Astfel, să notăm membrul secund al celei de-a doua ecuații (34) cu $\partial\beta/\partial y$, β fiind o funcție de x, y, z. Rezultă atunci, prin integrare în raport cu y,

$$p = \beta(x, y, z) + \pi(x, z), \tag{38}$$

unde π este o funcție arbitrară de x, z. Din relația (38) se deduce

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \pi}{\partial x} \cong \frac{\partial \pi}{\partial x}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial \pi}{\partial z} \cong \frac{\partial \pi}{\partial z}, \tag{39}$$

deoarece, dacă $\partial\beta/\partial y$ este de același ordin de mărime cu ceilalți termeni ai ecuațiilor de mișcare, atunci, din cauza grosimii extrem de reduse a stratului de lubrifiant, derivatele $\partial\beta/\partial x$, $\partial\beta/\partial z$ sînt neglijabile în raport cu $\partial\beta/\partial y$ etc. Același rezultat se obține derivînd direct a doua ecuație (34) în raport cu x și observînd analog că $\partial^2\beta/\partial x\partial y \cong 0$. Cum în prima și ultima ecuație (34) intervin numai derivatele presiunii în raport cu x, z, rezultă aproximativ că eventuala variație a presiunii pe normală la stratul de lubrifiant nu alterează distribuția vitezelor, putînd înlocui pe p, cu π, care reprezintă presiunea pe suprafețe sau, mai corect, presiunea pe una dintre suprafețe. Într-adevăr, spre deosebire de cazul lubrificației turbulente cînd funcția echivalentă β se anula în mod necesar pe ambele suprafețe ($y = 0$, $y = h$), în cazul de față există, cel puțin în principiu, posibilitatea ca β să ia valori diferite la $y = 0$ și $y = h$. Cu alte cuvinte, există posibilitatea ca distribuția de presiuni pe o suprafață să fie diferită de distribuția de presiuni pe cealaltă suprafață, din cauza cîmpurilor magnetice B_{x_0} și B_{z_0} și curenților J_x și J_z.

DEDUCEREA ECUAȚIEI PRESIUNILOR

Din examinarea sistemului (34) rezultă în concluzie că, din punctul de vedere al aplicațiilor, cele mai interesante condiții electromagnetice exterioare sînt: (a) cîmp magnetic transversal B_{y_0} fără sau cu curenți transversali (J_y, E_y), cu sau fără cîmp magnetic tangențial, de preferință dirijat după direcția z (B_{z_0}), cînd sistemul ia forma (27) (eventual cu $B_{x_0} = 0$). De altfel și soluțiile pentru vitezele u, w, iau forme diferite.

Astfel, în cazul (27), forțele pondero-motorii nu depind de y, astfel încît distribuția de viteze u, w este dată de relații similare celor obișnuite

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - J_y B_z\right) y(y - h) + V\left(1 - \frac{y}{h}\right), \\ w &= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + J_y B_x\right) y(y - h), \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

iar debitele Q_y, Q_z sînt

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= \int_0^h u\,dy = -\frac{h^3}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - J_y B_z\right) + \frac{Vh}{2}, \\ Q_z &= \int_0^h w\,dy = -\frac{h^3}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + J_y B_x\right). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

În cazul existenței unui cîmp magnetic transversal, integrarea ecuațiilor (34) sau (21) este mai complicată, deoarece în expresia forțelor f_{ex}, f_{ez} apar funcțiile necunoscute u, v. Astfel sistemul (21), care dă ecuațiile diferențiale pentru u și w, se poate scrie

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{M^2}{h^2} u &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{M^2}{h^2}\frac{E_z}{B_y}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{M^2}{h^2} w &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{M^2}{h^2}\frac{E_x}{B_y}, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

unde M este numărul Hartmann, definit în funcție de grosimea h:

$$M = hB_y\sqrt{\sigma/\mu}. \tag{43}$$

Ecuațiile (42) pot fi integrate fără dificultăți [5]—[8], obținîndu-se

$$\left.\begin{aligned} u &= C_1 \operatorname{ch} M\frac{y}{h} + C_2 \operatorname{sh} M\frac{y}{h} - \left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{M^2}{h^2}\frac{E_z}{B_y}\right)\frac{h^2}{M^2}, \\ w &= C_3 \operatorname{ch} M\frac{y}{h} + C_4 \operatorname{sh} M\frac{y}{h} - \left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{M^2}{h^2}\frac{E_x}{B_y}\right)\frac{h^2}{M^2}, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

și, cu condiții la limită obișnuite, se deduce în locul relațiilor (40)

$$\left.\begin{aligned} u &= \left(\frac{h^2}{\mu M^2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{E_z}{B_y}\right)\left(\operatorname{ch} M\frac{y}{h} - 1 - \frac{\operatorname{ch} M - 1}{\operatorname{sh} M}\operatorname{sh} M\frac{y}{h}\right) + \\ &\quad + V\frac{\operatorname{sh} M\left(1 - \frac{y}{h}\right)}{\operatorname{sh} M}, \\ w &= \left(\frac{h^2}{\mu M^2}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{E_x}{B_y}\right)\left(\operatorname{ch} M\frac{y}{h} - 1 - \frac{\operatorname{ch} M - 1}{\operatorname{sh} M}\operatorname{sh} M\frac{y}{h}\right), \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

iar dacă se consideră condițiile la limită generale

$$\left.\begin{aligned} y = 0;\ u = V_{1x};\ w = V_{1z}, \\ y = h;\ u = V_{2x};\ w = V_{2z}, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

distribuțiile de viteze vor fi

$$\left.\begin{aligned} u &= \left(\frac{h^2}{\mu M^2}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{E_z}{B_y}\right)\left(\operatorname{ch} M\frac{y}{h}-1-\frac{\operatorname{ch} M-1}{\operatorname{sh} M}\operatorname{sh} M\frac{y}{h}\right)+ \\ &+V_{1x}\frac{\operatorname{sh} M\left(1-\frac{y}{h}\right)}{\operatorname{sh} M}+V_{2x}\frac{\operatorname{sh} M\frac{y}{h}}{\operatorname{sh} M}, \\ w &= \left(\frac{h^2}{\mu M^2}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{E_x}{B_y}\right)\left(\operatorname{ch} M\frac{y}{h}-1-\frac{\operatorname{ch} M-1}{\operatorname{sh} M}\operatorname{sh} M\frac{y}{h}\right)+ \\ &+V_{1z}\frac{\operatorname{sh} M\left(1-\frac{y}{h}\right)}{\operatorname{sh} M}+V_{2z}\frac{\operatorname{sh} M\frac{y}{h}}{\operatorname{sh} M}. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Debitele de lubrifiant vor fi egale cu

$$\begin{aligned} Q_x &= -\left(\frac{h^3}{\mu M^3}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{h}{M}\frac{E_z}{B_y}\right)F+hVG, \\ Q_z &= -\left(\frac{h^3}{\mu M^3}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{h}{M}\frac{E_x}{B_y}\right)F \end{aligned} \tag{48}$$

sau, în cazul condițiilor (46),

$$\begin{aligned} Q_x &= -\left(\frac{h^3}{\mu M^3}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{h}{M}\frac{E_z}{B_y}\right)F+(V_{1x}+V_{2x})\,hG, \\ Q_z &= -\left(\frac{h^3}{\mu M^3}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{h}{M}\frac{E_x}{B_y}\right)F+(V_{1z}+V_{2z})\,hG, \end{aligned} \tag{49}$$

unde

$$F=\frac{2+M\operatorname{sh} M-2\operatorname{ch} M}{\operatorname{sh} M};\qquad G=\frac{\operatorname{ch} M-1}{M\operatorname{sh} M}. \tag{50}$$

Ecuația presiunilor se poate deduce apoi din ecuația de continuitate, scrisă sub formă globală, pentru regimuri staționare și condiții la limită curente

$$-\frac{\partial(\rho Q_x)}{\partial x}-\frac{\partial(\rho Q_z)}{\partial z}=0 \tag{51}$$

sau, în cazul general (46), din ecuația de continuitate scrisă sub formă integrală [1]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^h \rho u\,dy\right)+\rho(V_{2y}-V_{1y})+\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^h \rho w\,dy\right)= \\ &-\int_0^h \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dy+\rho\left(V_{2x}\frac{\partial h}{\partial x}+V_{2z}\frac{\partial h}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{52}$$

De exemplu, în cazul ecuației de continuitate (51), ținînd cont că debitele sînt date de (48), se deduce

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{F}{M^3}\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{F}{M^3}\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right)= \\ =V\frac{\partial}{\partial x}(\rho hG)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho h\frac{F}{M}\frac{E_z}{B_y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho h\frac{F}{M}\frac{E_x}{B_y}\right). \tag{53}$$

Ecuația de mai sus rezolvă însă numai formal problema, deoarece, dacă B_y poate fi considerat constant și cunoscut, în schimb E_x, E_z pot fi constante sau variabile, depinzînd de condițiile electromagnetice impuse.

Astfel, dacă, de exemplu, suprafețele lubrificate sînt conductori perfecți ($\sigma_p=\infty$ suprafețe metalice) și legați în scurtcircuit, atunci în mod necesar $E_x=E_z=0$, iar ecuația presiunilor ia forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{F}{M^3}\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{F}{M^3}\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right)=V\frac{\partial}{\partial x}(\rho hG). \tag{54}$$

Celălalt caz extrem al pereților perfect izolați conduce la valor E_x, E_z funcție de B_y, h și Q_x, Q_z (22). Din relațiile (22), ținînd seama de (47), (49) și (50), rezultă succesiv

$$\left.\begin{aligned}\frac{E_z}{B_y}&=-\frac{h^2}{\mu M^2}\frac{\partial p}{\partial x}\left(1-\frac{M}{2}\coth\frac{M}{2}\right)-\frac{V_{1x}+V_{2x}}{2},\\ \frac{E_x}{B_y}&=\frac{h^2}{\mu M^2}\frac{\partial p}{\partial z}\left(1-\frac{M}{2}\coth\frac{M}{2}\right)+\frac{V_{1z}+V_{2z}}{2},\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

apoi

$$u=\left(\frac{h^2}{2\mu M}\coth\frac{M}{2}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{V_{1x}+V_{2x}}{2}\right)\left(\operatorname{ch}M\frac{y}{h}-1-\frac{\operatorname{ch}M-1}{\operatorname{sh}M}\operatorname{sh}M\frac{y}{h}\right)+ \\ +V_{1x}\frac{\operatorname{sh}M\left(1-\frac{y}{h}\right)}{\operatorname{sh}M}+V_{2x}\frac{\operatorname{sh}M\frac{y}{h}}{\operatorname{sh}M},$$

$$w=\left(\frac{h^2}{2\mu M}\coth\frac{M}{2}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{V_{1z}+V_{2z}}{2}\right)\left(\operatorname{ch}M\frac{y}{h}-1-\frac{\operatorname{ch}M-1}{\operatorname{sh}M}\operatorname{sh}M\frac{y}{h}\right)+ \\ +V_{1z}\frac{\operatorname{sh}M\left(1-\frac{y}{h}\right)}{\operatorname{sh}M}+V_{2z}\frac{\operatorname{sh}M\frac{y}{h}}{\operatorname{sh}M}, \tag{56}$$

și

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= -\frac{h^3}{\mu}\frac{1}{M^2}\left(\frac{M}{2}\coth\frac{M}{2}-1\right)\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{h\,(V_{1x}+V_{2x})}{2}, \\ Q_z &= -\frac{h^3}{\mu}\frac{1}{M^2}\left(\frac{M}{2}\coth\frac{M}{2}-1\right)\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{h\,(V_{1z}+V_{2z})}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

iar din (52) rezultă ecuația presiunilor

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{\mu}\frac{1}{M^2}\left(\frac{M}{2}\coth\frac{M}{2}-1\right)\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{h^3}{\mu}\frac{1}{M^2}\left(\frac{M}{2}\coth\frac{M}{2}-1\right)\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right]=$$

$$=\rho\,(V_{2y}-V_{1y})-\frac{\rho}{2}\left[(V_{2x}-V_{1x})\frac{\partial h}{\partial x}+(V_{2z}-V_{1z})\frac{\partial h}{\partial z}\right]+ \tag{58}$$

$$+\frac{h}{2}\left[\frac{\partial\,[\rho\,(V_{2x}+V_{1x})]}{\partial x}+\frac{\partial\,[\rho\,(V_{2z}+V_{1z})]}{\partial z}\right]+h\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

sau, în sfîrșit, pentru regimuri staționare, cu $V_{1x}=V$ și $V_{2x}=V_{1z}=$ $=V_{2z}=V_{1y}=V_{2y}=0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{\mu}\frac{1}{M^2}\left(\frac{M}{2}\coth\frac{M}{2}-1\right)\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{h^3}{\mu}\frac{1}{M^2}\left(\frac{M}{2}\coth\frac{M}{2}-1\right)\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right]=\frac{V}{2}\frac{\partial\,(\rho h)}{\partial x}. \tag{59}$$

Evident, dacă în ecuațiile de mai sus se face $M=0$, după ridicarea nedeterminărilor se regăsește ecuația presiunilor obișnuită.

În sfîrșit, în cazul sistemelor (40), (41), cînd există cîmpurile magnetice B_x, B_z și un curent J_y, este de observat că, în timp ce B_x, B_z pot fi considerate constante, J_y poate fi o funcției de Q_x, Q_z, respectiv de x și z. Dacă suprafețele lubrificate sînt metalice, deci bune conducătoare de electricitate, atunci potențialul Φ (36) poate fi considerat constant. Rezultă astfel curentul J_y ca funcție de h, B_x, B_z:

$$J_y=-\frac{\sigma}{h}\Phi_t-\frac{\sigma}{h}(Q_x B_z-Q_z B_x) \tag{60}$$

iar pentru calculul energiei electrice introdusă din exterior curentul total I va rezulta din integrarea relației (50)

$$I=\int_s J_y\,\mathrm{d}s=-\int_s\left[\frac{\sigma}{h}\Phi_t+\frac{\sigma}{h}(Q_x B_z-Q_z B_x)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z. \tag{61}$$

În consecință, în ecuația presiunilor va apărea în final, pe lîngă valorile B_x, B_z constante, și valoarea constantă Φ sau I. Astfel, introducînd relația (60) în sistemul (41), rezultă cu condițiile la limită generale (46)

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= -\frac{h^3}{12\,\mu}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{h^3}{12\,\mu}\frac{\sigma}{h}B_z(-\Phi_t-Q_xB_z+Q_xB_x)+\frac{V_{1x}+V_{2x}}{2}h,\\ Q_z &= -\frac{h^3}{12\,\mu}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{h^3}{12\,\mu}\frac{\sigma}{h}B_x[-\Phi_t-Q_xB_z+Q_zB_x)+\frac{V_{1z}+V_{2z}}{2}h, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

sistem de două ecuații cu două necunoscute Q_x, Q_z. Rezolvînd sistemul, se obține

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= -\frac{h^3}{12\,\mu}\frac{\left(1+\frac{M_x^2}{12}\right)\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{M_xM_z}{12}\frac{\partial p}{\partial z}}{1+\frac{M_x^2}{12}+\frac{M_z^2}{12}}-\frac{\frac{M_z^2}{12}\frac{\Phi_t}{B_z}}{1+\frac{M_x^2}{12}+\frac{M_z^2}{12}}+\\ &\quad+\frac{h}{2}\frac{(V_{1x}+V_{2x})\left(1+\frac{M_x^2}{12}\right)+(V_{1z}+V_{2z})\frac{M_xM_z}{12}}{1+\frac{M_x^2}{12}+\frac{M_z^2}{12}},\\ Q_z &= -\frac{h^3}{12\,\mu}\frac{\left(1+\frac{M_z^2}{12}\right)\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{M_xM_z}{12}\frac{\partial p}{\partial x}}{1+\frac{M_x^2}{12}+\frac{M_z^2}{12}}+\frac{\frac{M_z^2}{12}\frac{\Phi_t}{B_x}}{1+\frac{M_x^2}{12}+\frac{M_z^2}{12}}+\\ &\quad+\frac{h}{2}\frac{(V_{1x}+V_{2x})\frac{M_xM_z}{12}+(V_{1z}+V_{2z})\left(1+\frac{M_z^2}{12}\right)}{1+\frac{M_x^2}{12}+\frac{M_z^2}{12}}, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

unde, ca și pînă acum, cu Mx, Mz s-au notat numerele Hartmann relative la B_x și B_z

$$M_x = hB_x\sqrt{\sigma/\mu}\,;\quad M_z = hB_z\sqrt{\sigma/\mu}. \tag{64}$$

Se constată o particularitate interesantă, și anume că debitul Q_x depinde acum și de vitezele V_{1z} și V_{2z}, iar debitul Q_z de vitezele V_{1x} și V_{2x}, însă această influență dispare dacă $Mx = 0$ sau dacă $M_z = 0$.

În sfîrșit, introducînd expresiile (63) în ecuația de continuitate (52), rezultă ecuația diferențială a presiunilor sub forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12\,\mu}\rho\,\frac{\left(1+\frac{M_x^2}{12}\right)\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{M_xM_z}{12}\frac{\partial p}{\partial z}}{1+\frac{M_x^2}{12}+\frac{M_z^2}{12}}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{12\,\mu}\rho\,\frac{\left(1+\frac{M_z^2}{12}\right)\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{M_xM_z}{12}\frac{\partial p}{\partial x}}{1+\frac{M_x^2}{12}+\frac{M_z^2}{12}}\right)=$$

$$=h\,\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho(V_{2y}-V_{1y})-\rho\left(V_{2x}\frac{\partial h}{\partial x}+V_{2z}\frac{\partial h}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{M_z}{12}\frac{\Phi}{B_z}}{1+\frac{M_x^2}{12}+\frac{M_z^2}{12}}\rho\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\frac{M_x^2}{12}\frac{\Phi}{B_x}}{1+\frac{M_x^2}{12}+\frac{M_z^2}{12}}\rho\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\rho h}{2}\,\frac{(V_{1x}+V_{2x})\left(1+\frac{M_x^2}{12}\right)+(V_{1z}+V_{2z})\frac{M_xM_z}{12}}{1+\frac{M_x^2}{12}+\frac{M_z^2}{12}}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\rho h}{2}\,\frac{(V_{1x}+V_{2x})\frac{M_xM_z}{12}+(V_{1z}+V_{2z})\left(1+\frac{M_z^2}{12}\right)}{1+\frac{M_x^2}{12}+\frac{M_z^2}{12}}\right]. \tag{65}$$

Se constată că în cazul general ecuația presiunilor are o formă complicată, mai ales dacă se ține seama că M_x, M_z sînt proporționale cu h (64). Într-o primă aproximație, Mz va influența distribuția presiunilor pe direcția x, iar M_x distribuția presiunilor pe direcția z. Astfel, considerînd primul efect ca mai important, să presupunem cazul $M_x = 0$. Atunci ecuația presiunilor se simplifică sub forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12\,\mu}\,\frac{1}{1+\frac{M_z^2}{12}}\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{12\,\mu}\,\rho\,\frac{\partial p}{\partial z}\right)=h\,\frac{\partial p}{\partial t}+\rho(V_{2y}-V_{1y})-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{M_z^2}{12}\frac{\Phi}{B_z}}{1+\frac{M_z^2}{12}}\rho\right)-\rho\left(V_{2x}\frac{\partial h}{\partial x}+V_{2z}\frac{\partial h}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\rho h}{2}\,\frac{V_{1x}+V_{2x}}{1+\frac{M_z^2}{12}}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho h\,\frac{V_{1z}+V_{2z}}{2}\right). \tag{66}$$

În sfîrșit, pentru regimuri permanente, cu $V_{1x} = V = \text{const}$ și $V_{2x} = V_{1z} = V_{2z} = V_{1y} = V_{2y} = 0$, rezultă

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12\,\mu}\,\frac{1}{1+\frac{M_z^2}{12}}\,\rho\,\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{12\,\mu}\,\rho\,\frac{\partial p}{\partial z}\right)=\frac{V}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h}{1+\frac{M_z^2}{12}}\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{M_z^2}{12}\,\frac{\Phi}{B_z}}{1+\frac{M_z^2}{12}}\,\rho\right). \tag{67}$$

Dacă în plus se definește un parametru adimensional [13]

$$N=\frac{\Phi}{V}\sqrt{\sigma/\mu}, \tag{68}$$

atunci ecuația presiunilor se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\,\frac{1}{12+M_z^2}\,\rho\,\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{12\,\mu}\,\rho\,\frac{\partial p}{\partial z}\right)=V\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{6-NM_z}{12+M_z^2}\,\rho h\right), \tag{69}$$

unde, dacă suprafețele sînt montate în scurtcircuit, $\Phi_t = 0$; $N = 0$. În rest, N are o anumită valoare, iar din relația (61) va corespunde curentul total I. În sfîrșit, cînd $I = 0$, rezultă din (56) o anumită valoare Φ_{t0}, respectiv N_0, care corespunde cazului suprafețelor conductoare și circuit deschis.

STUDIUL CAZURILOR-LIMITĂ $V \to 0$, $V \to \infty$

Ca și pentru lubrificația gazodinamică obișnuită [1], [2], se pot deduce unele indicații privind influența efectului electromagnetic asupra distribuției presiunilor din studiul situațiilor extreme $V \to 0$ sau cazul vitezelor foarte mari.

După cum se știe, pentru viteze reduse efectul compresibilității poate fi neglijat, astfel încît se poate considera $\rho = \text{const}$ în ecuația presiunilor. Lubrificația magnetogazodinamică se reduce la cea magnetohidrodinamică, deja studiată pe unele cazuri particulare [5] — [15]. Concluziile obținute arată că un cîmp magnetic By sau un cîmp Bz combinat cu un curent I poate conduce la o creștere substanțială a presiunilor și capacității portante. În cazul cîmpului magnetic transversal, mecanismul creșterii presiunilor se datorește unei frînări a scurgerii, analogă efectului turbulenței (pentru aceleași valori $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$, distri-

buțiile vitezelor u, w (45) (47) rezultă aplatisate). În cazul cîmpului magnetic B_z, mecanismul este întrucîtva diferit, acțiunea electromagnetică avînd în anumite condiții un efect de pompare a fluidului. Apare de asemenea posibilitatea reducerii tensiunilor de frecare pe suprafața mobilă, cu prețul însă a unui consum de energie din exterior.

Pentru cazul vitezelor mari, deși cu unele diferențe, ecuația presiunilor în regim permanent (54) (59) (69) păstrează o formă asemănătoare ecuației obișnuite a presiunilor. Este de presupus atunci, ca și pentru cazul obișnuit, că la viteze mari, cînd efectul compresibilității este predominant, presiunile vor tinde în continuare către o valoare mărginită. Rămîne de văzut în continuare dacă valorile obișnuite ale presiunilor sînt și în ce măsură alterate de efectele electromagnetice.

Astfel, în cazul existenței unui cîmp magnetic transversal cu suprafețe lubrificate izolate, se constată că membrul secund al ecuației (59) nu este influențat de numărul Hartmann M_y. Dacă presiunile rămîn mărginite, atunci

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho h) \to 0, \tag{70}$$

respectiv soluția asimptotică rămîne aceeași ca și în cazul absenței cîmpului electromagnetic. Influența numărului Hartmann va fi calitativ asemănătoare influenței numărului Reynolds din cazul lubrificației cu gaze în regim turbulent [16], și anume amplificarea vitezei V (sau parametrului de compresibilitate $H = \dfrac{\mu V l}{p_0 h_m^2}$) în raportul

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{M_y^{*2}}{\dfrac{M_y^*}{2} \coth \dfrac{M_z^*}{2} - 1} \geqslant 1, \tag{71}$$

unde M_y^* este o valoare medie pentru M_y, raport care tinde către unitate cînd $M_y^* \to 0$ și devine egal cu $\dfrac{M_y^*}{6}$ la valori mai mari ale numărului Hartmann. Rezultă deci că influența pozitivă a numărului Hartmann, ca și efectul turbulenței, este importantă la viteze reduse, dar devine neglijabilă la viteze mari, cînd efectul compresibilității este prepoderent.

Ca și pentru cazul magnetohidrodinamic, numărul Hartmann are o influență defavorabilă, reducînd valoarea presiunilor dacă suprafețele lubrificate sînt conducătoare de electricitate și legate în scurtcircuit. Astfel, din ecuația presiunilor corespunzătoare (54), în locul relației (69) rezultă

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho h G) \to 0 \tag{72}$$

sau (50)

$$\rho h \frac{\operatorname{ch} M_y - 1}{M_y \operatorname{sh} M_y} = C_1 = \rho_0 h_1 \frac{\operatorname{ch} M_{y_1} - 1}{M_{y_1} \operatorname{sh} M_{y_1}}, \tag{73}$$

unde $M_y = M_{y_1} \frac{h}{h_1}$. Rezultă deci

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\operatorname{ch} M_{y_1} - 1}{\operatorname{ch}\left(M_{y_1} \frac{h}{h_1}\right) - 1} \frac{\operatorname{sh}\left(M_{y_1} \frac{h}{h_1}\right)}{\operatorname{sh} M_{y_1}} \tag{74}$$

Fie, de exemplu, un lagăr plan de alungire infinită cu $h_1/h_2 = 4$. Distribuţia raportului ρ/ρ_0 în cazul extrem $V \to \infty$, pentru diferite valori M_{y_1}, este arătată în diagrama din figura 1. Se constată că densitatea şi deci presiunea (care este proporţională cu ρ) scade cînd numărul Hartmann creşte, iar pentru situaţia-limită $M_{y_1} \to \infty$ se obţine o distribuţie constantă de presiuni, respectiv o capacitate de încărcare nulă.

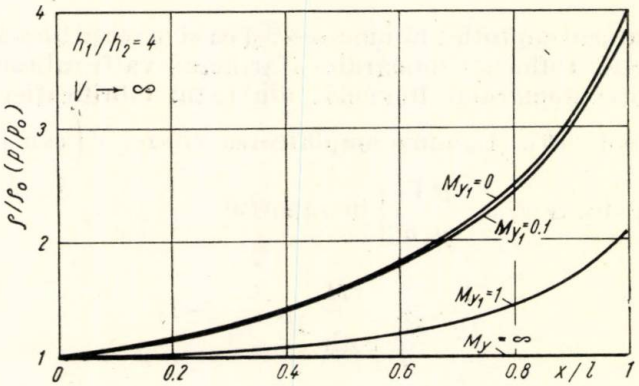


Fig. 1. — Variaţia densităţii (presiunii) în cazul unui lagăr plan cu $h_1/h_2 = 4$, pentru $V \to \infty$, în ipoteza existenţei unui cîmp magnetic transversal (suprafeţe conductoare, $\sigma_p = \infty$ în scurtcircuit).

În sfîrşit, în cazul existenţei unui cîmp B_z, din ecuaţia (69) rezultă

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{6 - NM_z}{12 + M_z^2} \rho h\right) \to 0 \tag{75}$$

sau, analog cu (74),

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{6 - NM_{z_1}}{6 - NM_{z_1} \frac{h}{h_1}} \frac{12 + M_{z_1}^2 \left(\frac{h}{h_1}\right)^2}{12 + M_{z_1}^2} \frac{h_1}{h}. \tag{76}$$

De fapt, deoarece în N tensiunea Φ a fost raportată la V (68), cînd $V \to \infty$ atunci $N \to 0$. Cu alte cuvinte, la $V \to \infty$ influența potențialului electric Φ_i se anulează, iar condițiile tind să devină acelea pentru cazul legăturii în scurtcircuit

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{12 + M_{z_1}^2 \left(\frac{h}{h_1}\right)^2}{12 + M_{z_1}^2} \frac{h_1}{h}, \tag{77}$$

iar densitatea și, respectiv, presiunile vor fi reduse de creșterea numărului Hartmann M_{z_1}. Mai mult chiar, cînd $M_{z_1} \to \infty$, sensul de vanație al presiunilor și al densităților se inversează (apar în lagăr depresiuni în loc de presiuni). Într-adevăr, pentru $M_{z_1} \to \infty$, relația (77) se scrie

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{h}{h_1} \leqslant 1. \tag{78}$$

În regim incompresibil [12], [13], presiunile cresc cînd $N > 0$ și crește. Dacă admitem că relația (76) are aproximativ loc pentru viteze mari, dar mărginite, atunci se poate considera în acesta $N \neq 0$. Se con-

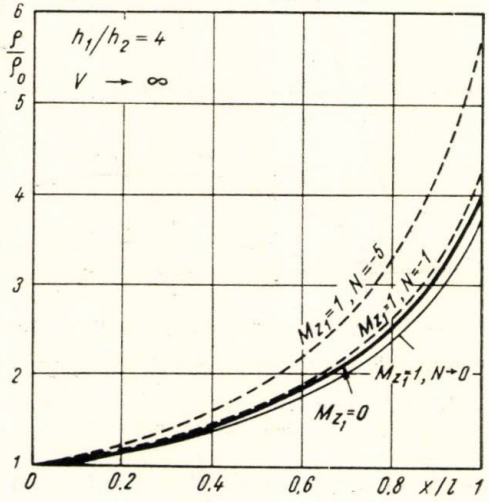


Fig. 2. — Variația densității (presiunii) în cazul unui lagăr plan cu $h_1/h_2 = 4$, pentru $V \to \infty$, în ipoteza existenței unui cîmp magnetic tangențial și a unui cîmp electric transversal.

stată faptul interesant că sensul efectului parametrului N se inversează: scade presiunile cînd $N > 0$, dar le poate crește cînd $N < 0$. Aceste considerații sînt ilustrate în figura 2, în care s-a reluat exemplu aceluiași lagăr plan cu $h_1/h_2 = 4$, ca și în figura 1.

Rezultă deci că, în timp ce la viteze reduse cîmpul electromagnetic are aceeași influență ca în cazul lubrificației cu lichide, la viteze mari compresibilitatea lubrifiantului poate altera influența cîmpului electromagnetic.

În încheiere, pentru a scoate în evidență efectul menționat în figura 2, să considerăm cazul cel mai simplu al unui lagăr de alungire infinită cu suprafețe paralele în trepte, caz pentru care ecuația presiunilor poate fi integrată fără dificultăți. Astfel, în figura 3 s-a reprezentat distribuția

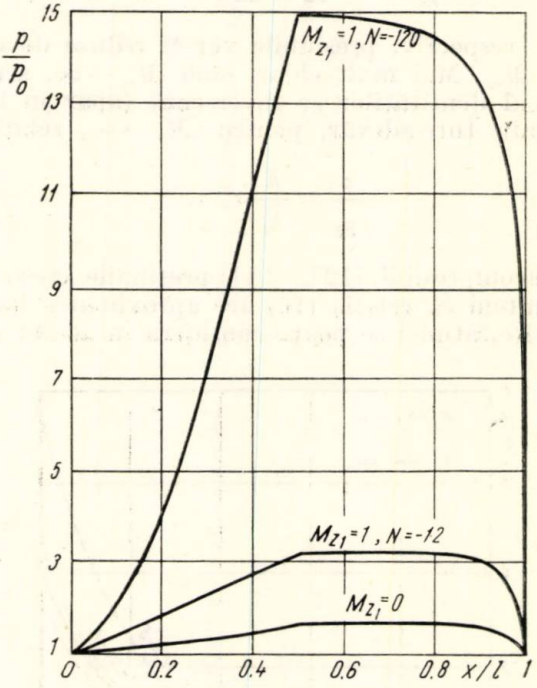


Fig. 3. — Variația presiunii într-un lagăr în trepte de alungire infinită, cu $h_1/h_2 = 4$, $l_1/l_2 = 1$, $\frac{\mu V l_1}{p_0 h_1^2} = 1$, în ipoteza existenței unui cîmp magnetic tangențial și a unui cîmp electric normal.

presiunilor pentru $h_1/h_2 = 4$, $H_{h_1} = \frac{\mu V l_1}{p_0 h_1^2} = 1$ și $l_1/l_2 = 1$, pentru $M_{z_1} = 0$; 1 și diferite valori N. Se constată că în asemenea condiții se poate obține o creștere importantă a capacității portante a lagărului.

În sfîrșit, este de menționat că situațiile examinate mai sus nu epuizează variatele combinații de condiții electromagnetice exterioare ce ar putea fi folosite. De exemplu, apare posibil să se reducă debitul în lagărele alimentate sub presiune, să se reducă forțele de frecare de pe una dintre suprafețe, să se pompeze lubrifiantul etc.

Primită la redacție la 16 decembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Lubrificația cu gaze*, București, Edit. Acad. R.P.R., 1963.
2. W. A. Gross, *Gas lubrication*, Applied Mechanics Reviews.
3. S. I. Pai, Magnetogazodynamics and Plasma Dynamics.
4. J. Hartmann, *Theory of the Laminor Flow an Electrical Conductive Liquid in a Homogeneus Magnetic Field*, Det. Kgl. Danskie Videnskabernes Selskab, Mathematisk-Fysike, Meddelelser, **XV**, *3* (1937).
5. W. T. Snyder, *The Magnetohydrodynamic Slider Bearing*, Journ. of Basic Eng., **84**, *1*, 197—202 (1962).
6. F. Osterlee, F. I. Young, *On the Load Capacity of the Hydromagnetically Lubricated Silder Bearings*, Wear, **5**, 227—234 (1962).
7. D. C. Kuzma, *The Magnetohydrodynamic Journal Bearing*, Journ. of Basic Eng., **85**, *3*, 424—427 (1963).
8. D. C. Kuzma, *The Finite Magnetohydrodynamic Journal Bearing*, Journ. of Basic Eng., **86**, *3*, 445—448 (1964).
9. W. Fucks, J. Uhlenbush, *Hydromagnetische Lagertheorie*, ZAMM, **43**, *12*, 553—560 (1962).
10. W. F. Hughes, R. A. Elco, *Magnetohydrodynamic Lubrication Flow Between Parallel Rotating Disks*, Journ. of Fluid Mech, **13**, part. I, 21 (1962).
11. R. A. Elco, W. F. Hughes, *Magnetohydrodynamic Pressurization of Liquid Metal Bearings*, Wear, **5**, 198—212 (1962).
12. W F. Hughes, R. A. Elio, *Magnetohydrodynamic Journal Bearing*, ARS Journal, **12**, *5*, 769—776 (1962).
13. W. F. Hughes, *The Magnetohydrodynamic Finite Step Slider Bearing*, Journ. of Basic Eng., **85**, *1*, 129—136 (1963).
14. W. T. Snyder, *The Influence of Finite-Wall Conductance on Load Capacity of the MHD Slider Bearing*, Journ. of Basic Eng., **86**, *3*, 436—440 (1964).
15. D. C. Kuzma, *Magnetohydrodynamic Squeeze Films*, Journ. of Basic Eng., **86**, *3*, 441—444 (1964).
16. V. N. Constantinescu, *On Turbulent Lubrication*, Proc. of the Institution of Mech. Engineers, London, 1959.

LEGILE GENERALE ALE MECANISMELOR CU CAME

de CHR. PELECUDI şi I. SAVA
Centrul de mecanica solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

531

Lucrarea cuprinde o sistematizare a legilor generale de mişcare ale elementului condus pe baza variabilelor adimensionale şi a coeficienţilor caracteristici. Este tratată problema racordărilor de orice ordin la capetele de intrare şi ieşire prin utilizarea polinoamelor de puteri şi exponenţiale, precum şi a suprapunerii cu legi de mişcare cu condiţii omogene la capete. Particularizările legilor generale sînt redate într-un tabel centralizator.

Una dintre problemele importante a sintezei mecanismelor cu came este realizarea unei deplasări date a elementului condus, tachetul, pentru o anumită deplasare a elementului conducător, cama. Dacă deplasarea camei este în general uniformă, deplasarea tachetului se poate face, fără alte restricţii, după orice lege de mişcare. Dar numeroasele legi de mişcare au fost studiate şi clasificate în principal după caracteristicile lor cinematice. Într-adevăr, valorile maxime ale vitezelor şi acceleraţiilor în interiorul intervalului de lucru sînt diferite de la o lege la alta, iar la capetele intervalului pot exista chiar şocuri datorită discontinuităţilor de acceleraţii. Aceste diferenţe se accentuează mai ales pentru acceleraţii superioare, care în special la mecanismele cu regim dinamic (viteze mari) sînt foarte importante.

Variaţiile bruşte ale acceleraţiilor resimţite în forţele de inerţie suprapuse variaţiilor forţelor tehnologice pot modifica, prin lanţul de elemente elastice, transmisia la organul de lucru şi prin aceasta caracteristicile dinamice ale mecanismului în ansamblu. Ipoteza dependinţei uzurii de forţele de contact şi de acceleraţiile de diferite ordine, ca şi influenţa uzurii în timp asupra legilor de mişcare, conduce la considerarea unor noi legi cu caracteristici îmbunătăţite.

ST. CERC. MEC. APL. TOM 22 NR. 4 P. 1039–1067 BUCUREŞTI 1966

1. PREZENTAREA LEGILOR DE MIŞCARE ŞI A CARACTERISTICILOR LOR CINEMATICE

1.1. Compararea caracteristicilor cinematice ale diverselor legi de mişcare se face pe baza variaţiilor parametrilor cinematici adimensionali. Aceştia se deduc astfel:

s_0 — cursa totală a tachetului,

φ_0 — deplasarea utilă a camei corespunzătoare cursei totale a tachetului (unghiul de rotaţie),

t_0 — timpul necesar perioadei active pentru realizarea curselor camei şi tachetului,

$\omega = \dfrac{\varphi_0}{t_0} = \dfrac{\varphi}{t}$ — viteza unghiulară constantă a camei în ipoteza mişcării uniforme,

$x = \dfrac{t}{t_0} = \dfrac{\varphi}{\varphi_0}$ — variabilă adimensională independentă corespunzătoare rotaţiei φ sau timpului t,

$s\,(t)$
$v\,(t) = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$
$a\,(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$
— legile de mişcare ale tachetului relative la deplasare, viteză, acceleraţie etc.

$y\,(x)$
$y'\,(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
$y''(x) = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$
— legile de mişcare ale tachetului exprimate în variabile adimensionale: deplasare, viteză, acceleraţie adimensională etc.

$s = y \cdot s_0$
$v = y' v_0$
$a = y'' a_0$
— legătura între variabile reale şi cele adimensionale care se realizează prin constantele dimensionale:
$s_0, \quad v_0 = \dfrac{s_0}{t_0}, \quad a_0 = \dfrac{s_0}{t_0^2}$.

În general, pentru acceleraţia de ordinul n, avem

$$a^{(n)} = y^{(n+1)} \cdot a_0^{(n)} \text{ cu } a_0^{(n)} = \frac{s_0}{t_0^{n+1}}.$$

Pentru ca într-o reprezentare carteziană diagramele parametrilor reali să nu difere de cele ale parametrilor adimensionali, trebuie ca scările respective să fie legate prin relaţiile:

— pe abscisă $k_t = t_0 k_x$; $k_\varphi = \varphi_0 k_x$; $k_\varphi = k_t \omega$,
— pe ordonată $k_s = s_0 k_y$; $k_v = v_0 k_y'$; $k_a = a_0 k_y''$.

Domeniul de variaţie al variabilelor x şi y este cuprins între zero şi 1, iar al derivatelor superioare depinde de funcţia monoton crescătoare $y\,(x)$.

Se cunosc pentru utilitatea lor deplasări $y(x)$ simetrice sau asimetrice în raport cu mijlocul intervalului de lucru $x = 0{,}5$ (fig. 1), iar după

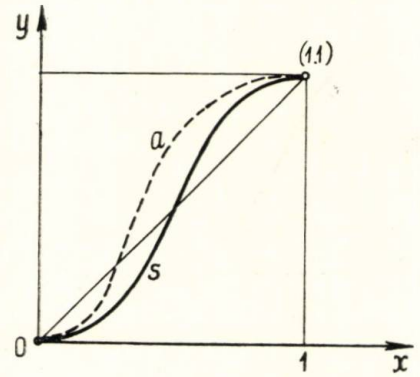


Fig. 1.

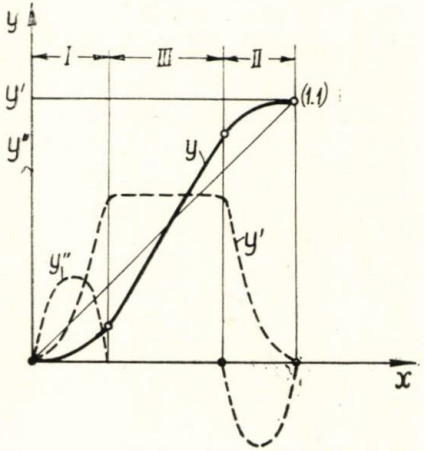


Fig. 2

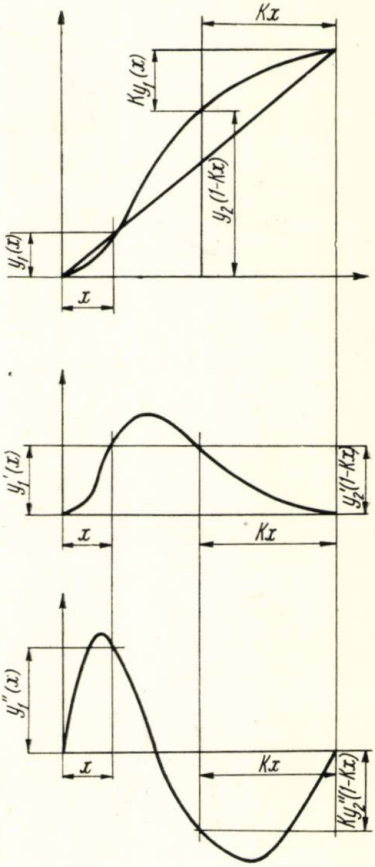


Fig. 3

forma mişcării cursa totală a tachetului este împărţită în două sectoare : unul de accelerare, altul de decelerare, completate uneori între ele cu al treilea sector de mişcare uniformă (fig. 2).

Dacă în diversele perioade de mişcare se utilizează aceleaşi legi, atunci se obţin relaţiile :

— pentru curbele generale (fig. 3) asimetrice (simetrice $k = 1$) :

$$\begin{aligned} K \cdot y_1(x) + y_2(1 - K \cdot x) &= 1, \\ y_1'(x) - y_2'(1 - Kx) &= 0, \\ y_1''(x) + K y_2''(1 - Kx) &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

în care $y_1(x)$ şi $y_2(x)$ sînt funcţiile din perioadele de accelerare (0-u_1) şi decelerare (1-$u_2 \div 1$), iar $K = u_2/u_1$;

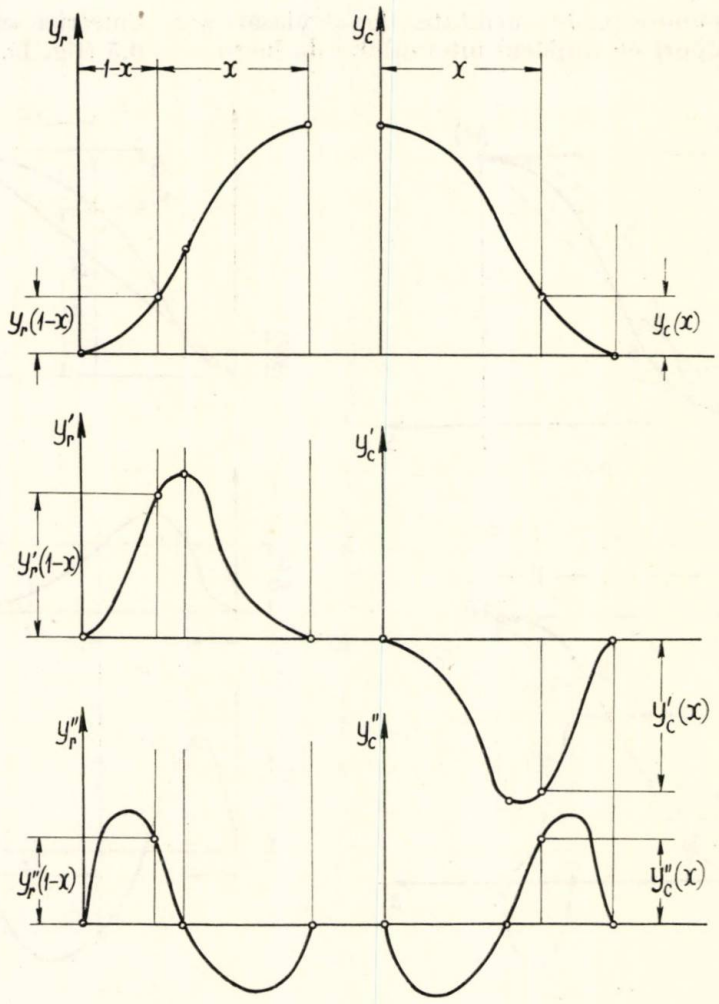


Fig. 4

— pentru curbele din perioadele de coborîre şi de ridicare (fig. 4):

$$\begin{aligned} v_c(x) &= y_r\ (1-x), \\ y'_c(x) &= -\,y'_r\ (1-x), \\ y''_c(x) &= y''_r\ (1-x), \end{aligned} \qquad (2)$$

în care x se măsoară în ambele cazuri de la începutul intervalului respectiv (de ridicare, de coborîre).

Față de perioadele de mișcare ale tachetului se cunosc mecanisme cu came de forma: pauză inferioară, ridicare, pauză superioară, coborîre, pauză inferioară, P.R.P.C.P., la care poate lipsi uneori pauza superioară, P.R.C.P.

Pentru primele, P.R.P.C.P., condițiile la capetele de ridicare (sau de coborîre) sînt

$$\begin{aligned} &y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{(p)}(0) = 0 \text{ și } y^{(p+q)}(0) \neq 0, \\ &y(1) = y'(1) = y''(1) = y^{(r)}(1) = 0 \text{ și } y^{(r+q)}(1) \neq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Pentru ultimele P.R.C.P., condițiile la joncțiunea dintre porțiunile de ridicare și coborîre sînt

$$\begin{aligned} &y_c(0) \quad = y_r(1) \quad = 1 \text{ (maxim)}, \\ &y_c'(0) \quad = -y_r'(1) \quad = 0 \text{ (nul)}, \\ &y_c''(0) \quad = y_r''(1) \quad \neq 0 \text{ (negativ sau nul)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y_c^{(n)}(0) \quad = (-1)^n y^{(n)}(1). \end{aligned} \tag{4}$$

1.2. Viteza maximă se găsește din proprietatea care leagă între ele graficele a trei derivate succesive: spațiul parcurs într-un interval dat este egal cu produsul suprafeței diagramei accelerației și distanța de la centrul ei de greutate pînă la sfîrșitul intervalului (dacă viteza este o funcție monotonă egală cu zero la începutul intervalului).

Pentru diagrama generală asimetrică cu trei sectoare (fig. 5,6) se notează:

y_1; y_2 — cursele corespunzătoare sectoarelor de accelerare și decelerare,

u_1; u_2
$u_1 + u_2 \leqslant 1$ } — lungimile sectoarelor de accelerare și decelerare,

$\lambda_1 u_1$; $\lambda_2 u_2$
$\lambda_1 < 1$; $y_2 \leqslant 1$ } — distanțele centrelor de greutate ale suprafeței diagramei accelerației, corespunzătoare sectoarelor de accelerare și decelerare, față de începutul și sfîrșitul intervalelor respective.

Se găsește

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 - \lambda_1) u_1 y'_{\max}, \\ y_2 &= (1 - \lambda_2) u_2 y'_{\max}, \\ y'_{\max} &= \frac{1}{1 - \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Concluzii asupra vitezelor maxime:

a) Variația vitezei maxime se face în același sens cu variația expresiei $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$.

b) Valori maxime se obțin pentru diagramele cu două sectoare, adică $u_1 + u_2 = 1$. În acest caz, vitezele maxime cresc dacă centrele de greutate

din diagrama acceleraţiilor sînt deplasate peste mijlocul intervalelor sectoarelor respective $\lambda_1 > 0{,}5$, $\lambda_2 > 0{,}5$, adică acceleraţiile maxime pozitive şi negative, sînt îndepărtate de joncţiunea celor două sectoare.

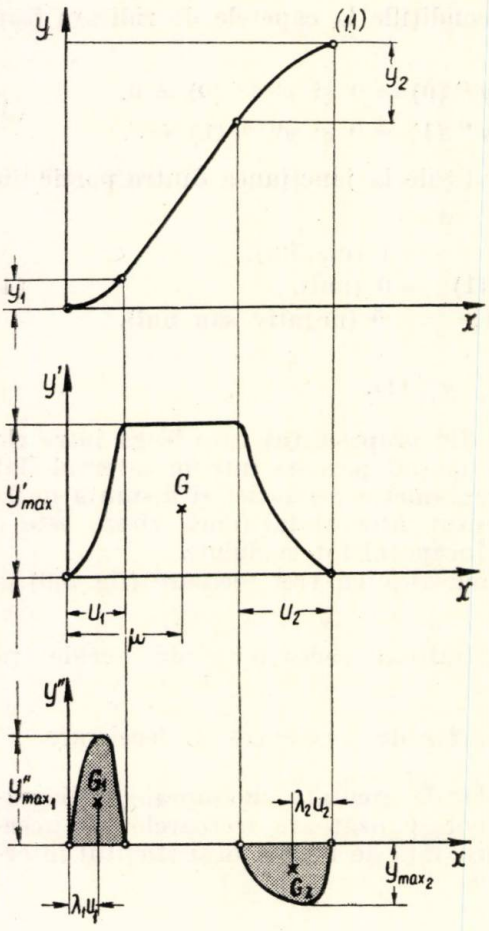


Fig. 5

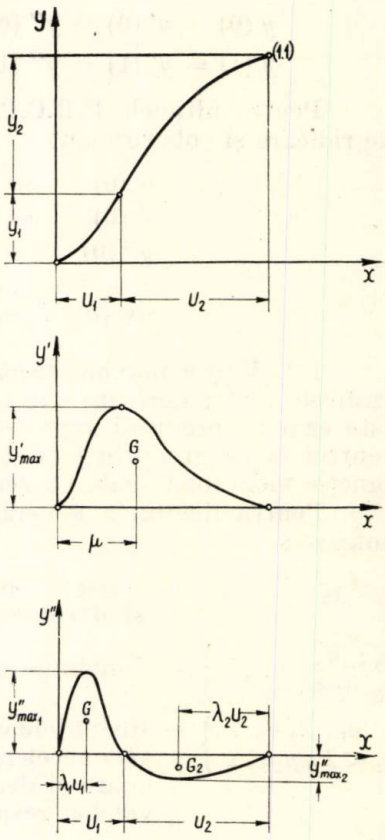


Fig. 6

Reducerea valorii maxime a vitezei se obţine prin deplasarea centrelor de greutate din diagrama acceleraţiilor către capetele sectoarelor respective $\lambda_1 < 0{,}5$, $\lambda_2 < 0{,}5$, adică acceleraţiile maxime pozitive şi negative, sînt îndepărtate de joncţiunea celor două sectoare.

c) Indiferent că diagrama este simetrică sau asimetrică, dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, adică diagrama acceleraţiilor are cele două sectoare asemenea, viteza maximă este

$$y'_{\max} = \frac{1}{1 - \lambda},$$

cu $y_1 = u_1$ și $y_2 = u_2$, adică punctul de inflexiune al diagramei deplasării se găsește pe diagonala pătratului 0—1. Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}5$, se găsește $y'_{\max\ \max} = 2$.

d) Valori minime se obțin pentru diagramele cu trei sectoare, adică $u_1 + u_2 < 1$. Minimul vitezei maxime este $y'_{\max\ \min} = 1$ pentru cazul unei mișcări uniforme, fără accelerații $u_1 = u_2 = 0$, ceea ce însă conduce la apariția șocurilor (legea liniară).

1.3. Accelerația maximă este redată în raport cu accelerația medie și viteza maximă. Se notează rapoartele:

$$\alpha_1 = \frac{y''_{\max 1}}{y''_{\text{med } 1}} \quad \text{în sectorul de accelerare,}$$

$$\alpha_2 = \frac{y''_{\max 2}}{y''_{\text{med } 2}} \quad \text{în sectorul de decelerare,}$$

adică se obține

$$y''_{\max 1} = \frac{\alpha_1}{u_1} y'_{\max}\,;\ y''_{\max 2} = \frac{\alpha_2}{u_2} y'_{\max}\,. \tag{6}$$

Concluzii asupra accelerațiilor maxime:

a) reducerea valorilor maxime ale accelerațiilor se face prin mărirea duratelor sectoarelor de demaraj și oprire, adică la limită pentru diagramele cu numai două sectoare $u_1 + u_2 = 1$. Micșorarea duratei sectorului de demaraj conduce la creșterea accelerației pozitive ($u_1 < 0{,}5$) și la micșorarea accelerației negative ($u_2 > 0{,}5$);

b) valorile minime ale accelerațiilor maxime se obțin prin reducerea vitezelor maxime ($y'_{\max}$) și a rapoartelor α_1, α_2, adică prin apropierea accelerațiilor maxime de accelerațiile medii;

c) pentru minimul accelerației maxime se ia $\alpha = 1$, $u = 0{,}5$, $\lambda = 0{,}5$ și se găsește $y''_{\max\ \min} = 4$, adică pentru mișcarea accelerată, parabolică, care are defecțiunile amplificării oscilațiilor elastice.

1.4. Valoarea suprafeței deplasare-timp (fig. 5,6) (cronosecțiune) este

$$\Sigma = \int_0^{t_0} s\,\mathrm{d}t = s_0 t_0 \int_0^1 y\,\mathrm{d}x,$$

$$\sigma = \int_0^1 y\,\mathrm{d}x = 1 - \mu, \tag{7}$$

în care μ reprezintă abscisa centrului de greutate al suprafeței diagramei vitezei.

Pentru mărirea acestei integrale trebuie deplasat centrul de greutate al graficului vitezei către începutul intervalului, adică trebuie deplasată în același sens viteza maximă și deci redusă durata sectorului de demaraj $u < 0{,}5$, care este însă limitată de creșterea accelerației maxime.

1.5. O recapitulare succintă a diverselor legi de mişcare şi a caracteristicilor lor este redată în tabela 1.

Această culegere de curbe poate fi utilizată în probleme de sinteză a mecanismelor cu came la alegerea celei mai potrivite în raport cu caracteristicile indicate fiecăruia şi cu alte condiţii impuse de problema concretă respectivă, ca, de exemplu, variaţia forţei tehnologice. Totodată metoda expusă pentru sinteza legilor de mişcare, în care deplasarea este monoton crescătoare şi are două sau trei sectoare, dintre care primul şi ultimul sînt sectoarele de demarare şi de oprire, porneşte de la alegerea convenabilă a formei graficului de acceleraţie în raport cu acceleraţia maximă, viteza maximă şi integrala cronosecţiune maximă.

2. STUDIUL LEGILOR DE MIŞCARE PRIN POLINOAME DE PUTERI SAU POLINOAME DE EXPONENŢIALE

Sub această formă se poate lua în considerare racordarea cît mai lină la capetele intervalului de lucru şi problema matematică se formulează astfel : între două puncte $P_1\,(x_1, y_1)$ şi $P_2\,(x_2, y_2)$ să se ducă o curbă care să prezinte la capete $p + r + 2$ condiţii :

$$\begin{aligned} &P_1\,;\, y\,(x_1)\,;\, y'\,(x_1)\,;\; y''\,(x_1)\,;\ldots\, y^{(p)}\,(x_1),\\ &P_2\,;\, y\,(x_2)\,;\, y'\,(x_2)\,;\; y''\,(x_2)\,;\ldots\, y^{(r)}\,(x_2) \end{aligned} \tag{8}$$

relative la valorile funcţiei şi ale primelor p şi r derivate. Aceste condiţii reprezintă generalizarea celor din cazul particular întîlnit în mod obişnuit prin relaţiile (3).

2.1. *Rezolvarea prin polinoame de puteri.* Soluţia generală va fi exprimată sub forma

$$y = \sum_u C_u \cdot x^u, \tag{9}$$

în care unele puteri u, respectiv coeficienţi C_u, pot lipsi. Din dezvoltarea completă (rest nul) într-un polinom Taylor

$$y\,(x_1+x) = y\,(x_1) + \frac{x}{1}\,y'\,(x_1) + \frac{x^2}{2\,!}\,y''(x_1) + \ldots + \frac{x^p}{p\,!}\,y^{(p)}(x_1) + \sum_{s<p}\frac{x^s}{s\,!}\,y^{(s)}\,(x_1) \tag{10}$$

se identifică primii $(p + 1)$ coeficienţi daţi prin valorile prescrise în punctul $P_1\,(x_1, y_1)$, adică

$$C_u = \frac{y^{(u)}\,(x_1)}{u\,!}\,;\; u \leqslant p \quad \text{şi} \quad u = 0,\, 1,\, 2,\ldots,\, p. \tag{11}$$

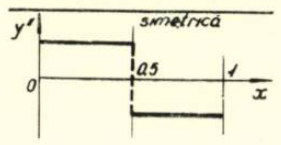
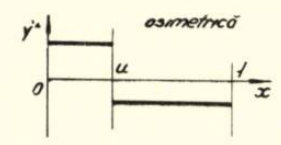
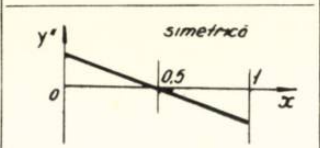
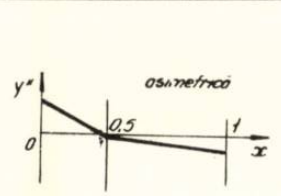
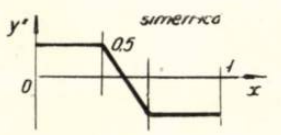
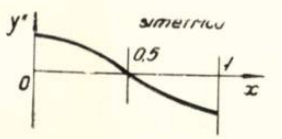
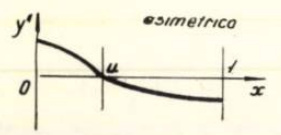
Din cele $(r + 1)$ ecuaţii pentru condiţiile din punctul $P_2(x_2, y_2)$ se determină $(r + 1)$ coeficienţi C_u cu $u > p$, care au aceeaşi formă, rezolvarea constînd în determinarea derivatelor $y^{(u)}(x_1)$ din punctul P_1 cînd se cunosc

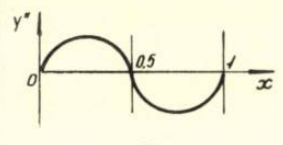
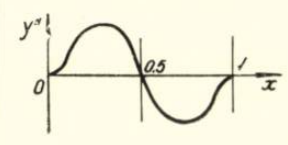
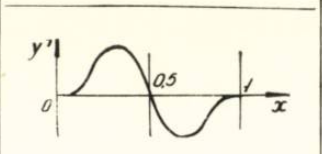
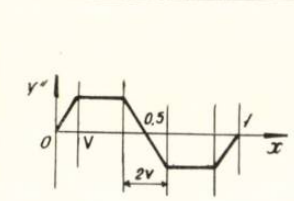
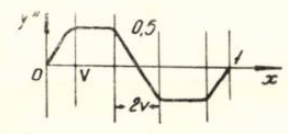
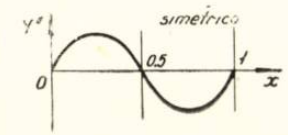
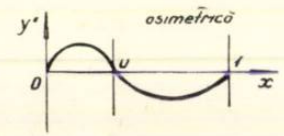
Tabel 1-a

Legile de mişcare ale tachetului P.R.P.C.P.

Cu şocuri slabe | **Fără şocuri**

Cu două sectoare : accelerare ; decelerare

Denumirea legii	Graficul acceleraţiilor	Interval de la	Interval până la	Deplasarea y	Valori maxime: Viteza y'	Valori maxime: Acceleraţie y''	Valori maxime: Cronosect. $\int_0^1 y\,dx$
Legea 2 (parabolica)		0	0,5	$2x^2$	2 (0,5)	4	0,5
		0,5	1	$1-2(1-x)^2$		-4	
		0	u	$\frac{x^2}{u}$	2 (u)	$\frac{2}{u}$	$\frac{2-u}{3}$
		u	1	$1-\frac{(1-x)^2}{(1-u)}$		$-\frac{2}{1-u}$	
Legea 2—3 (parabolă cubică)		0	1	$3x^2-2x^3$	1,5 (0,5)	6 -6	0,5
		0	u	$\frac{3x^2}{2u}-\frac{x^3}{2u^2}$	1.5 (u)	$\frac{3}{u}$	$\frac{5-2u}{8}$
		u	3	$1-\frac{3(1-x)^2}{2(1-u)}+\frac{(1-x)^6}{2(1-u)^2}$		$-\frac{3}{1-u}$	
Trapezoidala		0	0,5−v	$\frac{3}{0,75-v^2}\cdot\frac{x^2}{2}$	1,5 (1 − v) / 0,75 − v² (0,5)	$\frac{3}{0,75-v^2}$	0,5
		0,5−v	0,5+v	$\frac{3vx^2-(x+v-0,5)^3}{2v(0,75-v^2)}$			
		0,5+v	1	$1-\frac{3}{0,75-v^2}\cdot\frac{(1-x)^2}{2}$		$-\frac{3}{0,75-v^2}$	
Cosimusoidala		0	1	$1-\frac{\cos x}{2}$	$\frac{\pi}{2}=1,57$ (0,5)	$\frac{\pi^2}{2}=4,92$ $-\frac{\pi^2}{2}=4,92$	0,5
		0	u	$u\left(1-\cos\frac{\pi}{2u}x\right)$	$\frac{\pi}{2}=1,57$ (u)	$\frac{\pi^2}{4u}$	$\frac{2-(4-\pi)u}{\pi}$
		u	1	$u+(1-u)\cos\frac{\pi}{2}\frac{1-x}{1-u}$		$-\frac{\pi^2}{4(1-u)}$	

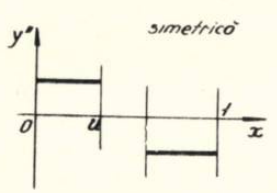
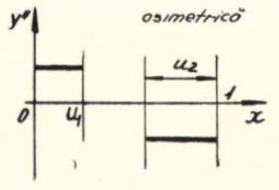
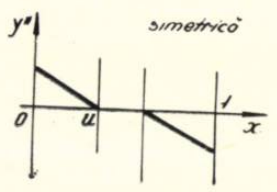
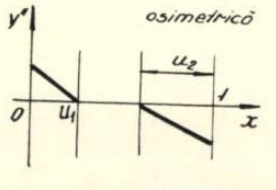
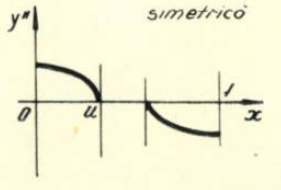
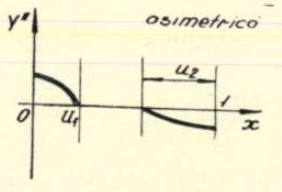
Denumirea legii	Graficul acceleraţiilor	Interval de la	Interval până la	Deplasarea y	Valori maxime: Viteza y'	Valori maxime: Acceleraţie y''	Valori maxime: Puls y'''	Valori maxime: Cronosect. $\int_0^1 y\,dx$
Legea 3.4.5.		0	1	$10x^3-15x^4+6x^5$	1 875 (0,5)	5,77 (0,211) $-5,77$ (0,789)	60 (0) -30 (0,5) $+60$ (1)	0,5
Legea 4.5.6.7.		0	1	$35x^4-84x^5+70x^6-20x^7$	2 187 (0,5)	7,52 (0,296) $-7,52$ (0,724)	42 (0,112) $-52,5$ (0,5) $+42$ (0,888)	0,5
Legea 5.6.7.8.9		0	1	$126x^5-420x^6+540x^7-315x^8+70x^9$	2 460 (0,5)	9,36 (0,311) $-9,36$ (0,689)	51,4 (0,1725) $-78,75$ (0,5) 51,4 (0,8275)	0,5
Trapezoidala		0	v	$\frac{2}{3v}\cdot\frac{x^3}{1-2v}$	2 (0,5)	$\frac{4}{1-2v}$	$\frac{4}{v(1-2v)}$ (0 ;1) $-\frac{4}{v(1-2v)}$ (0,5	0,5
		0	0,5 − v	$\frac{2}{1-2v}\left(x^2-vx+\frac{v^2}{3}\right)$				
		0,5− v	0,5	$2x-0,5+\frac{2}{3}\cdot\frac{(0,5-x)^3}{v(1-2v)}$				
Trapezoidala sinusoidala		0	v	$y''_{max}\frac{2v}{\pi}\left(x-\frac{2v}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2v}\right)$	2 (0,5)	$\frac{4\pi}{\pi-4\pi v+8v}$	$y''_{max}\frac{\pi}{2v}$ (0 ;1) $-y''_{max}\frac{\pi}{2v}$ (0,5)	0,5
		v	0,5 − v	$y''_{ma}\left[\frac{(\pi^2-8)^2}{2\pi^2}+\frac{2-\pi}{\pi}vx+\frac{x^2}{2}\right]$				
		0,5− v	0,5	$y''_{max}\left[-0,125+0,5v+\left(0,5-2v+\frac{2v}{\pi}\right)x-\left(\frac{2v}{\pi}\right)^2\sin\frac{\pi}{2v}(0,5-v)\right]$				
Sinusoidala		0	1	$x-\frac{\sin 2\pi x}{2\pi}$	2 (0,5)	2π (0,25) -2π (0,75)	$4\pi^2$ 0 $-4\pi^2$ (0,5) $4\pi^2$ (1)	0,5
		0	u	$x-\frac{u}{\pi}\sin\frac{\pi x}{u}$	2 (u)	$\frac{\pi}{u}$ (u/2) $-\frac{\pi}{1-u}$ $\left(1+\frac{u}{2}\right)$	π^2/u^2 (0) $-\pi^2/u^2$ (u) $-\pi^2/(1-u)^2$ (u) $\pi^2/(1-u)^2$ (1)	$0,5+\frac{2}{\pi^2}(1-2u)$
		u	1	$x+\frac{1-u}{\pi}\sin\frac{\pi(1-x)}{1-u}$				

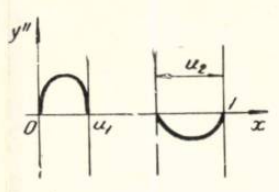
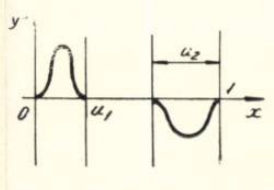
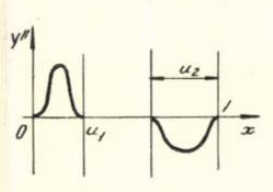
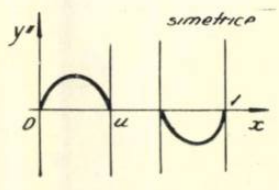
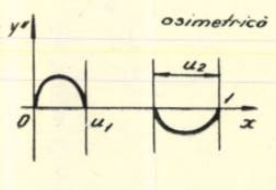
Tabel 1 b

Legile de mişcare ale tachetului P.R.P.C.P.

Cu şocuri slabe | **Fără şocuri**

Cu trei sectoare: accelerare; mişcare uniformă; decelerare

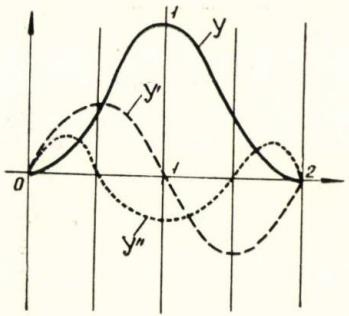
Denumirea legii	Graficul acceleraţiilor	Interval de la	Interval până la	Deplasarea y	Valori maxime: Viteza y'	Valori maxime: Acceleraţie y''	Valori maxime: Cronosecţiune $\int_0^t y\,dx$
Legea 2 (parabolică)		0	u	$\frac{x^2}{2u(1-u)}$	$\frac{1}{1-u}$	$\frac{0}{u(1-u)}$	0,5
		u	$1-u$	$\frac{2x-u}{2(1-u)}$			
		$1-u$	1	$1-\frac{(1-x)^2}{2u(1-u)}$		$-\frac{1}{u(1-u)}$	
		0	u_1	$\frac{x^2}{u_1(2-u_1-u_2)}$	$\frac{2}{2-u_1-u_2}$	$\frac{2}{u_1(2-u_1-u_2)}$	$\frac{(u_1^2-u_2^2)+3(1-u_1)}{3(2-u_1-u_2)}$
		u_1	$1-u_2$	$\frac{2x-u_1}{2-u_1-u_2}$			
		$1-u_2$	1	$1-\frac{(1-x)^2}{u_2(2-u_1-u_2)}$		$-\frac{2}{u_2(2-u_1-u_2)}$	
Legea 2–3		0	u	$\frac{3x^2-x^3/u}{u(3-2u)}$	$\frac{3}{3-2u}$	$\frac{6}{u(3-2u)}$	0,5
		u	$1-u$	$\frac{3x-u}{3-2u}$			
		$1-u$	1	$1-\frac{3(1-x)^2-(1-x)^3/u}{u(3-2u)}$		$-\frac{6}{u(3-2u)}$	
		0	u_1	$\frac{3x^2-x^3/u_1}{u_1(3-u_1-u_2)}$	$\frac{3}{3-u_1-u_2}$	$\frac{6}{u_1(3-u_1-u_2)}$	$\frac{u_1^2-u_2^2-4u_1+6}{4(3-u_1-u_2)}$
		u_1	$1-u_2$	$\frac{3x-u_1}{3-u_1-u_1}$			
		$1-u_2$	1	$1-\frac{3(1-x)^2-(1-x)^3/u_2}{u_2(3-u_1-u_2)}$		$-\frac{6}{u_2(3-u_1-u_2)}$	
Cosinusoidala		0	u	$\frac{2u}{\pi-2u(\pi-2)}\left(1-\cos\frac{\pi x}{2u}\right)$	$\frac{\pi}{\pi-2u(\pi-2)}$	$\frac{\pi^2}{2u[\pi-2u(\pi-2)]}$	0,5
		u	$1-u$	$\frac{\pi x-(\pi-2)u}{\pi-2u(\pi-2)}$			
		$1-u$	1	$1=\frac{2u}{\pi-2u(\pi-2)}\left[1-\cos\frac{\pi(1-x)}{2u}\right]$		$-\frac{\pi^2}{2u[\pi-2u(\pi-2]}$	
		0	u_1	$\frac{2u_1}{\pi-(\pi-2)(u_1+u_2)}\left(1-\cos\frac{\pi x}{2u_1}\right)$	$\frac{\pi}{\pi-(\pi-2)(u_1+u_2)}$	$\frac{\pi^2}{2u_1[\pi-(\pi-2)(u_1+u_2)]}$	$\frac{(u_1^2-u_2^2)(\pi^2-8)-2\pi(\pi-2)u_1+\pi^2}{2\pi[\pi-(\pi-2)(u_1+u_2)]}$
		u_1	$1-u_2$	$\frac{\pi x-(\pi-2)u_1}{\pi-(\pi-2)(u_1+u_2)}$			
		$1-u_2$	1	$1-\frac{2u_2}{\pi-(\pi-2)(u_1+u_2)}\left[1-\cos\frac{\pi(1-x)}{2u_2}\right]$		$-\frac{\pi^2}{2u_2[\pi-(\pi-2)(u_1+u_2)]}$	

Denumirea legii	Graficul acceleraţiei	Interval de la	Interval până la	Deplasarea y	Valori maxime: Viteza y'	Valori maxime: Acceleraţie y''	Valori maxime: Puls y'''	Valori maxime: Cronosecţiune $\int_0^t y\,dx$
legea 3–4		0	u_1	$\frac{x^3(2u_1-x)}{u_1^3(2-u_1-u_2)}$	$\frac{2}{2-u_1-u_2}$	$\frac{3}{u_1(2-u_1-u_2)}$	$\pm\frac{12}{u_1^2(2-u_1-u_2)}$	$\frac{3(u_1^2-u_2^2)+10(1-u_1)}{10(2-u_1-u_2)}$
		u_1	$1-u_2$	$\frac{2x-u_1}{2-u_1-u_2}$				
		$1-u_2$	1	$1-\frac{(1-x)^3(2u_2-1+x)}{u_2^3(2-u_1-u_2)}$	(0,5)	$-\frac{3}{u_2(2-u_1-u_2)}$	$\mp\frac{12}{u_2^2(2-u_1-u_2)}$	
legea 4–5–6		0	u_1	$\frac{x^4(5u_1^2-6u_1x+2x^2)}{u_1^5(2-u_1-u_2)}$	$\frac{2}{2-u_1-u_2}$	$\frac{15}{4u_1(2-u_1-u_2)}$	$\pm\frac{20\sqrt{3}}{3u_1^2(2-u_1-u_2)}$	$\frac{2(u_1^2-u_2^2)+7(1-u_1)}{7(2-u_1-u_2)}$
		u_1	$1-u_2$	$\frac{2x-u_1}{2-u_1-u_2}$				
		$1-u_2$	1	$1-\frac{(1-x)^4[5u_2^2-6u_2(1-x)+2(1-x)^2]}{u_2^5(2-u_1-u_2)}$	(0.5)	$-\frac{15}{4u_2(2-u_1-u_2)}$	$\mp\frac{20\sqrt{3}}{3u_2^2(2-u_1-u_2)}$	
legea 5–6–7–8		0	u_1	$\frac{x^5(14u_1^3-28u_1^2x+20u_1x^2-5x^3)}{u_1^7(2-u_1-u_2)}$	$\frac{2}{2-u_1-u_2}$	$\frac{35}{8u_1(2-u_1-u_2)}$	$\pm\frac{5,92\sqrt{3}}{u_1^2(2-u_1-u_2)}$	$\frac{5(u_1^2-u_2^2)+6(1-u_1)}{6(2-u_1-u_2)}$
		u_1	$1-u_2$	$\frac{2x-u_1}{2-u_1-u_2}$				
		$1-u_2$	1	$1-\frac{(1-x)^5[14u_2^3-18u_2^2(1-x)+20u_1(1x)^2-5(1-x^3)]}{u_2^7(2-u_1-u_2)}$	(0,5)	$-\frac{35}{8u_2(2-u_1-u_2)}$	$+\frac{-5,92\sqrt{3}}{u_2^2(2-u_1-u_2)}$	
	—	—	—	—	—	—	—	—
Sinusoidala		0	u	$\frac{1}{2(1-u)}\left(x-\frac{u}{\pi}\sin\frac{\pi x}{u}\right)$	$\frac{1}{1-u}$	$\frac{\pi}{2u(1-u)}$	$\mp\frac{\pi^2}{u^2}\frac{1}{2(1-u)}$	0,5
		u	$1-u$	$\frac{2x-u}{2(1-u)}$				
		$1-u$	1	$1-\frac{1}{2(1-u)}\left[(1-x)-\frac{u}{\pi}\sin\frac{\pi}{u}(1-x)\right]$		$-\frac{\pi}{2u(1-u)}$		
		0	u_1	$\frac{1}{(2-u_1-u_2)}\left(x-\frac{u_1}{\pi}\sin\frac{\pi x}{u_1}\right)$	$\frac{2}{2-u_1-u_2}$	$\frac{\pi}{u_1(2-u_1-u_2)}$	$\pm\frac{\pi^2}{u_1^2}\frac{1}{2-u_1-u_2}$	$\frac{(u_1^2-u_2^2)\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}\right)+(1-u_1)}{2-u_1-u_2}$
		u_1	$1-u_2$	$\frac{2x-u_1}{2-u_1-u_2}$				
		$1-u_2$	1	$1-\frac{1}{2-u_1-u_2}\left[(1-x)-\frac{u_2}{\pi}\sin\frac{\pi}{u_2}(1-x)\right]$		$-\frac{\pi}{u_2(2-u_1-u_2)}$	$\mp\frac{\pi^2}{u_2^2}\frac{1}{2-u_1-u_2}$	

Legile de mişcare ale tachetului P.R.C.P.

Ridicare 0—1 Coborîre 1—2

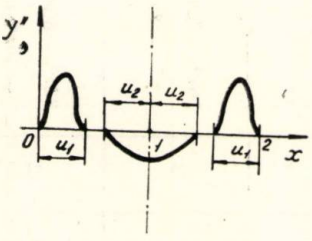
Fără şocuri — cu două sectoare : accelerare ; decelerare

Denumirea legii	Graficul deplasării, vitezei şi acceleraţiei	Interval de la	Interval pînă la	Deplasarea y	Valori maxime: viteza y'	Valori maxime: acceleraţie y''	Valori maxime: cronosecţiune $\int_0^1 y\,dx$
Legea 2.3.4		0	2	$4x^2 - 4x^3 + x^4$	1.54 (0.422) −1.54 (1,578)	8 (0) −4 (1) 8 (2)	0,533
Legea 3.4.5.6.		0	2	$8x^3 - 12x^4 + 6x^5 - x^6$	1.72 (0,552) −1.72 (1.448)	4.8 (0,225) −6 (1) 4.8 (1,775)	0.457
Legea 4.5.6.7.8.		0	2	$16x^4 - 32x^5 + 24x^6 - 8x^7 + x^8$	1.90 (0,622) −1.90 (1.378)	5.22 (0,346) −8 (1) 5.22 (1.654)	0.406
Legea 5.6.7.8.9.10		0	2	$32x^5 - 80x^6 + 80x^7 - 40x^8 + 10x^9 - x^{10}$	2.08 (0,667) −2.08 (1.33)	5.93 (0,422) −10 (1) 5.93 (1.578)	0.370

Legile de mişcare

Ridicare 0—1

Fără şocuri : accelerare

Den. legii	Graficul acceleraţilor	Interv. de la	Interv. pînă la	Deplasarea y
Legea 3—4		0	u_1	$y_1 = \frac{y'_{max}}{u_1^3}(u_1 x^3 - 0{,}5\ x^4)$
		u_1	$1-u_2$	$y_3 = y'_{max}(x - 0{,}5\ u_1)$
		$1-u_2$	1	$y_2 = \frac{y'_{max}}{8\ u_2^3}[(x-1)^4 - 6\ u_2^2 (x-1)^2] + 1$
Legea 4—5—6		0	u_1	$y_1 = \frac{y'_{max}}{u_1^5}(2{,}5\ u_1^2 x^4 - 3\ u_1 x^5 + x^6)$
		u_1	$1-u_2$	$y_3 = y'_{max}(x - 0{,}5\ u_1)$
		$1-u_2$	1	$y_2 = \frac{y'_{max}}{16\ u_2^5}[(x-1)^6 - 5\ u_2^2 (x-1)^4 + 15\ u_2^4 (x-1)^2] + 1$
Legea 5.6.7.8		0	u_1	$y_1 = \frac{y'_{max}}{u_1^7}(7\ u_1^3 x^5 - 14\ u_1^2 x^6 + 10\ u_1 x^7 - 2{,}5\ x^8)$
		u_1	$1-u_2$	$y_3 = y'_{max}(x - 0{,}5\ u_1)$
		$1-u_2$	1	$y_2 = \frac{y'_{max}}{128\ u_2^7}[5(x-1)^8 - 28\ u_2^2 (x-1)^6 + 70\ u_2^4 (x-1)^4 - 140\ u_2^6 (x-1)^2] + 1$

derivatele $y^{(n)}(x_2)$ din punctul P_2. Pentru aceasta, notînd cu $x_0 = x_2 - x_1$, se consideră dezvoltările Taylor pentru funcţia de bază şi derivatele ei :

$$y(x_2) = y(x_1) + \frac{x_0}{1!} y'(x_1) + \frac{x_0^2}{2!} y''(x_1) + \ldots \frac{x^p}{p!} y^{(p)}(x_1) + \sum_{s>p} \frac{x_0^s}{s!} y^{(s)}(x_1),$$

ale tachetului P.R.C.P.

Coborîre 1—2

— mişcare uniformă — decelerare

Valori maxime

Viteza y'	Acceleraţia y''	Şocul y'''	Cronosecţiune $\int_0^1 y\,dx$
$\frac{8}{8-4u_1-3u_2}$	$\frac{3y'_{max}}{2u_1}$	$\pm\frac{6y'_{max}}{u_1^2}$	$y'_{max}\left[\frac{3u_1^2-2u_2^2}{20}+0{,}5(1-u_1)\right]$
	$-\frac{3y'_{max}}{2u_2}$	$\mp\frac{3y'_{max}}{u_2^2}$	
$\frac{16}{16-8u_1-5u_2}$	$\frac{15y'_{max}}{8u_1}$	$\pm\frac{10y'_{max}}{\sqrt{3}u_1^2}$	$y'_{max}\left[\frac{2u_1^2-u_2^2}{14}+0{,}5(1-u_1)\right]$
	$-\frac{15y'_{max}}{8u_2}$	$\mp\frac{5y'_{max}}{\sqrt{3}u_2^2}$	
$\frac{128}{128-64u_1-35u_2}$	$\frac{35y'_{max}}{16u_1}$	$\pm\frac{84y'_{max}}{5\sqrt{5}u_1^2}$	$y'_{max}\left[\frac{5u_1^2-2u_2^2}{36}+0{,}5(1-u_1)\right]$
	$-\frac{35y'_{max}}{16u_2}$	$\mp\frac{42y'_{max}}{5\sqrt{5}u_2^2}$	

$$y'(x_2)=y'(x_1)+\frac{x_0}{1!}y''(x_1)+\frac{x_0^2}{2!}y'''(x_1)+\ldots\frac{x_0^{p-1}}{(p+1)!}y^{(p)}(x_1)+$$

$$+\sum_{s>p}\frac{x_0^{s-1}}{(s-1)!}y^{(s)}(x_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(p)}(x_2) = y^{(p)}(x_1) + \sum_{s>p} \frac{x_0^{s-p}}{(s-p)!} y^{(s)}(x_1), \tag{12}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(r)}(x_2) = y^{(r)}(x_1) + \sum_{s>r} \frac{x_0^{(s-r)}}{(s-r)!} y^{(s)}(x_1).$$

Se fac următoarele notaţii :

$$A_h = \frac{x_0^h y^h(x_1)}{h!} = x_0^h C_h \quad B_k = \frac{x_0^k y^{(k)}(x_2)}{k!}$$
$$X_s = \frac{x_0^s y^{(s)}(x_1)}{s!} = x_0^s C_s ; \; s > p \tag{13}$$

Astfel ecuaţiile de mai sus devin

$$B_0 = \sum_{h=0}^{p} C_h^0 A_h + \sum_{s>p} C_s^0 X_s,$$

$$B_1 = \sum_{h=1}^{p} C_h^1 A_h + \sum_{s>p} C_s^1 X_s,$$

$$B_2 = \sum_{h=2}^{p} C_h^2 A_h + \sum_{s>p} C_s^2 X_s, \tag{14}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_r = \sum_{h=r\leqslant p} C_h^r A_h + \sum_{s>p} C_s^r X_s \quad \text{dacă } r \leqslant p,$$

$$B_r = \sum_{s>p} C_s^r X_s \quad \text{dacă } r > p,$$

în care C_m^n reprezintă simbolul combinărilor.

Deoarece

$$s^n = \sum_{m=1}^{n} \Delta^m 0^n C_s^m,$$
$$\Delta^m \cdot 0^n = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \cdot C_m^k \cdot k^n \tag{15}$$

se înmulţeşte ecuaţia de ordinul m cu diferenţa finită $\Delta^m 0^n$ şi se însumează primele n ecuaţii, obţinîndu-se sistemul

$$D_n = \sum_{s>p} s^n X_s \qquad n = 0, 1, 2, \ldots r, \tag{16}$$

iar

$$D_n = \sum_{m=1}^{n} \Delta^m \cdot 0^r \cdot B_m - \sum_{\substack{h=n \\ n \leqslant p}}^{p} h^n \cdot A_k \tag{17}$$

și

$$D_0 = B_0,$$

respectiv

$$\begin{aligned} D_0 &= X_u + X_v + X_w + X_z, \\ D_1 &= uX_u + vX_v + wX_w + zX_z, \\ D_2 &= u^2X_u + v^2X_v + w^2X_w + z^2X_z, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_r &= u^rX_u + v^rX_v + w^rX_w + z^rX_z, \end{aligned} \tag{18}$$

în care necunoscutele X_r sînt în număr de $(r+1)$.

Soluțiile se găsesc prin suprapunerea soluțiilor particulare pentru fiecare termen D_n:

$$X_u = \sum_{n=0}^{r} X_u^{(n)}. \tag{19}$$

Astfel

$$\begin{aligned} X_u^{(0)} &= \frac{D_0\, v.w.z \ldots}{(v-u)(w-u)(z-u)\ldots}, \\ X_u^{(1)} &= -\frac{D_1 \cdot P^{(r-1)}(v, w, z \ldots)}{(v-u)(w-u)(z-u)\ldots}, \\ X_u^{(2)} &= \frac{D_2\, P^{(r-2)}(v, w.z, \ldots)}{(v-u)(w-u)(z-u)\ldots}, \\ X_u^{(3)} &= -\frac{D_2\, P^{(r-3)}(v, w, z, \ldots)}{(v-u)(w-u)(z-u)\ldots}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_u^{r} &= (-1)^r \frac{D_r}{(v-u)(w-u)(z-u)\ldots}, \end{aligned} \tag{20}$$

în care $P^k(v, w, z, \ldots)$ reprezintă polinoame omogene de ordinul k formate prin însumarea produselor de k termeni în toate combinațiile posibile dintre cele r necunoscute, adică în număr de C_r^k.

$$\begin{aligned} P^{(0)}(v, w, z, \ldots) &= 1, \\ P^{(1)}(v, w, z, \ldots) &= v + w + z + \ldots, \\ P^{(2)}(v, w, z, \ldots) &= vw + wz + vz + \ldots, \\ P^{(3)}(v, w, z, \ldots) &= vwz + \ldots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P^{(r)}(v, w, z, \ldots) &= vwz \ldots \end{aligned} \tag{21}$$

Rezultă deci

$$X_u = \frac{\sum_{n=0}^{r} (-1)^n \cdot D_n P^{(r-n)}(v, w, z, \ldots)}{(v-u)(w-u)(z-u)\ldots},$$

$$X_v = \frac{\sum_{n=0}^{r} (-1)^n D_n P^{(r-n)}(u, w, z, \ldots)}{(u-v)(w-v)(z-v)\ldots}, \qquad (22)$$

$$X_w = \frac{\sum_{n=0}^{r} (-1)^n D_n P^{(r-n)}(u, v, z, \ldots)}{(u-w)(v-w)(z-w)\ldots}.$$

În cazul particular semnalat la început (3), se deduce :

$$x_0 = 1\,;\ A_h = C_h = 0 \qquad \text{pentru } h = 0, 1, 2, \ldots, p,$$

$$B_0 = 1\,;\ B_k = 0 \qquad \text{pentru } k = 1, 2, 3, \ldots, p,$$

$$X_s = C_s\,;\ D_0 = 1\,;\ D_n = 0 \qquad \text{pentru } n = 1, 2, 3, \ldots, p,$$

astfel că dacă $u, v, w \ldots > p$, avem :

$$y = C_u x^u + C_v x^v + C_w x^w + \ldots$$

Alt caz particular util în practică pentru diferite racordări la capătul de intrare cuprinde condiţiile la capete de forma

$$P_1(0,0)\quad y(0) = 0,\ y'(0) \neq 0,\ y''(0) \neq 0, \ldots,\ y^{(\alpha)}(0) \neq 0,\ y^{(\alpha+1)}(0) = 0, \ldots$$
$$\ldots,\ y^{(p)}(0) = 0,\ y^{(p+q)}(0) \neq 0,$$

$$P_2(1,1)\quad y(1) = 1,\ y'(1) = 0,\ y''(1) = 0, \ldots,\ y^{(p)}(1) = 0,\ y^{(p+q)}(1) = 0$$

şi deci

$$A_h = C_h = \frac{y^{(h)}_{(0)}}{h!} \quad \text{pentru } 1 \leqslant h \leqslant \alpha,$$

$$A_0 = C_0 = 0 \qquad A_h = C_h = 0 \quad \text{pentru } \alpha \leqslant h \leqslant p,$$
$$B_0 = 1 \qquad B_k = 0 \quad \text{pentru } 1 \leqslant k \leqslant p,$$

adică

$$X_s = C_s\,;\ D_0 = 1\,;\ D_n = -\sum_{h=n<\alpha}^{\alpha} h^n C_h \quad \text{pentru } 1 \leqslant n \leqslant \alpha$$

şi

$$D_n = 0 \quad \text{pentru } n > \alpha,$$

astfel că avem

$$y = C_1 x^1 + C_2 x^2 + \ldots\ C_\alpha x^\alpha + C_u x^u + C_w x^w + \ldots$$

Dacă racordarea la capătul de intrare se face cu o dreaptă înclinată, deci $\alpha = 1$, rămîne numai coeficientul $C_1 = y'(0)$ și $D_1 = -C_1$, iar dacă se face la o parabolă, $\alpha = 2$, rămîn coeficienții

$$C_1 = y'(0),\ C_2 = \frac{y''(0)}{2!},\ D_1 = -(C_1 + 2C_2) \text{ și } D_2 = -(4C_2),$$

ceilalți anulîndu-se.

În sfîrșit, pentru camele de forma P.R.C.P., condițiile sînt ($r = 1$):

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y''(0) = 0 \ldots \quad y^{(p)}(0) = 0,$$
$$y(1) = 1 \quad y'(1) = 0 \quad y''(1) = 0 \qquad y'''(1) \neq 0,$$

astfel că

$A_h = C_h = 0$ pentru $h = 0, 1, 2, 3, \ldots, p$,

$B_0 = 1$ $B_1 = 0$ $B_2 < 0$ B_k este nedeterminat cu $k \geqslant 2$,

$D_0 = 1$ $D_1 = 0$ $D_2 < 0$ D_k este nedeterminat cu $k \geqslant 2$.

Rezultă pentru funcția y numai doi termeni:

$$y = C_u x^u + C_v x^v \text{ cu } u, v > p,$$

în care

$$C_u = X_u = \frac{v}{(v-u)},$$

$$C_v = X_v = \frac{u}{(u-v)},$$

peste care se pot adăuga orice soluții cu condiții omogene la capete.

2.2. După cum se vede, curbele polinomiale au caracteristici îmbunătățite și posibilități mai multe pentru utilizarea lor în construcția camelor. Pe lîngă faptul că prezintă la capetele de intrare și ieșire racordări oricît de line prin alegerea convenabilă a exponenților u, v, w etc., pot ține seama și de condițiile arătate în primul paragraf referitoare la viteza maximă, accelerație maximă, cronosecțiune mărită etc. Tabelul 1 exemplifică aceste posibilități.

Este util deci ca dintr-o soluție y care respectă condițiile generale să se deducă direct și alte soluții care ar respecta aceleași condiții, dar ar prezenta alte caracteristici, fără a mai trece prin calculul coeficienților. Se poate astfel ca la soluția respectivă să se adauge o funcție care îndeplinește condițiile omogene la capete:

$$\begin{aligned} &\bar{y}(x_1) = 0 \quad \bar{y}'(x_1) = 0 \ldots \quad \bar{y}^{(p)}(x_1) = 0, \\ &\bar{y}(x_2) = 0 \quad \bar{y}'(x_2) = 0 \ldots \quad \bar{y}^{(r)}(x_2) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Această soluție suplimentară este de forma

$$\bar{y}(x) = (x - x_1)^{p+1} (x_2 - x)^{r+1} P(x), \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \tag{24}$$

cu $P(x)$ o funcţie oarecare. Soluţia generală devine

$$Y(x) = y(x) + \overline{y}(x). \tag{25}$$

De asemenea pentru primul caz particular cu condiţiile neomogene (3), una dintre soluţiile principale $y(x)$, fără a calcula coeficienţii, se poate pune direct sub forma

$$y = \frac{\int_0^x \xi^p (1-\xi)^r Q(\xi)\, d\xi}{\int_0^1 \xi^p (1-\xi)^r Q(\xi)\, d\xi} = \sum_{u>p} C_u x^u, \tag{26}$$

în care $Q(\xi)$ este o funcţie arbitrară. Faţă de aceasta se mai poate adăuga soluţia cu condiţii omogene la capete:

$$\overline{y}(x) = x^{p+1}(1-x)^{r+1} \cdot P(x). \tag{27}$$

Acceleraţiile de diverse ordine vor fi (s-a notat numitorul N):

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{N} x^p (1-x)^r Q_1(x) = \sum_{u>p} u C_u x^{u-1}, \\
y'' &= \frac{1}{N} x^{p-1} (1-x)^{r-1} Q_2(x) = \sum_{u>p} u(u-1) C_u x^{u-2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y^{(s)} &= \frac{1}{N} x^{p-s+1} (1-x)^{r-s+1} Q_s(x) = \sum_{u>p} u(u-1)\ldots(u-s+1) C_u x^{u-s},
\end{aligned} \tag{28}$$

cu

$$Q_{s+1}(x) = [(p-s+1)(1-x) - (r-s+1)x] Q_s(x) + x(1-x) Q_s'(x) \tag{29}$$

sau, invers,

$$y^{(s)}(x) = \frac{1}{N} \int_0^x \eta^{p-s} (1-\eta)^{r-s} \cdot Q_{s+1}(\eta)\, d\eta. \tag{30}$$

Discuţii asupra funcţiilor $Q(x)$. Pentru ca funcţia $y(x)$ să fie monoton crescătoare în intervalul (0,1) (prezentînd numai două sectoare), trebuie ca:

— derivata-viteză să rămînă pozitivă pentru orice x cuprins în intervalul 0—1:

$$Q_1(x) > 0; \tag{31}$$

— derivata secundă, acceleraţia, să se anuleze într-un singur punct al intervalului (0—1):

$$\begin{aligned}
&Q_2(x_v) = 0 \quad \text{şi} \quad y''(x_v) = 0, \\
&y'_{\max}(x_v) = \left(\frac{1}{N}\right) x_v^p (1-x_v)^r Q_1(x_v);
\end{aligned} \tag{32}$$

— derivata terță să se anuleze în două puncte x_{a1} și x_{a2} ale intervalului (0—1):

$$Q_3(x_{a1}) = 0, \qquad Q_3(x_{a2}) = 0,$$

$$y''_{\max 1,2} = \frac{1}{N} x_{a1,2}^{p-1}(1 - x_{a1,2})^{r-1} Q_2(x_{a1,2}). \tag{33}$$

Funcțiile $Q(x)$ se pot pune sub forma

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= R_1(x), \\ Q_2(x) &= (x - x_v) R_2(x), \\ Q_3(x) &= (x - x_{a_1})(x - x_{a_2}) R_3(x), \\ Q_4(x) &= -(x - x_{\alpha_1})(x - x_{\alpha_2})(x - x_{\alpha_3}) R_4(x), \end{aligned} \tag{34}$$

în care funcțiile $R(x)$ sînt pozitive, nenule, în intervalul util (0,1), iar rădăcinile funcțiilor $Q(x)$ sînt intercalate:

$$\begin{aligned} &0 < x_{a1} < x_4 < x_{a2} < 1, \\ &0 < x_{\alpha_1} < x_{a1} < x_{\alpha_2} < x_{a2} < x_{\alpha_3} < 1. \end{aligned} \tag{35}$$

Deoarece pentru derivata secundă avem

$$Q_2(x) = [p(1 - x) - rx] Q_1(x) + x(1 - x) Q'_1(x), \tag{36}$$

care se anulează pentru $x = x_v$, se găsește

$$Q_1(x_v) = \frac{x_v(1 - x_v)}{(p + r) x_v - p} Q'_1(x_v) \tag{37}$$

și

$$y'_{\max}(x_v) = \frac{1}{N} \cdot \frac{x_v^{p+1}(1 - x_v)^{r+1}}{(p + r) x_v - p} \cdot Q'_1(x_v) \tag{38}$$

sau, cu $p = r$,

$$y'_{\max}(x_v) = \frac{1}{N} \frac{[x_v(1 - x_v)]^{p+1}}{p(2x_v - 1)} \cdot Q'_1(x_v).$$

Pentru derivata terță avem

$$Q_3(x) = [(p - 1)(1 - x) - (r - 1) x] Q_2(x) + x(1 - x) Q'_2(x), \tag{39}$$

care se anulează pentru $x = x_{a1}$ sau x_{a2} și deci

$$Q_2(x_a) = \frac{x_a(1 - x_a)}{(p + r - 2) x_a - (p - 1)} Q'_2(x_a). \tag{40}$$

și

$$y''_{\max}(x_a) = \frac{1}{N} \frac{x_a^p(1 - x_a)^r}{(p + r - 2) x_a - (p - 1)} Q'_2(x_a) \tag{41}$$

sau, cu $p = r$,

$$y''_{\max}(x_a) = \frac{1}{N} \frac{[x_a(1 - x_a)]^p}{(p-1)(2x_a - 1)} Q'_2(x_a).$$

Integrala deplasare-timp este

$$\sigma = \int_0^1 y \, dx = \sum_{u>p} \frac{C_u}{u+1}, \tag{42}$$

care pentru a fi mărită impune coeficienţii C_u mari pozitivi, iar indicii u mici.

În particular, pentru $Q_1(x) = 1$ se obţine

$$\begin{aligned} &Q_1(x) = 1 \qquad\qquad Q_2(x) = p - (p + r)\, x, \\ &Q_3(x) = (p + r)(p + r - 1)\, x^2 - 2p(p + r - 1)\, x + p(p - 1) \end{aligned} \tag{43}$$

şi

$$N = \sum_{\alpha=0}^{r} \frac{(-1)^\alpha C_r^\alpha}{p + r - \alpha + 1},$$

$$y = \frac{1}{N} x^p \sum_{\alpha=0}^{r} \frac{(-1)^\alpha C_r^\alpha}{p + r - \alpha + 1} x^{r-\alpha+1},$$

$$y' = \frac{1}{N} x^p (1 - x)^r = \frac{x^p}{N} \sum_{\alpha=0}^{r} (-1)^\alpha C_r^\alpha x^{r-\alpha}, \tag{44}$$

$$y'' = \frac{1}{N} x^{p-1} (1 - x)^{r-1} [p - (p + r)\, x] = \frac{x^{p-1}}{N} \sum (-1)\, C_r^\alpha (p + r - \alpha)\, x^{r-\alpha},$$

$$\sigma = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=0}^{r} \frac{(-1)^\alpha C_r^\alpha}{(p + r - \alpha + 1)(p + r - \alpha + 2)}.$$

În ceea ce priveşte derivatele avem

— pentru $y'' = 0$; $Q_2(x) = 0$; $x = \dfrac{p}{p + r}$, (45)

$$y'_{\max} = \frac{1}{N} \frac{p^p r^r}{(p + r)^{p+r}},$$

care în cazul simetriei $p = r$ devine :

$$x = \frac{1}{2}$$

$$y'_{\max} = \frac{1}{N \cdot 4^p};$$

— pentru $y''' = 0 \quad Q_3(x) = 0$

$$x = \frac{p}{p+r} \pm \frac{1}{p+r}\sqrt{\frac{pr}{p+r-1}},$$

cu

$$y''_{\max} = \frac{1}{(p+r)^{p+r-2}}\left[p \pm \sqrt{\frac{pr}{p+r-1}}\right]^{p-1} \times \times\left[r \mp \sqrt{\frac{pr}{p+r-1}}\right]^{r-1} \times\left[\mp \sqrt{\frac{pr}{p+r-1}}\right]\frac{1}{N}, \tag{46}$$

care de asemenea, la simetrie $p = r$, devine

$$x = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2p-1}}\right),$$

$$y''_{\max} = \mp \frac{p\,(p-1)^{p-1}}{2^{p-1}\,(2p-1)^{p-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{N}.$$

2.3. *Rezolvarea prin polinoame de exponențiale.* În acest caz soluția generală se exprimă prin

$$y = \sum_{u=-m}^{m} A_u z^u, \tag{47}$$

unde $z = e^{i\theta x}$, iar θ este o constantă (în general π sau 2π pentru polinoame simple). Pentru ca y să fie real, trebuie ca $A_u = \overline{A}_{-u}$.

Dacă se înmulțește cu z^m și se notează

$$Y = yz^m \text{ și } B_u = A_{u-m};\ \overline{B}_u = B_{2m-u}, \tag{48}$$

rezultă

$$Y = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots + B_{2m} z^{2m}, \tag{49}$$

care s-a transformat într-un polinom de puteri cu condițiile

$$P_1,\ x_1,\ z_1 = e^{i\theta x_1},\ Y_1 = y_1 z_1^m,\ Y_1' = (y_1' + im\theta y_1) z_1^m, \quad Y_1'' = (y_1'' + 2im\theta y_1' - m^2\theta^2 y_1) z_1^m, \tag{50}$$

$$P_2,\ x_2,\ z_2 = e^{i\theta x_2},\ Y_2 = y_2 z_2^m,\ Y_2' = (y_2' + im\theta y_2) z_2^m, \quad Y_2'' = (y_2'' + 2im\theta y_2' - m^2\theta^2 y_2) z_2^m. \tag{51}$$

și care s-a rezolvat anterior. În cazul particular (3), condițiile sînt

$$P_1\,(0,0)\ x_1 = 0\ z_1 = 1\ Y_1 = 0\ Y_1' = 0\ Y_1'' = 0,$$
$$P_2(1,1);\ x_2 = 1;\ z_2 = e^{i\theta m},\ Y_2 = e^{i\theta m};\ Y_2' = im\theta\, e^{i\theta m};\ Y_2'' = -m^2\theta^2 e^{i\theta m} \tag{52}$$

adică $Y_2^{(p)} = 0;\ Y_2^{(r)} = (im\theta)^r e^{i\theta m}$.

Dacă $\theta = \pi \quad z_2 = -1$ avem exemplul legii cosinusoidale $y = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi x)$, în care $Y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}z^2$ şi $z = e^{i\pi x}$.

De obicei aceste legi de mişcare sînt exprimate prin polinoame trigonometrice însoţite de polinoame de puteri, adică

$$y = y_p + y_e, \tag{53}$$

cu

$$y_p = \sum C_u x^u \quad \text{şi} \quad y_e = \sum A_v z^v, \tag{54}$$

condiţiile la capete sînt

$$\begin{aligned} &y_p(x_1) + y_e(x_1) = y(x_1); \quad y_p(x_2) + y_e(x_2) = y(x_2), \\ &y_p'(x_1) + y_e'(x_1) = y'(x_1); \quad y_p'(x_2) + y_e'(x_2) = y'(x_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y_p^{(p)}(x_1) + y_e^{(p)}(x_1) = y^{(p)}(x_1); \quad y_p^{(p)}(x_2) + y_e^{(p)}(x_2) = y^{(p)}(x_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{55}$$

ceea ce arată că pentru una dintre reprezentări, fie cea exponenţială, fie cea de puteri, se pot alege condiţiile arbitrar. Legea sinusoidală $y = x - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x$ se încadrează în această categorie.

3. APLICAŢII ASUPRA LEGILOR POLINOMIALE

Se vor exemplifica legile polinomiale cu două şi trei sectoare pentru camele P.R.P.C.P. şi P.R.C.P.

3.1. *Legile polinomiale cu trei sectoare.* Dacă se notează cu $y_1 = \sum C_u^1 x^u$, $y_2 = \sum C_u^2 x^u$ şi $y_3 = \alpha + \beta x$, racordările polinomiale ale legii liniare, condiţiile continuităţii pînă la derivata de ordinul (p) sînt

$$\begin{aligned} &x = 0 && y_1 = y_1' = y_1'' = \ldots = y_1^{(p)} = 0, \\ &x = u_1 && y_1 = y_3 \quad y_1' = y_3' \quad y_1'' = 0 \ldots y_1^{(p)} = 0, \\ &x = 1 - u_2 && y_2 = y_3 \quad y_2' = y_3' \quad y_2'' = 0 \ldots y_2^{(p)} = 0, \\ &x = 1 && y_2 = 1 \quad y_2' = 0 \quad y_2'' = 0 \ldots y_2^{(p)} = 0. \end{aligned} \tag{56}$$

Deoarece se aleg $(p+1)$ condiţii în cele patru puncte de legătură ale diverselor porţiuni P.R.P.C.P., numărul lor total este 4 $(p+1)$, iar numărul necesar de coeficienţi ai legilor polinomiale de racordare este $(2p + 1)$.

Considerînd numai sectorul de accelerare se găsește

$$\begin{aligned} &A_h = C_h = 0 \quad \text{pentru } h = 0, 1, 2, \ldots, p, \\ &x_0 = u_1 \qquad B_0 = \alpha + \beta u_1 \qquad B_1 = \beta u_1, \\ &B_2 = 0 \qquad B_3 = 0 \ldots \qquad B_p = 0, \\ &D_0 = \alpha + \beta u_1 \quad D_1 = D_2 = \ldots \quad = D_p = \beta u_1. \end{aligned} \tag{57}$$

Deoarece primii $(p+1)$ coeficienți ai legii polinomiale de racordare sînt nuli, mai rămîn pentru determinare p coeficienți pentru puterile $u, v, w, \ldots, > p$, asupra cărora se impun $r + 1 = p + 1$ coeficienți, ceea ce va determina și relația dintre coeficienții α și β ai legii liniare. Se va considera

$$u = p + 1, \quad v = p + 2, \quad w = p + 3 \ldots 2p \tag{58}$$

și, în plus, $z = 0$, pentru care va trebui să rezulte $X_z = 0$, condiția necesară de compatibilitate.

Ultima condiție este echivalentă cu identitatea valorilor funcțiilor y_1 și y_3 în punctul u_1, care împreună cu identitatea valorilor funcțiilor y_2 și y_3 în punctul $(1 - u_2)$ formează condițiile de determinare a coeficienților α și β din legea sectorului de mișcare uniformă. Astfel

$$\alpha + \beta u_1 = y_1(u_1) \quad \text{și} \quad \alpha + \beta(1 - u_2) = 1 - \frac{u_2}{u_1} y_1(u_1), \tag{59}$$

deoarece între valorile funcțiilor y_1 și y_2 din cele două sectoare de accelerare și decelerare, în punctele x_1 și x_2, există relația (1), respectiv

$$y_2(x_2) = 1 - K y_1(x_1); \quad K = \frac{u_2}{u_1}; \quad x_1 = \frac{1 - x_2}{K}. \tag{60}$$

Se găsește astfel relația

$$\alpha(u_1 + u_2) + \beta u_1 = u_1, \tag{61}$$

care împreună cu relațiile de determinare a necunoscutelor X_u, X_v, X_w etc. rezolvă complet problema.

În cazul legii polinomiale 3—4, continuitatea funcției se întinde pînă la derivata secundă (y, y', y'') și avem

$$C_3 = \beta/u_1^2; \quad C_4 = -\beta/2u_1^3; \quad C_0 = -\alpha - \beta u_1/2 = 0 \text{ adică } \alpha = -\frac{\beta u_1}{2} \tag{62}$$

și

$$\beta = \frac{1}{1 - \dfrac{u_1 + u_2}{2}},$$

iar legea este

$$y_1 = C_3 x^3 + C_4 x^4,$$

derivata a doua rămînînd pozitivă în intervalul $(0 - u_1)$.

Pentru legea polinomială 4—5—6 avem continuitatea funcţiei şi a primelor trei derivate (y, y', y'', y'''), iar coeficienţii sînt

$$y_1 = C_4 x^4 + C_5 x^5 + C_6 x^6,$$

$$C_4 = \frac{5}{2}\frac{\beta}{u_1^3} \quad C_5 = \frac{-3\beta}{u_1^4} \quad C_6 = \beta/u_1^5 \quad C_0 = -\alpha - \frac{\beta u_1}{2} = 0, \text{ adică } \beta = -\frac{\beta u_1}{2} \tag{63}$$

şi

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{u_1 + u_2}{2}}.$$

La legea polinomială 5—6—7—8, continuitatea se extinde pînă la derivata a patra, adică pentru $y\ y'\ y''\ y^{(3)}\ y^{(4)}$. Astfel

$$y = C_5 x^5 + C_6 x^6 + C_7 x^7 + C_8 x^8,$$

$$C_5 = \frac{7\beta}{u_1^4} \quad C_6 = \frac{-14\beta}{u_1^5} \quad C_7 = \frac{10\beta}{u_1^6} \quad C_8 = -\frac{5\beta}{2u_1^7}, \tag{64}$$

$$C_0 = \alpha + \frac{\beta u_1}{2} = 0; \quad \alpha = -\frac{\beta u_1}{2}$$

şi

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{u_1 + u_2}{2}}.$$

Pentru orice lege polinomială de racordare $p + 1$, $p + 2, \ldots, 2p$, continuitatea funcţiei se poate extinde pînă la derivata de ordinul (p), iar coeficienţii legii liniare din sectorul central sînt mereu aceiaşi:

$$\alpha = -\frac{\beta u_1}{2} \quad \text{şi} \quad \beta = \frac{1}{1 - \frac{u_1 + u_2}{2}}. \tag{65}$$

De asemenea, pentru că începînd cu derivata a doua şi următoarele condiţiile sînt omogene la capete, se poate scrie soluţia

$$y'' = [x(u_1 - x)]^{p-1} P(x), \tag{66}$$

în care, pentru cazul cel mai simplu, $P(x)$ este o constantă şi, în consecinţă, y'' păstrează în intervalul de accelerare $0 - u_1$ semnul pozitiv.

Prin integrare,

$$y' = P\int (u_1 x - x^2)^{p-1}\, dx,$$

$$y = P\iint (u_1 x - x^2)^{p-1}\, dx^2, \tag{67}$$

în care P se determină și verifică condițiile la joncțiunea u_1. În cazul diferitelor legi polinomiale avem

$$\begin{aligned} &3-4 && y'' = \frac{6\beta}{u_1^3}\, x\,(u_1 - x), \\ &4-5-6 && y'' = \frac{30\beta}{u_1^5}\, x^2\,(u_1 - x)^2, \\ &5-6-7-8 && y'' = \frac{140\beta}{u_1^7}\, x^3\,(u_1 - x)^3. \end{aligned} \tag{68}$$

Valorile maxime ale accelerațiilor se găsesc în mijlocul intervalului de accelerare la $u_1/2$ și sînt

$$y''_{\max} = \frac{3}{2}\,\frac{\beta}{u_1}; \quad y''_{\max} = \frac{15}{8}\,\frac{\beta}{u_1}; \quad y''_{\max} = \frac{35}{16}\,\frac{\beta}{u_1}. \tag{69}$$

Valoarea maximă a vitezei este aceeași pentru toate legile, fiind dată de viteza din sectorul mișcării uniforme

$$y'_{\max} = \beta = \frac{1}{1 - \dfrac{u_1 + u_2}{2}}. \tag{70}$$

De asemenea, pentru toate racordările polinomiale, sectorul mișcării uniforme se întinde între u_1 și $1 - u_2$ de la $y_1(u_1) = \alpha + \beta u_1$ la $y_2(1 - u_2) = \alpha + \beta(1 - u_2)$, respectiv pe porțiunea $y = y_2 - y_1 = \beta(1 - u_1 - u_2)$ valoarea maximă a cronosecțiunei se găsește prin integrala

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^{u_1} y_1(x_1)\,\mathrm{d}x_1 + \int_{u_1}^{1-u_2} (\alpha + \beta x)\,\mathrm{d}x + \int_{1-u_2}^{1} y_2(x_2)\,\mathrm{d}x_2, \\ \sigma &= (1 - k^2)\int_0^{u_1} y_1(x_1)\,\mathrm{d}x_1 + \frac{1 - u_1}{2 - u_1 - u_2}. \end{aligned} \tag{71}$$

Cele trei legi polinomiale dau următoarele valori:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\beta}{20/3}(u_1^2 - u_2^2) + \frac{1 - u_1}{2 - u_1 - u_2}, \\ \sigma &= \frac{\beta}{7}(u_1^2 - u_2^2) + \frac{1 - u_1}{2 - u_1 - u_2}, \\ \sigma &= \frac{\beta}{36/5}(u_1^2 - u_2^2) + \frac{1 - u_1}{2 - u_1 - u_2}. \end{aligned} \tag{72}$$

3.2. *Legile polinomiale cu două sectoare.* În cazul legilor asimetrice, pentru a avea continuitatea în punctul de joncțiune dintre cele două sectoare trebuie ca, începînd cu derivata a doua în sus, acestea să se anuleze, ceea ce le permite să respecte relațiile (1), deoarece $k \neq 1$. Rezul-

tatele se obţin din legile polinomiale cu trei sectoare pentru $u_1+u_2=1$ prin suprimarea sectorului de mişcare uniformă, coeficienţii acestuia avînd la limită valorile $\alpha=-u_1$ şi $\beta=2$. Dar în afara legii 3—4 legile 4—5—6, 5—6—7—8 şi următoarele sînt supuse la condiţii prea restrictive în punctul de joncţiune unde ar trebui să prezinte numai aceleaşi valori ale derivatelor, nefiind necesar ca acestea să se anuleze.

Pentru curbele simetrice polinomiale ($k=1$, $u_1=u_2=0{,}5$), cele $(p+1)$ condiţii impuse la cele două capete 0 şi 1 pentru a se obţine continuitatea pînă la derivata de ordinul (p) pot determina $2\,(p+1)$ coeficienţi din legea polinomială, adică în cazurile cele mai simple se poate merge pînă la puterea $(2p+1)$ şi deci

$$y=C_{p+1}\,x^{p+1}+C_{p+2}\,x^{p+2}+\ldots+C_{2p}\,x^{2p}+C_{2p+1}\,x^{2p+1}. \tag{73}$$

Utilizînd deducerea legii polinomiale pe baza condiţiilor omogene la capete începînd cu prima derivată, avem:

— pentru legea 2—3 (continuitatea y şi y'):

$$y=\frac{\int_0^x \xi(1-\xi)\,d\xi}{\int_0^1 \xi(1-\xi)\,d\xi}=3x^2-2x^3; \tag{74}$$

— pentru legea 3—4—5 (continuitatea $y\ y'\ y''$):

$$y=\frac{\int_0^x \xi^2(1-\xi)^2\,d\xi}{\int_0^1 \xi^2(1-\xi)^2\,d\xi}=10x^3-15x^4+6x^5; \tag{75}$$

— pentru legea 4—5—6—7 (continuitatea $y\ y'\ y''\ y'''$):

$$y=\frac{\int_0^x \xi^3(1-\xi)^3\,d\xi}{\int_0^1 \xi^3(1-\xi)^3\,d\xi}=35x^4-84x^5+70x^6-20x^7; \tag{76}$$

— pentru legea 5—6—7—8—9 (continuitatea $y\ y'\ y''\ y'''\ y''''$):

$$y=\frac{\int_0^x \xi^4(1-\xi)^4\,d\xi}{\int_0^1 \xi^4(1-\xi)^4\,d\xi}=126\,x^5-420\,x^6+540\,x^7-315\,x^8+70\,x^9. \tag{77}$$

Totodată, aceste legi verifică relațiile (1) din punctul de legătură $x = 0{,}5$ al celor două sectoare de accelerare și decelerare :

$$\begin{gathered} y_1 + y_2 = 1, \quad y_1' = y_2', \quad y_1'' = -y_2'' = 0, \\ y_1''' = y_2''', \quad y_1^{IV} = -y_2^{IV} = 0, \\ y_1^{V} = y_2^{V}, \quad y_1^{VI} = -y_2^{VI} = 0. \end{gathered} \tag{78}$$

Vitezele maxime se găsesc în punctul central $x = 0{,}5$ și sînt

$$y'_{\max} = 3/2\,; \quad y'_{\max} = 15/8\,; \quad y'_{\max} = 35/16\,; \quad y'_{\max} = 315/128. \tag{79}$$

Accelerațiile maxime au următoarele valori în punctele :

$$\begin{aligned} x &= 0\,;\, 1 && y''_{\max} = 6 && ; && -6, \\ x &= 0{,}5 \mp \frac{\sqrt{3}}{6} && y''_{\max} = \frac{10\sqrt{3}}{3} && ; && -\frac{10\sqrt{3}}{3}, \\ x &= 0{,}5 \mp \frac{\sqrt{5}}{10} && y''_{\max} = \frac{84}{25}\sqrt{5} && ; && -\frac{84\sqrt{5}}{25}, \\ x &= 0{,}5 \mp \frac{\sqrt{7}}{14} && y''_{\max} = \frac{1215}{343}\sqrt{7}\,; && -\frac{1215}{343}\sqrt{7}. \end{aligned} \tag{80}$$

Cronosecțiunile maxime sînt pentru toate legile aceleași $\sigma = 0{,}5$.

Legile simetrice obținute din cele cu trei sectoare asimetrice prin particularizare $u_1 = u_2 = 0{,}5$ au toate, de asemenea, aceeași cronosecțiune $\sigma = 0{,}5$; accelerațiile sînt

$$y''_{3-4} = 6 \quad y''_{4-5-6} = 7{,}5 \quad y''_{5-6-7-8} = 8{,}75, \tag{81}$$

iar vitezele $y'_{\max} = 2$.

3.3. *Legăturile dintre coeficienții aceleiași legi polinomiale pe sectoarele fazei de ridicare.* Dacă se notează $y_1 = \sum A_m x_1^m$ și $y_2 = \sum A_m x_2^m$, în care $x_2 = 1 - kx_1$, condiția (1) se transformă în

$$\sum A_m [kx^m + (1 - kx)^m] = 1 \tag{82}$$

sau

$$\sum_r kA_r x^r + \sum_r (-1)^r (kx)^r \sum_{m \geqslant r} A_m C_m^r = 1$$

și prin identificare se găsește

$$\begin{gathered} A_0 (1 + k) + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + \ldots = 1 \\ A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4A_4 + 5A_5 + \ldots - A_1 = 0, \\ A_2 + 3A_3 + 4A_4 + 10A_5 + \ldots + A_2/k = 0, \\ A_3 + 4A_4 + 10A_5 + \ldots - A_3/k^2 = 0, \\ A_4 + 5A_5 + \ldots + A_4/k^3 = 0, \\ A_5 \ldots - A_5/k^4 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{83}$$

Datorită formei speciale a acestui sistem de ecuaţii trebuie îndeplinite următoarele:

— gradul polinomului trebuie să fie impar;

— curbele trebuie să fie simetrice $k = 1$;

— coeficienţii de ordin impar sînt arbitrari, iar cei de ordin par depind de aceştia.

Ecuaţiile se reduc la

$$\begin{aligned} 2A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + \ldots &= 1, \\ A_2 + 3A_3 + 6A_4 + 10A_5 + \ldots + A_2 &= 0, \\ A_4 + 5A_5 + \ldots + A_4 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned} \tag{84}$$

Aceste condiţii sînt îndeplinite de legile din § 3.2.

3.4. *Legile polinomiale pentru camele P.R.C.P.* În conformitate cu relaţiile (2), pentru a avea continuitatea în punctul de joncţiune dintre fazele de ridicare şi de coborîre trebuie ca, începînd de la prima derivată în sus, acestea să se anuleze, deoarece $K \neq 1$. În asemenea cazuri se pot întrebuinţa legile polinomiale semnalate anterior numai pentru faza de ridicare cele din faza de coborîre, deducîndu-se prin relaţiile respective (2). În cazul legilor simetrice pe cele două faze $K = 1$, condiţiile sînt mai puţin severe, necesitînd ca în punctul de joncţiune numai derivatele de ordin impar să se anuleze, valorile celorlalte nefiind impuse, astfel:

$$\begin{aligned} &x = 0 \quad y = 0 \quad y' = 0 \quad y'' = 0 \ldots y^{(p)} = 0, \\ &x = 1 \quad y = 1 \quad y' = 0 \quad y'' \neq 0 \quad y''' = 0 \quad y^{(4)} \neq 0, \\ &x = 2 \quad y = 0 \quad y' = 0 \quad y'' = 0 \quad y''' = 0 \ldots y^{(p)} = 0. \end{aligned} \tag{85}$$

Formele cele mai simple ale acestor legi cu două sectoare vor fi deci

$$y = x^{(p+1)}(2 - x)^{(p+1)} \tag{86}$$

— legea 2 — 3 — 4 (continuitatea y şi y'):

$$y = x^2(2 - x)^2 = 4x^2 - 4x^3 + x^4; \tag{87}$$

— legea 3 — 4 — 5 — 6 (continuitatea $y\ y'\ y''$):

$$y = x^3(2 - x)^3 = 8x^3 - 12x^4 + 6x^5 - x^6; \tag{88}$$

— legea 4 — 5 — 6 — 7 — 8 (continuitatea $y\ y'\ y''\ y'''$):

$$y = x^4(2 - x)^4 = 16x^4 - 32x^5 + 24x^6 - 8x^7 + x^8; \tag{89}$$

— legea 5 — 6 — 7 — 8 — 9 — 10 (continuitatea $y\ y'\ y''\ y'''\ y''''$):

$$y = x^5(2 - x)^5 = 32x^5 - 80x^6 + 80x^7 - 40x^8 + 10x^9 - x^{10}. \tag{90}$$

Vitezele maxime sînt

$$\begin{aligned} x &= 1 \mp \frac{\sqrt{3}}{3} \quad y'_{max} = \mp \frac{8}{9}\sqrt{3} \quad \cong \mp 1{,}54, \\ x &= 1 \mp \frac{\sqrt{5}}{5} \quad y'_{max} = \mp \frac{96}{125}\sqrt{5} \quad \cong \mp 1{,}72, \\ x &= 1 \mp \frac{\sqrt{7}}{7} \quad y'_{max} = \mp \frac{1728}{2401}\sqrt{7} \cong \mp 1{,}90, \\ x &= 1 \mp \frac{\sqrt{9}}{9} \quad y'_{max} = \mp \frac{40960}{59049}\sqrt{9} \cong \mp 2{,}08. \end{aligned} \tag{91}$$

Accelerațiile maxime sînt

$$\begin{aligned} x &= 0\,;\ 1 \quad\ ;\ 2 \quad y''_{max} = 8\,;\ -4\,;\ 8, \\ x &= 1 \pm \frac{\sqrt{15}}{5}\ ;\ 1 \quad y''_{max} = 4{,}8\,;\ -6, \\ x &= 1 \pm \frac{\sqrt{21}}{7}\ ;\ 1 \quad y''_{max} = 256/49\,;\ -8, \\ x &= 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ 1 \quad y''_{max} = 160/27\,:\ -10. \end{aligned} \tag{92}$$

Cronosecțiunile maxime sînt : 8/15 ; 16/35 ; 128/315 ; 768/2079.

Formele cele mai simple pentru legile P.R.C.P. cu trei sectoare sînt pe fiecare sector astfel :

— pe intervalul $0 - u_1$:

$$y_1'' = Ax^m (x - u_1)^m = A\left(\frac{u_1}{2}\right)^{2m}\left[\left(\frac{2x}{u_1} - 1\right)^2 - 1\right]^m =$$

$$= A\left(\frac{u_1}{2}\right)^{2m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \left(\frac{2x}{u_1} - 1\right)^{2m-2k},$$

$$y_1' = A\left(\frac{u_1}{2}\right)^{2m+1}\left[\sum_{k=0}^{m} = \frac{(-1)^k C_m^k \left(\frac{2x}{u_1} - 1\right)^{2m-2k+1}}{2m - 2k + 1} + \Sigma_1\right],$$

$$y_1 = A\left(\frac{u_1}{2}\right)^{2m+2}\left[\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k C_m^k \left(\frac{2x}{u_1} - 1\right)^{2m-2k+2}}{(2m-2k+1)(2m-2k+2)} + \Sigma_1 \frac{2x}{u_1} - \Sigma_2\right],$$

în care

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k C_m^k}{2m - 2k + 1},$$

$$\Sigma_2 = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k C_m^k}{(2m - 2k + 1)(2m - 2k + 2)},$$

deoarece $y_1'(0) = 0$ și $y_1(0) = 0$;

— pe intervalul $(1 - u_2) - (1 + u_2)$:

$$y_2'' = B\,[(x-1)^2 - u_2^2]^m = B \sum_{k=0}^{m} (-1)^k\, C_m^k\, u_2^{2k}\, (x-1)^{2m-2k},$$

$$y_2' = B \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k\, C_m^k\, u_2^{2k}\, (x-1)^{2m-2k+1}}{2m-2k+1},$$

$$y_2 = B \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k\, C_m^k\, u_2^{2k}\, (x-1)^{2m-2k+2}}{(2m-2k+1)(2m-2k+2)} + 1,$$

deoarece $y_2'(1) = 0$ şi $y_2(1) = 1$,
iar pe intervalul $u_1 - (1 - u_2)$ avem

$$y_3 = \alpha + \beta x,$$
$$y_3' = \beta,$$
$$y_3'' = 0.$$

Din condiţiile ca în punctele de joncţiune dintre sectoare să avem aceleaşi viteze şi deplasări, din funcţiile corespunzătoare

$$y_1(u_1) = y_3(u_1) \qquad y_1'(u_1) = y_3'(u_1),$$
$$y_2(1-u_2) = y_3(1-u_2) \qquad y_2'(1-u_2) = y_3'(1-u_2),$$

se determină

$$\beta = \frac{1}{1 - 0{,}5\,u_1 - u_2\left(1 - \dfrac{\Sigma_2}{\Sigma_1}\right)},$$

$$\alpha = -\frac{\beta u_1}{2},$$

$$A = \frac{2^{2m}\,\beta}{u_1^{2m+1}\,\Sigma_1},$$

$$B = -\frac{\beta}{u_2^{2m+1}\,\Sigma_1}.$$

Valoarea maximă a vitezei este β pe porţiunea de la u_1 la $(1 - u_2)$.
Valorile maxime ale acceleraţiilor sînt

$$-\text{ în } x = u_1/2 \qquad y_{1\max}'' = \frac{(-1)^m\,\beta}{u_1\,\Sigma_1},$$

$$-\text{ în } x = 1 \qquad y_{2\max}'' = \frac{(-1)^{m+1}\,\beta}{u_2\,\Sigma_1},$$

iar raportul lor este

$$r = \frac{y_{1\max}''}{y_{2\max}''} = -\frac{u_2}{u_1}.$$

Valorile maxime ale șocurilor (puls) se găsesc deoparte și de alta a mijlocului intervalului u_1 și față de punctul $x = 1$, adică

$$- \text{pentru } x = \left(0{,}5 \mp \frac{1}{2\sqrt{2m-1}}\right) u_1 :$$

$$y'''_{1\max} = \pm (-1)^m \times \frac{2^{m+1} m\beta}{u_1^2 \sum_1} \left(\frac{m-1}{2m-1}\right)^{m-1} \frac{1}{\sqrt{2m-1}};$$

$$- \text{pentru } x = 1 \mp \frac{u_2}{\sqrt{2m-1}};$$

$$y'''_{2\max} = \mp (-1)^m \frac{2^m m\beta}{u_2^2 \sum_1} \left(\frac{m-1}{2m-1}\right)^{m-1} \frac{1}{\sqrt{2m-1}}.$$

Raportul acestor valori maxime este

$$\frac{y'''_{1\max}}{y'''_{2\max}} = 2\frac{u_2^2}{u_1^2}.$$

Cronosecțiunea maximă numai pe faza de ridicare are valoarea

$$\sigma = \beta\left[\frac{1 + u_2^2 - u_1}{2}\left(1 + \frac{\sum_3}{\sum_1} - \frac{\sum_2}{\sum_1}\right)\left(u_2^2 - \frac{u_1^2}{4}\right)\right],$$

în care apare suma

$$\sum_3 = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k C_m^k}{(2m-2k+1)(2m-2k+2)(2m-2k+3)}.$$

4. Alte soluții mai complicate, dar utilizînd coeficienții de viteză, accelerații etc. diferiți, necesari pentru scopurile diverselor probleme practice, se obțin fie direct utilizînd puteri superioare în legile polinomiale, fie prin suprapunerea cu soluții generale ce au condiții omogene la capete.

Primită la redacție la 12 ianuarie 1966.

BIBLIOGRAFIE

1. Chr. Pelecudi, I. Sava, *Asupra analizei și sintezei unitare a mecanismelor cu cuple superioare*, St. cerc. mec. apl., *2* (1966).
2. Chr. Pelecudi, *Metoda accelerațiilor superioare compuse în lanțurile cinematice plane*, St. cerc. mec. apl., *3* (1965).
3. — *Metoda accelerațiilor compuse în lanțurile cinematice plane*, St. cerc. mec. apl., *2*, (1965).
4. Chr. Pelecudi, R. C. Bogdan, *Sinteza mecanismelor cu came la prescrierea valorilor arcelor de curbă*, St. cerc. mec. apl., *6* (1962).
5. D. Mangeron, *Asupra unor proprietăți ale accelerațiilor reduse de ordin oarecare*, Bul. Inst. politehnic Iași, **III**, *1–2* ( ).
6. Н. И. Левитский, *Кулачковые механизмы*, Москва, Машиностроение, 1964.

O PROBLEMĂ DE VIBRAȚII NELINIARE ÎN STUDIUL SUSPENSIEI AUTOMOBILULUI *

de I. BARBĂLAT, I. FILOTTI, O. GÜNDISCH și A. HALANAY
Institutul de construcții București
Centrul de calcul—Universitatea București
Uzina mecanică Muscel
Institutul de matematică București

539.4 :534

Un model simplificat pentru studiul suspensiei automobilelor conduce la evaluarea unor elemente ale soluțiilor ecuațiilor diferențiale $\ddot{x} + F(\dot{x} - \dot{h}) + \nu^2 (x - h) = 0$, $\ddot{y} + F(\dot{y}) + \nu^2 y = -\ddot{h}$ sau $\ddot{z} + F'(z)\dot{z} + \nu^2 z = -\dddot{h}$.
În cazul $F(y) = 2py + \varepsilon y^3$, $p > 0$, $h(t) = H \sin \omega t$, s-a utilizat metoda parametrului mic pentru evaluarea mărimilor

$$\frac{1}{T}\int_0^T (\ddot{x} - \ddot{h})^2 \, dt \text{ și } \frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}^2 \, dt.$$

În cazul general, $F'(z) = 2p + \varphi(z)$, $\varphi(z) \geqslant 0$, s-au demonstrat evaluările (4), (5), (6) și (7) și prin metode de studiu calitativ evaluările (15), (16), (17) și (18).
Paralel unele rezultate au fost modelate la o mașină analogică de calcul a Universității din București.

1. Datorită evoluției suspensiilor la automobile, amortizarea oscilațiilor devine o problemă importantă pentru confortul și securitatea în mers.

Studiul suspensiilor poate fi abordat prin metode analitice, prin metode de calcul analogic, pe cale experimentală sau cu metode combinate. Este necesar să se facă diferite ipoteze asupra modelului, caracte-

* Prezentată la Conferința de mecanică, București, septembrie 1965.

risticii de amortizare, a celei de arcuire şi asupra formei denivelării drumului, iar apoi să se interpreteze şi să se aprecieze rezultatele.

Un model care ţine seama de principalele elemente şi mişcări ale unui automobil este sistemul de mase concentrate cuplate în arcuri şi amortizoare din figura 1. Caracteristicile de arcuire şi de amortizare pot fi liniare sau neliniare.

Studiul unui asemenea model cu 11 grade de libertate este extrem

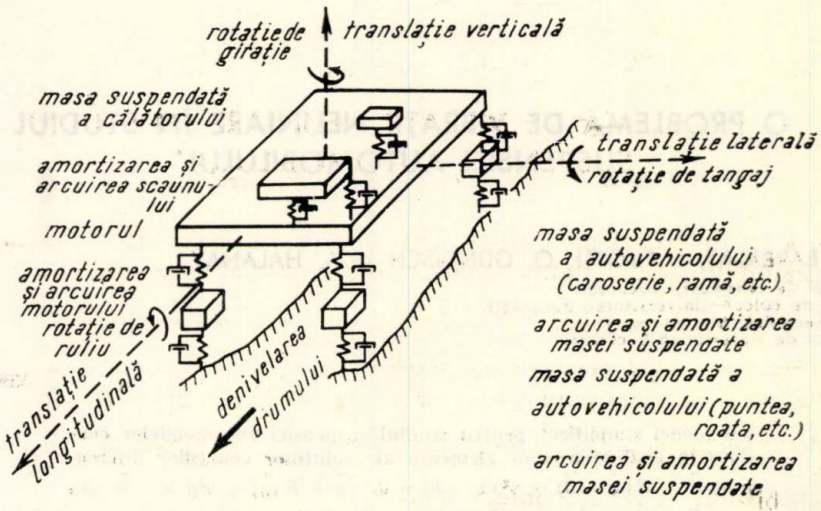


Fig. 1. — Model simplificat al unui autovehicul (11 grade de libertate).

de dificil şi nu permite să se tragă concluzii asupra influenţei elementelor componente.

La studiul suspensiei se folosesc modele simplificate cu 1, 2 şi 4 grade de libertate cu caracteristici liniare sau neliniare.

Fl. Dincă [1] şi H. I. Hofmann [2] au studiat analitic, respectiv cu metode de calcul prin aproximaţii succesive şi analogic, oscilaţiile libere ale unui sistem cu un singur grad de libertate. cu anumite caracteristici de amortizare neliniare.

M. Mitschke [3], E. Marquard [4] şi G. J. van der Burgt [5] au studiat analitic oscilaţiile forţate generate de denivelări sinusoidale pentru un sistem liniar cu două grade de libertate.

A. Chiesa [6] a studiat cu metode de calcul analogic oscilaţiile forţate generate de denivelări reale ale unor sisteme liniare cu 2 şi 4 grade de libertate.

În lucrările citate, drept criteriu de apreciere a rezultatelor se folosesc acceleraţiile verticale ale maselor în mişcare, atît variaţia lor în timp, cît şi repartiţia valorilor maxime sau a mediei pătratice în funcţie de frecvenţa denivelării.

Amortizarea liniară nu permite îmbunătăţirea suspensiei pe întreaga gamă de perturbaţii. De aceea se impune studierea influenţei amortizării

neliniare asupra suspensiei, deoarece aceasta nu implică dificultăți constructive.

Prezenta lucrare își propune acest lucru folosind un model cu un singur grad de libertate (fig. 2).

Fie m masa caroseriei, k constanta de amortizare, c constanta de

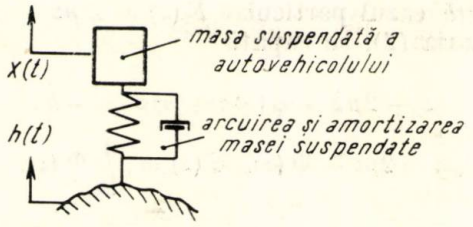


Fig. 2. — Model cu un singur grad de libertate.

arcuire, $h(t)$ funcția denivelării și $x(t)$ deplasarea verticală a caroseriei. Modelul simplificat din figura 2 conduce la ecuația diferențială

$$m\ddot{x} + kf^*(\dot{x} - \dot{h}) + c(x - h) = 0,$$

f^* fiind funcția care introduce neliniaritatea.

Pentru denivelări sinusoidale, $h(t) = H \sin \omega t$, unde H este înălțimea denivelării, $\omega = 2\pi \frac{v}{L}$ frecvența denivelării, v viteza de deplasare a automobilului și L lungimea denivelării.

2. Să considerăm deci modelul simplificat al suspensiei cu un singur grad de libertate. Avem de studiat ecuația

$$\ddot{x} + F(\dot{x} - \dot{h}) + \nu^2(x - h) = 0, \tag{1}$$

unde vom presupune funcția h definită pe toată axa și de clasă C^3.

Notînd $x - h = y$, se capătă ecuația

$$\ddot{y} + F(\dot{y}) + \nu^2 y = -\ddot{h}. \tag{2}$$

Dacă presupunem $|\ddot{h}| \leqslant M$, $F'(z) \geqslant 0$, cu excepția eventuală a unei mulțimi de măsură nulă și $|F(z)| \geqslant M + \varepsilon$ pentru $|z| \geqslant a$, se știe (vezi [7], p. 215) că ecuația (2) admite o soluție mărginită către care converg toate celelalte soluții. Dacă h este periodică de perioadă T, există o soluție periodică, asimptotic stabilă în mare.

Problema fundamentală care se pune este aceea a evaluării unor parametri ai soluțiilor în funcție de cei corespunzători ai funcției h și de a alege pe F astfel încît evaluările obținute să fie cît mai convenabile.

Pornind de la o idee utilizată de D. Graffi în [8], reluată în [3] și [9], s-a ales drept asemenea caracteristică

$$\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}^2(t)\,dt,$$

în cazul soluției periodice, și

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}^2(t)\,dt,$$

în cazul general.

3. Se consideră cazul particular $F(z) = 2pz + \varepsilon z^3$, $h = H \sin \omega t$. Derivînd ecuația (2), se capătă

$$\dddot{z} + 2p\ddot{z} + \varphi(z)\dot{z} + \nu^2 z = -\dddot{h}, \tag{3}$$

unde am notat $F(z) = 2pz + \Phi(z)$, $\varphi(z) = \dfrac{d}{dz}\Phi(z)$.

În cazul particular considerat avem ecuația

$$\dddot{z} + 2p\ddot{z} + 3\varepsilon z^2\dot{z} + \nu^2 z = H\omega^3 \cos \omega t.$$

Folosind metoda parametrului mic, căutăm soluția sub forma

$$z(t) = z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + \dots$$

Se găsește că

$$z_0(t) = \frac{1}{2} H\omega^3\left(\frac{e^{i\omega t}}{\rho_1} + \frac{e^{-i\omega t}}{\bar{\rho}_1}\right), \quad \rho_1 = \nu^2 - \omega^2 + 2pi\omega,$$

$$z_1(t) = \frac{3}{8i} H^3\omega^{10}\left[\frac{1}{\rho^3\bar{\rho}_1} e^{i\omega t} \frac{1}{\bar{\rho}^3\rho_1} e^{-i\omega t} + \frac{1}{\rho_1^3\rho_3} e^{3i\omega t} - \frac{1}{\bar{\rho}_1^3\bar{\rho}_3} e^{-3i\omega t}\right],$$

$$\rho_3 = (\nu^2 - 9\omega^2) + 6pi\omega,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \dot{z}^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (\ddot{x} - \ddot{h})^2 dt = \frac{H^2\omega^8}{2[(\nu^2-\omega^2)^2 + 4p^2\omega^2]} -$$

$$- \frac{3p\varepsilon H^4\omega^{16}}{2[(\nu^2-\omega^2)^2 + 4p^2\omega^2]^3} + \dots,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}^2\,dt = \frac{H\omega^2(\nu^2 + 4p^2\omega^2)}{2[(\nu^2-\omega^2)^2 + 4p^2\omega^2]} + \varepsilon\frac{3H^4 p\omega^{14}(\omega^2 - 2\nu^2)}{2[(\nu^2-\omega^2)^2 + 4p^2\omega^2]^3} + \dots$$

Din aceste rezultate se desprind următoarele concluzii:

a) pentru $\omega < \nu\sqrt{2}$ caracteristica neliniară cu $\varepsilon > 0$ realizează performanțe superioare celei liniare;

b) pentru $\omega > \nu\sqrt{2}$ s-ar părea că se realizează performanțele superioare pentru $\varepsilon < 0$; rezultatul are însă o valoare limitată, deoarece pentru $F(z) = 2pz + \varepsilon z^3$, $\varepsilon < 0$, nu mai sînt îndeplinite condițiile care asigură existența unei soluții periodice stabile în mare. Concluzia rămîne astfel valabilă numai pentru valori mici ale parametrului ε, greu de evaluat;

c) oricare ar fi ω în cazul $\varepsilon>0$, caracteristica neliniară realizează performanțe superioare celei liniare dacă se ia ca măsură a performanței $\frac{1}{T}\int_0^T (\ddot{x}-\ddot{h})^2\,dt$;

d) valoarea practică a rezultatelor obținute pe această cale este limitată atît de faptul că nu dispunem de o evaluare a domeniului valorilor pentru care calculele sînt valabile, cît mai ales de limitarea modelului la un singur grad de libertate.

4. Vom obține acum unele evaluări cu caracter general.

Din ecuația (3) rezultă înmulțind cu $\dot{z}$ și integrînd

$$\frac{1}{2T}\dot{z}^2(t)-\frac{1}{2T}\dot{z}^2(0)+2p\frac{1}{T}\int_0^T \dot{z}^2\,dt+\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(z)\dot{z}^2\,dt+\frac{1}{2T}\nu^2 z^2(T)-$$

$$-\frac{1}{2T}\nu^2 z^2(0)=-\frac{1}{T}\int_0^T \dddot{h}\dot{z}\,dt.$$

Deoarece în ipoteza $\varphi(z)\geqslant 0$ din [7], p. 215, rezultă că z și $\dot{z}$ sînt mărginite, avem $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\dot{z}^2(T)=0$, $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}z^2(T)=0$, deci putem scrie

$$2p\frac{1}{T}\int_0^T \dot{z}^2\,dt+\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(z)\dot{z}^2\,dt=-\frac{1}{T}\int_0^T \dddot{h}\,\dot{z}\,dt+\alpha(T),$$

unde $\lim_{T\to\infty}\alpha(T)=0$.

Rezultă

$$2p\frac{1}{T}\int_0^T \dot{z}^2\,dt\leqslant\left(\frac{1}{T}\int \dddot{h}^2\,dt\right)^{1/2}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \dot{z}^2\,dt\right)^{1/2}+\alpha(T),$$

deci

$$2p\,\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T \dot{z}^2\,dt\leqslant\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \dddot{h}^2\,dt\right)\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \dot{z}^2\,dt\right)^{1/2}$$

și în definitiv

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \dot{z}^2\,dt\right)^{1/2}\leqslant\frac{1}{2p}\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \dddot{h}^2\,dt.\right)^{1/2}. \tag{4}$$

În mod analog, înmulțind ecuația (2) cu $\dot{y}$ și integrînd, se capătă

$$\int_0^T \dot{y}^2\,dt+p(\dot{y}^2(T)-\dot{y}^2(0))+\Psi[\dot{y}(T)]-\Psi[\dot{y}(0)]+\nu^2\int_0^T y\,\ddot{y}\,dt=-\int_0^T \ddot{h}\,\dot{y}\,dt,$$

unde Ψ este o primitivă a lui Φ.

Pe de altă parte,

$$\int_0^T y\,\ddot{y}\,dt=y(T)\dot{y}(T)-y(0)\dot{y}(0)-\int_0^T \dot{y}^2\,dt.$$

Rezultă

$$\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{y}^2\,dt = \frac{\nu^2}{T}\int_0^T \dot{y}^2\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T \ddot{h}\,\ddot{y}\,dt + \beta(T), \quad \lim_{T\to\infty}\beta(T) = 0. \tag{5}$$

Înmulţind ecuaţia (2) cu $\dot{y}$ şi integrînd, se obţine

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2(T) - \frac{1}{2}\dot{y}^2(0) + 2p\int_0^T \dot{y}^2\,dt + \int_0^T \dot{y}\,\Phi(\dot{y})\,dt +$$

$$+ \frac{\nu^2}{2}(y^2(T) - y^2(0)) = -\int_0^T \ddot{h}\,\dot{y}\,dt.$$

Din $\Phi'(y) \geqslant 0$, $\Phi(0) = 0$, rezultă $y\,\Phi(y) \geqslant 0$, deci

$$2p\frac{1}{T}\int_0^T \dot{y}^2\,dt \leqslant \left(\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{h}^2\,dt\right)^{1/2}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \dot{y}^2\,dt\right)^{1/2} + \gamma(T), \quad \lim_{T\to\infty}\gamma(T) = 0,$$

de unde se obţine

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \dot{y}^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2p}\,\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{h}^2\,dt\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Să folosim relaţiile obţinute pentru a evalua pe $\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}^2\,dt$.

Avem

$$\ddot{x} = \ddot{y} + \dddot{h},$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \ddot{y}^2\,dt + \frac{2}{T}\int_0^T \ddot{y}\,\dddot{h}\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T \ddot{h}^2\,dt.$$

Ţinînd seama de (5), deducem

$$\frac{2}{T}\int_0^T \ddot{y}\,\dddot{h}dt + \frac{1}{T}\int_0^T \ddot{y}^2\,dt \leqslant 2\nu^2\frac{1}{T}\int_0^T \dot{y}^2\,dt + 2\beta(T),$$

deci

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}^2\,dt \leqslant 2\nu^2\,\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T \dot{y}^2\,dt + \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{h}^2\,dt,$$

şi, ţinînd seama de (6), rezultă în definitiv

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{2p^2}}\,\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{h}^2\,dt.\right)^{1/2}. \tag{7}$$

5. Vom obţine acum evaluări cu caracter general pentru $|\dot{z}(t)| = |\ddot{x}(t) - \ddot{h}(t)|$, $|z(t)| = |\dot{x}(t) - \dot{h}(t)|$ şi $|y(t)| = |x(t) - h(t)|$, valabile pentru t suficient de mare şi deci valabile pentru orice t în cazul periodic pentru soluţia periodică.

Se utilizează o metodă de comparație cu sisteme liniare atît în planul fazelor $(z, \dot{z})$ pentru ecuația (3), cît și în planul fazelor $(y, \dot{y})$ pentru ecuația (2). Tot o metodă de comparație cu ecuații liniare se utilizează, de exemplu, în [10] și [11].

Notînd $z = \xi$, $\dot{z} = \eta$, $f = F'$, ecuația (3) se scrie

$$\eta \frac{d\eta}{d\xi} = -f(\xi)\eta - \nu^2 \xi - \dddot{h}(t). \tag{8}$$

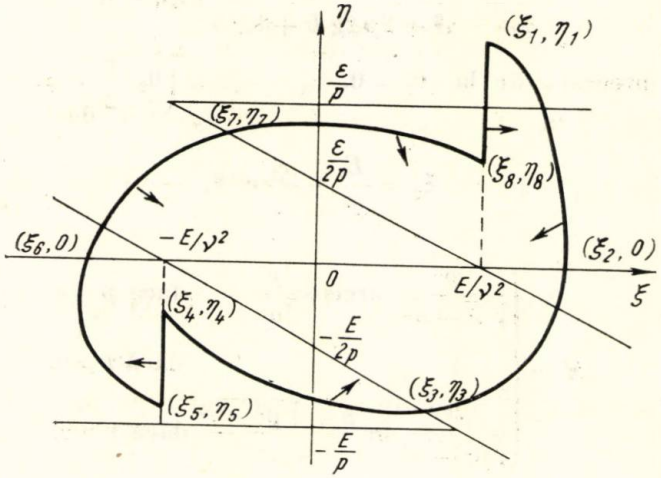


Fig. 3

Dacă $\varphi \geqslant 0$, avem $f \geqslant 2p$; notînd $E = \sup |\dddot{h}(t)|$, rezultă că

$$\begin{aligned} -f(\xi) - \frac{\nu^2 \xi}{\eta} - \frac{\dddot{h}}{\eta} &\leqslant -2p - \frac{\nu^2 \xi}{\eta} + \frac{E}{\eta} \quad \text{pentru } \eta > 0, \\ -f(\xi) - \frac{\nu^2 \xi}{\eta} - \frac{\dddot{h}}{\eta} &\leqslant -2p - \frac{\nu^2 \xi}{\eta} - \frac{E}{\eta} \quad \text{pentru } \eta < 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Se consideră deci ecuațiile de comparație

$$\begin{aligned} \eta \frac{d\eta}{d\xi} &= -2p\eta - \nu^2 \xi + E \text{ pentru } \eta > 0, \\ \eta \frac{d\eta}{d\xi} &= -2p\eta - \nu^2 \xi - E \text{ pentru } \eta < 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Se construiește o familie de contururi formate din curbe integrale ale ecuațiilor (10) și care, în baza inegalităților (9), sînt tăiate spre interior de curbele integrale ale ecuației (8). Din familia construită se alege conturul cel mai mic.

Se pleacă din punctul $\left(\xi_1 = \frac{E}{\nu^2}\ \eta_1 > 0\right)$, cu soluția primei ecuații (10) până în $(\xi_2, 0)$. Făcînd schimbarea de variabile

$$\nu^2\xi - E = \rho \sin\theta,\ \eta = \rho \cos\theta,$$

ecuația devine

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{2p + (\nu^2 - 1)\operatorname{tg}\theta}{\nu^2 + 2p \operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}^2\theta}\, d\theta = 0 \tag{11}$$

și trebuie integrată de la $(\theta_1 = 0,\ \rho_1 = \eta_1)$ la $\left(\theta_2 \frac{\pi}{2},\ \rho_2 = \nu^2\ \xi_2 - E\right)$.

Se obține

$$\xi_2 = \frac{E}{\nu^2} + \frac{\eta_1}{\nu} e^{-M}, \tag{12}$$

unde

$$M = \begin{cases} \dfrac{p}{\sqrt{\nu^2 - p^2}} \arccos\dfrac{p}{\nu} & \text{dacă } p < \nu, \\ 1 & \text{dacă } p = \nu, \\ \dfrac{p}{\sqrt{p^2 - \nu^2}} \ln\dfrac{p + \sqrt{p^2 - \nu^2}}{\nu} & \text{dacă } p > \nu. \end{cases}$$

Se integrează a doua ecuație (10) de la $(\xi_2, 0)$ la punctul de minimum $(\xi_3,\ \eta_3)$, situat pe dreapta $2p\eta + \nu^2\xi + E = 0$. Făcînd schimbarea de variabile

$$\nu^2\ \xi + E = \rho \sin\theta \quad \eta = \rho \cos\theta,$$

se obține tot ecuația (11) și, printr-un calcul asemănător cu acel efectuat pentru obținerea formulei (12), se găsește

$$|\eta_3| = \frac{2E}{\nu} e^{-M} + \eta_1 e^{2-M}. \tag{13}$$

Se realizează un contur convenabil dacă $|\eta_3| < |\eta_1|$, deci dacă

$$\eta_1 \geqslant \frac{2E}{\nu} e^{-M} + \eta_1 e^{-2M}$$

sau

$$\eta_1 \geqslant \frac{E}{p} c(s), \tag{14}$$

unde $c(s) = \dfrac{s}{sh M(s)}$, iar $s = \dfrac{p}{1\nu}$.

Se poate arăta că $c(s)$ și $c'(s)$ sînt funcții continue de s și că $0<c(s)<1$ pentru $s \geqslant 0$; de asemenea că

$$c(0)=\frac{2}{\pi},\quad c(1)=\frac{1}{sh1}<\frac{2}{\pi},\quad \lim_{s\to\infty} c(s)=1$$

și că $c'(0)<0$, $c'(1)>0$.

În concluzie, *oricare ar fi soluția* $(z(t), \dot{z}(t)$ *a ecuației* (3), *pentru orice* t *suficient de mare avem*

$$|\dot{z}(t)|<\frac{E}{p}c(s), \tag{15}$$

evaluare de tipul (4).

Din (14) și (12) se obține în aceleași condiții ca mai sus evaluarea

$$|z(t)|\leqslant\frac{E}{\nu^2}cthM(s), \tag{16}$$

care nu este de tipul (6).

Dacă se notează cu $K=\sup|\ddot{h}(t)|$ și se utilizează ecuația (2) în planul fazelor $(y, \dot{y})$, se obține, repetînd calculele precedente,

$$|\dot{y}(t)|\leqslant\frac{K}{p}c(s), \tag{17}$$

evaluare de tipul (6), precum și

$$|y(t)|\leqslant\frac{K}{\nu^2}cthM(s), \tag{18}$$

evaluări valabile pentru orice soluție $(y(t), \dot{y}(t))$ a ecuației (2) și orice t suficient de mare.

Observații. Cu tehnica utilizată în 5, rezultă imediat următoarele:

A) *Fie ecuația* $\ddot{z}+f(z)\dot{z}+g(z)=e(t)$, *în condițiile* $f(z)\geqslant 2p$, $\frac{g(z)}{z}\geqslant \nu^2$ *pentru orice* z *și* $|e(t)|\leqslant E$. *Pentru orice soluție* $(z(t), \dot{z}(t))$ *și orice* t *suficient de mare au loc evaluările* (15) *și* (16).

B) *Fie ecuația* $\ddot{y}+F(\dot{y})+g(y)=h(t)$, *în condițiile* $\frac{F(y)}{y}\geqslant 2p, \frac{g(y)}{y}\geqslant \nu^2$ *pentru orice* y *și* $|h(t)|\leqslant K$. *Pentru orice soluție* $(y(t), \dot{y}(t))$ *și orice* t *suficient de mare au loc evaluările* (17) *și* (18).

Aceste propoziții constituie ameliorări ale evaluărilor găsite de W. S. Loud [11].

6. Pentru verificarea experimentală a rezultatelor s-a modelat pe calculatorul analogic ecuația

$$\ddot{z}+(2p+\varepsilon z^2)\dot{z}+\nu^2 z=H\omega^3\cos\omega t, \tag{19}$$

cu condiţiile iniţiale

$$z(0) = -H\omega, \quad \dot{z}(0) = 2pH\omega. \tag{20}$$

Aceste condiţii iniţiale reprezintă situaţia reală a trecerii automobilului de pe o porţiune de şosea netedă pe una ondulată (sinusoidală). Interesantă era examinarea variaţiei lui

$$\ddot{x} = \dot{z} - H\omega^2 \sin\omega t.$$

Pentru a se reuşi modelarea s-au făcut schimbările de variabile

$$z = \lambda Z, \quad \tau = kt, \tag{21}$$

ecuaţiile devenind

$$Z'' + \left(\frac{2p}{k} + \frac{\varepsilon\lambda^2}{k} Z^2\right) Z' + \frac{\nu^2}{k^2} Z = \frac{H\omega^3}{\lambda k^2} \cos\frac{\omega}{k}\tau, \tag{22}$$

$$Z(0) = -\frac{H\omega}{\lambda}, \quad Z'(0) = \frac{2pH\omega}{\lambda k}, \tag{23}$$

$$X'' = Z' - \frac{H\omega^2}{\lambda k^2} \sin\frac{\omega}{k}\tau, \tag{24}$$

unde am notat cu majuscule variabilele în maşină, cu τ timpul în maşină şi cu accente derivatele în raport cu τ.

Valorile numerice alese au fost următoarele:

$$0{,}05p \leqslant \varepsilon \leqslant 0{,}5\,p\,; \quad 1 \leqslant p \leqslant 10\,; \quad \nu = 10\,; \quad 0 \leqslant \omega \leqslant 20\,; \quad H = 4 \text{ cm}.$$

Programarea optimă a problemei pe calculatorul analogic nu a fost posibilă, datorită caracterului puternic neliniar al ecuaţiilor şi valorilor coeficienţilor. S-a reuşit totuşi o programare în care erorile să fie acceptabile.

Programarea s-a făcut cu ajutorul următorului sistem de inegalităţi, sistem impus de marginile între care se pot stabili coeficienţii şi de timpul maxim de desfăşurare a soluţiei:

$$10^{-3} \leqslant \frac{2p}{k} \leqslant 10, \quad 10^{-3} \leqslant \frac{\varepsilon\lambda^2}{k} \leqslant 10, \quad 10^{-3} \leqslant \frac{\nu^2}{k^2} \leqslant 10, \quad 10^{-3} \leqslant \frac{H\omega^3}{\lambda k^2} \leqslant 1,$$

$$10^{-3} \leqslant \frac{H\omega}{\lambda} \leqslant 1, \quad 10^{-3} \leqslant \frac{2pH\omega}{\lambda k} \leqslant 1 \quad 0{,}002 \leqslant \frac{\omega}{k} \leqslant 0{,}5.$$

În plus s-a căutat ca tensiunile la ieşirile tuturor elementelor de calcul să atingă valoarea maximă de o unitate-maşină. Acest lucru nu a fost posibil pentru toate elementele. Valorile maxime la ieşirea tuturor amplificatorilor au fost mai mari de 0,5 V, ceea ce a fost considerat satisfăcător, ţinînd seama de faptul că nivelul zgomotelor şi deriva la ieşirea amplificatoarelor era sub 1 m V. În aceste condiţii, erorile nu au depăşit 5%, această eroare fiind datorită în special elementelor neliniare. Limitările impuse de performanţele calculatorului nu au permis obţinerea soluţiilor pentru parametri în afara limitelor indicate mai sus. Pentru frecvenţe mai mari decît 10, ecuaţia nu a putut fi modelată pentru $\varepsilon > 0{,}05$.

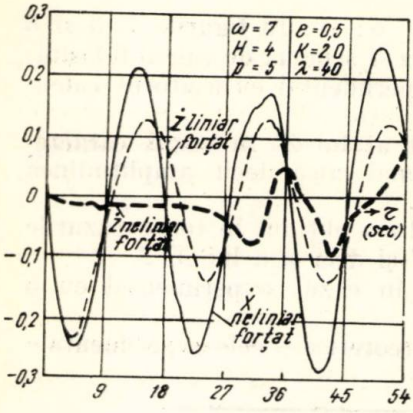


Fig. 4

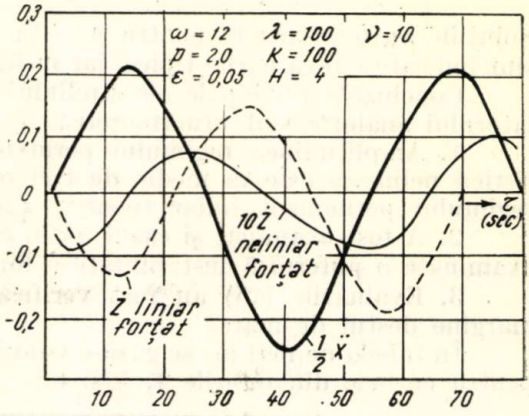


Fig. 5

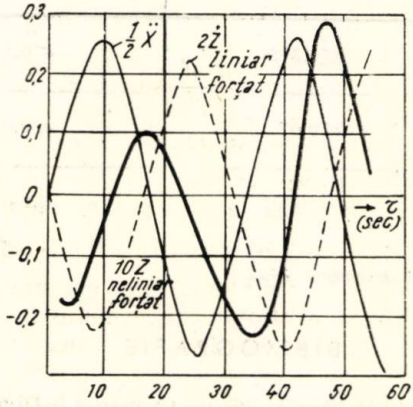


Fig. 6

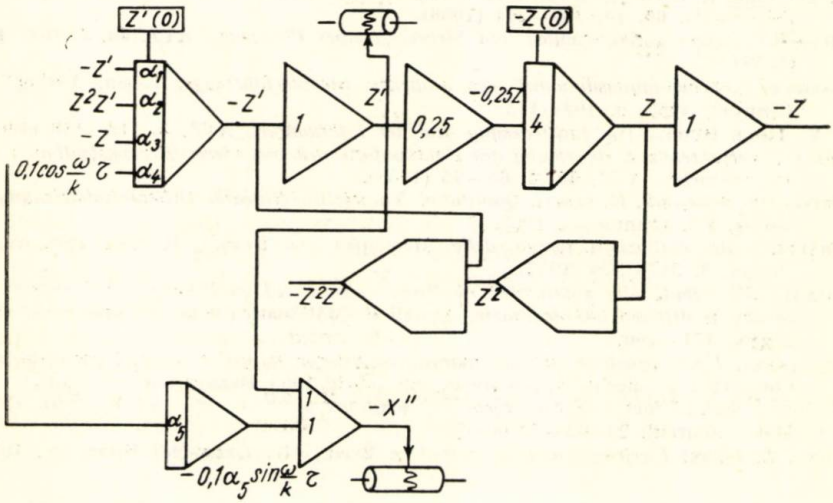


Fig. 7. — Schema de calcul pe mașina analogică.

Soluţiile au fost trasate pentru $p = 1$; 2,5; 5; 10. În figurile 4, 5 şi 6 sînt indicate cîteva curbe tipice, iar în figura 7 schema de calcul folosită.

Concluziile principale ale studiului experimental cu ajutorul calculatorului analogic sînt următoarele:

1. Amplitudinea regimului permanent al lui Z' în cazul caracteristicii neliniare este în medie de trei ori mai mică decît amplitudinea regimului permanent liniar (pentru $\varepsilon > 0$).

2. A fost examinat şi cazul $\varepsilon < 0$, cînd s-a obţinut în toate cazurile examinate o puternică instabilitate a lui Z' şi deci şi a lui X''.

3. Evaluările (15) au fost verificate în cazul experimental cu o margine destul de mare.

În tabela de mai jos se găsesc valorile teoretice şi cele experimentale pentru curbele din figurile 4, 5 şi 6:

	Z' teoretic	Z' experimental
$\omega = 7$ $p = 5$	$\leqslant 0{,}375$	$\leqslant 0{,}1$
$\omega = 12$ $p = 2{,}5$	$\leqslant 0{,}07$	$\leqslant 0{,}01$
$\omega = 17$ $p = 1$	$\leqslant 0{,}5$	$\leqslant 0{,}03$

Primită la redacţie la 1 decembrie 1965.

BIBLIOGRAFIE

1. Fl. Dincă, *Studiul oscilaţiilor libere cu disipare pătratică asimetrică*, St. cerc. mec. apl. **17**, *5*, 1 174–1 186 (1964).
2. H. J. Hoffmann, *Wirksankeit von Stossdämpfern an Fahrzeug*, ATZ (Automobiltechnische Zeitschrift), **60**, *10*, 289–294 (1958).
3. M. Mitschke, *Schwingungsverhalten und Sicherheit eines Fahrzeugs*, ATZ, **60**, *6*, 168–175 (1958).
4. E. Marguard, *Schwingungsdynamik des schnellen Strasserfahrzeugs*, Essen, Verlag W. Girardet, 1952, p. 102–113.
5. G. I. Van der Burgt, *Die Luftfederung und der Fahrkonfort*, ATZ, **5**, 113–118 (1960).
6. A. Chiesa, *Verfahren zur Bewertung des Fahrkonforts mit besonderer Berücksichtigung des Reifendruckes*, ATZ, **60**, *3*, 68–75 (1958).
7. R. Reissig, G. Sansone, R. Conti, *Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen*, Roma, Ed. Cremonese, 1963.
8. D. Graffi, *Sulle oscillazioni forzate della Meccanica non lineare*, Revista Mat. Univ. Parma, *3*, 317–326 (1952).
9. G. Villari, *Contributi allo studio dell' esistenza di soluzioni periodiche per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie*, Annali di Matematica pura ed applicata, (IV) **LXIX**, 171–190.
10. J. Muszynski, *Unele probleme privind mărginirea tuturor soluţiilor ecuaţiei pseudoliniare*, Conferinţa de mecanică, Bucureşti, septembrie, 1965, Rezumatele lucrărilor, p. 15.
11. W. S. Loud, *Boundednes and convergence of solutions of* $x'' + cx' + g(x) = e(t)$, Duke Math. Journal, 24, 63–72 (1957).
12. G. Korn, T. Korn, *Electronic analog computers*, 2 ed., Mc. Graw-Hill Book Co., 1956.

STABILIREA DIRECTĂ A ORDINEI DE FORMARE A ARTICULAȚIILOR PLASTICE LA CADRE ÎNCĂRCATE CU SARCINI PROPORȚIONALE[1)]

de ALEX. GHEORGHIU și C. PACOSTE
Institutul de construcții București

539.4

Pentru eliminarea necesității de a efectua un calcul „biografic" complet, se propune o metodă de stabilire directă a ordinii de formare a articulațiilor plastice și a mărimii factorilor de încărcare corespunzători, fără a mai fi necesar să se determine starea de eforturi a structurii în fiecare dintre etape. Specificul metodei constă în faptul că stabilirea ordinii se face pornind de la ultima articulație plastică spre prima.
În continuare, metoda permite să se găsească diagrama de momente încovoietoare direct pentru un anumit stadiu intermediar, ales după voință.

1. INTRODUCERE

a) O apreciere concludentă a comportării unei structuri, cînd sarcinile la care este supusă cresc, implică nu numai determinarea capacității portante la cedarea plastică, ci și posibilitatea de a cunoaște mărimile sarcinilor și starea de eforturi care corespund în anumite stadii intermediare. Devine astfel necesară stabilirea ordinii de formare a articulațiilor plastice, precum și a factorilor de încărcare corespunzători. Aceasta se realizează de obicei prin așa-numitul „calcul biografic", care pornește de la limita stadiului elastic și urmărește prin etape succesive formarea articulațiilor plastice pînă la stadiul de cedare plastică. Prin natura sa, un asemenea calcul este laborios și revine la rezolvarea repetată a unui cadru care se modifică treptat, pierzînd succesiv cîte o legătură.

[1)] Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée, **11**, *4* (1966) (în limba franceză).

ST. CERC. MEC. APL. TOM 22 NR. 4 P. 1081–1098 BUCUREȘTI 1966

Schematizarea fenomenului permite acceptarea în calcul a anumitor ipoteze simplificatoare :

1. Se admite că articulaţiile plastice sînt punctuale şi se formează instantaneu atunci cînd în secţiunea respectivă momentul încovoietor a atins valoarea M_p. Limita stadiului elastic corespunde astfel cu formarea primei articulaţii plastice, iar cedarea plastică se produce o dată cu formarea ultimei. Între aceste limite, evoluţia comportării structurii rezultă împărţită într-o serie de etape, care corespund intervalelor dintre formarea succesivă a articulaţiilor plastice. Fiecare etapă este caracterizată prin comportarea perfect elastică a întregii structuri sub acţiunea sarcinilor care cresc, cu excepţia secţiunilor în care s-au format anterior articulaţii plastice ; aici materialul se comportă perfect plastic şi momentul încovoietor rămîne constant, astfel că pentru surplusul de sarcină situaţia este aceeaşi ca într-o articulaţie obişnuită. În consecinţă, sînt întrunite condiţiile care permit suprapunerea efectelor şi deci se pot folosi, pentru fiecare etapă în parte, metodele de calcul ale staticii liniare.

2. Se admite că poziţiile articulaţiilor plastice rămîn neschimbate, de asemenea că într-o articulaţie plastică, odată formată, rotirea relativă continuă să se producă mereu în acelaşi sens, care este sensul indicat de mecanismul de cedare [2]). În aceste condiţii se poate stabili un criteriu de identificare a articulaţiei plastice ce se formează într-un stadiu intermediar. Totodată, posibilitatea de a cunoaşte atît sensul de funcţionare a articulaţiilor plastice, cît şi sensul momentelor încovoietoare din secţiunile respective, permite adoptarea unor convenţii simple de semne.

b) Folosind ipotezele menţionate, se ajunge la o simplificare substanţială a calculului prin etape succesive *dacă se cunosc de la început poziţiile articulaţiilor plastice*. Devine suficient să se urmărească un număr limitat de ordonate ale diagramei M, trasarea întregii diagrame în fiecare etapă nemaifiind necesară pentru conducerea calculelor. Apare deci indicat să se înceapă cu determinarea stadiului de cedare plastică, folosind una dintre metodele uzuale : se identifică mecanismul de cedare, se calculează factorul de încărcare şi se construieşte diagrama M corespunzătoare.

În continuare, trebuie stabilit *care este ultima articulaţie plastică ce se formează* : se poate obţine aceasta folosind procedeul sistematizat propus în lucrarea [1]. Se cunoaşte astfel situaţia structurii în momentul cînd cedarea plastică devine iminentă : toate articulaţiile plastice s-au format pe parcurs şi în ele s-au produs rotiri relative afară de ultima, unde valoarea M_p este atinsă, dar continuitatea subzistă încă. Mai departe, problema se reduce la a stabili ordinea în care s-au format primele n articulaţii plastice şi factorii de încărcare corespunzători.

Pe această bază, în lucrarea [3] s-a propus un mod de sistematizare a efectuării calculului cu ajutorul metodei generale a eforturilor. Metoda eforturilor se pretează mai bine la un calcul prin etape succesive, deoarece

---

[2]) Se elimină astfel cazurile excepţionale cînd s-ar putea ca o articulaţie plastică să se formeze şi să funcţioneze un timp, după care să fie descărcată şi în final să nu mai intervină în mecanismul de cedare.

specificul său — caracterizat de folosirea unui sistem de bază obținut prin suprimare de legături — concordă cu specificul modificării structurii în etapele succesive, caracterizat prin pierdere treptată de legături. Ca sistem de bază, se alege sistemul obținut introducînd articulații în secțiunile unde se formează primele n articulații plastice; momentele încovoietoare din aceste secțiuni devin necunoscutele problemei. Sistemul de bază este același în toate etapele, deci calculul coeficienților și al termenilor liberi din ecuațiile de condiție trebuie făcut o singură dată pentru întreaga rezolvare. Trecerea de la o etapă la alta se obține prin suprimarea unui rînd și a unei coloane din matricea coeficienților, anume acelea care corespund necunoscutei care a dispărut.

c) Procedeul menționat constituie un calcul biografic propriu-zis, deoarece urmărește formarea succesivă a articulațiilor plastice, de la prima spre ultima, prin rezolvarea în fiecare etapă a unui sistem de ecuații pentru determinarea ordonatelor diagramei M. Problema poate fi pusă și altfel, anume de a găsi o metodă *prin care să se stabilească direct numai ordinea în care se formează primele n articulații plastice, precum și factorii de încărcare corespunzători*, fără a mai calcula efectiv în fiecare etapă mărimile momentelor încovoietoare din secțiunile respective. Aceasta corespunde cerințelor proiectării, deoarece cunoașterea poziției și a ordinii în care apar articulațiile plastice, precum și a treptelor în care variază mărimile sarcinilor, permite aprecieri concludente asupra comportării structurii.

Odată acestea cunoscute, proiectantul poate alege apoi un anumit stadiu intermediar sau un număr restrîns de asemenea stadii, pentru care îi este utilă și cunoașterea stării de eforturi din structură. În consecință, metoda trebuie să ofere posibilitatea *de a determina direct diagrama de momente încovoietoare pentru un anumit stadiu intermediar*, anume la formarea unei anumite articulații plastice, cînd în secțiunea respectivă s-a atins valoarea M_p, dar continuitatea subzistă încă. Procedînd în acest mod, se elimină necesitatea unui calcul biografic complet, care este foarte laborios, dînd în același timp proiectantului, pe o cale mai simplă, elementele de care are efectiv nevoie.

În cele ce urmează ne propunem să prezentăm o metodă sistematizată de determinare directă a ordinii de formare a articulațiilor plastice și a factorilor de încărcare corespunzători, precum și de rezolvare directă a unui anumit stadiu intermediar. Această metodă pornește de la aceleași premise ca și procedeul propus în lucrarea [3], pentru rezolvarea prin etape succesive aplicînd metoda eforturilor în condițiile utilizării unui singur sistem de ecuații. Se folosesc de fapt chiar termenii acestui sistem de ecuații, dar într-o altă interpretare, care schimbă esențial natura și semnificația procedeului.

2. STABILIREA METODEI

a) Fie o structură încărcată cu sarcini proporționale, pentru care s-a determinat mecanismul de cedare plastică; se cunosc deci secțiunile în care se formează cele $n + 1$ articulații plastice. S-a făcut totodată

şi identificarea ultimei articulaţii plastice, rămînînd să se afle ordinea în care se formează celelalte; fie această ordine $1, 2, \ldots, j, \ldots, n$.

Pe baza celei de-a doua ipoteze simplificatoare, se pot stabili de la început convenţii adecvate de semne pentru rotirile relative din articulaţiile plastice şi pentru momentele încovoietoare respective:

— rotirile sînt considerate pozitive dacă au acelaşi sens cu cele din mecanismul de cedare, sens care se păstrează în stadiile intermediare;

— momentele pozitive se opun rotirilor pozitive.

Să considerăm acum intervalul delimitat de apariţia articulaţiilor plastice $(j-1)$ şi j; rotirile relative din articulaţiile formate anterior sînt

$$\varphi_1 > 0, \quad \varphi_2 > 0, \ldots \varphi_{j-1} > 0 \quad \text{şi} \quad \varphi_j = 0 . \tag{1}$$

Comportarea structurii în timpul cînd sarcinile cresc de la $c_{j-1} P$ la $c_j P$ (c este factorul de încărcare) trebuie considerată ca perfect elastică. Se pot deci exprima rotirile relative prin relaţii liniare, în funcţie de sarcini şi de momentele încovoietoare $M_1, M_2, \ldots, M_j$, folosind un sistem de bază rezultat din structura dată prin introducerea de articulaţii obişnuite în secţiunile $1, 2, \ldots, j$. Se poate scrie

$$\varphi_i = \varphi_{i1} M_1 + \ldots + \varphi_{ih} M_h + \ldots + \varphi_{ij} M_j + c\,\varphi_{is} \quad (i = 1, 2, \ldots j), \tag{2}$$

unde un coeficient φ_{ih} reprezintă rotirea relativă din articulaţia i a sistemului de bază cînd acesta este încărcat cu un moment $M_h = 1$; φ_{is} reprezintă rotirea relativă din aceeaşi articulaţie sub acţiunea sarcinilor. Coeficienţii φ_{ih} şi termenii liberi φ_{is} trebuie calculaţi pe sistemul de bază considerat, care este de $n-j$ ori static nedeterminat. Modul sistematizat de calcul a acestora va fi arătat mai departe.

Pentru o mărime $c_j P$ a sarcinilor, articulaţia plastică j este formată; în toate secţiunile $1, 2, \ldots, j$ momentul încovoietor a atins valoarea $M = M_p$ a secţiunii respective. Ţinînd seama de expresiile (2), condiţiile (1) devin

$$\varphi_i = \sum_1^j \varphi_{ih} M_p + c_j \varphi_{is} > 0 \quad \text{şi} \quad \varphi_j = \sum_1^j \varphi_{jh} M_p + c_j \varphi_{js} = 0, \tag{3}$$

dintre care prima este aplicabilă pentru secţiunile $1, 2, \ldots, (j-1)$.

b) Relaţiile (3) presupun că s-ar cunoaşte care este articulaţia plastică j, respectiv care dintre primele j articulaţii plastice se formează ultima. De fapt, tocmai aceasta trebuie stabilit. Pentru găsirea unui procedeu de identificare, vom presupune succesiv că fiecare dintre articulaţiile plastice $1, 2, \ldots, j$ ar fi ultima, căutînd un criteriu de triere. Se va ţine seama la aceasta de ipoteza simplificatoare admisă referitoare la funcţionarea continuă în acelaşi sens a articulaţiilor plastice odată formate.

În acest scop revenim la sistemul de bază folosit la stabilirea expresiilor (2) şi considerăm intervalul dintre formarea articulaţiilor plastice $(j-1)$ şi j (fig. 1 *a*). Pe măsură ce sarcinile cresc cu ΔcP, în articulaţiile plastice formate anterior rotirile relative continuă să se producă în sensul indicat de mecanismul de cedare; în secţiunea care corespunde articu-

lației plastice j, rotirea relativă tinde să se producă în același sens, dar este împiedicată de creșterea ΔM_j a momentului încovoietor din secțiune, care menține acolo continuitatea (fig. 1 *b*). Înseamnă că pentru sistemul de bază *încărcat numai cu sarcini* (fig. 1 *c*), toate rotirile relative din articulații concordă ca sens cu cele din mecanismul de cedare. Vom avea deci $\varphi_{1s} > 0, \ldots, \varphi_{is} > 0, \ldots, \varphi_{js} > 0$.

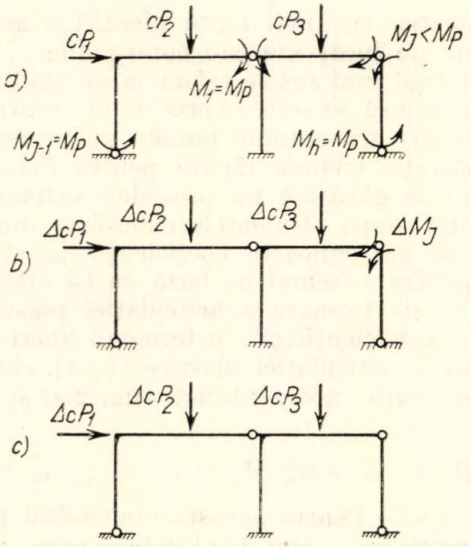


Fig. 1

În aceste condiții, să considerăm prima expresie (3) corespunzătoare unei articulații plastice i care *nu este ultima* și s-o comparăm cu relația ce ar trebui scrisă *dacă am presupune că articulația i este ultima.* Vom avea

$$\varphi_i = \sum_1^j \varphi_{ih} M_p + c_j \varphi_{is} > 0 \quad \text{și} \quad \varphi_i = \sum_1^j \varphi_{ih} M_p + c_j^{(i)} \varphi_{is} = 0 . \qquad (4)$$

Deoarece primul termen este același, iar $\varphi_{is} > 0$, rezultă $c_j^{(i)} < c_j$ și deci factorul de încărcare astfel obținut este *mai mic* decît cel corect, rezultat din a doua expresie (3) pentru articulația plastică j ce se formează efectiv ultima.

Pe această bază se poate enunța următoarea *teoremă*, care stabilește criteriul de identificare a articulației plastice j :

„Dacă pentru o structură încărcată cu sarcini proporționale, ajunsă în stadiul de formare a articulației plastice j, se consideră sistemul de bază rezultat prin introducerea de articulații obișnuite în secțiunile corespunzătoare primelor j articulații plastice și se calculează mărimile factorilor de încărcare admițînd succesiv că rotirile relative din aceste articulații ar fi egale cu zero, *articulația plastică j este aceea pentru care rezultă cea mai mare valoare a factorului de încărcare*".

Pentru aplicarea practică se formează expresiile (2) corespunzătoare stadiului respectiv şi se egalează succesiv cu zero fiecare dintre aceste expresii, scrisă sub a doua formă (4), determinînd factorii de încărcare

$$c_j^{(i)} = \sum_1^j \varphi_{ih} M_p / \varphi_{is} . \tag{5}$$

Dintre aceştia, valoarea cea mai mare identifică articulaţia plastică j şi reprezintă factorul de încărcare ce-i corespunde.

c) Criteriul stabilit mai sus se referă la un stadiu intermediar oarecare şi aplicarea sa cere să se scrie expresiile (2) pentru sistemul de bază corespunzător, care are un anumit număr de grade de nedeterminare statică. Această operaţie trebuie făcută pentru fiecare etapă în parte; este deci esenţial să se găsească un procedeu sistematizat care să folosească într-o anumită etapă elementele cunoscute din etapa precedentă.

Să admitem că am cunoaşte coeficienţii φ_{ih} şi termenii liberi φ_{is} din expresiile (2) pentru sistemul de bază cu $(n-j)$ nedeterminări, care corespunde stadiului de formare a articulaţiei plastice j (fig. 1 *a*). Ne propunem să găsim coeficienţii $\varphi_{ih}^{(1)}$ şi termenii liberi $\varphi_{is}^{(1)}$ care corespund stadiului de formare a articulaţiei plastice $(j-1)$, cînd sistemul de bază este de $n-j+1$ ori static nedeterminat (fig. 2 *a*) şi expresia unei rotiri relative se scrie

$$\varphi_i^{(1)} = \varphi_{i1}^{(1)} M_1 + \ldots + \varphi_{ih}^{(1)} M_h + \ldots + \varphi_{i(j-1)}^{(1)} M_{j-1} + c\,\varphi_{is}^{(1)} , \tag{6}$$

unde $i = 1, 2, \ldots, (j-1)$. Pentru aceasta vom folosi primul sistem drept sistem de bază la rezolvarea celui de-al doilea, care are un grad de nedeterminare în plus; necunoscuta suplimentară este M_j. Condiţia $\varphi_j = 0$ serveşte la găsirea valorilor acestei necunoscute pentru încărcare cu momentul M_j şi cu sarcini; se obţine

$M_h = 1$ (fig. 2 *b*) $\quad \varphi_{jj} M_j^{(h)} + \varphi_{jh} \cdot 1 = 0, \quad$ deci $M_j^{(h)} = -\varphi_{jh}/\varphi_{jj}$,

sarcini (fig. 2 *c*) $\quad \varphi_{jj} M_j^{(s)} + \varphi_{js} = 0, \quad$ deci $M_j^{(s)} = -\varphi_{js}/\varphi_{jj}$.

Coeficienţii şi termenii liberi din expresiile (6) se pot calcula pe sistemul de bază cu $n-j$ nedeterminări, încărcîndu-l cu momente-unitate de forma $M_h = 1$ sau cu sarcini, concomitent cu aplicarea momentului M_j corespunzător în articulaţia j; rezultă

$$\begin{aligned} \varphi_{ih}^{(1)} &= \varphi_{ih} + \varphi_{ij} M_j^{(h)} = \varphi_{ih} - \varphi_{ij} \cdot \frac{\varphi_{jh}}{\varphi_{jj}} = \varphi_{ih} - \varphi_{jh} \cdot \frac{\varphi_{ji}}{\varphi_{jj}} , \\ \varphi_{is}^{(1)} &= \varphi_{is} + \varphi_{ij} M_j^{(s)} = \varphi_{is} - \varphi_{ij} \cdot \frac{\varphi_{js}}{\varphi_{jj}} = \varphi_{is} - \varphi_{js} \cdot \frac{\varphi_{ji}}{\varphi_{jj}} . \end{aligned} \tag{7}$$

Relaţiile (7) arată că expresiile (4) se pot obţine direct din expresiile (2), eliminînd din acestea necunoscuta M_j cu ajutorul condiţiei $\varphi_j = 0$, prin operaţii care se pot scrie simbolic sub forma

$$\varphi_i^{(1)} = \varphi_i + \alpha_{ji} \cdot \varphi_j , \quad \text{unde} \quad \alpha_{ji} = -\varphi_{ji}/\varphi_{jj} , \tag{8}$$

întîlnită uzual la aplicarea algoritmului lui Gauss. Se poate deci trece cu ușurință de la un grup de expresii la celălalt.

d) Pentru aplicarea metodei vom porni de la stadiul cînd se formează articulația plastică n (penultima), căreia îi corespunde *un sistem de bază static determinat*, pentru care expresiile rotirilor relative din articulații

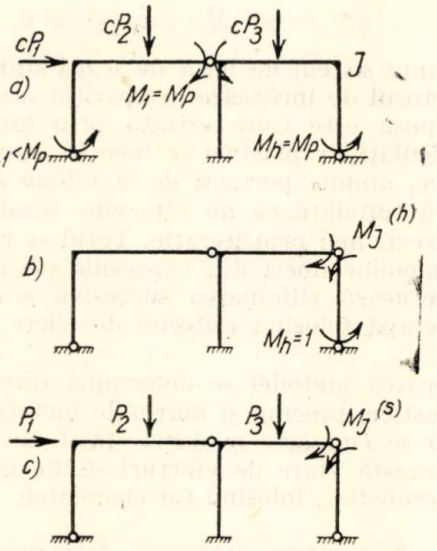


Fig. 2

sînt

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \varphi_{1_1} M_1 + \ldots + \varphi_{1h} M_h + \ldots + \varphi_{1n} M_n + c\,\varphi_{1s} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_i &= \varphi_{i_1} M_1 + \ldots + \varphi_{ih} M_h + \ldots + \varphi_{in} M_n + c\,\varphi_{is} \qquad (9) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_n &= \varphi_{n_1} M_1 + \ldots + \varphi_{nh} M_h + \ldots + \varphi_{nn} M_n + c\,\varphi_{ns}\,.
\end{aligned}$$

Coeficienții φ_{ih} și termenii liberi φ_{is} pot fi calculați cu ajutorul diagramelor unitare m_{xh} și al diagramei M_{xs}, obținute aplicînd succesiv pe sistemul de bază momentele $M_h = 1$ și, respectiv, sarcinile date. Calculul se efectuează fie în modul curent utilizat la alcătuirea ecuațiilor de condiție din metoda eforturilor, fie cu ajutorul sistemelor conjugate, cum se arată mai departe.

Pornind de la expresiile (9), metoda propusă efectuează alternativ două operații :

1. Se egalează cu zero fiecare dintre expresiile rotirilor, admițînd că toate momentele $M_1, M_2, \ldots, M_n$ au valoarea M_p și se calculează cu expresia (5) valorile $c_n^{(i)}$ corespunzătoare ; cea mai mare dintre aceste valori indică articulația plastică n și dă mărimea factorului de încărcare c_n.

2. Se elimină necunoscuta M_n cu ajutorul condiţiei $\varphi_n = 0$ şi se obţin expresiile rotirilor pentru sistemul de bază cu un grad de nedeterminare statică.

Se efectuează în acelaşi mod operaţiile pentru etapele următoare. De fiecare dată numărul rotirilor scade cu o unitate, astfel că la urmă se ajunge la o singură ecuaţie de forma

$$\varphi_1^{(n)} = \varphi_{11}^{(n)} M_1 + c_1 \varphi_{1s}^{(n)} = 0, \tag{10}$$

care corespunde unui sistem de bază de n ori static nedeterminat şi din care se obţine factorul de încărcare la apariţia primei articulaţii plastice.

Metoda propusă este caracterizată prin faptul că aflarea ordinii de formare a articulaţiilor plastice se face *în sens invers* celui folosit la calculele biografice, anume pornind *de la ultima articulaţie plastică spre prima*. Se remarcă totodată că nu intervine rezolvarea nici unui sistem de ecuaţii, nici direct, nici prin iteraţie. Totul se reduce la calculul coeficienţilor şi a termenilor liberi din expresiile (9) ale rotirilor relative [3]), după care se efectuează eliminarea succesivă a cîte unei necunoscute, aleasă în fiecare etapă folosind criteriul de triere stabilit în legătură cu formula (5).

e) Prin aplicarea metodei se determină direct ordinea de formare a articulaţiilor plastice, precum şi mărimile factorilor de încărcare corespunzători, dar nu se cunoaşte evoluţia stării de eforturi din structură. Este posibil ca această stare de eforturi să fie aflată direct pentru un anumit stadiu intermediar, folosind tot elementele cunoscute de la aflarea ordinii.

Să admitem că structura a ajuns la formarea articulaţiei plastice j. În acest stadiu, cadrul este de $n-j$ ori static nedeterminat. Momentele încovoietoare din secţiunile $1, 2, \ldots, j$ sînt cunoscute şi au valoarea M_p, în timp ce momentele încovoietoare din secţiunile $(j+1), \ldots, n$ nu au atins încă această valoare şi reprezintă necunoscutele problemei. Continuitatea subzistă în secţiunile $j, \ldots, n$, astfel că dispunem de condiţiile $\varphi_j = 0$, $\varphi_{j+1} = 0, \ldots, \varphi_n = 0$. Deoarece factorul de încărcare c_j este cunoscut, prima condiţie nu mai e necesară şi poate servi pentru verificare. Rămîn deci condiţiile $\varphi_{j+1} = 0, \ldots, \varphi_n = 0$, pe care le aplicăm folosind relaţiile (9), unde pentru $M_1, \ldots, M_j$ se introduc valorile M_p respective. Se obţine astfel un sistem cu $n-j$ ecuaţii, avînd $n-j$ necunoscute, şi anume $M_{j+1}, \ldots, M_n$. După aflarea acestora, dispunem de elementele necesare pentru trasarea diagramei de momente încovoietoare corespunzătoare stadiului intermediar considerat.

Se pot studia astfel independent unul sau mai multe stadii intermediare, după necesitate. Cu cît stadiul ales este mai aproape de cedarea plastică, sistemul de ecuaţii ce trebuie rezolvat este mai mic.

---

[3]) Se vede imediat că aceste expresii sînt aceleaşi cu ecuaţiile de condiţie care intervin în procedeul propus în lucrarea [3] pentru rezolvarea cadrelor prin etape succesive folosind metoda eforturilor, deoarece sistemul static determinat de bază este acelaşi (articulaţii obişnuite introduse în secţiunile unde apar primele n articulaţii plastice). Modul lor de utilizare este însă esenţial diferit.

3. SISTEMATIZĂRI PENTRU APLICAREA METODEI

a) *Identificarea ultimei articulații plastice.* Procedeul a fost stabilit și exemplificat în lucrările [1], [3]. În esență, se pornește de la constatarea că, în momentul imediat premergător cedării plastice, sensurile rotirilor relative din primele n articulații plastice sînt aceleași ca în mecanismul de cedare, deoarece cedarea se produce în continuarea deformării, cînd intră în funcțiune și ultima articulație plastică. În consecință, se efectuează o operație de triere, considerînd succesiv că s-ar anula cîte una dintre cele $n+1$ rotiri relative, stabilind sensurile celorlalte n pe baza diagramei de momente încovoietoare la cedarea plastică. Din $n+1$ posibilități, numai una singură satisface condiția ca sensurile tuturor celor n rotiri relative diferite de zero să concorde cu cele din mecanismul de cedare; articulația plastică pentru care, în această situație, corespunde rotire relativă nulă, este ultima articulație plastică ce se formează.

Calculul rotirilor relative și efectuarea operației de triere se fac în mod avantajos folosind sistemele conjugate, unde aceste rotiri apar sub forma reacțiunilor care echilibrează sarcinile convenționale determinate pe baza diagramei de momente încovoietoare; calculul se reduce astfel la operații curente de echilibru static. În același mod se procedează pentru trierea celor $n+1$ situații; trecerea de la o situație la alta rezultă suprapunînd sistemul de forțe în echilibru care corespunde sistemului conjugat al mecanismului de cedare, multiplicat cu constante convenabil alese.

Numărul încercărilor se poate reduce considerabil ținînd seama de particularitățile cadrului și ale sarcinilor date, care permit să se aprecieze cîteva articulații plastice, printre care e probabil să fie și ultima.

b) *Calculul coeficienților și al termenilor liberi din expresiile* (9). Și în acest caz se dovedește avantajoasă utilizarea sistemelor conjugate, aplicînd procedeul descris în capitolul al VII-lea din lucrarea [2] pentru alcătuirea ecuațiilor de condiție specifice metodei generale a eforturilor. În sistemul static determinat de bază, obținut prin introducere de articulații în secțiunile corespunzătoare primelor n articulații plastice, coeficienții $\varphi_{1h}, \ldots, \varphi_{nh}$ de pe coloana necunoscutei M_h din expresiile (9) reprezintă rotirile relative din cele n articulații cînd acesta este încărcat cu $M_h = 1$. Asemănător, termenii liberi $\varphi_{1s}, \ldots, \varphi_{ns}$ reprezintă rotirile relative produse în articulații de către sarcinile inițiale. Aceste grupe de rotiri relative pot fi calculate în sistemul conjugat asociat sistemului de bază, unde apar sub formă de reacțiuni aplicate în secțiunile $1, 2, \ldots, n$. Sarcinile convenționale corespunzătoare se determină pe baza diagramelor unitare m_{xh} produse de momentele-unitate $M_h = 1$, respectiv de diagrama M_{xs} dată de sarcini.

Calculul reacțiunilor conjugatei se poate face fie prin aplicarea ecuațiilor uzuale de echilibru static (operînd pe contururi), fie prin deplasări virtuale impuse sistemului conjugat. Deoarece grupele de reacțiuni trebuie determinate pentru $n+1$ situații diferite de încărcare a conjugatei (n momente-unitate și sarcinile), este indicat să se stabilească

expresii generale ale reacţiunilor în funcţie de sarcinile convenţionale, în care să se introducă apoi succesiv seriile de valori numerice ale acestora. Intervenind numai echilibrul conjugatei, este avantajos ca la structuri cu bare drepte sarcinile convenţionale să se concentreze în componente : pentru o porţiune oarecare de bară $j-k$, componentele de la extremităţile acesteia (multiplicate cu constanta $6\,EI_c$) sînt date de relaţiile

$$P^c_{jk} = \lambda_{jk}\,(2M_j + M_k + m_j) \quad \text{şi} \quad P^c_{kj} = \lambda_{jk}\,(M_j + 2M_k + m_k), \qquad (11)$$

unde λ_{jk} este lungimea transformată a porţiunii de bară ($\lambda_{jk} = l_{jk} \cdot I_c/I$), iar $m_j = 6\,S_{kj}/l^2$ şi $m_k = 6\,S_{jk}/l^2$ sînt caracteristicile sale de încărcare.

e) *Organizarea calculului.* La cadre cu mai mult de 2—3 nedeterminări statice este indicat să se concentreze calculul într-o tabelă, asigurînd prin aceasta o urmărire mai simplă, precum şi posibilităţi de verificare sistematică. Asemenea tabele se pot vedea mai departe la exemplificările 2 şi 3.

Se începe prin a înscrie în primele coloane coeficienţii φ_{ih} şi termenii liberi φ_{is} din expresiile (9), care corespund sistemului de bază static determinat. În partea dreaptă a tabelei se aplică pentru fiecare expresie formula (5), găsind valorile factorilor de încărcare pentru cazul cînd rotirea relativă respectivă se consideră egală cu zero. Cel mai mare dintre aceşti factori identifică articulaţia plastică n care se formează în acest stadiu (se înseamnă cu un asterisc). Trecerea la etapa următoare implică eliminarea termenilor conţinînd pe M_n din celelalte expresii, cu ajutorul condiţiei $\varphi_n = 0$. Pentru aceasta se calculează coeficienţii $\alpha_{ni} = -\varphi_{ni}/\varphi_{nn}$ definiţi de relaţia (8), care se trec într-o coloană intermediară, în dreptul expresiilor φ_i. Eliminarea se face sub forma $\varphi_i^{(1)} = \varphi_i + \alpha_{ni} \cdot \varphi_n$, înscriind pe rîndurile următoare noul grup de expresii. Se poate identifica acum articulaţia plastică $(n-1)$. Procedînd asemănător, se pot găsi în continuare şi celelalte articulaţii plastice.

O verificare simplă a calculului coeficienţilor obţinuţi în etapele succesive este posibilă, asemănător ca la algoritmul lui Gauss, folosind şi coloana $\Sigma\,\varphi_{ih}\,M_p$. Pentru o anumită expresie, această sumă se calculează atît prin adunarea termenilor de pe rîndul respectiv, cît şi direct prin aplicarea relaţiei de eliminare corespunzătoare, care este indicată în prima coloană a tabelei.

Privitor la semne, este de observat că, faţă de convenţia de semne adoptată mai sus, termenii liberi φ_{is} sînt totdeauna pozitivi, în timp ce coeficienţii φ_{ih} sînt de obicei negativi. Pentru calculul practic, apare mai potrivit să se adopte în tablou *convenţia inversă*, anume considerînd drept pozitive rotirile relative care se produc în sens contrar celor din mecanismul de cedare. În acest mod coeficienţii apar pozitivi şi termenii liberi negativi, ceea ce simplifică scrierea.

Organizarea conducerii calculului într-un singur tablou scoate în evidenţă simplitatea deosebită a rezolvării prin metoda propusă, comparativ cu un calcul „biografic" propriu-zis. Specificul metodei, care constă în efectuarea alternată a unor operaţii de triere şi a unor operaţii de

eliminare, se pretează de altfel avantajos și la programare, astfel că în cazul structurilor mai complicate se poate recurge la un calculator electronic. Acest aspect al rezolvării va face obiectul unei alte lucrări.

4. EXEMPLIFICĂRI DE APLICARE

a) *Exemplul 1.* Grinda dublu încastrată din figura 3 *a* are secțiune constantă și este încărcată cu o sarcină concentrată aplicată în secțiunea 2. Pentru această încărcare se produce mecanismul de cedare de bară cu

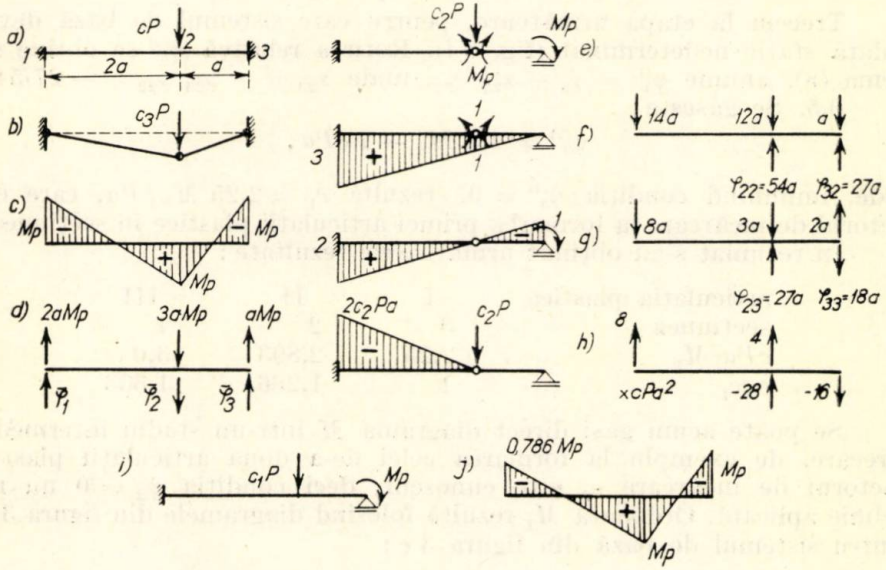


Fig. 3

trei articulații plastice coliniare (fig. 3 *b*), căruia îi corespunde factorul de încărcare $c_3 = 3\ M_p/Pa$; diagrama M corespunzătoare se vede în figura 3 *c*. Folosind sistemul conjugat din figura 3 *d*, unde sarcinile convenționale s-au calculat cu ajutorul expresiilor (11), se controlează ușor că ultima articulație plastică este cea din secțiunea 1 (pentru $\bar{\varphi}_1 = 0$, sensurile reacțiunilor $\bar{\varphi}_2$ și $\bar{\varphi}_3$ concordă cu sensurile rotirilor relative din mecanismul de cedare).

Sistemul static determinat de bază se obține introducînd articulații obișnuite în secțiunile care corespund primelor două articulații plastice, anume în secțiunile 2 și 3 (fig. 3 *e*). Diagramele unitare m_{x2} și m_{x3}, precum și diagrama M_{xs}, sînt arătate în figura 3 *f* — *h*. Cu ajutorul acestor diagrame se evaluează sarcinile convenționale pentru sistemele conjugate reprezentate alăturat. Mărimile sarcinilor sînt înscrise direct pe figuri, împreună cu cele ale reacțiunilor din secțiunile 2 și 3 care le echilibrează (sensuri pozitive invers celor din mecanismul de cedare).

Aceste reacţiuni reprezintă coeficienţii şi termenii liberi din expresiile de forma (9), care sînt în acest caz (împărţite prin a) :

$$\varphi_2 = 54\,M_2 + 27\,M_3 - 28\,cPa,\quad \varphi_3 = 27\,M_2 + 18\,M_3 - 16\,cPa.$$

Se aplică acum criteriul de triere, făcînd $M_2 = M_3 = M_p$:

$$\text{pentru } \varphi_2 = 0 \quad 81\,M_p - 28\,c_2 Pa = 0, \quad \text{deci } c_2 = 2{,}893\,M_p/Pa,$$

$$\text{pentru } \varphi_3 = 0 \quad 45\,M_p - 16\,c_2 Pa = 0, \quad \text{deci } c_2 = 2{,}812\,M_p/Pa.$$

Rezultă că a doua articulaţie plastică se produce în secţiunea 2, cînd factorul de încărcare atinge valoarea $c_2 = 2{,}893\,M_p/Pa$.

Trecem la etapa următoare, pentru care sistemul de bază devine o dată static nedeterminat (fig. 3 i). Rotirea relativă $\varphi_3^{(1)}$ se obţine sub forma (8), anume $\varphi_3^{(1)} = \varphi_3 + \alpha_{23} \cdot \varphi_2$, unde $\alpha_{23} = -\varphi_{23}/\varphi_{22} = -27/54 = -0{,}5$. Se găseşte

$$\varphi_3^{(1)} = 4{,}5\,M_3 - 2\,cPa,$$

unde, impunînd condiţia $\varphi_3^{(1)} = 0$, rezultă $c_1 = 2{,}25\,M_p/Pa$, care este factorul de încărcare la formarea primei articulaţii plastice în secţiunea 3.

În rezumat s-au obţinut următoarele rezultate :

articulaţia plastică	I	II	III
secţiunea	3	2	1
cPa/M_p	2,25	2,893	3,0
c_j/c_1	1	1,286	1,333

Se poate acum găsi direct diagrama M într-un stadiu intermediar oarecare, de exemplu la formarea celei de-a doua articulaţii plastice. Factorul de încărcare c_2 este cunoscut, deci condiţia $\varphi_2 = 0$ nu mai trebuie aplicată. Ordonata M_1 rezultă folosind diagramele din figura 3 f-h pentru sistemul de bază din figura 3 e :

$$M_1 = 3M_p + 2M_p - 2c_2\,Pa = -0{,}786\,M_p.$$

Diagrama se vede în figura 3 j.

b) *Exemplul 2.* Cadrul din figura 4 a este de trei ori static nedeterminat, astfel că mecanismul de cedare va avea patru articulaţii plastice. Folosind una dintre metodele uzuale, se găseşte că acest mecanism are forma din figura 4 b (s-a reprezentat în conjugat) şi îi corespunde un factor de încărcare la cedarea plastică $c_4 = 1{,}714\ M_p/Pa$, precum şi diagrama de momente încovoietoare din figura 4 c.

Pentru identificarea ultimei articulaţii plastice se porneşte de la această diagramă şi se calculează sarcinile convenţionale cu expresiile (11), găsind valorile înscrise în figura 4 d (care trebuie multiplicate cu aM_p). În figura 4 e sînt indicate reacţiunile, considerate pozitive în sensul rotirilor relative din mecanismul de cedare. Se controlează uşor că concordanţa de sensuri se realizează pentru $\bar{\varphi}_3 = 0$, cînd celelalte trei reacţiuni rezultă toate pozitive. Înseamnă că ultima articulaţie plastică este cea din secţiunea 3 şi îi corespunde factorul de încărcare c_4 dat mai sus.

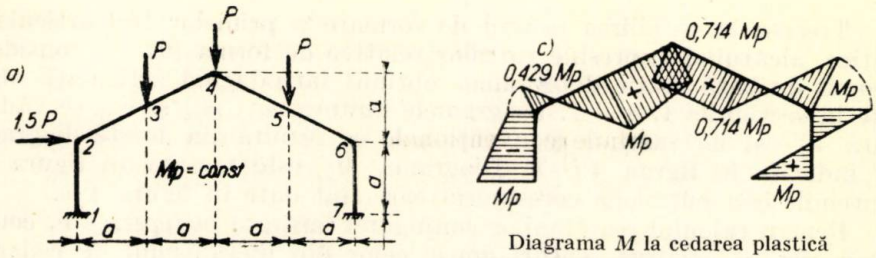
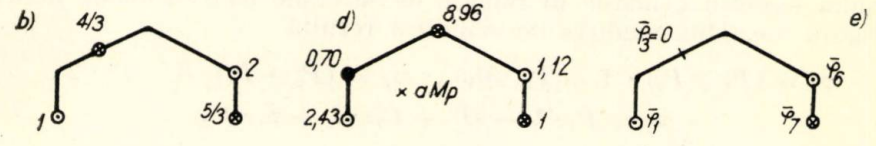
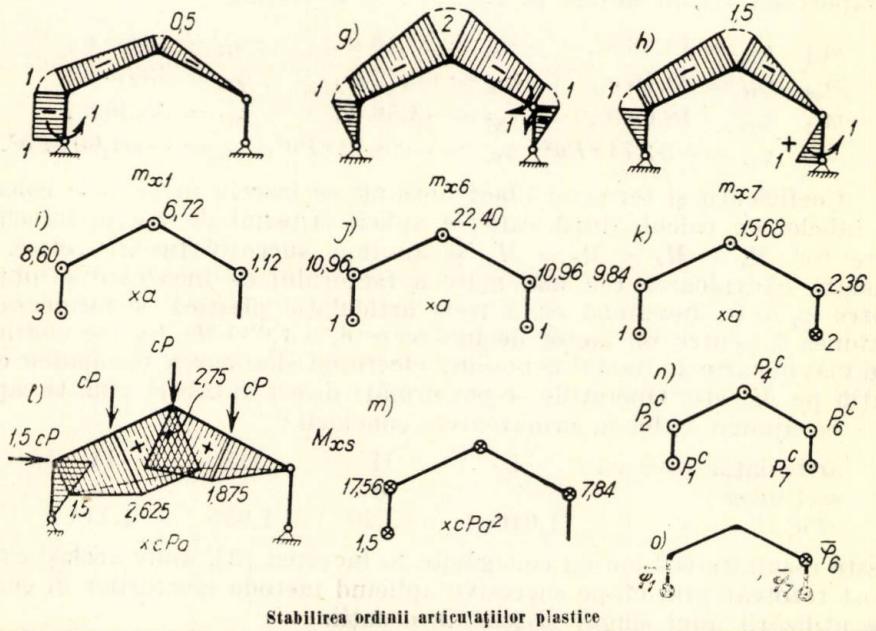


Diagrama M la cedarea plastică



Mecanism cedare | Sarcini convenționale ; | Reacțiuni conjugate ;



Stabilirea ordinii articulațiilor plastice

φ_i	φ_{i1}	φ_{i6}	φ_{i7}	φ_{is}/cPa	$\alpha_{ji} = -\varphi_{ji}/\varphi_{jj}$	$\sum \varphi_{ih} M_p$	$c_j = -\sum \varphi_{ih} M_p/\varphi_{is}$
φ_1	14,96	23,16	18,68	−34,74	$\alpha_{11} = -1$	$56{,}80 M_p$	$c_3 = 1{,}635\ M_p/Pa^*$
φ_6	23,16	66,72	43,56	−88,12	$\alpha_{16} = -1{,}548$	$133{,}44 M_p$	$c_3 = 1{,}514\ M_p/Pa$
φ_7	18,68	43,56	35,36	−64,60	$\alpha_{17} = -1.249$	$97{,}60 M_p$	$c_3 = 1{,}511\ M_p/Pa$
$\varphi_6^{(1)} = \varphi_6 - 1{,}548\ \varphi_1$		30,87	14,64	−34,31	$\alpha_{66} = -1$	$45{,}51 M_p$	$c_2 = 1{,}326\ M_p/Pa^*$
$\varphi_7^{(1)} = \varphi_7 - 1{,}249\ \varphi_1$		14,64	12,03	−21,17	$\alpha_{67} = -0{,}474$	$26{,}67 M_p$	$c_2 = 1{,}259\ M_p/Pa$
$\varphi_7^{(2)} = \varphi_7^{(1)} - 0{,}474\ \varphi_6^{(1)}$			5,09	− 4,90		$5{,}09 M_p$	$c_1 = 1{,}040\ M_p/Pa^*$

Fig. 4

Trecem la stabilirea ordinii de formare a primelor trei articulaţii plastice, alcătuind expresiile rotirilor relative de forma (9). Se consideră sistemul de bază static determinat obţinut introducînd articulaţii obişnuite în secţiunile 1, 6 şi 7. Diagramele unitare m_{x1}, m_{x6} şi m_{x7} se văd în figura 4 *f*—*h*, iar sarcinile convenţionale ce rezultă din aceste diagrame sînt indicate în figura 4 *i*—*k*. Diagrama M_{xs} este trasată în figura 4 *l* şi sarcinile convenţionale corespunzătoare sînt date în figura 4 *m*.

Pentru calculul reacţiunilor conjugatei (arătate în figura 4 *n*, considerînd aici ca pozitive sensuri opuse celor din mecanismul de cedare), stabilim expresii generale în funcţie de sarcinile convenţionale indicate în figura 4 *o*. Din condiţia de echilibru rezultă

$$\bar{\varphi}_1 = (P_1^c + P_2^c) \cdot 1 + P_4^c \cdot 0{,}5\,, \quad \bar{\varphi}_6 = (P_2^c + P_6^c) \cdot 1 + P_4^c \cdot 2\,,$$
$$\bar{\varphi}_7 = P_4^c \cdot 1 - (P_1^c + P_7^c) \cdot 1 + \bar{\varphi}_1 \cdot 1\,.$$

Introducînd succesiv grupele de sarcini convenţionale, cu semnele lor în raport cu sensul admis în figura 4 *o*, se obţine

$$\begin{array}{llll} m_{x1} & \varphi_{11} = 14{,}96\,a\,, & \varphi_{61} = 23{,}16\,a\,, & \varphi_{71} = 18{,}68\,a\,, \\ m_{x6} & \varphi_{16} = 23{,}16\,a\,, & \varphi_{66} = 66{,}72\,a\,, & \varphi_{76} = 43{,}56\,a\,, \\ m_{x7} & \varphi_{17} = 18{,}68\,a\,, & \varphi_{67} = 43{,}56\,a\,, & \varphi_{77} = 35{,}36\,a\,, \\ M_{xs} & \varphi_{1s} = -34{,}74\,cPa^2, & \varphi_{6s} = -88{,}12\,cPa^2, & \varphi_{7s} = -64{,}60\,cPa^2. \end{array}$$

Coeficienţii şi termenii liberi obţinuţi se înscriu în primele coloane ale tabelei de calcul, după care se aplică criteriul de triere, înlocuind peste tot $M_1 = M_6 = M_7 = M_p$ şi anulînd succesiv fiecare rotire. Se constată că valoarea cea mai mare a factorului de încărcare se obţine pentru $\varphi_1 = 0$; înseamnă că a treia articulaţie plastică se formează în secţiunea 1 pentru un factor de încărcare $c_3 = 1{,}635\,M_p/Pa$. Se continuă apoi mai departe în modul cunoscut, efectuînd eliminarea termenilor care conţin pe M_3 etc. Operaţiile se pot urmări direct în tabelă pînă la capăt.

Se ajunge astfel la următoarele concluzii :

articulaţia plastică	I	II	III	IV
secţiunea	7	6	1	3
cPa/M_p	1,040	1,326	1,635	1,714

Aceste rezultate coincid cu cele găsite în lucrarea [3], unde acelaşi cadru a fost rezolvat prin etape succesive aplicînd metoda eforturilor în condiţiile utilizării unui singur sistem de ecuaţii.

Considerînd acum stadiul intermediar cînd se formează a doua articulaţie plastică, dispunem de condiţiile $\varphi_6 = 0$ şi $\varphi_1 = 0$. Factorul de încărcare $c_2 = 1{,}326\ M_p/Pa$ fiind cunoscut, urmează a fi utilizată numai una dintre aceste condiţii pentru găsirea mărimii lui M_1. Introducînd $M_6 = M_7 = M_p$ în expresia lui φ_1 din primul rînd al tabelei de calcul, rezultă

$$\varphi_1 = 14{,}96\ M_1 + 41{,}84\ M_p - 34{,}74 \cdot 1{,}326\ M_p = 0\,,$$

de unde

$$M_1 = 4{,}23\ M_p/14{,}96 = 0{,}283\ M_p\,,$$

astfel că dispunem de elemente suficiente pentru trasarea diagramei de momente încovoietoare corespunzătoare acestui stadiu.

c) *Exemplul 3.* Cadrul din figura 5 *a* este de șase ori static nedeterminat și deci un mecanism total de cedare implică formarea a șapte articulații plastice. Acest cadru a fost studiat complet pe cale „biografică" în lucrarea [3], aplicînd metoda generală a deplasărilor. S-a arătat acolo că pentru $k_1 = M_p^r/M_p^s = 10/6$ la secțiuni I corespunde $k_2 = I^r/I^s \simeq \simeq (k_1)^{4/3} \simeq 2$. Utilizînd și aici una dintre metodele uzuale, se ajunge la mecanismul de cedare din figura 5 *b* (reprezentat în conjugat), căruia îi corespunde un factor de încărcare $c_7 = 1{,}654$ și diagrama de momente încovoietoare la cedarea plastică din figura 5 *c*.

Începem cu identificarea ultimei articulații plastice. În figura 5 *d* sînt reprezentate sistemele conjugate corespunzătoare celor două contururi, încărcate cu sarcinile convenționale calculate pe baza diagramei M folosind relațiile (11) și cu reacțiunile din dreptul articulațiilor plastice, considerate pozitive în sensul rotirilor relative din mecanismul de cedare. Față de alcătuirea cadrului și sarcinile date, apare probabil ca ultima articulație plastică să fie printre cele din secțiunile 1,3 sau 5. Încercăm cu $\bar{\varphi}_5 = 0$, obținînd valorile reacțiunilor înscrise în tabela din figura 5 *e*. Se constată că numai $\bar{\varphi}_1$ nu corespunde ca semn, deci, dacă impunem condiția $\bar{\varphi}_1 = 0$ prin suprapunerea $\bar{\varphi}_i^{(5)} + 27{,}44\ \bar{\theta}_i^{(mec)}$, toate celelalte reacțiuni vor fi pozitive, îndeplinind criteriul de concordanță. Înseamnă că ultima articulație plastică este cea din secțiunea 1.

Trecem la stabilirea ordinii primelor șase articulații plastice, alcătuind expresiile (9) ale rotirilor relative pentru sistemul de bază static determinat, obținut introducînd articulații obișnuite în secțiunile 3, 4, 5, 6, 7 și 8. Diagramele unitare respective sînt trasate în figura 5 *f*—*k*, iar diagrama M_{xs} se vede în figura 5 *l*. Cu ajutorul acestor diagrame se calculează componentele sarcinilor convenționale, obținînd valorile înscrise în tabela din figura 5 (sens pozitiv de sus în jos). Rămîne să se determine pentru fiecare caz mărimile reacțiunilor reprezentate în figura 5 *m* (aici sens pozitiv invers celui al rotirilor relative din mecanismul de cedare). Pe baza condițiilor de echilibru static a celor două contururi ale conjugatei, se obține :

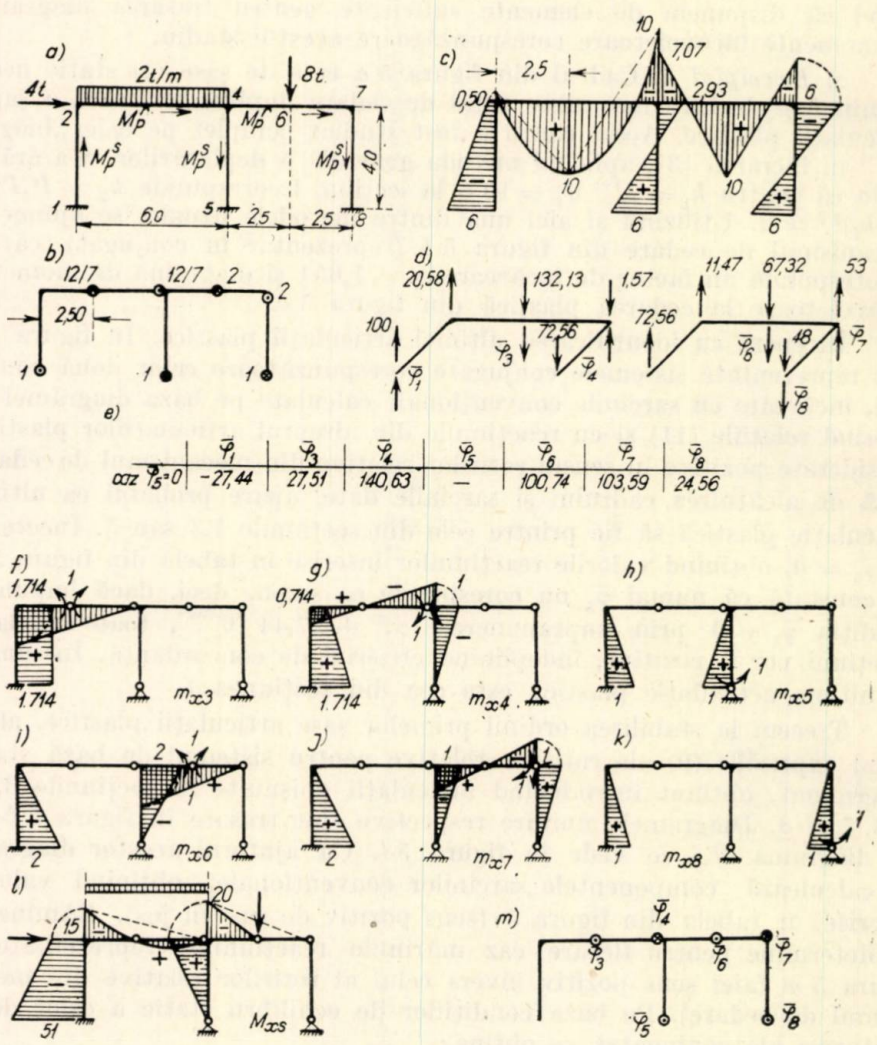
— conturul I :

$$\bar{\varphi}_3 = 1{,}714\,(P_1^c + P_2^c),\ \bar{\varphi}_4 = 1{,}714\,P_1^c + 0{,}714\,P_2^c - P_{42}^c - P_{45}^c,\ \bar{\varphi}_5 = P_1^c + P_5^c;$$

— conturul II :

$$\bar{\varphi}_6 = 2\,(P_1^c + P_{47}^c - P_{45}^c),\ \bar{\varphi}_7 = 2\,P_1^c + P_{47}^c - P_{45}^c - P_7^c,\ \bar{\varphi}_8 = P_1^c + P_8^c.$$

Aplicînd aceste expresii, se obțin coeficienții și termenii liberi înscriși în primele rînduri ale tabelei de calcul. Controlul calculului numeric rezultă pe baza reciprocității $\varphi_{ih} = \varphi_{hi}$, deoarece cei doi coeficienți se determină aici din formule diferite. Conducerea calculului în tabelă



	$\bar{\varphi}_1$	$\bar{\varphi}_3$	$\bar{\varphi}_4$	$\bar{\varphi}_5$	$\bar{\varphi}_6$	$\bar{\varphi}_7$	$\bar{\varphi}_8$
axa $\bar{\varphi}_5=0$	−27,44	27,51	140,63	—	100,74	103,59	24,56

Mărimile sarcinilor convenționale

	P_1^c	P_2^c	P_{42}^c	P_{45}^c	P_5^c	P_{47}^c	P_7^c	P_8^c
m_{x3}	41,14	61,70	10,28	—	—	—	—	—
m_{x4}	33,14	27,70	−7,72	−16,00	−8,00	—	—	
m_{x5}	16,00	8,00	—	8,00	16,00	—	—	
m_{x6}	32,00	16,00	—	32,00	−16,00	20,00	10,00	
m_{x7}	32,00	16,00	—	16,00	−8,00	5,00	−21,00	8,00
m_{x8}	16,00	8,00	—	—	—	—	8,00	16,00
M_{xs}	−936	−720	18	320	160	−125	−25	—

Fig. 5

Stabilirea ordinei articulațiilor plastice la cadrul din exemplu 3

φ_i	φ_{i3}	φ_{i4}	φ_{i5}	φ_{i6}	φ_{i7}	φ_{i8}	φ_{is}	$\alpha_{Ji}=-\varphi_{Ji}/\varphi_{JJ}$	$\Sigma\,\varphi_{ih}$ $Mp=10$	$\Sigma\,\varphi_{ih}$ $Mp=6$	$\Sigma\varphi_{ih}Mp$	$C_J=-\Sigma\varphi_{ih}Mp/\varphi_{is}$
φ_3	176,27	104,29	41,14	82,27	82,27	41,14	−2838,4	$\alpha_{33}=-1$	362,83	164,55	4615,6	$c_6=1{,}626^*$
φ_4	104,29	100,31	25,14	98,28	82,27	33,14	−2456,4	$\alpha_{34}=-0{,}592$	302,88	140,55	3872,1	$c_6=1{,}576$
φ_5	41,14	25,14	32,00	16,00	24,00	16,00	− 776,0	$\alpha_{35}=-0{,}233$	82,28	72,00	1254,8	$c_6=1617$
φ_6	82,27	98,28	16,00	168,00	106,00	32,00	−2762,0	$\alpha_{36}=-0{,}467$	348,55	154,00	4409,5	$c_6=1{,}596$
φ_7	82,27	82,27	24,00	106,00	106,00	24,00	−2292,0	$\alpha_{37}=-0{,}467$	270,59	154,00	3629,9	$c_6=1{,}584$
φ_8	41,14	33,14	16,00	32,00	24,00	32,00	− 936,0	$\alpha_{38}=-0{,}233$	106,28	72,00	1494,8	$c_6=1{,}597$
$\varphi_4^{(1)}=\varphi_4-0{,}592\,\varphi_3$		38,60	0,80	49,60	33,59	8,80	− 776,9	$\alpha_{64}^{(1)}=-0{,}383$	88,20	43,19	1141,1	$c_5=1{,}469$
$\varphi_5^{(1)}=\varphi_5-0{,}233\,\varphi_3$		0,80	22,40	−3,20	4,80	6,40	− 113,5	$\alpha_{65}^{(1)}=-0{,}025$	−2,40	33,60	177,6	$c_5=1{,}564$
$\varphi_6^{(1)}=\varphi_6-0{,}467\,\varphi_3$		49,60	−3,20	129,61	67,61	12,80	−1437,3	$\alpha_{66}^{(1)}=-1$	179,21	77,21	2255,3	$c_5=1{,}570^*$
$\varphi_7^{(1)}=\varphi_7-0{,}467\,\varphi_3$		33,59	4,80	67,61	67,61	4,80	− 967,3	$\alpha_{67}^{(1)}=-0{,}522$	101,20	77,21	1475,3	$c_5=1{,}525$
$\varphi_8^{(1)}=\varphi_8-0{,}233\,\varphi_3$		8,80	6,40	12,80	4,80	22,40	− 273,5	$\alpha_{68}^{(1)}=-0{,}099$	21,60	33,60	417,6	$c_5=1{,}527$
$\varphi_4^{(2)}=\varphi_4^{(1)}-0{,}384\,\varphi_6^{(1)}$		19,62	2,02		7,72	3,90	− 226,9	$\alpha_{54}^{(2)}=-0{,}091$	19,62	13,64	278,0	$c_4=1{,}225$
$\varphi_5^{(2)}=\varphi_5^{(1)}-0{,}025\,\varphi_6^{(1)}$		2,02	22,32		6,47	6,71	− 149,0	$\alpha_{55}^{(2)}=-1$	2,02	35,50	233,2	$c_4=1{,}565$
$\varphi_7^{(2)}=\varphi_7^{(1)}-0{,}522\,\varphi_6^{(1)}$		7,72	6,47		32,34	−1,88	− 217,6	$\alpha_{57}^{(2)}=-0{,}290$	7,72	36,93	298,8	$c_4=1{,}373$
$\varphi_8^{(2)}=\varphi_8^{(1)}-0{,}099\,\varphi_6^{(1)}$		3,90	6,71		−1,88	21,13	− 131,5	$\alpha_{58}^{(2)}=-0{,}301$	3,90	25,96	194,8	$c_4=1{,}481$
$\varphi_4^{(3)}=\varphi_4^{(2)}-0{,}091\,\varphi_5^{(2)}$		19,44			7,13	3,29	− 213,3	$\alpha_{84}^{(3)}=-0{,}172$	19,44	10,42	256,9	$c_3=1{,}204$
$\varphi_7^{(3)}=\varphi_7^{(2)}-0{,}290\,\varphi_5^{(2)}$		7,13			30,46	−3,83	− 174,4	$\alpha_{87}^{(3)}=+0{,}200$	7,13	26,63	231,1	$c_3=1{,}326$
$\varphi_8^{(3)}=\varphi_8^{(2)}-0{,}300\,\varphi_5^{(2)}$		3,29			−3,83	19,11	− 86,7	$\alpha_{83}^{(3)}=-1$	3,29	15,28	124,6	$c_3=1{,}437^*$
$\varphi_4^{(4)}=\varphi_4^{(3)}-0{,}172\,\varphi_8^{(3)}$		18,87			7,79		− 198,4	$\alpha_{74}^{(4)}=-0{,}262$	18,87	7,79	235,4	$c_2=1{,}186$
$\varphi_7^{(4)}=\varphi_7^{(3)}-0{,}200\,\varphi_8^{(3)}$		7,79			29,70		− 191,7	$\alpha_{77}^{(4)}=-1$	7,79	29,70	256,1	$c_2=1{,}336^*$
$\varphi_4^{(5)}=\varphi_4^{(4)}-0{,}262\,\varphi_7^{(4)}$		16,83					− 148,2		16,83	—	168,3	$c_1=1{,}136^*$

pentru stabilirea ordinii articulaţiilor plastice este cunoscută şi se poate urmări direct. Se ajunge la următoarele rezultate :

articulaţii plastice	I	II	III	IV	V	VI	VII
secţiunea	4	7	8	5	6	3	1
$c =$	1,136	1,336	1,437	1,565	1,570	1,626	1,654,

care coincid cu cele găsite prin calcul biografic în lucrarea [3].

Să determinăm acum direct starea de eforturi într-un anumit stadiu intermediar, de exemplu la formarea celei de-a cincea articulaţii plastice (prima care apare în cuprinsul unei rigle). Este cunoscut factorul de încărcare $c_5 = 1{,}570$, astfel că dintre condiţiile $\varphi_6 = 0$ şi $\varphi_3 = 0$ numai a doua trebuie folosită pentru aflarea lui M_3. Introducînd în expresia corespunzătoare (rîndul întîi al tabelei de calcul) $M_4 = 10$, $M_7 = M_8 = M_5 = 6$ şi condiţia $M_6 = 10$, se obţine

$$\varphi_3 = 176{,}27\ M_3 + (104{,}29 + 82{,}27) \cdot 10 + (41{,}14 + 82{,}27 + 41{,}14) \cdot 6 - 2838{,}4 \cdot 1{,}57 = 0$$

sau

$$M_3 = 1603{,}39 / 176{,}27 = 9{,}09 \text{ tm}.$$

Se cunosc astfel şase ordonate, precum şi factorul de încărcare ; se poate deci trasa diagrama de momente încovoietoare căutată.

5. CONCLUZII

Expunerea teoretică şi exemplele de aplicare prezentate mai sus dovedesc că prin metoda propusă se poate determina direct ordinea de formare a articulaţiilor plastice şi factorii de încărcare corespunzători, fără a mai fi necesar să se recurgă la un calcul „biografic" complet. Se poate de asemenea găsi direct starea de eforturi din structură pentru un stadiu intermediar oarecare. Se elimină astfel necesitatea de a efectua calcule deosebit de laborioase, obţinînd pe o cale mult mai simplă elemente concludente pentru definitivarea soluţiilor.

Această metodă oferă atelierelor de proiectare un instrument eficient pentru introducerea în practica curentă a cercetării comportării structurilor în domeniul elastic-plastic.

Primită la redacţie la 9 octombrie 1965.

BIBLIOGRAFIE

1. Alex. Gheorghiu, *Sistemele conjugate, mijloc de exprimare a condiţiei de compatibilitate în calculul structurilor*, St. cerc. mec. apl., **XI**, 6 (1960).
2. — *Statica construcţiilor*, vol. II, Bucureşti, Edit. tehnică, 1965.
3. Alex. Gheorghiu şi colaboratori, *Asupra calculului cadrelor în domeniul elastico-plastic prin etape succesive*, Bul. Inst. construcţii, Bucureşti, *8* (1961).

APLICAREA TEORIEI GRAFURILOR LA CALCULUL PULSAȚIEI FUNDAMENTALE DE VIBRAȚIE A STRUCTURILOR ELASTICE

de MIHAIL IFRIM și SORIN LARIONESCU
Institutul de Construcții București

539.4

Se prezintă o metodă privind calculul pulsației fundamentale de vibrație a structurilor elastice, utilizînd teoria grafurilor. Abordarea acestei probleme este din punct de vedere teoretic diferită de procedeele folosite în mod curent.
Expresiile de calcul obținute sînt ușor de aplicat, iar rezultatele, practic, satisfăcătoare.

În calculul structurilor acționate în regim dinamic, intensitatea forțelor de inerție este precizată de mărimea frecvenței proprii de oscilație care caracterizează rigiditatea dinamică a sistemelor elastice.

La anumite tipuri de structuri (cadre etajate, diafragme antiseismice etc.), forțele de inerție maxime ce iau naștere ca urmare a solicitărilor de tip seismic corespund modului fundamental de vibrație. De aceea în această lucrare se va prezenta o metodă aproximativă de calcul a pulsației fundamentale, utilizînd în acest scop rezultatele obținute din teoria grafurilor. Acest mod de a aborda problema nu a mai fost utilizat în lucrările de specialitate, deosebindu-se esențial de metodele exacte sau aproximative tradiționale. Valorile pulsațiilor fundamentale obținute sînt satisfăcătoare din punct de vedere a scopurilor practice.

Trebuie menționat că utilizarea teoriei grafurilor poate fi extinsă la rezolvarea și altor probleme de mecanică a construcțiilor.

NOTAȚII

n — numărul gradelor de libertate dinamice;
$m_1, m_2, \ldots, m_k \ldots m_n$ — masele structurii cu n grade de libertate;
t — timpul;

$x_1(t)$, $x_2(t)$ ... $x_k(t)$ ... $x_n(t)$ — deplasările corespunzătoare fiecărei mase;

$U_k(t)$ — deplasarea provenită dintr-o excitaţie exterioară şi aplicată masei m_k;

ω — pulsaţia proprie de vibraţie a structurii;

β_k — coeficientul de frecare corespunzător nivelului k, conform ipotezei lui Vogt;

γ_{kk} — rigiditatea nivelului k, reprezintă forţa necesară pentru deplasarea nivelului k cu o unitate, celelalte nivele fiind blocate;

γ_{ki} — rigiditatea relativă dintre nivelele i şi k, care reprezintă forţa care apare în blocajul k cînd nivelul i s-a deplasat cu o unitate, celelalte nivele rămînînd blocate;

$s = \alpha + j\omega$ — variabila din planul complex;

$X_k(s)$, $U_k(s)$ — transformatele Laplace ale lui $x_k(t)$ şi $u_k(t)$;

$t_{k,i}$ — coeficient de transmitere de la nivelul i la nivelul k în graful de fluenţe unilateral;

$\mathcal{D}^{kj}$ — drumul dintre deplasarea X_j şi deplasarea X_k;

$\mathcal{B}_i$ — buclă oarecare într-un graf de fluenţe.

I. Structura cu mase concentrate şi n grade de libertate analizată este reprezentată în figura 1. Fiecare masă m_k este acţionată de o deplasare $U_k(t)$ variabilă în timp. Această deplasare poate constitui solicitarea produsă asupra structurii studiate de o altă structură în vibraţie, ca o consecinţă a conlucrării dintre structuri. În cazul mişcării seismice, această deplasare se manifestă numai la baza structurii.

Se presupune că structura exminată are o comportare liniară, putîndu-se aplica principiul suprapunerii efectelor. Ecuaţiile de condiţie care precizează deplasările sistemului elastic analizat se obţin prin intermediul unor ecuaţii de echilibru dinamic de tip d'Alembert, în care se suprapun următoarele situaţii: deplasarea masei m_k cînd toate celelalte grade de libertate sînt blocate; deplasarea lui m_k provocată de deplasarea lui m_i cînd restul gradelor de libertate sînt blocate, pentru $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ şi $i \neq k$,

$$m_k \frac{\mathrm{d}^2 x_k(t)}{\mathrm{d}t^2} + \beta_k \frac{\mathrm{d}x_k(t)}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ki}\, x_i(t) + m_k \frac{\mathrm{d}^2 u_k(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0\,. \qquad (1)$$

Comportarea structurii la acţiunea unor forţe exterioare va fi deci descrisă de un sistem de n ecuaţii diferenţiale de forma (1) cu n necunoscute. După aplicarea transformatei Laplace, sistemul de ecuaţii diferenţiale se va transforma în următorul sistem de ecuaţii algebrice:

$$m_k s^2 X_k(s) + \beta_k s X_k(s) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ki} X_i(s) + m_k s^2 U_k(s) = 0 \qquad (2)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

La aplicarea transformatei Laplace, ecuația (1) s-a considerat că $x_k(t)$ împreună cu toate derivatele lui pînă la ordinul n inclusiv sînt nuli dacă $t = 0$. Condiția aceasta poate fi îndeplinită întotdeauna dacă se face o translație corespunzătoare de timp.

Dacă se pune în evidență produsul $\gamma_{kk} X_k(s)$, se împarte cu γ_{kk} și se dă factor comun $X_k(s)$, sistemul (2) se poate scrie în forma următoare:

$$X_k(s)\left[1+\left(\frac{m_k}{\gamma_{kk}}s^2+\frac{\beta_k}{\gamma_{kk}}s\right)\right]+$$

$$+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\frac{\gamma_{ki}}{\gamma_{kk}}X_i(s)=-\frac{m_k}{\gamma_{kk}}s^2\,U_k(s). \qquad (3)$$

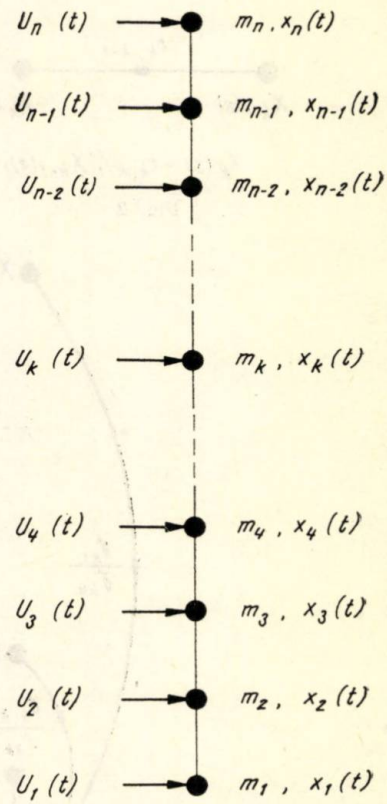


Fig. 1

Sistemul de ecuații (3) poate fi studiat mai ușor cu ajutorul teoriei grafurilor, care în continuare se presupune cunoscută. Pentru ilustrarea notațiilor se prezintă semnificația ramurilor unui graf de fluențe unilateral (fig. 2) și bilateral (fig. 3), precum și legătura dintre ele.

În figura 4 este reprezentat graful de fluențe unilateral, corespunzător ecuației k a sistemului (3). Se observă că graful sistemului (3) obținut prin interconectarea grafurilor ecuațiilor componente, devine foarte complicat și în mod practic este imposibil să se lucreze asupra lui. Lucrurile se simplifică însă mult dacă se ia în considerație faptul că la toate structurile reale coeficienții de transmitere $t_{k,i}$, în care $i > k+2$ sau $i < k-2$, sînt atît de mici încît pot fi neglijați. Acești coeficienți de transmitere sînt de forma

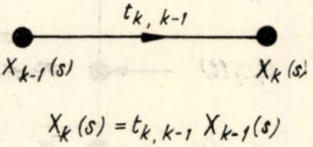
$$t_{k,i} = -\frac{\gamma_{ki}}{\gamma_{kk}}.$$

Cu această aproximație admisă, graful de fluențe bilateral al sistemului de ecuație (3) este cel din figura 5.

Folosind acest graf, se poate determina imediat deplasarea $X_k(s)$ produsă de acțiunea exterioară $U_j(s)$ cu ajutorul regulii lui Mason [1]:

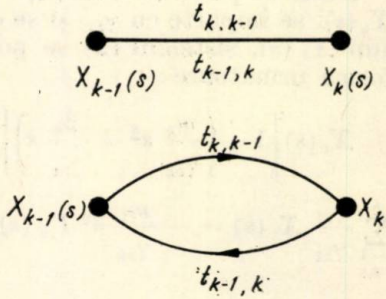
$$X_k(s) = -\frac{m_j}{\gamma_{jj}}s^2\,U_j(s)\,\frac{\sum_{t=1}^{g}{}^{*}\mathcal{D}_t^{kj}\times\prod_{i=1}^{4n-5}{}^{*}(1-\mathcal{B}_i)}{\prod_{i=1}^{4n-5}{}^{*}(1-\mathcal{B}_i)}, \qquad (4)$$

unde g reprezintă numărul total de drumuri care există între nodul j și k, asteriscul indicînd faptul că produsul și suma din expresia (4) nu se formează în mod obișnuit. Factorii și termenii care conțin bucle și drumuri



$$X_k(s) = t_{k,k-1}\, X_{k-1}(s)$$

Fig. 2



$$X_k(s) = t_{k,k-1}\, X_{k-1}(s)$$

$$X_{k-1}(s) = t_{k-1,k}\, X_{k-1}(s)$$

Fig. 3

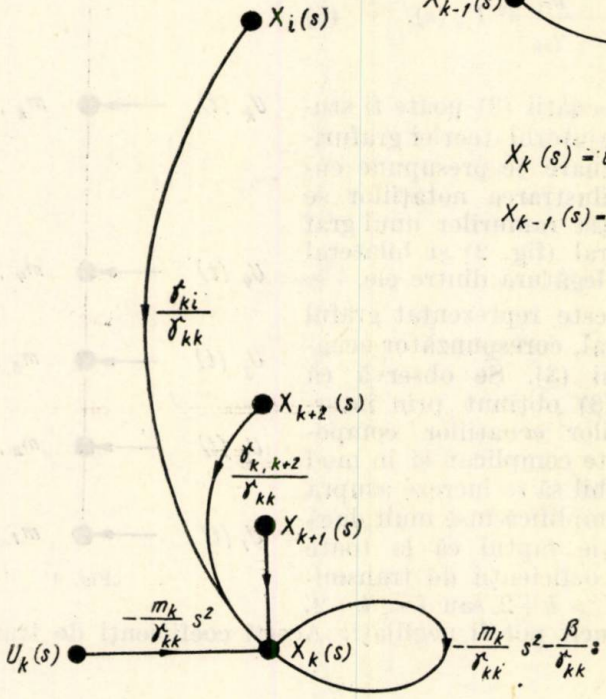


Fig. 4

care se ating se anulează. Aplicînd și de data aceasta principiul superpoziției, determinăm deplasarea $X_k(s)$ provocată de acțiunea tuturor forțelor exterioare :

$$X_k(s) = -s^2 \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{\gamma_{ji}} U_j(s) \sum_{t=1}^{g}{}^{*} \mathcal{D}_t^{kj} \times \prod_{i=1}^{5n-7}{}^{*} (1 - \mathcal{B}_i)}{\prod_{i=1}^{5n-7}{}^{*} (1 - \mathcal{B}_i)}. \qquad (5$$

Modurile proprii de vibrație sînt determinate de polii expresiei (5), adică

$$\prod_{i=1}^{5n-7}{}^{*}(1 - \mathcal{B}_i) = 0\,, \tag{6}$$

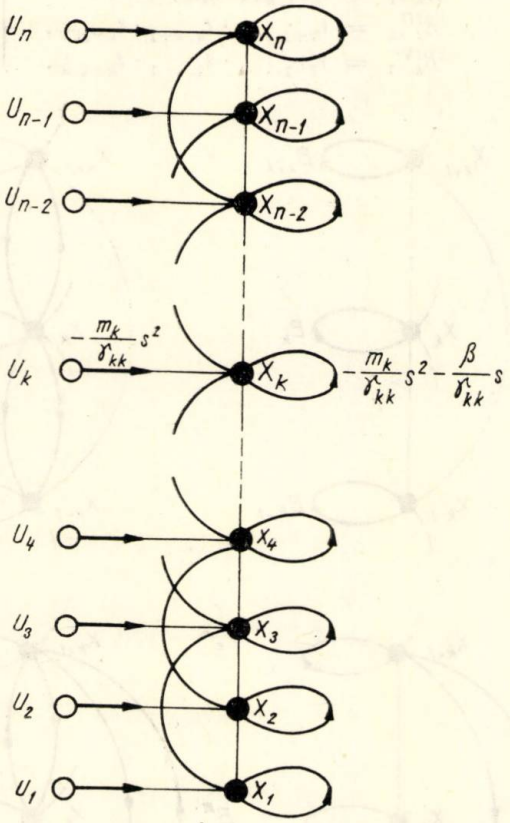


Fig. 5

care se poate transforma în felul următor :

$$\prod_{i=1}^{5n-7}(1 - \mathcal{B}_i) - \sum \prod_{i}^{2,3,4,\ldots,5n-7} \mathcal{B}_i = 0\,, \tag{7}$$

unde $\prod_{i}^{2,3,4,\ldots,5n-7} \mathcal{B}_i$ reprezintă diferite produse posibile de bucle care se ating și care pot să conțină de la 2 factori pînă la $5n - 7$.

În graful de fluențe din figura 5 pot să apară patru tipuri de bucle distincte care nu cuprind mai mult de trei noduri, după cum se arată

în figura 6, valorile acestor bucle fiind

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{B}_k(s) &= -\frac{m_k}{\gamma_{kk}}\,s^2 - \frac{\beta_k}{\gamma_{kk}}\,s\,,\\
\mathcal{B}_k^{\mathrm{I}} &= t_{k,\,k+1}\cdot t_{k+1,\,k}\,,\\
\mathcal{B}_{k-1}^{\mathrm{II}} &= t_{k-1,\,k+1}\cdot t_{k+1,\,k-1}\,,\\
\mathcal{B}_{k-1}^{\mathrm{III}} &= t_{k+1,\,k-1}\cdot t_{k,\,k+1}\cdot t_{k-1,\,k}\,,\\
\mathcal{B}_{k-1}^{\mathrm{IV}} &= t_{k-1,\,k+1}\cdot t_{k,\,k-1}\cdot t_{k+1,\,k}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

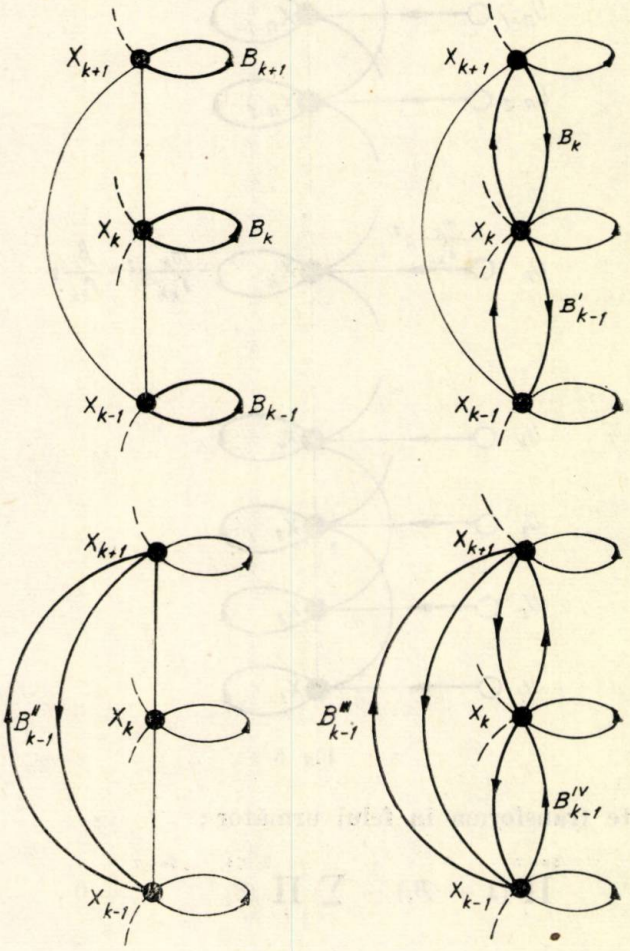


Fig. 6

Buclele cu mai mult de trei noduri au o valoare neglijabilă în raport cu cele patru tipuri enunțate mai sus. Se menționează că în expresiile (8) coeficienții de transmitere $t_{k,\,j}$ își conțin semnul.

Expresia (7) poate fi scrisă mai convenabil grupînd în primul termen toți factorii care nu conțin variabila s. Se obține deci

$$\theta \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathcal{B}_i(s)) - \sum_{i}^{2,3,4,\ldots,5n-7} \prod \mathcal{B}_i = 0, \tag{9}$$

unde

$$\theta = \prod (1 - \mathcal{B}_k^{\mathrm{I}})(1 - \mathcal{B}_{k-1}^{\mathrm{II}})(1 - \mathcal{B}_{k-1}^{\mathrm{III}})(1 - \mathcal{B}_{k-1}^{\mathrm{IV}}). \tag{10}$$

Dacă vom dezvolta expresia (9) după puterile lui s, vom obține un polinom de gradul $2n$:

$$P(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \ldots + a_{2n} s^{2n}. \tag{11}$$

Deoarece sistemele studiate de noi sînt stabile, toate rădăcinile polinomului vor trebui să fie situate în semiplanul stîng. O condiție necesară pentru aceasta este ca toți coeficienții polinomului (11) să aibă același semn.

În continuare se studiază comportarea structurii la un timp îndelungat după încetarea acțiunilor externe. Aceasta revine la determinarea pulsației fundamentale de vibrație. Atunci cînd $t \to \infty$, $s \to 0$. În vecinătatea lui zero putem neglija puterile lui s superioare lui 2. Expresia (11) devine

$$P(s) \simeq a_0 + a_1 s + a_2 s^2 \quad (\text{pentru } t \to \infty), \tag{12}$$

iar modul propriu de oscilație este determinat de rădăcinile polinomului (12). Coeficienții expresiei (12) pot fi determinați ușor din expresia (9) cu ajutorul grafului din figura 5, obținîndu-se:

$$a_0 = \theta - \sum_{1}^{n} \mathcal{B}_k^{\mathrm{I}} (\mathcal{B}_{k+1}^{\mathrm{I}} + \mathcal{B}_k^{\mathrm{II}} + \mathcal{B}_{k-2} + 2\mathcal{B}_k^{\mathrm{III}} + 2\mathcal{B}_{k-1}^{\mathrm{III}}), \tag{13}$$

$$a_1 = \sum_{1}^{n} \frac{\beta_k}{\gamma_{kk}} (\theta + \mathcal{B}_{k-1}^{\mathrm{I}} + \mathcal{B}_k^{\mathrm{I}} + \mathcal{B}_k^{\mathrm{II}} + \mathcal{B}_{k-1}^{\mathrm{II}} + 2\mathcal{B}_k^{\mathrm{III}} + 2\mathcal{B}_{k-2}^{\mathrm{III}}), \tag{14}$$

$$a_2 = \sum_{1}^{n} \frac{m_k}{\gamma_{kk}} (\theta + \mathcal{B}_{k-1}^{\mathrm{I}} + \mathcal{B}_k^{\mathrm{I}} + \mathcal{B}_k^{\mathrm{II}} + \mathcal{B}_{k-2}^{\mathrm{II}} + 2\mathcal{B}_k^{\mathrm{III}} + 2\mathcal{B}_{k-2}^{\mathrm{III}}). \tag{15}$$

II. Pentru exemplificarea numerică a metodei de calcul expuse, s-a calculat pulsația fundamentală de vibrație pentru structura din figura 7. Rigiditățile structurii sînt definite în figura 8, iar valorile numerice sînt date în tabela 1.

Pentru determinarea coeficienților numerici ai expresiei (12) s-a folosit graful din figura 9.

În calcul nu s-a ținut seama de factorul de amortizare, întrucît influența amortizări asupra pulsațiilor este practic neglijabilă. În consecință, în expresia (12), coeficientul a_1 s-a luat egal cu zero.

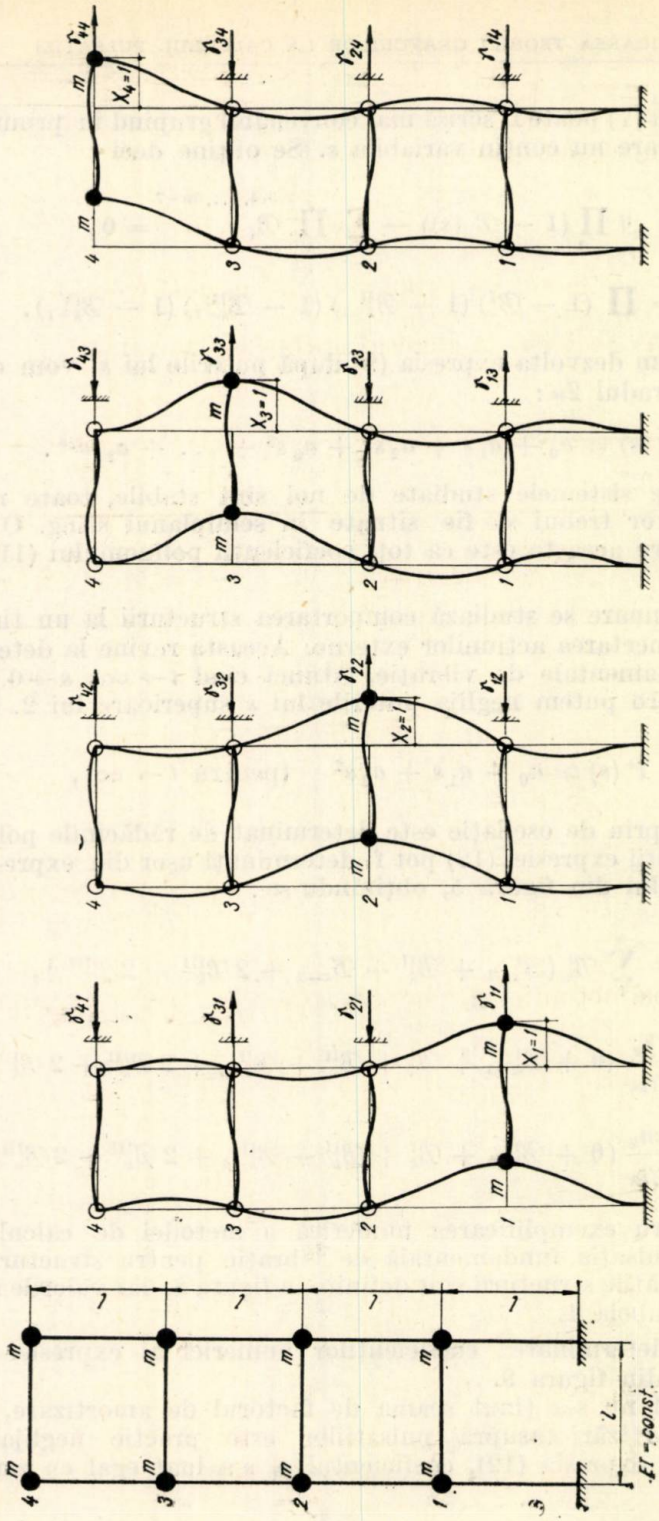

r_{44}
r_{34}
r_{24}
r_{14}
$X_4=1$
r_{43}
r_{33}
r_{23}
r_{13}
$X_3=1$
r_{42}
r_{32}
r_{22}
r_{12}
$X_2=1$
r_{41}
r_{31}
r_{21}
r_{11}
$X_1=1$
m
1
2
3
4
l
EI = const.

Fig. 7

Fig. 8

În vederea simplificării operațiilor, în locul rigidităților date în tabela 1 s-a lucrat cu expresia

$$\gamma_{jk} = \rho_{jk} \frac{EI}{l^3},$$

în care ρ_{jk} este un factor de rigiditate adimensional (coeficient de rigiditate) și care își conține semnul. Introducerea în expresia pulsației a raportului EI/l^3 s-a făcut la sfîrșitul operațiilor de calcul.

Tabela 1

	1	2	3	4
1	$+ 42{,}6 \frac{EI}{l^3}$	$- 24 \frac{EI}{l^3}$	$+ 5{,}22 \frac{EI}{l^3}$	$- 0{,}63 \frac{EI}{l^3}$
2	$- 24 \frac{EI}{l^3}$	$+ 37{,}56 \frac{EI}{l^3}$	$- 22{,}92 \frac{EI}{l^3}$	$+ 4{,}236 \frac{EI}{l^3}$
3	$+ 5{,}22 \frac{EI}{l^3}$	$- 22{,}92 \frac{EI}{l^3}$	$+ 35{,}52 \frac{EI}{l^3}$	$- 17{,}04 \frac{EI}{l^3}$
4	$- 0{,}63 \frac{EI}{l^3}$	$+ 4{,}236 \frac{EI}{l^3}$	$- 17{,}04 \frac{EI}{l^3}$	$+ 13{,}32 \frac{EI}{l^3}$

Rezultatele obținute sînt următoarele:

$$a_0 = + 0{,}06504,$$
$$a_2 = + 0{,}05473,$$

și deci

$$a_2 X^2 + a_0 = 0$$

sau

$$2 m s^2 = \frac{a_0}{a_2},$$

de unde

$$s = j \sqrt{\frac{a_0}{2 m a_2}} \quad \text{sau} \quad \omega = \sqrt{\frac{a_0}{2 m a_2}}.$$

Introducînd acum factorul EI/l^3, rezultă

$$\omega = \sqrt{\frac{a_0}{2 a_2} \cdot \frac{EI}{ml^3}} = \sqrt{\frac{0{,}06504}{2 \times 0{,}05473} \cdot \frac{EI}{ml^3}} \simeq 0{,}77 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

Această valoare a pulsaţiei fundamentale corespunde cu cea rezultată printr-un calcul exact (extrem de laborios practic), luînd la bază aceleaşi ipoteze simplificatoare.

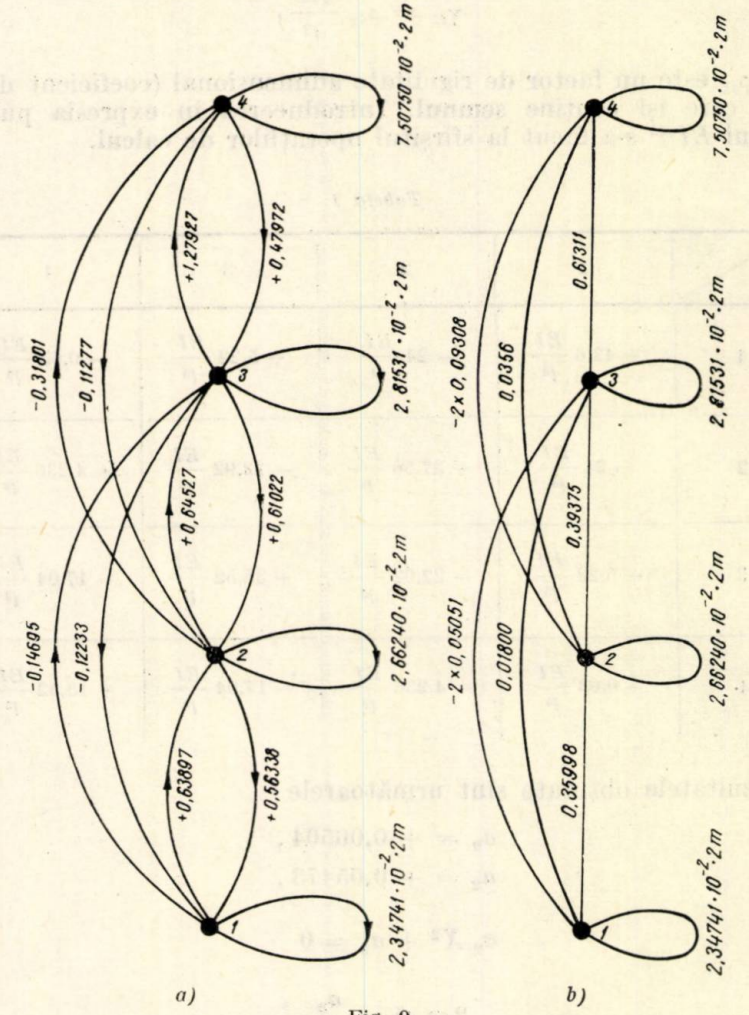


Fig. 9

Asupra rigidităţilor γ_{jk} nu s-a insistat, deoarece calculul lor poate fi făcut prin aplicarea metodelor curente ale staticii construcţiilor.

CONCLUZII

Aplicarea teoriei grafurilor la calculul pulsaţiilor fundamentale de vibraţie a structurilor conduce la o rezolvare simplă şi directă a acestei probleme. Acest mod de rezolvare este pentru prima dată introdus în

dinamica construcțiilor. Metoda expusă se deosebește esențial de metodele clasice și de procedeele aproximative cunoscute în literatura de specialitate. Utilizarea acestei metode evită operarea asupra ecuației seculare care precizează spectrul frecvențelor proprii de vibrație.

Trebuie menționat că rezolvarea ecuației seculare (ecuația frecvențelor) prin metode exacte sau aproximative este extrem de laborioasă. Metoda prezentată în lucrarea de față dă rezultate exacte în baza ipotezelor admise, satisfăcătoare din punct de vedere practic, iar timpul necesar efectuării calculului este mult redus față de alte metode.

Se determină astfel direct mărimea pulsației fundamentale, în timp ce prin metodele exacte sau aproximative rezultatele se obțin printr-un calcul de tatonări succesive a soluțiilor posibile.

Modul în care este organizat calculul permite utilizarea calculatoarelor electronice.

Lucrarea are o aplicare practică la determinarea pulsației fundamentale de vibrație a structurilor etajate supuse acțiunii mișcării seismice.

Primită la redacție la 20 ianuarie 1965.

BIBLIOGRAFIE

1. Robichaud Louis, P. A. Robichaud, Maurice Boisvert, Jean Robert, *Graphes de fluence. Applications à l'électrotechnique et à l'électronique. Calculateurs analogiques es digitaux*, Paris, Editions Eyrolles, 1961.
2. Claude Berge, Théorie de graphes.
3. Mihail Ifrim, *Influența perturbațiilor seismice asupra structurilor elastice*, St. cerc. mec. apl., *2* (1960).

UNELE PROBLEME DE MODELARE ELECTRICĂ A SISTEMELOR DE BARE[1])

de NICOLAE ORLOVSCHI
Institutul politehnic Iaşi

531.2 : 537.1

Se expun principiile de bază ale modelării electrice a sistemelor de bare şi se fac unele observaţii privind realizarea modelelor cu ajutorul schemelor elementare în T şi în π pentru structurile plane. În acest sens rezultă avantajele folosirii operanţilor „momente active" de nod şi de lanţ în modelarea electrică a structurilor plane oarecare.

1. ANALOGIA MECANOELECTRICĂ

Rezolvarea problemelor de statică şi dinamică a construcţiilor pe calea modelării electrice se bazează pe analogia mecanoelectrică, potrivit căreia fenomenul mecanic şi cel electric au aceeaşi exprimare matematică.

Aşa, de pildă, pentru sistemul mecanic din figura 1*a*, în baza principiului lui d'Alembert [1], [2], se poate scrie relaţia

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Kx = F(t). \qquad \text{(a)}$$

Considerînd acum circuitele din figura 1*b* şi *c* şi aplicînd legile Kirchhoff, se obţin următoarele relaţii:

— pentru circuitul din figura 1*b*:

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = U(t) \qquad \text{(b)}$$

[1]) Prezentată la Conferinţa de mecanică, Bucureşti, septembrie, 1965.

sau, ştiind că $i = \frac{dq}{dt}$,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = U(t); \qquad (b')$$

— pentru circuitul din figura 1*c*:

$$C\frac{d^2\Phi}{dt^2} + G\frac{d\Phi}{dt} + \frac{\Phi}{L} = I(t) \qquad (c)$$

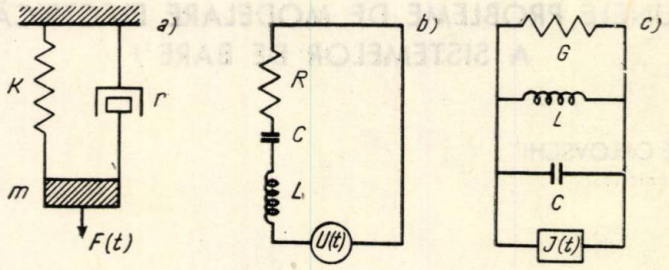


Fig. 1

sau, ştiind că $u = \frac{d\Phi}{dt}$,

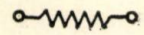
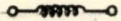
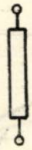
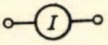
$$C\frac{du}{dt} + G\,u + \frac{1}{L}\int u\,dt = I(t). \qquad (c')$$

Din compararea ecuaţiei (a) cu ecuaţiile (d) sau (b') şi, respectiv, (c) sau (c') rezultă că circuitele din figura 1*b* şi *c* reprezintă analogele electrice ale sistemului mecanic considerat, în sistemul I, respectiv sistemul II de analogie. În tabela 1 sînt date relaţiile dintre sistemul mecanic şi analogul electric în cele două sisteme de analogie.

2. ANALOGUL ELECTRIC AL BAREI ÎNCOVOIATE

Referindu-ne la sistemele de bare — grinzi şi cadre — acţionate numai de sarcini statice, sistemul mecanic se simplifică şi, în consecinţă, analogul său electric se reduce doar la rezistenţe (conductanţe) şi surse de curent. Rezultă deci că modelarea electrică a structurilor static nedeterminate plane sau spaţiale se poate face fără dificultăţi de ordin experimental.

Tabela 1

Sistemul mecanic	Analogul electric	
	Sistemul I de analogie	Sistemul II de analogie
Rigiditatea K 	Capacitatea C	 Inductanţă L
m masă	L	C
Amortizare r	 Rezistenţa R	Conductanţă G
F (t) Forţă	Tensiune	 Intensitate
Deplasare	Intensitate (I)	Tensiune (U)
Ecuaţii echilibru forţe	Ecuaţii echilibru a tensiunilor	Ecuaţii echilibru a curenţilor
Energie cinetică	Energie magnetică	Energie electrică
Energie potenţială	Energie electrică	Energie magnetică

Pentru o bară ik (fig. 2) făcînd parte dintr-o structură plană oarecare, se pot scrie următoarele relaţii :

$$\left.\begin{aligned} M_{ik} &= K_{ik}\varphi_i + K_{ki}\gamma_{ki}\varphi_k - \overline{K}_{ik}\psi + \mathfrak{M}_{ik}, \\ M_{ki} &= K_{ik}\gamma_{ik}\varphi_i + K_{ki}\varphi_k - \overline{K}_{ki}\psi + \mathfrak{M}_{ki}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i &= \alpha' M_{ik} - \beta M_{ki} + \psi + \overset{\circ}{\varphi}_i, \\ \varphi_k &= -\beta M_{ik} + \alpha'' M_{ki} + \psi + \overset{\circ}{\varphi}_k, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

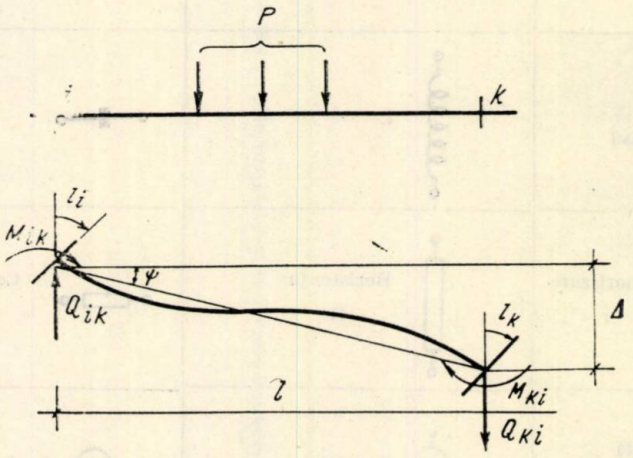


Fig. 2

unde

K_{ik} şi $\overline{K}_{ik}$	reprezintă	rigidităţile în capătul i ale barei ik la rotire, respectiv la deplasare,
γ_{ik}	—	coeficientul de transmitere a momentului,
$\mathfrak{M}_{ik}$	—	momentul de încastrare perfectă dat de încărcarea exterioară P,
α', α'', β	—	rotirile la capetele grinzii simplu rezemate datorită unui moment unitar acţionînd la unul din capete,
$\overset{\circ}{\varphi}_i$, $\overset{\circ}{\varphi}_k$	—	rotirile la capetele grinzii simplu rezemate datorită încărcării exterioare P,
φ_i, φ_k, ψ	—	rotirile din nodurile i şi k şi rotirea barei ik (a axului).

Analogul electric al barei încovoiate ik poate fi realizat în diferite variante ; cele mai avantajoase sînt variantele care folosesc schema în T (fig. 3a), spre exemplu în lucrările [3], [4], [5], şi variantele care folosesc schema în π (fig. 3b), spre exemplu în lucrările [6], [4], [7], [8], ele permiţînd modelarea structurilor oarecare : cadre cu stîlpii înclinaţi, bare cu moment de inerţie variabil etc.

În lucrarea [7] se tratează și schema în punte, extinzîndu-i-se aplicabilitatea la structuri oarecare.

Aplicînd legile lui Kirchhoff și legea lui Ohm, obținem:

a) pentru schema în T:

$$\left.\begin{aligned} U_i &= I_{ik}\cdot(R_i+R) + I_{ki}\cdot R + E + E^{\circ}_{ik},\\ U_k &= I_{ik}\cdot R + I_{ki}(R_k+R) + E + E^{\circ}_{ki},\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

cînd sursa de alimentare se exprimă prin forțele electromotrice E^{0}_{ik} și E^{0}_{ik}, sau,

$$\left.\begin{aligned} U_i &= I_{ik}(R_i+R) + I_{ki}\cdot R - I^{\circ}_{ik}(R_i+R) - I^{\circ}_{ki}\cdot R + E,\\ U_k &= I_{ik}R + I_{ki}(R_k+R) - I^{\circ}_{ik}R - I^{\circ}_{ki}(R_k+R) + E,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

cînd sursa de alimentare se exprimă prin curenții I^{0}_{ik} și I^{0}_{ki} (marcați punctat în fig. 3a);

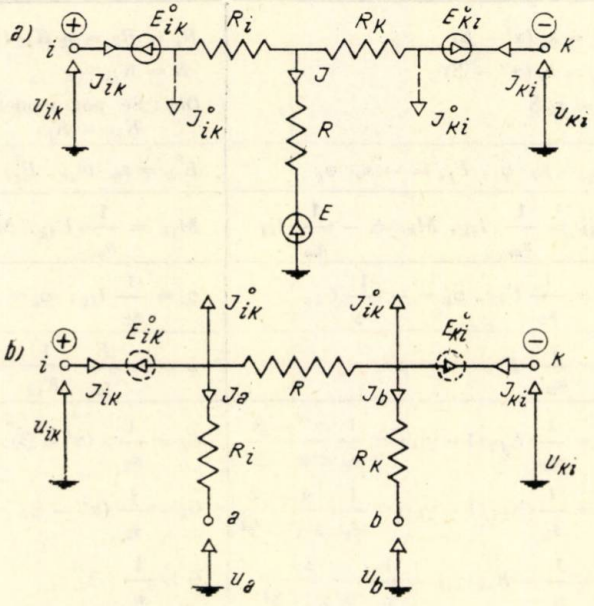


Fig. 3

b) pentru schema în π:

$$\left.\begin{aligned} I_{ik} &= U_i\cdot(G_i+G) - U_k\cdot G - U_a\cdot G_i + I^{\circ}_{ik},\\ I_{ki} &= -U_i\cdot G + U_k\cdot(G_k+G) - U_b\cdot G_k + I^{0}_{ki},\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

cînd sursa de alimentare este dată de I°_{ik} și I^{0}_{ki}, și

$$\left.\begin{aligned} I_{ik} &= U_i(G_i+G) - U_k\cdot G - U_a\cdot G_i - E^{0}_{ik}\cdot(G_i+G) + E^{\circ}_{ki}\cdot G,\\ I_{ki} &= U_i\cdot G + U_k\cdot(G_k+G) - U_b\cdot G_k + E^{\circ}_{ik} - E^{\circ}_{ki}(G_k+G),\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

cînd sursa de alimentare este dată de E°_{ik} și E^{0}_{ki} (marcate punctat în fig. 3b).

Relaţiile de legătură dintre mărimile mecanice şi cele electrice pentru sistemul II de analogie rezultă din compararea perechilor de ecuaţii (1), (2) cu perechile de ecuaţii (3), (4) şi (5), (6).

Relaţii similare se pot stabili şi pentru sistemul I de analogie. În tabela 2 sînt date aceste relaţii pentru ambele sisteme de analogii: pentru schema T în varianta semnelor alternînde, cu sursa de alimentare f.e.m. E°, şi pentru schema π în varianta semnelor alternînde, cu sursa de alimentare dată de curentul I°.

Tabela 2

Schema	Relaţii de similitudine	
	Sistemul II de analogie	Sistemul I de analogie
	$R_i = s_k(\alpha' - \beta)$ $R_k = s_k(\alpha'' - \beta)$ $R = s_k \beta$	$R_i = R_k = s_k K_{ik}(1 - \gamma_{ik})$ $R = K_{ik}\gamma_{ik}$ *Obs*: Se pot modela numai barele cu $K_{ik} = K_{ki}$
T	$E^\circ_{ik} = s_\varphi \cdot \varphi^\circ_i$, $E^\circ_{ki} = -s_\varphi \cdot \varphi^\circ_k$	$E^\circ_{ik} = s_m \cdot m_{ik}$, $E^\circ_{ki} = s_m m_{ki}$
Sursa E°	$M_{ik} = \frac{1}{s_m} \cdot I_{ik}$, $M_{ki} = -\frac{1}{s_m} \cdot I_{ki}$	$M_{ik} = \frac{1}{s_m} \cdot U_{ik}$, M_{ik}, $M_{ki} = \frac{1}{s_m} U_{ki}$
	$\varphi_i = \frac{1}{s_\varphi} U_{ik}$, $\varphi_k = -\frac{1}{s_\varphi} U_{ki}$	$\varphi_i = \frac{1}{s_\varphi} I_{ik}$, $\varphi_k = \frac{1}{s_\varphi} \cdot I_{ki}$
	$\psi = \frac{1}{s_\varphi} \cdot E$	$\psi = -\frac{E}{s_\varphi} \cdot \frac{1}{K_{ik}} = -\frac{E(\alpha'\alpha'' - \beta^2)}{s_\varphi(\alpha'' + \beta)}$
	$G_i = \frac{1}{s_k} \cdot K_{ik}(1 - \gamma_{ik}) = \frac{1}{s_k} \frac{\alpha'' - \beta}{\alpha'\alpha'' - \beta^2}$ $G_k = \frac{1}{s_k} \cdot K_{ki}(1 - \gamma_{ki}) = \frac{1}{s_k} \cdot \frac{\alpha' - \beta}{\alpha'\alpha'' - \beta^2}$ $G = \frac{1}{s_k} = K_{ik} \cdot \gamma_{ik} = \frac{1}{s_k} \cdot \frac{\beta}{\alpha'\alpha'' - \beta^2}$	$G_i = \frac{1}{s_k} \cdot (\alpha' - \beta)$ $G_k = \frac{1}{s_k}(\alpha'' - \beta)$ $G = \frac{1}{s_k} \cdot \beta$
π	$I^\circ_{ik} = s_m \cdot m_{ik}$, $I^\circ_{ki} = -s_m m_{ki}$	$I^\circ_{ik} = s_\varphi \cdot \varphi^\circ_i$, $I^\circ_{ki} = s_\varphi \cdot \varphi^\circ_k$
Sursa I°	$M_{ik} = \frac{1}{s_m} \cdot I_{ik}$, $M_{ki} = -\frac{1}{s_m} I_{ki}$	$M_{ik} = \frac{1}{s_m} \cdot U_{ik}$, $M_{ki} = \frac{1}{s_m} \cdot U_{ki}$
	$\varphi_i = \frac{1}{s_\varphi} \cdot U_{ik}$, $\varphi_k = -\frac{1}{s_\varphi} \cdot U_{ki}$	$\varphi_i = \frac{1}{s_\varphi} \cdot I_{ik}$, $\varphi_k = \frac{1}{s_\varphi} \cdot I_{ki}$
	$\psi = \frac{1}{s_\varphi} \cdot \frac{K_{ik}(1 - \gamma_{ik})}{K_{ik}(1 + \gamma_{ik})} \cdot U_a = \frac{1}{s_\varphi} \cdot \frac{\alpha'' - \beta}{\alpha'' + \beta} U_a$ $\psi = \frac{1}{s_\varphi} \cdot \frac{K_{ki}(1 - \gamma_{ki})}{K_{ki}(1 + \gamma_{ki})} \cdot U_b = -\frac{1}{s_\varphi} \frac{\alpha' - \beta}{\alpha' + \beta} U_b$	$\psi = \frac{1}{s_\varphi}(\alpha' - \beta) U_a$ $\psi = \frac{1}{s_\varphi}(\alpha'' - \beta) U_b$

Raporturile de similitudine se notează cu :

S_m — scara momentelor,

S_φ — scara rotirilor,

S_k — scara rigidităților,

între care au loc relațiile :

— în sistemul I de analogie, $S_m = S_\varphi \cdot S_k$,

— în sistemul II de analogie, $S_\varphi = S_m \cdot S_k$.

Schemele prezentate mai sus sînt în varianta semnelor alternînde, cu semnul plus în stînga și semnul minus în dreapta (vezi fig. 3).

În lucrările [9] și [10] se folosesc schemele T și π în varianta „rezistențelor cvasinegative", realizate cu ajutorul unor surse suplimentare de curent sau f.e.m., iar în lucrările [7], [11], [12], [13] se folosește schema T în varianta „legăturilor încrucișate" ; această din urmă variantă prezintă avantaje îndeosebi în cazul cadrelor cu noduri fixe.

Indiferent de schema care se adoptă, datorită avantajelor pe care le prezintă, sistemul II de analogie este folosit pe scară mai largă în comparație cu sistemul I de analogie.

Avantajele se referă la :

— corespondența dintre forma matematică și fenomenul fizic la model și structură ;

— posibilitatea de tratare a structurilor oarecare cu ajutorul schemelor curente (în T și π), fără a folosi circuite sau surse suplimentare de curent.

Dezavantajul rezistențelor negative în sistemul II de analogie este numai aparent, întrucît există suficiente mijloace de înlăturare a lor, ca, de pildă, alternarea semnelor, folosirea rezistențelor cvasinegative, încrucișarea legăturilor la borne etc.

În lucrarea [14], Usînin folosește sistemul I de analogie pentru modelarea electrică a sistemelor de bare cu moment de inerție constant.

3. MODELAREA SISTEMELOR DE BARE

Pentru rezolvarea structurilor static nedeterminate sînt cunoscute cele două metode : metoda eforturilor și metoda deplasărilor, fiecare dintre ele bazîndu-se pe principii diferite, după cum este cunoscut.

Modelarea electrică a structurilor va avea drept puncte de plecare analogia dintre relațiile scrise pentru modelul electric și relațiile de condiție ale uneia dintre aceste metode, scrise pentru structură.

Modelarea bazată pe criteriile energetice, și anume pe aplicarea principiului lucrului mecanic minim atît în cazul structurilor, referitor la energia elastică, cît și în cazul modelului electric, referitor la energia electrică, este aplicabilă la orice tip de structuri. Dar dificultățile în realizarea practică a modelării pe această cale, datorită circuitelor în componența cărora intră atît rezistențe, cît și transformatori (vezi de exemplu lucrările lui Ryder [15], [16]), fac ca acest procedeu de modelare să aibă

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR

o utilizare mai redusă ; de altfel, ca și în statică, metoda eforturilor este folosită pe o scară mai mică comparativ cu metoda deplasărilor.

Modelarea electrică a structurilor bazată pe analogia dintre relațiile metodei deplasărilor scrise pentru structură și cele scrise pentru analogul electric se poate face cu circuite simple alcătuite numai din rezistențe și surse de curent [17] ; înțelegerea corelației model-prototip este ușurată de corespondența dintre fenomenul fizic și exprimarea matematică atît la model, cît și la structură.

Curenților la bornele ramurilor care concurează în nodul i din circuit (fig. 4*b*) corespunzîndu-le momentele din capetele barelor ce concurează

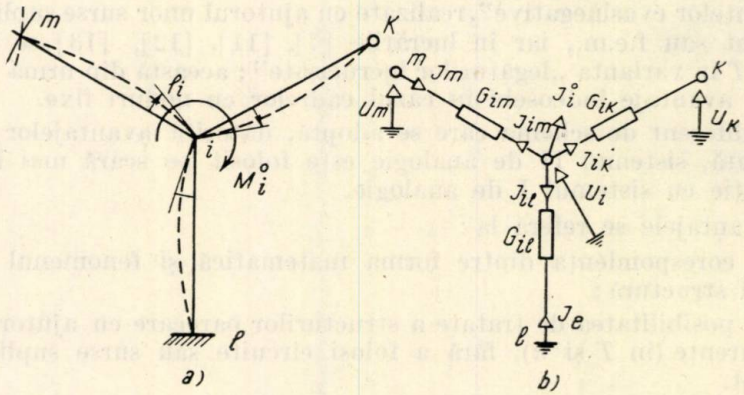


Fig. 4

în nodul i al structurii (fig. 4*a*), ecuațiilor de echilibru a momentelor din nod le vor corespunde ecuațiile de echilibru ale curenților din nod.

De asemenea, în nodul i al structurii avem o rotire φ_i diferită de zero, iar în nodul i al circuitului analog avem o diferență de potențial U_i de asemenea diferită de zero.

Așadar, pentru structură avem

$$\sum_{\text{nod } i} M_{ik} + M_i^\circ = 0 \qquad \varphi_i \neq 0, \tag{7}$$

iar pentru model avem

$$\sum_{\text{nod } i} I_{ik} + I_i^\circ = 0 \qquad U_i \neq 0. \tag{7'}$$

În figura 4 se poate urmări, de asemenea, corespondența model-prototip în ceea ce privește condițiile de capăt ; articulație, încastrare elastică și încastrare perfectă.

Condiția de echilibru a nodului în model, ecuația (7'), se realizează automat prin conectarea schemelor barelor conform geometriei structurii.

De aici rezultă că soluționarea pe calea modelării a cadrelor cu noduri fixe (plane sau spațiale) se face foarte ușor, fiind necesară doar conectarea schemelor elementare, apoi măsurarea și efectuarea trecerii de la mărimile electrice la cele mecanice de care avem nevoie, conform relațiilor de similitudine.

Condiţiile de echilibru pentru gradele de libertate pe care structura de asemenea trebuie să le satisfacă nu mai au un corespondent fizic în modelul electric.

Într-adevăr, pentru cadrul din figura 5*a*, între momentele de la capetele barelor (marcate pe figură) care fac parte din lanţul cinematic avem o relaţie de echilibru (exprimată, de exemplu, prin lucru mecanic).

În schema analogă (fig. 5*b*), o relaţie dintre curenţii de la capetele ramurilor corespunzătoare acestor bare nu are nici o semnificaţie fizică.

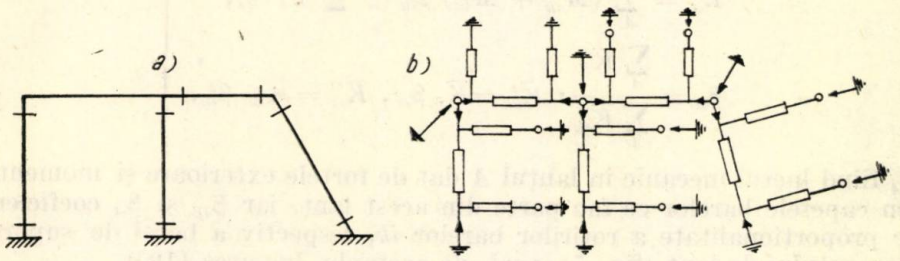


Fig. 5

Satisfacerea acestei condiţii se poate realiza numai cu ajutorul unor dispozitive şi circuite suplimentare, ceea ce complică întrucîtva schemele mdelului.

În literatură sînt cunoscute diferite soluţionări pentru modelarea cadrelor cu noduri deplasabile, ele bazîndu-se fie pe un calcul în două trepte, cum se procedează, de pildă, în lucrările [17], [18] şi altele, fie pe particularităţile structurilor de diferite tipuri:

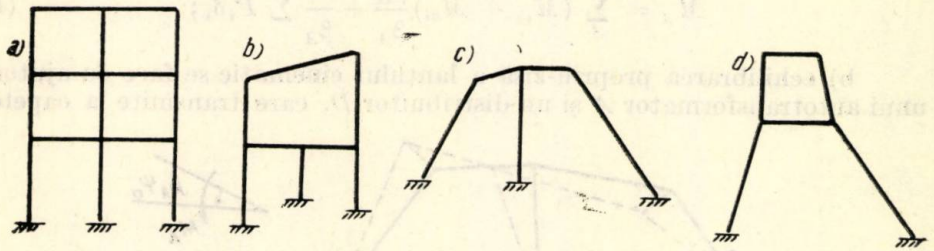


Fig. 6

— cadre cu stîlpii verticali şi de aceeaşi lungime (fig. 6*a*),
— cadre cu stîlpii verticali de înălţimi diferite (fig. 6*b*),
— cadre cu stîlpii înclinaţi (fig. 6*c*),
— cadre cu lanţuri cinematice legate (fig. 6*d*),

cum se procedează, de exemplu, în lucrările [4], [6], [3] etc.

Pentru ca analogul să permită rezolvarea oricărui tip de structură static nedeterminată s-au folosit ca operanți momentele de lanț prin intermediul cărora s-au putut modela cu ușurință operațiile de echilibrare după gradele de libertate ale structurii.

Momentul de lanț are expresia

$$M_A = \frac{L_A}{\beta_A}, \tag{8}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} L_A &= \sum_A (M_{ik} + M_{ki})\,\beta_{ik} + \sum P_i \cdot \delta_i, \\ \beta_A &= \frac{\sum_A \overline{K}''_{ik}}{\sum_A \overline{K}'_{ik}}, \quad \overline{K}'_{ik} = \overline{K}_{ik}\beta_{ik}, \quad \overline{K}''_{ik} = \overline{K}_{ik} \cdot \beta^2_{ik}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

L_A fiind lucrul mecanic în lanțul A dat de forțele exterioare și momentele din capetele barelor ce fac parte din acest lanț, iar β_{ik} și β_A coeficienții de proporționalitate a rotirilor barelor ik, respectiv a barei de suport a momentului de lanț (fig. 7) (vezi, de exemplu, lucrarea [19]).

Modelarea chilibrării lanțului cinematic A va comporta următoarele două operații:

a) momentele M_{ik} din capetele barelor care fac parte din lanțul cinematic A, corectate cu rapoartele $\frac{\beta_{ik}}{\beta_A}$ cu ajutorul potențiometrelor p (vezi schema-bloc din fig. 8) și adunate la valorile $\frac{1}{\beta_A}\sum P_i\delta_i$ provenite din acțiunea exterioară directă, se trec la un sumator Σ. În final se obține momentul M_A:

$$M_A = \sum_A (M_{ik} + M_{ki})\frac{\beta_{ik}}{\beta_A} + \frac{1}{\beta_A}\sum P_i\delta_i; \tag{10}$$

b) echilibrarea propriu-zisă a lanțului cinematic se face cu ajutorul unui autotransformator A și un distribuitor D, care transmite la capetele

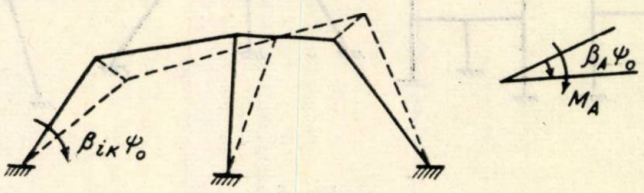


Fig. 7

barelor lanțului cinamatic considerat, momentele proporționale cu coeficienții de repartiție ν'_{ik} a momentului de lanț M_A, adică se transmit momentele

$$M_{ik} = M_A \cdot \nu'_{ik}, \tag{11}$$

în care

$$\nu'_{ik} = \frac{\overline{K}'_{ik}}{\overline{K}'_A}; \quad \sum_A \nu'_{ik} = 1.$$

Echilibrările lanţurilor cinematice, adică succesiunea operaţiilor de trecere a curenţilor de la schemele de bază la sumator, apoi prin dis-

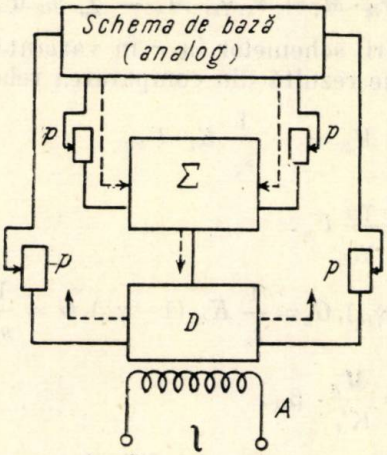


Fig. 8

tribuitor din nou la schemele de bază, se repetă pînă ce se realizează condiţia de echilibru a sistemului, adică a tuturor gradelor de libertate în precizia dorită; convergenţa aproximaţiilor este în cele mai multe cazuri asigurată.

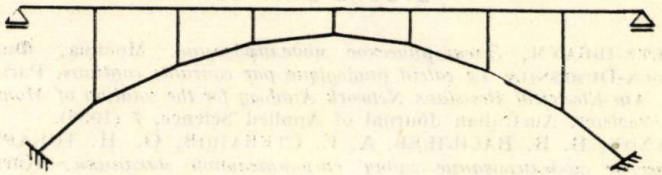


Fig. 9

Relaţiile de similitudine se iau conform tabelei 2, fiind vorba de sistemul II de analogie.

În cazul structurilor mai complicate, în special cînd este vorba de structuri cu lanţuri cinematice legate (spre exemplu sistemul din figura 9), în locul operării cu momentele din capete de bare, cum s-a procedat mai sus, este indicată operarea cu momentele active de nod şi de lanţ (M_i şi M_A). Modelul electric al structurii se reduce în acest caz la modelul electric al unui sistem de ecuaţii liniare cu matricea coeficienţilor oarecare (nesimetrică); diferite tipuri de scheme de principiu pentru o astfel de modelare se dau, spre exemplu, în lucrările [4], [10], [20] etc.

Necunoscutele, momentele active de noduri și de lanțuri se modelează prin tensiuni, coeficienții (avînd semnificații de coeficienți de transmitere) prin conductanțe, iar termenii liberi prin curenți.

Odată determinate necunoscutele, aflarea momentelor din capetele barelor se face cu relația

$$M_{ik} = r_{ik} \cdot M_i + r_{ki}\gamma_{ki}\, M_k - \sum \nu'_{ik} M_A + \mathfrak{M}_{ik}. \tag{12}$$

În ipoteza folosirii schemelor în π în varianta semnelor alternînde, relațiile de similitudine rezultă din compararea relațiilor (11), (1) și (5):

$$\left.\begin{aligned}
&M_i = \frac{1}{s_\varphi} K_i \cdot U_i, \quad M_k = -\frac{1}{s_\varphi} K_k \cdot U_k, \\
&M_A = \frac{1}{s_\varphi} \frac{\overline{K}'_A}{\beta_{ik}} \frac{1-\gamma_{ik}}{1+\gamma_{ik}} U_a, \\
&G_i = \frac{1}{s_k} K_{ik}(1-\gamma_{ik}), G_k = \frac{1}{s_k} K_{ki}(1-\gamma_{ki}), G = \frac{1}{s_k} K_{ik}\gamma_{ik}, \\
&\varphi_i = \frac{M_i}{K_i}, \quad \psi_{ik} = \frac{M_A}{\overline{K}'_A} \cdot \beta_{ik}.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Prin utilizarea de variante simplificatoare a metodei momentelor active [21], [22] etc., se pot obține simplificări corespunzătoare și în modelarea structurilor, numărul de necunoscute fiind redus.

Primită la redacție la 9 decembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. И. М. Тетельбаум, *Электрическое моделирование*. Москва, Физматгиз, 1959.
2. M. Danloux-Dumesnils, *Le calcul analogique par courants continus*, Paris, Dunod, 1958.
3. G. Sved, *Am Electrical Resistans Network Analogy for the solution of Moment Distribution Problems*, Australian Journal of Applied Science, *7* (1956).
4. Г. Е. Пухов, В. В. Васильев, А. Е. Степанов, О. Н. Токарева, *Электрическое моделирование задач строительной механики*, Киев, Изд. Акад. наук УССР, 1963.
5. K. T. Sundara Raja Iyengar, S. Krishnasamy, *The Analysis of framed structures by an analogue computer*, Indian Concrete Journal, **36**, *11* (1962).
6. J. W. Bray, *An Electrical Analyser for Rigid Frameworks*, The Structural Engineer, *8*, 297–311 (1957).
7. К. К. Керопиян, П. М. Чеголин, *Электрическое моделирование в строительной механике*, Москва, Госстройиздат, 1963.
8. J. Kasinski, *Elektryczny analog do metodu plastycznero wyrownania momentow*, Inzynieria i Budownictowo, *2*, 67–72 (1964).
9. G. W. Swenson, T. I. Higgins, *A direct-current network analyser for solwing wave equation boundaryvalue problems*, Journal of Applied Physics, **23**, *1* (1952).
10. Г. Е. Пухов, *Электрическое моделирование стержневых и тонкостенных конструкций*. Киев, Изд. Акад. наук УССР, 1960.
11. Г. Е. Пухов, С. И. Илиенко, П. М. Чеголин, *Электрические модели изгибаемого стержня* în *Электрическое моделирование балок и рам*, Таганрог, 1956.

12. Al. Lisowski, *Zastosowanie elektrycznych układow analogowych do formowania schematu statycznego konstrukcji*, Inzynieria i Budownictwo, *3*, 91—95 (1961).
13. O. Dabrowski, L. Jarmolkiewicz, *Analog elektryczny układow prętowych*, Inzynieria i Budownictwo, *12*, 420—423 (1964).
14. В. И. Усынин, *Об электрических схемах аналогах изгибаемого стержня*, Известия ВУЗ Электромеханика, 7 (1960).
15. F. L. Ryder, *Electrical Analogs of Statically loaded Structures*, Transactions ASCE, **119** (1954).
16. — *Applications of Electrical Analogs of Static Structures*, Journal of the Engineering Mechanics Division, *85* (1959).
17. Al. Lisowski, *Analogia równań Coltriégo i Guldana*, Rozprawy Inzynierskie, *IX*, *2*, 279—303 (1961).
18. К. К. Керопиян, *Расчет плоских одноэтажных рам со смещающимися узлами методом электрического моделирования*, Известия ВУЗ Электромеханика, 6, (1959).
19. A. Sesan, N. Orlovschi, *O generalizare a metodei distribuirii momentelor*, St. cerc. şt., Acad. R.P.R., Fil. Iaşi, **VI**, *3—4*, 59—69 (1955).
20. К. К. Керопиян, *Электрическая модель для решения систем линейных алгебраических уравнений*, Ищв. ВУЗ Электромеханика, 2 (1962).
21. A. Sesan, *Number reduction of Unknowns in the elope deflexion method*, Bul. Inst. politehnic Iaşi, **IV (VIII)**, 3—4, 353—358 (1958).
22. A. Sesan, N. Orlovschi, *Simplificarea ecuaţiilor metodei deformaţiilor şi a calculului iterativ la cadre oarecari*, Bul. Inst. politehnic Iaşi, **III (VII)**, 3—4, 245—250 (1957).

NOTE

ASUPRA VIBRAȚIILOR UNUI SISTEM ELASTIC CU MASĂ CONCENTRATĂ, ȚINÎND CONT DE EXCENTRICITATEA MASEI FAȚĂ DE CENTRUL ELASTIC

de RADU MARINOV
Baza de cercetări științifice Timișoara
a Academiei Republicii Socialiste România

539.3

În articol se prezintă problema vibrațiilor forțate produse de deplasarea dinamică a reazemului unei structuri cu masă concentrată, avînd o excentricitate față de centrul „elastic" al structurii. Se prezintă curbele de variație a solicitărilor dinamice în funcție de excentricitate.
Se constată că pentru valoarea lui $\omega/\theta \approx 1{,}2$ creșterea excentricității ($\eta > 0{,}2$) conduce la creșteri mari ale forței de inerție și ale cuplului de torsiune. Pentru valorile lui $\eta < 0{,}2$, influența excentricității este neglijabilă.

În cele ce urmează ne vom referi la un sistem elastic cu o masă concentrată, avînd o excentricitate față de axa elementului portant elastic și supusă la acțiunea dinamică prin deplasarea bazei structurii (cazul încărcărilor seismice). Existenta excentricității masei conduce la generarea oscilațiilor de torsiune care se vor produce în paralel cu cele de încovoiere, orizontale, sistemul avînd două grade de libertate : deplasarea orizontală și rotirea în jurul axei verticale ce trece prin centrul elastic.

Deplasarea bazei structurii se consideră de forma cea mai simplă $y_0 = a_0 \sin \theta t$.

Pentru aflarea ecuațiilor de mișcare se aplică ecuația lui Lagrange pentru sistemul cu doi parametri y și φ, ținînd cont în exprimarea energiei

potențiale și de caracteristicile de amortizare ale sistemului. Se obțin ecuațiile

$$\begin{aligned} &\ddot{y} + e\cdot\ddot{\varphi} + \omega_y^2\cdot y + \varepsilon_y\cdot\dot{y} = -\ddot{y}_0, \\ &\ddot{y} + e\cdot\ddot{\varphi} + e\cdot\omega_\varphi^2\cdot\varphi + e\cdot\varepsilon_\varphi\cdot\dot{\varphi} = -\ddot{y}_0, \end{aligned} \tag{1}$$

unde

y reprezintă deplasarea orizontală elastică a masei,

φ — rotirea masei față de axa elementului elastic (verticală),

e — excentricitatea masei față de axa elementului elastic,

$\omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}$ — pulsația proprie de încovoiere (fără torsiune),

$\omega_\varphi = \sqrt{\frac{k_\varphi}{me^2}}$ — pulsația proprie de torsiune (fără încovoiere),

ε_y — coeficientul de amortizare pentru oscilațiile de încovoiere,

ε_φ — coeficientul de amortizare pentru oscilațiile de torsiune,

k_y — rigiditatea elastică la deplasări orizontale,

k_φ — rigiditatea elastică la torsiune.

Notăm cu $\bar{e} = \sqrt{\frac{k_\varphi}{k_y}}$ — excentricitatea elastică a sistemului.

Pentru rezolvarea sistemului (1) aplicăm transformata lui Laplace:

$$F(p) \subset f(t);\ F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{2}$$

În acest fel, sistemul (1) devine, ținînd cont de condițiile inițiale $y(0) = 0$; $\varphi(0) = 0$; $y_0(0) = 0$,

$$\dot{y}(0) + e\cdot\dot{\varphi}(0) + \dot{y}_0(0) = 0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &p^2 y + e\,(p^2 + \varepsilon_\varphi\cdot p + \omega_\varphi^2)\,\Phi = -p^2\cdot Y_0, \\ &Y\,(p^2 + p\cdot\varepsilon_y + \omega_y^2) + e\cdot p^2\cdot\Phi = -p^2\cdot Y_0, \end{aligned} \tag{4}$$

unde

$$Y(p) \subset y(t);\quad \Phi(p) \subset \varphi(t);\quad Y_0(p) \subset y_0(t). \tag{5}$$

Rezolvarea sistemului (4) conduce la

$$Y = \frac{p^3\,\varepsilon_\varphi + p^2\,\omega_\varphi^2}{(p^2 + p\,\varepsilon_y + \omega_y^2)\,(p^2 + p\,\varepsilon_\varphi + \omega_\varphi^2) - p^4}\cdot Y_0, \tag{6}$$

$$\Phi = \frac{p^3\cdot\varepsilon_y + p^2\cdot\omega_y^2}{p^2 + p\cdot\varepsilon_y + \omega_y^2)(p^2 + p\,\varepsilon_\varphi + \omega_\varphi^2) - p^4}\cdot\frac{Y_0}{e}. \tag{6'}$$

Admițînd $\varepsilon_y \ll \omega_y$; $\varepsilon_\varphi \ll \omega_\varphi$, numitorul din expresiile (6) devine

$$(p^2 + p\cdot\varepsilon_y + \omega_y^2)(p^2 + p\varepsilon_\varphi + \omega_\varphi^2) - p^4 \cong (\omega_y^2 + \omega_\varphi^2)(p^2 + p\bar{\varepsilon} + \bar{\omega}^2),$$

unde

$$2\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_\varphi\cdot\omega_y^2 + \varepsilon_y\cdot\omega_\varphi^2}{\omega_y^2 + \omega_\varphi^2} \tag{7}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_\varphi\cdot\omega_y}{\sqrt{\omega_y^2 + \omega_\varphi^2}}. \tag{7'}$$

De remarcat că $\bar{\omega}$ este pulsația proprie a vibrațiilor de încovoiere-torsiune pentru sistemul fără amortizare. Prin anularea numitorului din (6) se obține pulsația proprie a sistemului considerat, ținînd cont de amortizare :

$$\bar{\omega}_1 = \sqrt{\bar{\omega}^2 - \bar{\varepsilon}^2}, \tag{8}$$

expresie analogă cu cea corespunzătoare vibrațiilor de încovoiere simplă. Coeficientul $\bar{\varepsilon}$ este tocmai coeficientul de amortizare pentru oscilațiile de încovoiere-torsiune.

Ținînd cont că $Y_0 = a_0 \dfrac{\theta}{p^2 + \theta^2}$, rezultă pentru Y și Φ :

$$Y = \frac{p^3\cdot\varepsilon_\varphi + p^2\cdot\omega_\varphi^2}{(\omega_y^2 + \omega_\varphi^2)\cdot(p^2 + 2p\bar{\varepsilon} + \bar{\omega}^2)(p^2 + \theta^2)}\cdot a_0\cdot\theta, \tag{9}$$

$$\Phi = \frac{p^3\cdot\varepsilon_y + p^2\cdot\omega_y^2}{(\omega_y^2 + \omega_\varphi^2)\cdot(p^2 + 2p\bar{\varepsilon} + \bar{\omega}^2)(p^2 + \theta^2)}\,\frac{a_0\cdot\theta}{e} \tag{9'}$$

sau

$$Y = \frac{a_0\cdot\theta}{(\omega_y^2 + \omega_\varphi^2)}\left[\frac{Ap + B}{p^2 + \theta^2} + \frac{C\cdot p + D}{p^2 + p\bar{\varepsilon} + \bar{\omega}^2}\right], \tag{10}$$

$$\Phi = \frac{a_0\cdot\theta}{e(\omega_y^2 + \omega_\varphi^2)}\left[\frac{A'p + B'}{p^2 + \theta^2} + \frac{C'\cdot p + D}{p^2 + p\varepsilon + \bar{\omega}^2}\right]. \tag{10'}$$

Prin aplicarea inversiunii în calculul operațional, expresiile (9) devin

$$y(t) = \frac{a_0\cdot\theta}{(\omega_y^2 + \omega_\varphi^2)}\left(A\cos\theta t + \frac{B}{\theta}\sin\theta t\right) + \\ + \frac{a_0\cdot\theta}{(\omega_y^2 + \omega_\varphi^2)}\,e^{-\bar{\varepsilon}t}\left(C\cos\bar{\omega}_1 t) + \frac{D + C\bar{\varepsilon}}{\bar{\omega}_1}\cdot\sin\bar{\omega}_1 t\right), \tag{11}$$

$$\varphi(t) = \frac{a_0\cdot\theta}{e(\omega_y^2 + \omega_\varphi^2)}\left(A'\cos\theta t + \frac{B'}{\theta}\sin\theta t\right) + \\ + \frac{a_0\cdot\theta}{e(\omega_y^2 + \omega_\varphi^2)}\,e^{-\bar{\varepsilon}t}\left(C'\cos\bar{\omega}_1 t + \frac{D' + C'\bar{\varepsilon}}{\bar{\omega}_1}\sin\bar{\omega}_1 t\right). \tag{11'}$$

Introducînd valorile lui A, B, C, D, A', B', C', D', expresiile lui $y(t)$ și $\varphi(t)$ se mai scriu

$$y(t) \cong \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_y^2+\omega_\varphi^2} \cdot \frac{a_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{\theta^2}\right)^2+\frac{4\bar{\varepsilon}^2}{\theta^2}}} \sin\,(\theta t+\lambda_{y1}) + \\ + \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_y^2+\omega_\varphi^2} \cdot \frac{a_0\, e^{-\bar{\varepsilon}t}\,\frac{\bar{\omega}}{\theta}}{\sqrt{\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{\theta^2}\right)^2+\frac{4\bar{\varepsilon}^2}{\theta^2}}} \sin\,(\bar{\omega}_1 t+\lambda_{y2}), \tag{12}$$

$$\varphi(t) \cong \frac{\omega_y^2}{\omega_y^2+\omega_\varphi^2} \cdot \frac{\frac{a_0}{e}}{\sqrt{\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{\theta^2}\right)^2+\frac{4\bar{\varepsilon}^2}{\theta^2}}} \sin\,(\theta t+\lambda_{\varphi 1}) + \\ + \frac{\omega_y^2}{\omega_\varphi^2+\omega_y^2} \cdot \frac{\frac{a_0}{e}\cdot e^{-\bar{\varepsilon}t}\cdot\frac{\bar{\omega}}{\theta}}{\sqrt{\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{\theta^2}\right)^2+\frac{4\bar{\varepsilon}^2}{\theta^2}}} \sin\,(\bar{\omega}_1 t+\lambda_{\varphi 2}). \tag{12'}$$

Primul termen reprezintă oscilațiile forțate, iar al doilea oscilațiile libere :

$$\operatorname{tg}\lambda_{y1} = \frac{\varepsilon_\varphi\cdot\theta\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{\theta^2}\right)+2\bar{\varepsilon}\,\theta\,\frac{\omega_\varphi^2}{\theta^2}}{\omega_\varphi^2\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{\theta^2}\right)-2\,\varepsilon_\varphi\cdot\bar{\varepsilon}}, \tag{13}$$

$$\operatorname{tg}\lambda_{y2} = \frac{2\bar{\varepsilon}\cdot\bar{\omega}\cdot\omega_\varphi^2-\bar{\omega}^2\cdot\varepsilon_\varphi\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{\theta^2}\right)\cdot\bar{\omega}_1}{2\bar{\varepsilon}\,(\bar{\varepsilon}\cdot\omega_\varphi^2-\varepsilon_\varphi\cdot\bar{\omega}^2)+\bar{\omega}^2\cdot\omega_\varphi^2\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{\theta^2}\right)}, \tag{13'}$$

$$\operatorname{tg}\lambda_{\varphi 1} = \frac{\varepsilon_y\cdot\theta\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{\theta^2}\right)+2\bar{\varepsilon}\,\theta\,\frac{\omega_y^2}{\theta^2}}{\omega_y^2\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{\theta^2}\right)-2\,\varepsilon_y\cdot\bar{\varepsilon}}, \tag{14}$$

$$\operatorname{tg}\lambda_{\varphi 2} = \frac{2\bar{\varepsilon}\,\bar{\omega}\,\omega_y^2-\bar{\omega}^2\varepsilon_y\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{\theta^2}\right)\cdot\bar{\omega}_1}{2\bar{\varepsilon}\,(\bar{\varepsilon}\,\omega_y^2-\varepsilon_y\cdot\bar{\omega}^2)+\bar{\omega}^2\cdot\omega_y^2\left(1-\frac{\omega^2}{\theta^2}\right)}. \tag{14'}$$

În continuare notăm $e = \eta\bar{e}$, unde $\bar{e}$ este excentricitatea elastică definită mai sus. În acest fel putem scrie

$$\omega_\varphi = \omega_y \frac{\bar{e}}{e} = \omega_y \cdot \frac{1}{\eta}\,; \quad \bar{\omega} = \omega_y \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\,. \tag{15}$$

Dacă se admite că răsucirea structurii se produce numai prin încovoierea în plan vertical a stîlpilor, neglijîndu-se răsucirea acestora, rezultă pentru ε_φ relația

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_y \cdot \frac{\bar{e}^2}{e^2} = \varepsilon_y \cdot \frac{1}{\eta^2}\,, \text{ iar } \bar{\varepsilon} = \varepsilon_y \frac{1}{1+\eta^2}\,. \tag{16}$$

În această ipoteză, $\lambda_{y1} = \lambda_{\varphi 1}$ și $\lambda_{y2} = \lambda_{\varphi 2}$, adică deplasarea orizontală și rotirea sînt în fază, atît pentru vibrațiile forțate, cît și pentru cele libere.

Solicitările dinamice, forța de inerție și momentul de răsucire care solicită structura au expresiile

$$\begin{aligned} F = m\ddot{y} &= \frac{ma_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{\theta^2}\right)^2 + \frac{4\bar{\varepsilon}^2}{\theta^2}}} \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_y^2+\omega_\varphi^2} \left[\theta^2 \sin(\theta t + \lambda_1) + \right. \\ &\left. + \frac{\omega}{\theta}\bar{\omega}_1^2 e^{-\bar{\varepsilon}t} \cdot \sin(\bar{\omega}_1 t + \lambda_2)\right], \\ M = me^2 \cdot \ddot{\varphi} &= \frac{ma_0 e}{\sqrt{\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{\theta^2}\right)^2 + \frac{4\bar{\varepsilon}^2}{\theta^2}}} \frac{\omega_y^2}{\omega_y^2+\omega_\varphi^2} \left[\theta^2 \sin(\theta t + \lambda_1) + \right. \\ &\left. + \frac{\bar{\omega}}{\theta}\bar{\omega}_1^2 e^{-\bar{\varepsilon}t} \cdot \sin(\bar{\omega}_1 t + \lambda_2)\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Parantezele variază foarte puțin cu excentricitatea e. Utilizînd coeficientul $\eta = \frac{e}{\bar{e}}$, factorii din fața parantezelor au expresiile:

pentru forța de inerție F:

$$\overline{F} = \frac{ma_0}{\sqrt{\left[(1+\eta^2) - \frac{\omega_y^2}{\theta^2}\right]^2 + \frac{4\varepsilon_y^2}{\theta^2}}}\,, \tag{18}$$

pentru momentul de inerție M:

$$\overline{M} = \frac{ma_0 \bar{e} \cdot 3^2}{\sqrt{\left[(1+\eta^2) - \frac{\omega_y^2}{\theta^2}\right]^2 + \frac{4\varepsilon_y^2}{\theta^2}}}\,. \tag{18'}$$

În figurile 1, 2 și 3 sînt redate curbele coeficienților $\overline{F}$ și $\overline{M}$ în funcție de η pentru diferite valori ale raportului $\frac{\omega_y}{\theta}$ și pentru valoarea curentă (pentru structurile din beton armat) $\varepsilon_y = 0{,}1\ \omega_y$.

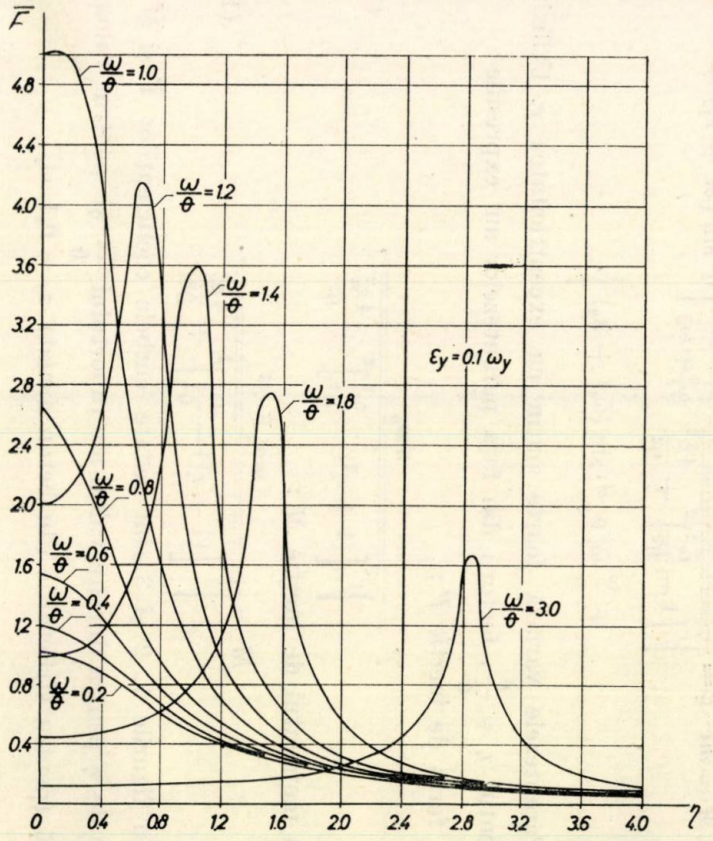


Fig. 1. — Variația lui $\overline{F}$ în funcție de η pentru diferite valori ale lui $\frac{\omega}{\theta}$.

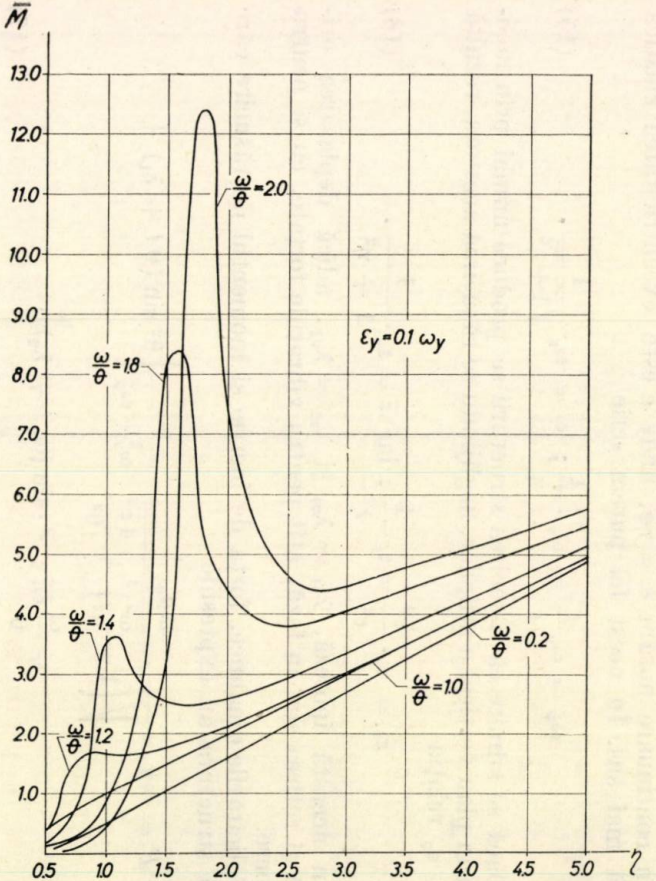


Fig. 2. — Variația lui $\overline{M}$ în funcție de η pentru diferite valori ale lui $\frac{\omega}{\theta}$ ($\eta > 0{,}5$).

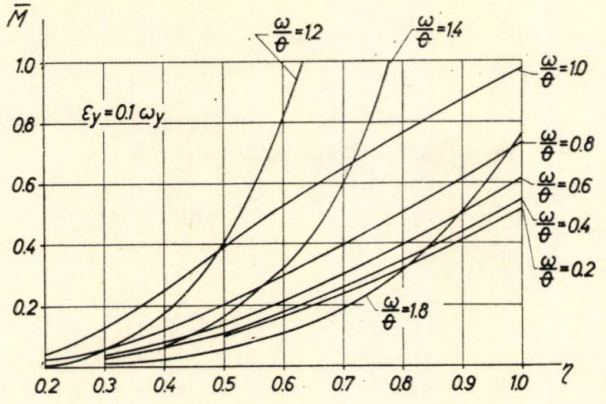


Fig. 3. — Variația lui $\overline{M}$ în funcție de η pentru diferite valori ale lui $\frac{\omega}{\theta}$ $(0 < \eta \leqslant 1)$.

Din examinarea curbelor de rezonanță $\overline{F}\left(\eta, \frac{\omega_y}{\theta}\right)$ și $\overline{M}\left(\eta, \frac{\omega_y}{\theta}\right)$ se observă că pentru cazul $\frac{\omega_y}{\theta} \cong 1,2$ creșterile lui η peste valoarea $\eta = 0,2$ conduc la creșteri rapide pentru $\overline{F}$ și pentru $\overline{M}$. Pentru domeniul $\eta < 0,2$, $\overline{M} \approx 0$ indiferent de valoarea lui $\frac{\omega_y}{\theta}$.

Primită la redacție la 30 iulie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. A. Beleș, M. Ifrim, *Elemente de seismologie inginerească*, București, Edit. tehnică, 1962.
2. N. K. Snitko, *Dinamica construcțiilor*, București, Edit. tehnică, 1962.
3. S. Timoshenko, *Vibration problems in engineering*, Van Nostrand Company, 1955.

CU PRIVIRE LA APARATURA EXPERIMENTALĂ DESTINATĂ STUDIILOR DE FRECARE ŞI UZURĂ

de DAN PAVELESCU
Centrul de mecanica solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

539.6

În lucrarea de faţă ne propunem să prezentăm o sinteză a aparaturii experimentale destinată studiilor de frecare şi uzură. Subliniind caracteristicile principale care determină clasificarea instalaţiilor şi exemplificînd anumite rezultate, considerăm că facilităm alegerea şi deci utilizarea adecvată modelării unui anumit proces de frecare-uzură, creînd totodată o imagine de ansamblu asupra stadiului laturii experimentale din acest domeniu [1]).

Cercetările efectuate în diferite ţări asupra evoluţiei fenomenului complex de frecare-uzură au condus la concluzia că nu sînt suficiente numai legile care reflectă manifestările exterioare ale diferiţilor factori, care, deşi prezintă importanţă teoretică şi practică, nu lămuresc suficient natura intimă a acestui fenomen; în consecinţă, mai ales în ultimele trei decenii, studiile au fost orientate către determinarea legilor care reflectă acţiunile reciproce ale diferitelor structuri superficiale ale corpurilor în frecare, complicate de prezenţa mediului. S-a constatat că încercările globale efectuate direct pe maşini sau agregate sînt lipsite de supleţe, de posibilitatea de a varia sau de a menţine constanţi anumiţi parametri

[1]) Prezentarea sau aprofundarea aparaturii auxiliare electrice, electronice, radiometrice, optice etc. sau a metodicii de măsură respective nu constituie obiectul lucrării de faţă. Precizăm totodată că această lucrare, care se adresează îndeosebi instalaţiilor experimentale pentru studii şi încercări de uzură, completează un ciclu privind evoluţia şi stadiul concepţiilor asupra frecării şi uzurii, aspectele metalurgice, metodele de calcul la uzură şi posibilităţile de aplicare a acestora etc. [1], [2], [3].

determinanți. Pe lîngă utilizarea unei aparaturi care, mărind performanțele investigației optice, să permită studii la diferite scări microscopice asupra suprafețelor de frecare (microscopie electronică, difracții cu raze X etc. [4], [5], [6], a apărut și necesitatea *modelării fenomenului* [7], [8], [9]. Perfecționarea metodicii și aparaturii experimentale[2]) a permis o serie de rezultate cu caracter de generalitate și elucidarea unor procese intime ale fenomenului studiat.

Pentru modelarea frecării și pentru studii complexe de frecare și uzură au fost realizate în diferite țări tipuri de instalații variate, dintre care cea mai mare parte constatăm că privește regimul de „extremă presiune". Instalațiile sau mașinile de încercare au fost astfel concepute, încît să poată permite determinarea mai precisă a influenței principalilor factori: sarcina, viteza relativă, natura și starea suprafețelor în contact, temperatura, caracterul și elementele ungerii etc.

Clasificarea instalațiilor experimentale. Kraghelski, în tratatul său de *Frecare și uzură*, împarte mașinile pentru încercarea la uzură a „epruvetelor mici" (mașinile de laborator, de modelare) în *două mari clase*, conținînd *opt tipuri diferite*, după principiul cinematic, și anume:

— clasa mașinilor cu mișcare de translație;

— clasa mașinilor cu mișcare de du-te-vino.

Fiecare clasă cuprinde două grupe: grupa mașinilor cu frecare frontală și grupa mașinilor cu frecare pe generatoare, iar fiecare grupă conține două subgrupe: mașini cu coeficient de acoperire tinzînd către unitate și mașini cu coeficient de acoperire reciprocă tinzînd către zero (mașini palpatoare) [7].

Se precizează că s-a făcut această clasificare pentru a păstra „formele de rupere a suprafețelor de frecare", indicate de același autor [1], [7], care, în mișcările de translație și de du-te-vino, sînt bine distincte. Mișcarea de du-te-vino duce la uzuri mari; variația coeficientului de acoperire modifică, la rîndul ei, uzura de cîteva ordine; frecarea frontală și frecarea pe generatoare dau efecte diferite în condițiile de ungere la limită.

Alți autori clasifică diferit instalațiile de încercat; astfel, în lucrarea [5], acestea sînt împărțite, după condițiile de uzură, în două mari categorii, și anume:

— instalații în care, datorită principiului constructiv al cuplului de frecare, uzura este localizată pe o suprafață mică de „contact", rezultînd o presiune specifică ridicată;

— instalații care utilizează piesele sau organele de mașini în condiții normale de funcționare.

Totodată se exprimă părerea că instalațiile din prima categorie sînt destinate încercărilor de scurtă durată, cu mențiunea că evoluția uzurii este perturbată de fenomene parazite (de exemplu vibrații), în timp ce a doua categorie asigură încercări de lungă durată, cu mențiunea că măsurătorile efectuate sînt „uneori dificile".

De asemenea se clasifică mașinile de încercat și după tipul contactului cuplului de frecare (punctiform, liniar etc.) și se disting următoarele

[2]) Pentru studiul și urmărirea evoluției uzurii, în afară de metodele gravimetrice, micrometrice, chimice etc. s-au dezvoltat metodele radiometrice.

categorii : maşinile cu patru bile ; maşinile cu cilindrii încrucişaţi ; maşinile cu ştift sau ac pe suprafaţă plană ; maşinile cu mişcare alternativă ; maşinile complexe, [5], [8].

Remarcăm că în literatura de specialitate şi în laboratoarele de cercetări se întîlneşte o gamă variată de maşini de încercat, criteriul de preferinţă fiind de multe ori subiectiv. În cele ce urmează vom trece în revistă principalele tipuri de instalaţii de încercat şi anumite indicaţii asupra utilităţii lor. Considerăm că este mai judicioasă clasificarea după *tipul contactului cuplului de frecare* (fără limitarea indicată mai sus de unii autori) (fig. 1) [10], apropiindu-ne deci de clasificarea anterioară. Pre-

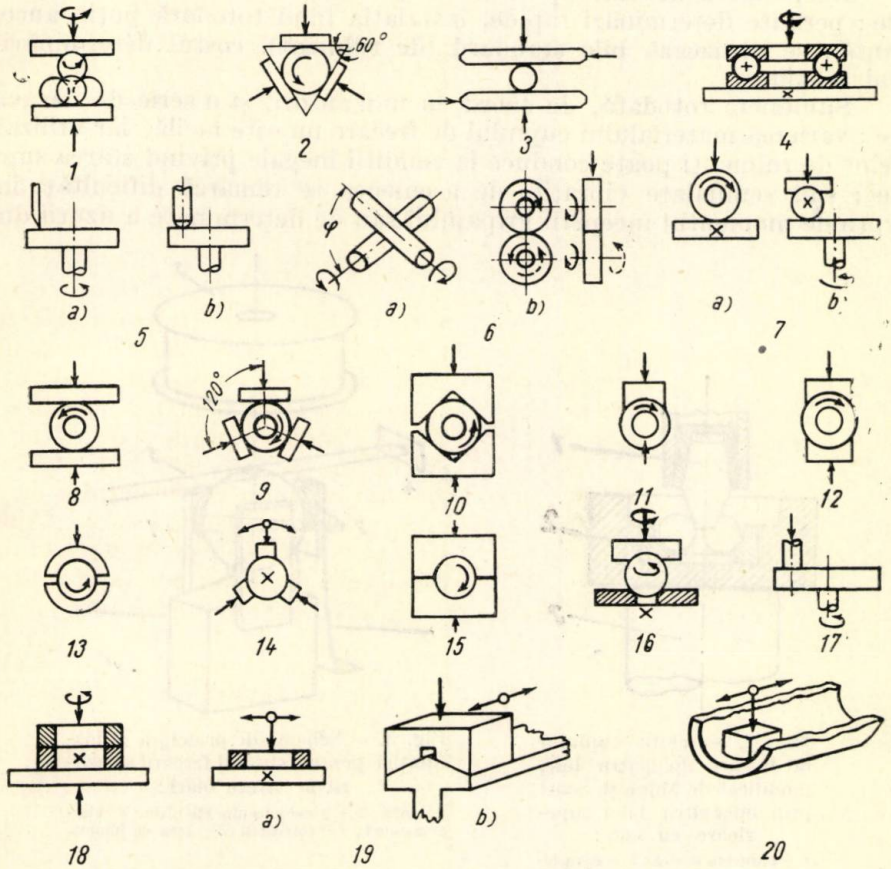


Fig. 1. — Prezentarea schemelor principalelor cupluri de frecare cu diferite tipuri de „contacte", diferite raporturi între suprafeţele în frecare şi genuri de mişcări relative.

cizăm că în această clasificare pot fi cuprinse *atît instalaţiile pentru studiul uzurii, cît şi cele specifice fenomenului frecării ca atare.* De asemenea sîntem de părere că instalaţiile de tip industrial, în care fenomenul se desfăşoară deci în condiţii identice de exploatare, formează o clasă aparte.

A. MAȘINI DE ÎNCERCAT CU CONTACT PUNCTIFORM

1. *Mașina cu patru bile* (cuplul de frecare din fig. 1. 1) formează tipul cel mai răspîndit; cuplul de frecare (de alunecare) este format din patru bile sub formă de piramidă (baza, trei bile staționale, iar vîrful o bilă în mișcare de rotație). În general, rezultatele rezultă în funcție de mărimea „petei" de contact sau a duratei de gripare. Ca utilizare practică remarcăm: determinarea calităților uleiurilor și studiul suprafețelor [5], [8], [14].

Răspîndirea acestui tip se datorește următoarelor avantaje principale: permite determinări rapide, instalația fiind totodată puțin ancombrantă; se utilizează bile standard (de rulment), costul determinărilor fiind scăzut.

Subliniem totodată, de acord cu unii autori, și o serie de dezavantaje: varierea materialului cuplului de frecare nu este facilă, iar utilizarea bilelor de rulmenți poate conduce la condiții inegale privind starea suprafeței; sînt semnalate vibrații; de asemenea se remarcă dificultăți în a surprinde momentul începerii gripajului sau de determinare a uzurii după

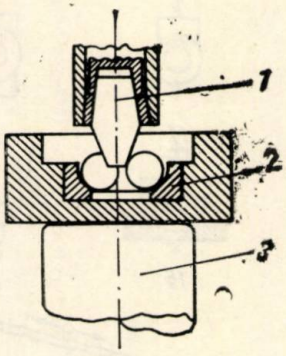


Fig. 2. — Schița cuplului de frecare tip patru bile, modificat de Milne și Scott prin înlocuirea bilei superioare cu con:

1 — epruveta conică; *2* — cuva bilelor; *3* — piesa de transmiterea sarcinii

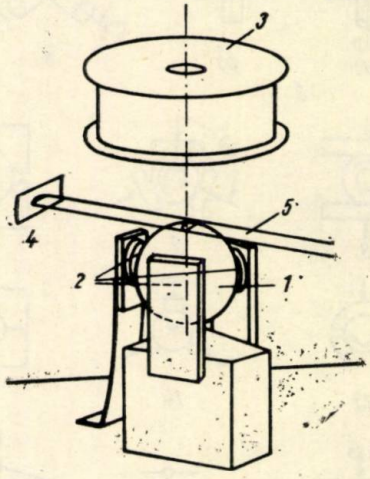


Fig. 3. — Schema de principiu a instalației pentru studiul frecării și uzurii la viteze mari:

1 — bilă; *2* — piese cu suprafețe plane; *3* — electromagnet; *4* — fotocatod; *5* — raza de lumină.

evoluția petei de contact; în sfîrșit, modelarea contactului diferă uneori de cazul practic.

Subliniem faptul că, date fiind avantajele, diferiți cercetători au căutat să perfecționeze mașina cu patru bile pentru a permite măsurarea momentului de frecare cu metode electrice, efectuarea de studii în medii

diferite etc. S-a urmărit adaptarea sistemului la diferite instalaţii (de la simple bormaşini la instalaţii speciale care să asigure condiţii variate de presiune şi temperatură) [5], [15], [16], [17]. Pentru alte studii au fost înlocuite cele trei bile de bază printr-o rolă cu şanfren (Matveeski [7]), (fig. 1. 16), sau bila superioară printr-un con (Milne şi Scott [5]) (fig. 2).

În lucrarea [16] este descrisă o instalaţie completă, perfecţionată, de tipul cu patru bile [3]), iar în lucrarea [5], se prezintă maşina Stanhipe-Seta „Shell" pentru încercări de uleiuri la extremă presiune, la care forţa de frecare se înregistrează mecanic, încercările putînd fi făcute pînă la o presiune specifică de circa 75 tf/cm^2.

Indicăm cîteva dintre cercetările efectuate cu maşini cu patru bile sau modificate :

— studiul comportării la uzură a oţelului sub sarcini mari şi în condiţiile a diferite tratamente de suprafaţă (fosfatări, sulfinizări etc.), efectuate de Pomey [14], sau în prezenţa unor lubrifianţi conţinînd aditivi, cu instalaţia modificată, efectuat de G. V. Vinogradov şi colaboratorii săi [18]. Acelaşi cuplu de frecare a permis studii de elastohidrodinamică, contactul fiind determinat pe cale electrică, iar uzura bilelor de oţel, avînd diferite rugozităţi, cu trasori radioactivi [19]. În ţara noastră menţionăm cercetările asupra comportării lubrifianţilor făcute la Institutul Politehnic din Bucureşti [15] şi la Institutul „Petrochimic", Ploieşti [20]. Remarcăm că cercetările mai recente se bazează pe profilograme, microdurităţi şi studii metalografice în zona petei de uzură ;

— Hirano şi Yamamato, folosind o maşină modificată de prof. Soda (Tokyo), au examinat efectul particulelor abrazive în ulei [5] ;

— Barwell, precum şi Milne şi Scott au modificat o maşină de acest tip pentru studiul efectului *piting* la mişcarea de rostogolire în vederea aplicaţiilor la rulmenţii cu bile [5] etc.

2. *Instalaţie pentru studii de frecare şi uzură la viteze foarte mari* (fig. 3) [21]. Continuînd cercetările lui Freitag, Bowden a utilizat metoda prof. Beam, şi anume un aparat de construcţie specială al cărui cuplu de frecare (fig. 1, 2) este compus dintr-o bilă şi trei suprafeţe plane aşezate la 60° ; un resort aplică sarcini între 20 şi 50 g. Prin rotaţia cîmpului magnetic se poate face ca bila, cu un diametru de 10 mm, să realizeze un milion de rotaţii pe minut.

Cu acest sistem au fost studiate (în vacuum între 10^{-3} şi 10^{-4} mm Hg) cuplurile de frecare oţel-cupru şi oţel-bismut, grafit pe tantal etc. prin prisma uzurii suprafeţelor la viteze relative de alunecare pînă la 660 m/s, măsurîndu-se pe cale electrică coeficientul de frecare (sub 0,1 şi pînă la 1,6) şi temperatura la suprafaţa de contact (pînă la 1 500°C).

3. *Maşini pentru frecare de rostogolire.* a) Remarcăm instalaţia al cărui cuplu de frecare este compus dintr-o bilă între două plăci plane (fig. 1. 3), utilizată de R. C. Drutowski în laboratoarele Genral Motors

[3]) Permite studii în vacuum, gere sau aer la diferite temperaturi ; forţa de frecare şi temperatura uleiului se înregistrează automat cu metode electrice ; pot fi urmărite pe oscilograf ; încărcarea hidraulică se comandă automat etc.

/22/; placa superioară este staționară, în timp ce mișcarea plăcii inferioare poate fi variată între 0,0025 și 25 mm/sc. S-a studiat influența materialului bilei, a rugozității și a materialului plăcii asupra forței de frecare.

b) *Mașina de încercare S.K.F.* Laboratoarele S.K.F. utilizează pentru încercarea rulmenților mari instalații de tip industrial [23]. Studiile au urmărit tocmai influența dimensiunilor mari asupra capacității de încărcare și durata de funcționare în condițiile ungerii cu ulei recirculat sau cu unsori [4]).

S-au utilizat și mașini de laborator avînd rulmenți drept cuplu de frecare (fig. 1. 4) pentru studii privind efectul aditivilor și modificarea suprafețelor [24].

4. *Instalații de încercat cu cilindri încrucișați* (cuplu de frecare fig. 1. 6 *a*).

Anumite dificultăți sesizate în cadrul mașinii cu patru bile sau a contactului sferic pe o suprafață plană [5] au fost evitate prin utilizarea unei mașini al cărui cuplu de frecare îl formează două epruvete cilindrice, de exemplu cu axele la 90° (dintre care una în mișcare de rotație). *Mașina de uzură de tipul M.E.R.L.* face parte din acest sistem. Prin soluții constructive se poate obține rotirea uneia sau a ambelor epruvete, precum și varierea unghiului dintre axele cilindrilor. Astfel se poate obține o gamă de mișcări relative, precum și trecerea de la un punct de contact la o suprafață mai mare de contact; de asemenea se poate menține sau schimba suprafața de frecare.

Pentru cercetările de uzură a angrenajelor, care reclamă realizarea unor sarcini concentrate și totuși schimbarea suprafeței, cercetătorii englezi Milne, Scott și Mac Donald [5] au preferat o mașină de uzură cu cilindri încrucișați la 90° (*tip Acheson*); mașina a lucrat cu un cilindru în mișcare de rotație, iar cu celălalt numai în mișcare de translație, aducînd astfel în permanență în frecare o suprafață neuzată.

Mașina Thomas lucrează de asemenea cu doi cilindri încrucișați, dintre care unul este antrenat, iar celălalt sub sarcină. Se determină coeficientul de frecare la diferite încărcări și viteze; se măsoară urmele de uzură sau momentul de gripare [7].

Archard [5] a utilizat o mașină palpatoare atît cu epruvete la 90°, cît și de alt tip (1. 1), și anume una dintre epruvete apăsînd cu partea plană pe generatoarea celeilalte. Forța de frecare se măsoară cu rezistențe tensometrice, plasate astfel încît să se compenseze temperatura și un efect de încovoiere; s-au utilizat epruvete de 50 Ø, gama de viteză fiind de 30—530 rot/min, iar sarcinile concentrate pînă la 450 kgf.

Printre autorii care au analizat avantajele mașinilor de acest tip (cilindri încrucișați) menționăm pe Archard sau pe Halliday și Hirst, care au studiat diferite posibilități experimentale (cilindri la 90 și 45°), comparînd coeficienții de frecare cu cei obținuți pe alte mașini în cazul

[4]) Caracteristicile unei instalații: puterea 125 kw; sarcină (pe rulmentul central) prin încărcare hidraulică 600 t; Ø exterior max. 920 mm; viteza de rotație 70—1 200 t/min.; presiunea este reglată automat în funcție de temperatură.

unor epruvete cu strat de oxizi. De asemenea Zeman şi Coffin au făcut studii de uzură cu o largă gamă de viteze (14—1 000 rot/min) şi cu temperaturi între 600 şi 1 100°C, iar Campell a determinat comportarea lubrifianţilor cu sulf în condiţii de extremă presiune; cu ajutorul trasorului S^{35} s-a urmărit şi reacţia sulfului cu suprafeţele de frecare, precum şi adîncimea straturilor respective [5]. Reichenbach şi colaboratorii săi au studiat comportarea lubrifianţilor în vacuum înalt în condiţii de extremă presiune, comparînd rezultatele unor maşini cu cilindri încrucişaţi şi cu ştift pe disc (fig. 1. 5 *b*) [25].

B. MAŞINI DE ÎNCERCAT CU CONTACT DUPĂ O FIŞIE (LINIAR)

1. *Maşina S.A.E.* (cuplul de frecare ca în fig. 1. 6 *b*). La acest sistem, una dintre role este acţionată, iar cealaltă, antrenată de prima, este încărcată; practic instalaţia lucrează cu frecare de rostogolire, fără alunecare. Într-o variantă se poate asigura şi acţionarea suplimentară a rolei libere sau o mişcare a ei în sens contrar primei role. În această situaţie, „se rupe" filmul de ulei şi se elimină complet regimul hidrodinamic. Uzura se măsoară în funcţie de micşorarea diametrului, de urmă sau de pierderea de metal cu izotopi radioactivi; se determină de asemenea şi sarcina de gripare [7].

Un cuplu de frecare similar (două role) se utilizează uneori şi la *maşina Amsler* (pe care o menţionăm ulterior, la sistemul rolă-sabot; fig. 1.11). În afară de mişcarea relativă de rotaţie în sensuri diferite, una dintre role execută şi o mişcare de du-te-vino în direcţia generatoarei de contact [26]. În U.R.S.S. s-a realizat tipul M.I., la care o rolă este iradiată, iar măsurarea uzurii se face prin recircularea uleiului [7].

În lucrarea [27], V. Climov prezintă, printre altele, şi schiţa unei „maşini universale" pentru încercarea pieselor la uzură: se arată că instalaţia permite încercări la frecarea de alunecare, de rostogolire şi de rostogolire cu alunecare în toate cazurile, în prezenţa lubrifiantului, cît şi fără lubrifiant. De fapt este vorba de o maşină al cărui cuplu de frecare este format din două role (Ø 30—50), iar caracterul universal derivă din posibilitatea diferită de antrenare a acestora. Se permite totodată varierea şi măsurarea cuplului de frecare (0,1—150 kgf), precum şi realizarea unei mişcări de du-te-vino cu o cursă mică ($\pm$ 5mm) în timpul unei rotaţii.

Maşina „Robin" de încercare la abraziune. Este vorba de o instalaţie de uzură la frecarea uscată de alunecare, între un cilindru (Ø 300 mm $\times$ 600 mm) în mişcare de rotaţie (5 rot/min) acoperit cu o foaie cu abraziv fin şi mai multe epruvete (Ø 1 mm) tangente şi apăsate cu 40 g/mm^2. Uzura se determină gravimetric după 300 rot; rezistenţa la abraziune se determină cu o formulă simplă prin comparaţie cu volumul de metal pierdut de o epruvetă de tungsten [23].

În diferite ţări au fost realizate şi bancuri de uzură a angrenajelor. De exemplu, este cunoscut sistemul *Von Sodan*, cu două seturi de roţi

dințate, dintre care un set epruvetele de încercat. După un anumit timp de funcționare se cercetează optic uzura flancurilor dinților.

În țara noastră, astfel de studii (inclusiv cu metodă radioactivă) se fac de mai mulți ani la Institutul politehnic din Cluj [28].

2. *Mașina Timken* (concepută de British Timken Limited [5]), al cărui cuplu de frecare este format dintr-o rolă și o suprafață plană (fig. 1. 7), poate fi încadrată în aceeași categorie (contact după fișie). Ca și mașina cu patru bile, instalația tip Timken este o instalație de încercări destul de răspîndită atît în laboratoarele de cercetări cît și în cele uzinale. Cu această instalație se determină, în general, atît capacitatea de încărcare și caracteristicile de frecare a uleiurilor și unsorilor, cît și rezistența la uzură a materialelor. Derivate din sistemul menționat, s-au obținut diferite cupluri de frecare și mișcări relative : bucșă sau ax în rotație pe piesa plană fixă, rolă fixă pe piesă plană în mișcare alternativă de translație. La unele sisteme, partea inferioară a piesei în rotație se găsește plasată într-o cuvă cu uleiul de încercat.

Dintre tipurile de încercări făcute cu mașina Timken menționăm :

— studiile de uzură cu diferite uleiuri cu aceeași vîscozitate efectuate de societatea Houghton [23]. Determinarea uzurii s-a făcut prin măsurarea micrometrică a suprafeței uzate rezultate prin aplicarea unor sarcini progresive între 2 și 20 kgf timp de 10 s. Sarcina a fost mărită pînă la calarea motorului și s-a determinat timpul respectiv pentru diferite uleiuri și materiale ;

— la Institutul de cercetări a tehnicii termice din Praga, pentru studiul frecării și uzurii în regim mixt (presiuni foarte mari și viteze mici) se utilizează o mașină de asemenea de tip Timken. La cercetările efectuate, suportul cu epruveta cu suprafață plană execută o mișcare de du-te-vino (viteza de alunecare între 0,17 și 0,56 m/s), la o presiune specifică de 2 400 kg/cm² (Hertz) ; rola de oțel fixă (Ø 30 × 5 mm). Uzura se măsoară pe cale optică cu o precizie de 0,1 μ după amprenta de pe placa plană ;

— prin modificările făcute de M. A. Sonntag, același tip de mașină a fost utilizat și pentru studii de rodaj și frecare în condiții de ungere-limită ; s-a utilizat un cuplu de frecare oțel-oțel și s-a verificat influența microgeometriei în funcție de sarcină, a vitezei de aplicare a sarcinii și a vitezei relative. Forța de frecare se măsoară și se înregistrează electric [23].

Mașina „Janin" se bazează de asemenea pe un cuplu de frecare de tip Timken : un ax de oțel pe o placă plană, de exemplu metal alb pentru cuzineți ; ungerea se produce prin picurare. Rezistența la uzură se determină în funcție de amprentă ; uzura marchează trecerea de la un contact pe fișie la un contact pe o suprafață cilindrică. Cu acest sistem s-au determinat consecutiv cuplul optim arbore-cuzinet, finisarea optimă a suprafeței arborelui, calitatea lubrifiantului etc. [5]).

Instalația „Skoda-Savin". Cuplul de frecare al acestui tip de mașină — cuplu Timken — este format dintr-un disc de metal dur (widia : Ø

[5]) Caracteristici : diametrul arborelui 20 mm ; diametrul plăcii 40 mm ; viteza arborelui 750 rot/min ; lubrificația 60 picături/min ; durata încercării 5 min, sau 3 750 de ture pentru cuzineți și 15 min (11 250 rot) pentru arbore ; pentru uleiuri s-au făcut încercări de cîte două ore.

30 × 2,5 mm) şi un sabot fix, iniţial cu suprafaţă plană (sarcina normală pe disc : 15 kgf) ; se utilizează ca lubrifiant o soluţie de bicromat de potasiu în apă distilată. Uzura se determină în funcţie de adîncimea urmei, măsurată cu microscopul. Încercări rapide se fac mărind viteza de rotaţie (3 000 rot/min). Precizia se poate verifica cu cale-etalon tip Johanssen, Zeiss etc. ; se stabileşte o curbă bine definită dintre numărul de învîrtituri şi adîncimea amprentei în microni.

Această maşină a permis şi studierea straturilor superficiale ale metalelor în vederea determinării corelaţiei dintre uzură şi anumiţi para-

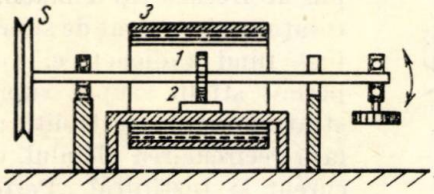


Fig. 4. — Schema instalaţiei „Raedeker" :
1 — *2* — cuplul de frecare ; *3* — cuptorul electric.

metri : duritate, tratamente termice, starea suprafeţei, timpul de rodaj etc. [23].

Instalaţia „Raedeker" (fig. 4) [29] a fost construită pentru încercări de uzură în cazul frecării de alunecare la diverse temperaturi. Cuplul de frecare (o rolă (Ø 56 × 10 mm) în rotaţie şi o placă plană dreptunghiulară) este plasat în centrul unui cuptor electric cilindric. Au fost făcute studii pînă la 800°C şi —190°C (aer lichid), uzura fiind determinată pe cale gravimetrică după 10 000 rot sub o încărcare de 5 kgf. Se realizează o viteză relativă între 1,8 şi 9,5 m/s ; ungerea este diferită : apă, ulei etc.

Aparatul lui Lavik. Acest tip de aparat a fost utilizat pentru încercarea lubrifianţilor solizi la temperaturi înalte. Cuplul de frecare sistem Timken, format dintr-un inel în rotaţie şi un indice cu suprafaţă plană, este de asemenea închis într-un cuptor electric ; temperatura de frecare este măsurată cu un termocuplu aşezat la circa 3 mm de suprafaţa de contact [5].

La *maşinile de încercat „Mailänder şi Dies"*, piesa fixă este răcită în interior cu apă ; instalaţia este utilizată pentru studiul frecării uscate, între un disc de oţel cu crom de mare duritate (Ø 180 mm) şi epruveta de încercat (20×15), la viteze între 100 şi 300 rot/min ; temperatura pe suprafaţa de frecare se măsoară cu un termoelement, iar uzura se determină pe cale gravimetrică [29].

M. M. Hruşciov şi M. A. Babicev au folosit *maşina* H_2-M (fig. 5) [30] pentru încercări comparative de uzură al unor fonte diferite în mediu oxidant ; s-a studiat structura obţinută după turnare, după călire simplă şi după călire cu diferite temperaturi de revenire. De asemenea s-au făcut şi încercări asupra oţelului carbon călit şi revenit ; uzura s-a determinat în

funcție de pătrunderea discului dur în epruveta cu suprafața plană. De asemenea s-a studiat rodajul diferitelor metale și aliaje neferoase, cuplul de frecare fiind cufundat într-o baie cu mediul lichid activ.

În sfîrșit o parte din instalațiile realizate în cadrul fostului Institut de mecanică aplicată [6]), *IMA—1*, *IMA—2* și *IMA—3*, au fost descrise în lucrările [10], [31], [32]; ele ne-au oferit posibilitatea diferitelor studii de frecare și uzură în condiții de frecare limită [6]) [33], [34].

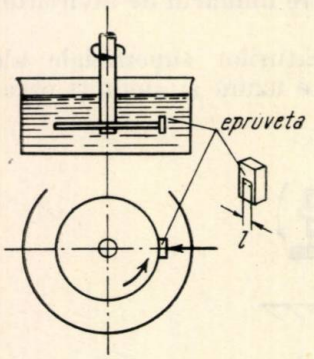


Fig. 5. — Schema mașinei $H_2 - M$, una din instalațiile utilizate de M. M. Hrușciov.

În toate aceste cazuri s-a utilizat un cuplu de frecare tip Timken, piesa în mișcare de rotație sau un strat de suprafață al piesei plane fixe fiind radioactive. Instalația IMA—1 a permis studii asupra suprafeței de frecare cu straturi depuse electrolitic; instalația IMA—2 [7]), fără recircularea uleiului, este utilizată în mod curent la Institutul „Petrochim" din Ploiești pentru încercări de uleiuri și aditivi.

Cea de-a treia instalație (cu recircularea uleiului) ne-a permis punerea în evidență a anumitor fenomene tranzitorii care apar în timpul procesului de frecare-uzură sau a zonelor mari de fluctuații, condiționată atît de material, cît și de regimul de sarcină, limitînd precizia de măsură a instalației experimentale.

C. MAȘINI DE ÎNCERCAT CU CONTACT DUPĂ MAI MULTE FÎȘII (2, 3, 4 CONTACTE LINIARE)

1. Mașina cu cuplu de frecare cu *contactul pe două fîșii* (fig. 1. 2) este mai rar întîlnită față de precedentele.

2. În țara noastră, I. Iliuc a realizat o instalație de sensibilitate ridicată, originală (brevetată), cu *contactul pe trei fîșii* (fig. 6 și 1.9), în special pentru diferite studii privind coeficientul de frecare și pentru modul de acțiune a unor substanțe active prin prisma variației coeficientului de frecare [35].

3. *Mașinile de încercat de tip FALEX* (*contactul pe patru fîșii*, cuplu de frecare; fig. 1. 10).

Mașina de frecare de tip Faville-Levally se caracterizează printr-un cuplu de frecare compus dintr-o epruvetă în rotație (Ø 6—7 mm) între două piese tăiate în V. Ea permite o gamă largă de viteze și de sarcini și măsurarea cuplului rezistent. Ca și în cazul mașinii cu patru bile sau a

[6]) În actualul sector de frecare și de uzură al Centrului de mecanica solidelor.

[7]) Brevetată în țară, Anglia și Franța, datorită caracterului de noutate, simplității și performanțelor ridicate. Sensibilitatea de măsură a ultimelor două instalații este de ordinul 10—7 g de metal pe cm^3 ulei, iar reproductibilitatea corespunzătoare (valorile maxime ale abaterilor față de medie reprezintă $\pm$ 25%, iar abaterea relativă $\pm$ 8%).

cuplului Timken, calculul presiunii lui Hertz se dovedește a fi simplu : amprentele calculate au putut fi verificate experimental.

O astfel de instalație a fost utilizată, de exemplu, pentru a se dovedi calitățile tratamentului de suprafață prin metoda sulfinizării ; în condițiile sulfinizării și ale unei rugozități reduse s-a demonstrat aproape

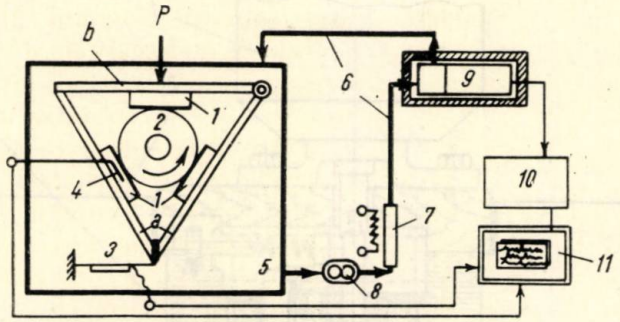


Fig. 6. — Schema instalației pentru studiul coeficientului de frecare :

1 — piesele fixe plane ; *a* — partea rigidă ; *b* — partea articulată ; *2* — piesa mobilă ; *3* — piesă cu marcă tensometrică pentru măsurarea coeficientului de frecare ; *4* — termorezistență ; *5* — cuva de ulei ; *6* — circuit de ulei ; *7* — termostat ; *8* — pompă ; *9* — traductor-scintilator ; *10* — numărător ; *11* — înregistrator.

imposibilitatea de a se obține microsuduri solide și transporturi de metal. De asemenea, în cazul unui cuplu de oțel inoxidabil (care gripează normal la sarcini de ordinul 200 kgf și viteze de 300 rot/min) după sulfinizare, starea de suprafață s-a dovedit bună chiar în condițiile unor temperaturi înalte, cînd epruveta centrală se subțiază pînă cînd piesele laterale se împreunează [8].

D. MAȘINI DE ÎNCERCAT CU CONTACT DUPĂ O SINGURĂ SUPRAFAȚĂ CILINDRICĂ (REDUSĂ) (CUPLUL DE FRECARE DIN Fig. 1. 11)

1. *Mașina Amsler.* Mașina de tip Amsler este utilizată și în studiul cu izotopi radioactivi ; rola și sabotul, care constituie cuplul de frecare, se introduc într-o cuvă de plexiglas cu ulei ; s-a studiat prin autoradiografiere și transferul de metal radioactiv (Bz) de pe sabot pe suprafața rolei. De asemenea s-au făcut studii și cu pulberi abrazive în ulei (pînă la 0,4%). S-a constatat că uzura sabotului de Bz nu crește în aceeași măsură cu creșterea uzurii la oțel față de mărimea procentului de pulbere abrazivă ; transferul de bronz pe oțel scade, fiind maxim în perioada rodajului [36].

Din literatura de specialitate rezultă că mașina Amsler este răspîndită în U.R.S.S.

— În U.R.S.S. s-a realizat, printre altele, *mașina tip NAMI*, utilizată la studiul cu izotopi a uzurii unui sabot de fontă (acoperit cu un

strat de babit de 1 mm), care se cuplează pe un cilindru de fontă (Ø 60 mm). Sarcina a variat între 4 și 10 kgf/cm²; s-a urmărit să se realizeze, în condiții de ungere „abundentă", studiul uzurii la temperaturi înalte [36].

La Institutul pentru studiul materialelor și a tehnologiei din Praga se fac studii asupra materialelor feroase, neferoase și plastice atît cu

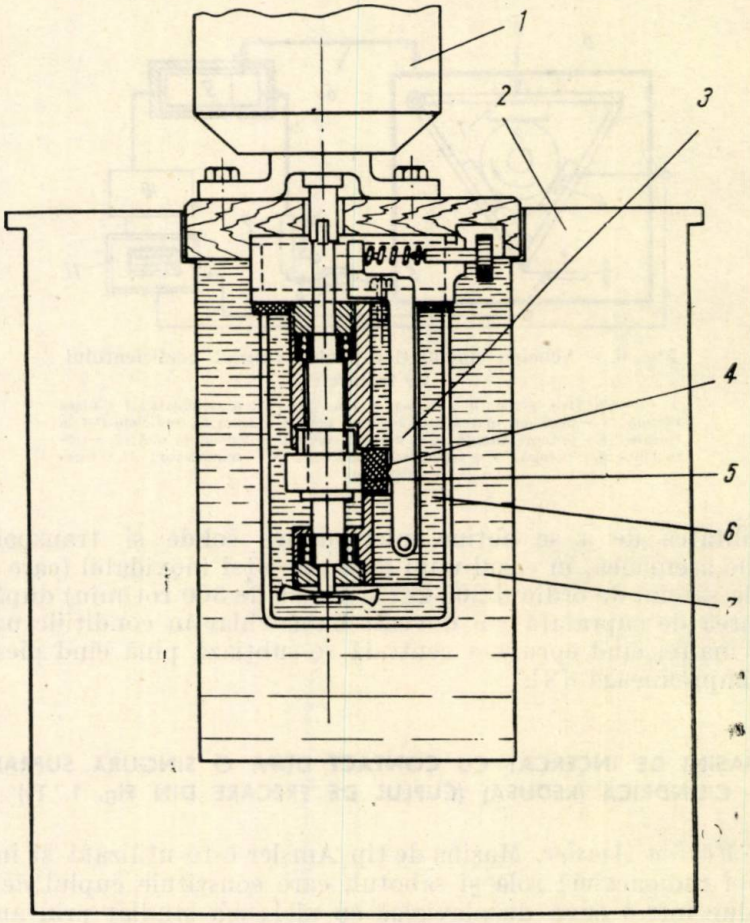


Fig. 7. — Schema aparatului pentru calorimetrarea proceselor de uzură :
1 — motor electric ; *2* — vasul calorimetric ; *3* — aplicarea sarcinii ; *4* — epruveta fixă ; *5* — epruveta în mișcare ; *6* — mediu lubrifiant ; *7* — apă.

mașina Amsler, cît și cu cea Timken ; remarcăm totodată studiile de uzură combinate cu cele de oboseală ; de asemenea cercetările pentru determinarea rezistenței la uzură a unor suprafețe metalice după un tratament termic oarecare (nitrurare, cimentare, sulfinizare etc.).

2. *Aparat pentru calorimetrarea proceselor de uzură.* Pentru analizarea proceselor de uzură prin prisma randamentului energetic, în țara noastră s-a realizat instalația din figura 7 [37], care a fost utilizată în lucrările

pentru studiul cuplurilor bronz-oțel, și oțel-oțel, ca lubrifiant fiind utilizat uleiul mineral cu diferiți aditivi antigripanți, precum și cu abrazivi. Este interesant că a fost studiată producerea anumitor tipuri de uzură prin prisma raportului Q/V (căldură degajată/pierderea în greutate) [37], [38].

Cu aceeași instalație s-au făcut studii asupra : comportării MOS_2 la diferite condiții de viteză, sarcină și temperatură [39], dependența uzurii abrazive [40], comportarea unor aditivi pe bază de fosfor, la sarcini ridicate [41] etc. În acest ultim caz s-a schimbat tipul cuplului de frecare (fig. 1. 11), adoptîndu-se un sistem Timken (fig. 1. 7) : bucșa Ø 23 și placa $10 \times 15 \times 17$, cu care s-au realizat presiuni specifice între 2 060 și 5 800 kgf/cm^2 (Hertz).

3. Pentru studii de uzură cu trasori radioactivi, prima instalație utilizată în țara noastră a fost prevăzută de asemenea cu un cuplu : sabot (de fontă sau bronz) iradiat sau cu știft radioactiv pe ax de oțel (fig. 1. 11) ; ea conținea caracteristicile generale cerute unei instalații de tipul cu recirculare a uleiului [42] și a permis studii de uzură, precum și asupra sensibilității și preciziei de măsură în condiții experimentale diferite de : sarcină, viteză, temperatură, materiale, lubrifiant, regim de ungere.

E. MAȘINI DE ÎNCERCAT CU CONTACTUL PE MAI MULTE PORȚIUNI ALE SUFRAFEȚEI CILINDRICE

1. *Instalația cu doi saboți* (cuplu de frecare, fig. 1. 12). Institutul central NAMI din Moscova pentru cercetări în domeniul automobilului utilizează în studiul uzurii și instalația R.M.-NAMI 5, cu izotopi radioactivi, al cărui cuplu de frecare este compus din doi saboți cu suprafață cilindrică care se freacă pe o epruvetă de fontă (mașonată pe un ax de oțel). Pe suprafața de frecare a saboților se prinde o piesă de fontă în coadă de rîndunică, care se iradiază integral sau conține un trasor radioactiv (Fe^{59} sau Co^{60}). Cu două pîrghii se obțin presiuni globale între 20 și 30 kgf/cm^2.

Instalația permite studii de uzură și în prezența unui gaz agresiv (anhidridă sulfuroasă 500 ml/h în proporție de 1/3 față de aer). Pentru menținerea unei anumite temperaturi s-a prevăzut încălzirea arborelui (în interior și exterior) și a uleiului.

2. *Mașini pentru încercarea saboților de frînă.* În laboratoarele de profil din diferite țări există mașini speciale pentru încercarea saboților de frînă, ca, de exemplu, instalația SCNF din Vitry [23], cu doi saboți, care permite încercare a saboților de cale ferată față de un bandaj normal ; se permite totodată determinarea coeficientului de frecare și a uzurii în limite largi de presiune, viteză și temperatură (viteza la 150 km/h și forța radială 10 tf) ; au fost măsurați coeficienți de frecare între 0,12 și 0,45.

3. *Mașina Almen-Wieland* (cuplu, fig. 1. 8). Instalația are un cuplu de frecare format dintr-un arbore de oțel (Ø 6 mm) și doi cuzineți presați cu pîrghii ; frecarea se produce în prezența uleiului. Experiențele decurg

pînă la griparea sau la ruperea arborelui de oţel; se măsoară totodată şi forţa de frecare în raport cu încărcarea (în domeniul sarcinilor mici s-a constatat o proporţionalitate); curba respectivă permite diferenţierea momentului de trecere de la regimul sever de încărcare la cel de rupere.

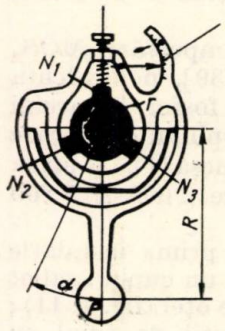


Fig. 8. — Schema sistemului frînă „Martens": *1* — indică valoarea lui N_1; *2* — baia de ulei.

Maşina „Vollet", utilizată la Conservatoire des Arts et Métiers, se compune de asemenea dintr-un ax şi doi cuzineţi. Se măsoară timpul după care se opreşte un volant, antrenat între 1 200 şi 1 400 rot/min şi apoi cuplat la ax; coeficientul de frecare se deduce prin calcul [23].

4. *Fricţiometre.* Dintre instalaţiile realizate pentru studii de frecare menţionăm:

— *„frîna Martens"*, instalaţie cu pendul şi trei saboţi (fig. 8) [29], cu care se poate determina aproximativ forţa tangenţială (forţa de frecare). S-a constatat că, la oprire, grosimea filmului între arbore şi cuzinet este minimă, iar fenomenul este discontinuu (coeficientul de frecare şi grosimeaa filmului). Inerţia pendulului şi lunga perioadă a oscilaţiilor sale nu permit analizarea variaţiilor frecării imediat după începerea rotaţiei arborelui;

— *fricţiograful „Marcellin"* permite înregistrarea forţei de frecare în funcţie de viteză şi în momentul opririi, în condiţiile unei ungeri normale.

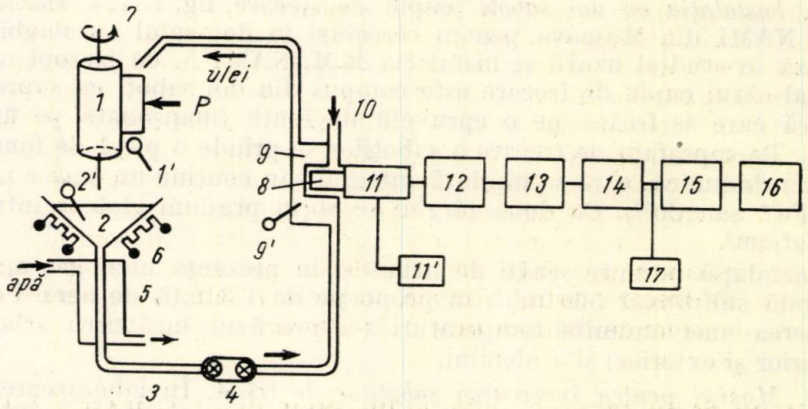


Fig. 9. — Schema sistemului de măsură pentru urmărirea evoluţiei uzurii cu trasori radioactivi:

1 — cuplu de frecare; *2* — baia de ulei; *3* — circuit de ulei; *4* — pompa de ulei; *5* — sistem de termostatare; *6* — sistem de încălzire; *7* — sistem de acţionare; *8* — cristal scintilator; *9* — camera de ulei a traductorului; *10* — sistemul de răcirea scintilatorului; *11* — fotomultiplicator; *12* — preamplificator *13* — amplificator cu pas reglabil; *14* — discriminator de impulsuri; *15* — integrator; *16* — înregistrator automat; *17* — măsurător 11' — alimentare în HT; *1'*, *2'*, *3'* — termoelemente pentru măsurarea temperaturii.

Cu acest sistem de măsură se poate urmări variaţia coeficientului de frecare şi deduce momentele de formare a filmului de ulei. Arborele (Ø

16 mm) şi cuzinetul respectiv sînt confecţionate din diferite metale sau aliaje; se poate realiza o viteză liniară periferică a arborelui pînă la 75 cm/s [29].

5. *Aparate pentru studiul uzurii lagărelor* (fig. 1. 15):

— pentru a elimina regimul hidrodinamic, sistemul realizat în ţară în cadrul fostului Institut de mecanică aplicată [8]) [38] permite, prin comandă electrică, asigurarea unui regim periodic de pornire şi opriri şi de încărcări pînă la 200 kg/cm^2; astfel, printr-un regim de lucru intermitent al lagărului, s-au putut studia anumite materiale antifricţiune (zinc-aluminiu) de înlocuire pentru lagărele de alunecare [43];

— V. Climov prezintă o instalaţie de alt tip (cu resoarte şi pîrghii) de încercare a materialelor de cuzinet la frecare uscată [27];

— asemănătoare maşinii Almen, dar utilizată pentru lagăre de dimensiuni mai mici, este *maşina Batel*; ea permite de asemenea măsurarea coeficientului de frecare la diferite viteze de alunecare, temperaturi, încărcări şi lubrifianţi;

— pentru lagăre mici şi viteze foarte reduse se utilizează şi *maşina Tränkner* [23]:

— *instalaţia VIAM* [36], utilizată de Institutul VIAM-Moscova pentru măsurarea uzurii bucşelor bielei principale (cu argint radioactiv), constituie un alt exemplu de instalaţie clasică pentru studiul uzurii cu trasori radioactivi prin recircularea uleiului.

Menţionăm că în literatura de specialitate sînt întîlnite diferite instalaţii — de la cele mai simple la cele mai complexe, în general utilizînd recircularea uleiului cu produse uzate — pentru studiul uzurii cu trasori radioactivi, metodă răspîndită mai ales în ultimii zece ani [19], [44], [45], [46]. În figura 9 prezentăm schiţa de principiu a unei astfel de instalaţii cu recircularea uleiului; cuplul de frecare poate fi presupus de orice tip. În ultimul timp au apărut şi studii de uzură cu doi trasori radioactivi pentru urmărirea simultană a uzurii ambelor suprafeţe ale cuplului de frecare [46], instalaţiile respective presupunînd două canale spectrometrice cu un singur înregistrator. După părerea noastră, această metodă, care necesită separarea ponderii uzurii prin analiză spectrometrică, deşi principial răspunde necesităţii de a reflecta adevărata evoluţie a uzurii unui cuplu de frecare, totuşi practic, în stadiul actual, este generatoare de însemnate erori de măsură care o limitează.

F. MAŞINI DE ÎNCERCAT CU CONTACTUL ÎNTRE DOUĂ SUPRAFEŢE PLANE DE DIFERITE MĂRIMI

1. *Maşină de încercări la uzură cu două discuri şi două epruvete.* În cadrul Centrului de cercetări tehnice din Timişoara a fost realizată o instalaţie pentru încercări la uzură a oţelurilor utilizate în construcţia maşinilor agricole [47] (fig. 1. 17) care ulterior a fost însă adaptată pentru cercetări de laborator asupra uzurii saboţilor de fontă modificată (conţi-

[8]) Laboratoarele actualei Secţii de lubrificaţie, Institutul de mecanica fluidelor.

nutul optim de fosfor) și a oțelului de bandaje [48] — [50] și rezistență la uzură și coeficientul de frecare al unor materiale aglomerate ca înlocuitoare ale fontei la saboții (talpă) ai vehiculelor de tramvai [51].

Sistemul mecanic asigura frecarea epruvetelor de formă cilindrică de fontă (p-10 kgf/cm²) pe unul dintre cele două discuri de oțel de bandaj

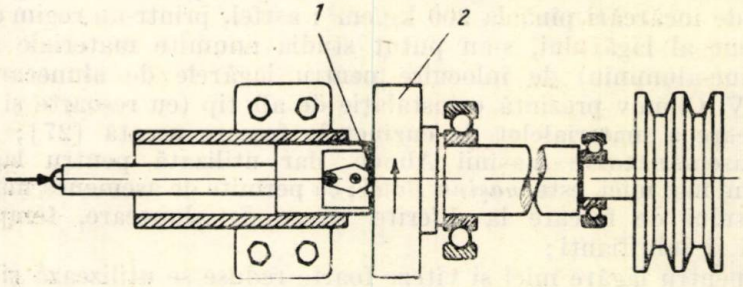


Fig. 10. — Schema instalației utilizate de C. L. Goodzeit pentru studiul gripării cuplului de frecare în condiții de ungere limită :
1 — epruveta fixă ; *2* — discul.

în rotație de exemplu, prin compararea micșorării înălțimii epruvetei de fontă cu aceea a unei epruvete identice de OLC 60 în frecare pe cel de-al doilea disc, se stabilește viteza de uzură.

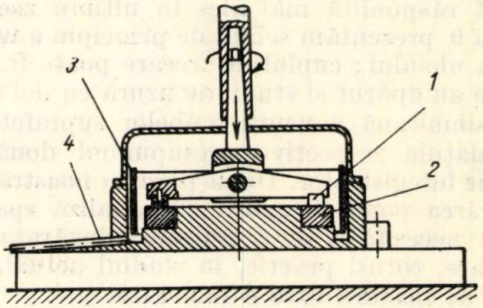


Fig. 11. — Schema instalației lui P. E. Diacenko :
1 — epruveta de oțel ; *2* — inel de oțel ; *3* — defector de ulei ; *4* — conductă de ulei.

Instalația utilizată ulterior de C. L. Goodzeit (fig. 10) se aseamănă cu instalația realizată la Timișoara.

2. *Instalația Diacenko.* Această instalație (fig. 11) a fost construită de prof. dr. P. E. Diacenko de la Institutul „Maşino-vedeniia" al Academiei de Științe a U.R.S.S. pentru studiul uzurii în prezența diferiților lubrifianți. Cuplul de frecare este compus dintr-un inel de oțel pe care freacă doi galeți de oțel (se iradiază una dintre piese). Instalația se poate fixa la o mașină de găurit cu stativ.

3. Au fost realizate de asemenea şi maşini de încercat cu *suprafeţe de contact plane de egală mărime* (coroană circulară). Un astfel de cuplu de frecare (fig. 1. 18) îl are maşina I — 47 (Bogatirev) (fig. 12), utilizată de I. V. Kraghelski şi E. M. Zbeţova pentru studiul vitezei de alunecare, în frecare uscată, asupra uzurii metalelor de acelaşi fel. O serie de încercări s-au făcut cu materiale supuse unei ecruisări înaintate prin laminare; încercările s-au executat atît prin mărirea succesivă a vitezei, cît şi trecîndu-se de la viteze mai mari la viteze mai mici [7].

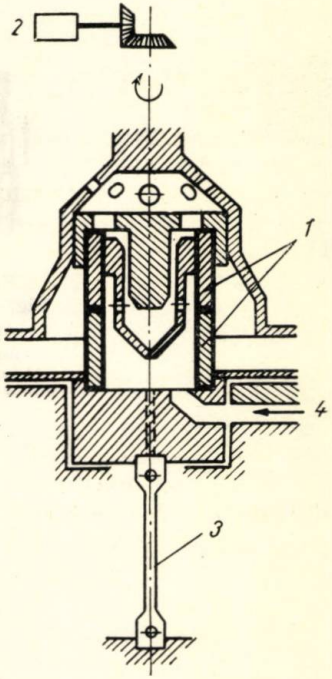


Fig. 12. — Schema instalaţiei I—47: *1* — epruvetele; *2* — contor de rotaţie; *3* — bară de torsiune flexibilă; *4* — canal pentru introducerea aerului.

Se observă că, pentru studiul proprietăţilor de antifricţiune şi antiuzură a maselor plastice, unii autori au înlocuit la o instalaţie tip patru bile cuplul de frecare caracteristic cu cel menţionat mai sus (fig. 9) [52].

4. *Maşina de ştift şi suprafaţă plană* (cuplu de frecare, fig. 1. 17). Acest tip de maşină (atribuită lui Whitehaed) a fost utilizată în special de Bowden şi Tabor [4] pentru a examina comportarea la frecare a suprafeţelor sub *sarcini reduse*. Schiţa unui astfel de aparat este prezentată în figura 13 [5], [53]; viteza relativă între discul cu suprafaţă plană în rotaţie şi piesa fixă (de dimensiuni reduse) este de ordinul 0,01 cm/s; sarcinile variază de la cîteva miligrame la 100 g; variaţia forţei de frecare se înregistrează electric.

Aparat pentru studiul fenomenului „stik-slip". În figura 14 [6] prezentăm o instalaţie utilizată de E. Rabinowicz pentru studiul procesului *stick-slip* amintit în lucrarea [1]. Studii similare au preocupat şi pe alţi autori. Recent, Hunt, Torbe şi Spencer au subliniat că mişcarea *stick-slip* poate apărea cînd un corp alunecă, la viteze reduse, de-a lungul unei suprafeţe prelucrate, cu sau fără lubrifiant; ei sînt de părere că acest tip de mişcare întîlnit în funcţionarea maşinilor-unelte limitează precizia. Pentru studiul fenomenului au imaginat un aparat de tipul resort-bloc asemănător celui utilizat de Rabinowicz. În experienţele făcute în prezenţa diferitor lubrifianţi au utilizat un pat de strung de 2,40 m lungime (sarcini peste 500 kg şi viteze între 2,5 cm/min şi 2,5 m/min; autorii indică 26 μ pentru rugozităţile suprafeţelor (în cele două sensuri de prelucrare [54].

O instalaţie pentru studiul uzurii maselor plastice în condiţii de vacuum înalt şi medii gazoase (teza de candidat în ştiinţe a lui Vefa Mustafaev Abdul Ali Oglu) a fost realizată la Institutul de sinteza petrolului şi a gazului al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S.; permite experienţe în vacuum

10^{-6}—10^{-7} la viteze și sarcini reduse (1/1 000—1,7 cm/s) și, respectiv, 10—1 000 g); cuplul de frecare este format din: știft de oțel (bară sau bilă de Ø 4), cupru sau plastic și disc plan în rotație de oțel, plastic sau

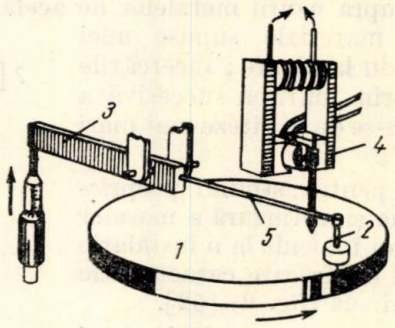


Fig. — 13. Schița aparatului pentru măsurarea frecării la sarcini reduse:

1 — discul; *2* — epruveta fixă; *3* — sistemul de încărcare și măsură a sarcinei; *4* — galvanometru pentru măsurarea încovoierii pîrghiei 5 în plan orizontal (forța de frecare).

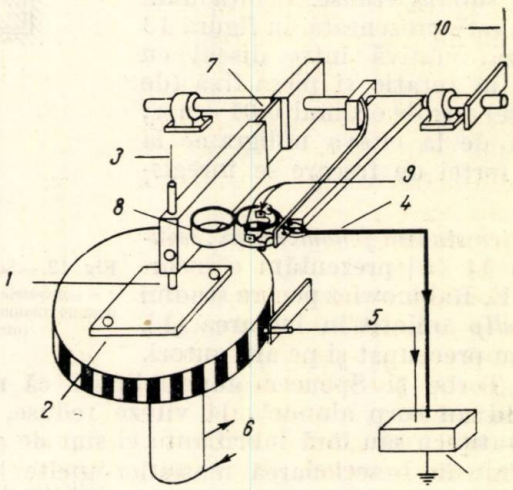


Fig. 14.— Schema instalației utilizate de E. Rabinowicz pentru studiul procesului „stick-slip”:

1 — *2* cuplul de frecare; *3* — sarcina; *4* — circuitul „Stick-slip”; *5* — circuitul de timp; *6* — spre electromotor; *7* — resort lamelar; *8* — inelul deformabil; *9* — mărci tensometrice; *10* — sistemul de înregistrare a încărcării.

cu suprafață abrazivă. De remarcat că se utilizează ambele tipuri de contacte (fig. 1. 11 și 1. 12), trecîndu-se deci la un contact punctiform (asemănător mașinilor cu bile). Au fost efectuate încercări: oțel-oțel, plastic-plastic, oțel-plastic, în gama de temperaturi de la — 90 la + 250°C

în funcţie de cuplul de frecare. Pentru a se realiza temperaturi joase, axul discului este răcit cu alcool, la rîndul său răcit în azot lichid ; pentru temperaturi înalte se utilizează o rezistenţă electrică. Un mecanism permite să se regleze mişcarea relativă astfel încît ştiftul să descrie un cerc sau o spirală.

Contactul punctiform (ştift emisferic — disc) este folosit în diferite alte instalaţii pentru studiul uzurii metalelor, dintre care remarcăm :

— instalaţia specială cu vacuum înalt (10^{-9}) pentru studiul frecării şi uzurii metalelor în cazul prezenţei carbonului [55] ;

— *instalaţia Kingsbury* [5], utilizată pentru măsurarea frecării filmului de lubrifiant solid pînă la temperaturi de 650°C, întregul sistem fiind plasat într-un cuptor electric ; urma de uzură este circulară ; prin varierea excentricităţii poziţiei piesei fixe se obţin diverse viteze ; forţa de frecare este măsurată pe cale electrică ;

— *aparatul de frecare şi uzură în atmosferă gazoasă*, utilizat de E. Bisson în laboratoarele NASA (Lewis Research Laboratory) schiţat în figura 15 [56] pentru studii la temperaturi înalte pînă la 815°C şi joase pînă la —250°C, în atmosferă de azot şi de hidrogen lichid. S-a putut demonstra lubrificarea cu grafit la diferite temperaturi, limitîndu-se cantitatea de oxigen. De asemenea s-a constatat că bisulfura de molibden (praf) rezistă pînă la 400°C, grafitul pînă la 500°C, iar straturile de frecare ceramice (95% oxid de Pb şi 5% siliciu) pînă la 800°C ; florura de calciu permite temperaturi mai mari. Pentru funcţionarea în mediu de azot sau hidrogen lichid este necesară construirea garniturilor din materiale autolubrifiante (teflon, carbon sau mase plastice) ;

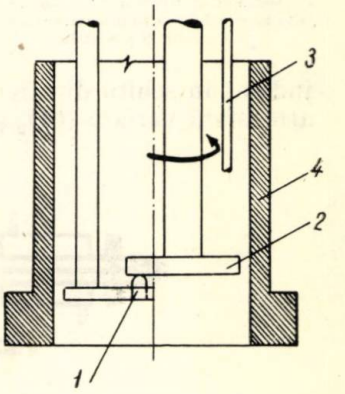


Fig. 15. — Schema instalaţiei de frecare şi uzură la temperaturi ridicate şi joase, în mediu gazos.
1 — indice fix ; *2* — disc ; *3* — conductă pentru admisia gazului ; *4* — cuptor.

— *aparat pentru studiul „frecării-limită"*, intitulat astfel de L. F. Coffin Jr, care l-a utilizat în condiţii variate de mediu (oxigen, heliu, hidrogen, apă, aer), urmărind coeficientul de frecare şi pata de uzură. Cuplurile de frecare (fig. 5 *a-b*) : ac de cupru — disc nichel ştift de nichel — disc de oţel, sau cuplurile : zinc — oţel, tungsten — aluminiu, molibden — cupru, safir — nichel, safir — aur, safir — argint [57].

Remarcăm tendinţa de a se reduce suprafaţa de contact [9]), cuplul ac-suprafaţă plană (fig. 1. 5*a*) fiind utilizat şi de alţi cercetători [4] ; amintim experienţele lui Kerridge, care a studiat etapele procesului de uzură şi de transfer de metal cu un cuplu similar [2], [5].

7. *Maşini cu mişcare alternativă* (cuplu de frecare, fig. 1. 19 şi 1. 20). Instalaţiile de acest gen [7] permit încercări de frecare de alunecare

[9]) Pentru a sublinia această tendinţă, am prezentat aici această categorie de instalaţii, care aparţine primei clase : cu contact punctiform.

rectilinie alternativă cu viteze medii între 0,5 și 1,5 m/s (vitezele maxime corespunzătoare fiind 0,79 și 2,36 m/s, iar numărul de curse pe minut: 150 și 450). La unele mașini, lungimea cursei complete (dus-întors) este de 200 mm; s-a ales o anumită lungime de frecare pentru fiecare încercare: 1 km (5 000 curse complete) sau mai mult; de exemplu, uzura se determină în g/cm² la 10 km.

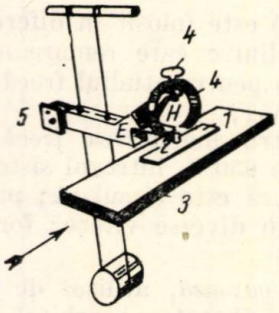


Fig. 16. — Schema aparatului Bowden-Leben pentru măsurarea frecării în condiții de ungere limită:

1 — 2 — cuplul de frecare; *3* — piesa suport cu mișcare de „du-te-vino"; *4* — sistemul de încărcare; *5* — oglinda galvanometrului pentru măsurarea temperaturii la suprafață.

O instalație de acest tip pentru măsurarea frecării în prezența filmului-limită este și aparatul cunoscut sub numele *mașina Bowden-Leben* (fig. 16), de asemenea larg răspîndită (descrisă de Bowden și Tabor în [4]). Frecarea se efectuează între o suprafață plană în mișcare și o mică piesă fixă cu suprafață curbă, iar sarcina se obține prin presarea unei piese lamelare de oțel. Sistemul lucrează la sarcini mari și viteze de alunecare reduse. Temperatura suprafeței de frecare se determină cu un galvanometru cu oglindă, fiind înregistrată și automat.

Mai recent, Heath, Philips și Rowe [5] au prezentat în lucrările lor de asemenea mașini de uzură de tipul alternativ; aparatul de uzură *Heath și Philips*, având cuplul de frecare o piesă cilindrică și o suprafață plană, este indicat în schița din figura 17; a fost utilizat pentru studii de uzură în atmosferă variată (CO_2 și vacuum). Este prevăzut cu elemente de încălzire

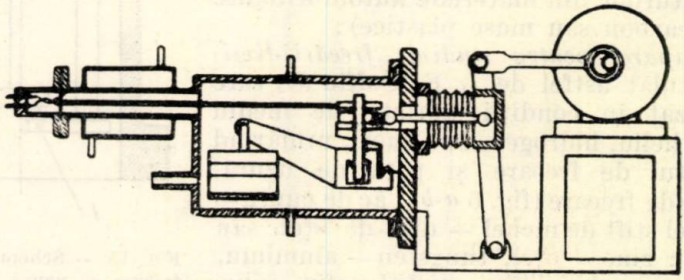


Fig. 17. — Mașina Heath și Philips pentru studiul uzurii în mișcarea alternativă.

pentru temperaturi pînă la 400°C; forța de frecare se măsoară cu traductor rezistiv și se înregistrează pe oscilograf.

Aparatul lui Rowe a fost construit pentru experimentări de mare sensibilitate în vacuum și la temperaturi înalte; o pompă cu vapori de silicon asigură un vid de $5-10^{-7}$ mm Hg. La acest sistem placa plană este fixă, în timp ce piesa mică execută mișcarea de du-te-vino (lagărul care asigură mișcarea are bile de safir); învelișul aparatului este construit din silită.

În U.R.S.S. este utilizată *maşina 77-Mt-1 a lui Poleakov şi Garkunov* [7]. Este interesant că o epruvetă cu suprafaţă mai mică este fixă şi presată (10—60 kgf) prin intermediul unui dispozitiv de pîrgii pe o glisieră mobilă (mişcată cu un mecanism de manivelă : 100—400 de curse duble pe minut).

De asemenea, la Institutul Unional de studii de cale ferată din Moscova, *T. V. Larin* şi *B. M. Astaskievici* au perfecţionat acest sistem, realizînd o maşină de gabarit mai mare cu patru axe principale şi mişcare de du-te-vino (forţa de frecare se determină cu tensometre, iar uzura prin cîntărire sau prin măsurarea adîncimii urmei).

În lucrarea [27] se prezintă şi o instalaţie pentru *încercarea la uzură a ghidurilor de supape* (fig. 18), care reproduce condiţiile din exploatare : cursa, viteza şi acceleraţia supapelor, temperatura ghidurilor etc. Uzura ghidului se determină prin micrometrare sau prin cîntărire.

În R. P. Ungară, L. Támás utilizează pentru studiul proprietăţilor de ungere a lubrifianţilor şi aditivilor un sistem simplu de mişcare alternativă cu un singur cuplu de frecare, pe una dintre suprafeţe fiind depus un strat de argint radioactiv [58].

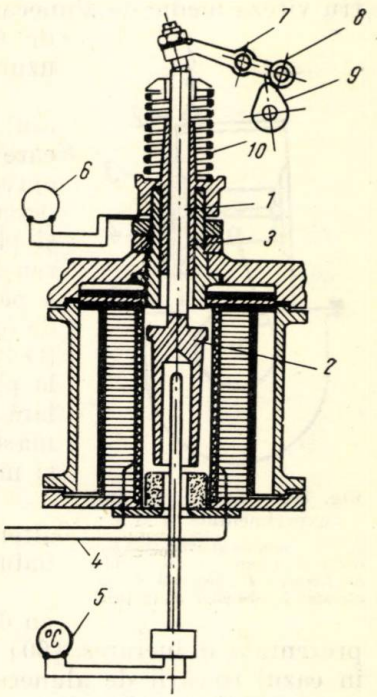


Fig. 18. — Schiţa maşinei pentru încercarea la uzură a ghidurilor de supape :

1—2 — piesa de transmitere ; *3* — ghidul de supapă ; *4* — circuit de încălzire a capătului *2* ; *5* — *6* pirometre ; *7* — *10* — mecanism de reproducere a mişcărilor supapei.

Monocilindrul experimental IMA. Instalaţia din figura 19 [38], [59] a fost utilizată pentru studiul comportării la uzură şi rodaj a unor aliaje de aluminiu cu două tipuri de fonte. Cuplul piston-cilindru era reprezentat prin epruvetele de aluminiu (4×5×30) sub forma unui segment şi, respectiv, epruveta conjugată din fontă (suprafaţa 30×150). Instalaţia modelează, de fapt, un motor monocilindric şi realizează următoarele condiţii de frecare : ungere cu ceaţă de ulei ; sarcină specifică medie 4 kgf/cm^2 ; viteza de deplasare a pistonului 3 m/s ; temperatura epruvetei de fontă 250°C, obţinută cu o rezistenţă electrică.

— În R.D.G. Wenderoth a susţinut o teză de disertaţie privind studiul influenţei grafitului coloidal şi a bisulfurii de molibden asupra proprietăţilor suprafeţelor de alunecare (fontă cenuşie) şi formarea unei suprafeţe rezistente la uzură şi la coroziune (Hirst Beilby) în motoare. El a utilizat o instalaţie cu două cuple de frecare în mişcare de du-te-vino [11] ; cuplul de frecare este format dintr-o rolă (Ø 8 × 10 mm), prinsă fix, şi o placă orizontală (115×15×3), prin analogie prima reprezentînd

segmentul, iar placa cilindrul. Autorul şi-a propus realizarea unui regim mixt de ungere „prin alimentare continuă". Au fost studiaţi diferiţi lubrifianţi şi aditivi în condiţii variate de temperatură ; valoarea maximă pentru viteza medie de alunecare este de 6 m/s (s-a utilizat şi o viteză medie de 0,3 m/s) ; determinarea urmei pe placă şi a uzurii rolei se face după 36 km parcurşi pe rolă.

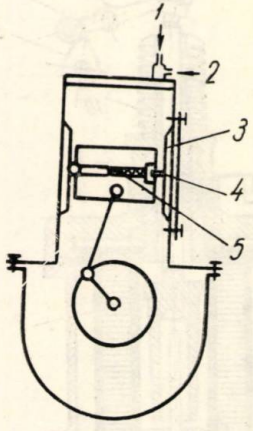


Fig. 19. — Schiţa maşinii experimentale I.M.A : *1 – 2* – admisia şi evacuarea mediului de ungere ; *3 – 4* – cuplul de frecare ; *4* – sistemul de încărcare ; *6* – sistemul de încălzire.

Autorul a realizat şi a utilizat pentru studiul uzurii o instalaţie cu mişcare alternativă care a asigurat frecarea simultană a trei perechi de epruvete [34] şi apoi o altă instalaţie cu şase perechi de epruvete ; prin utilizarea a două biele şi plasarea simetrică a cuplurilor în frecare s-a reuşit eliminarea vibraţiilor. Un astfel de sistem a permis, de exemplu, studierea uzurii ghidajelor de fontă ale maşinilor unelte. Epruvetele mobile (Ø 12) sînt încărcate cu un sistem de resoarte ; la plăcile de bază fixe cu suprafaţă dreptunghiulară (90×18) s-a adoptat un sistem original de măsurare a forţei de frecare cu traductori rezistivi şi urmărirea pe oscilograf.

În afară de maşinile-machete cu mişcare alternativă, sînt utilizate şi instalaţii de tip industrial.

Autorul a utilizat un compresor frigorific cu doi cilindri, amenajînd o instalaţie de măsură prezentată în lucrarea [60] pentru studiul factorilor mecanici şi chimici în cazul frecării de alunecare mixte sau limită (cu trasori radioactivi sau metodă gravimetrică).

De asemenea în ţara noastră remarcăm cercetările lui D. Raşeev şi colab. asupra cuplului piston cilindru ale pompelor de extracţie, făcute în mediu abraziv pe maşina de laborator I.P.G.T.2 (cuplu de frecare fig. 1. 20) — încercări de scurtă durată şi pe standul de probă I.P.G.-1-RM (încercări de lungă durată în condiţii apropiate lucrului din schelă) [66].

Institutul NAMI pentru studiul motoarelor de automobil (Moscova) utilizează şi o autodubă-laborator pentru studiul uzurii cu izotopi radioactivi a motoarelor în condiţii de exploatare. Autoduba conţine de fapt instalaţiile de măsură şi înregistrare care se cuplează la autovehiculele în studiu (la ale căror motoare se montează segmenţi radioactivi) [62].

De asemenea la Institutul NATI pentru studiul motoarelor de tractor (Moscova) se fac studii de uzură a segmenţilor de fontă direct pe motorul respectiv [36]. Segmenţilor li se introduc ştifturi de zinc sau de cobalt radioactiv (Ø 0,6 şi 1 mm h). Menţionăm şi studiile în regim abraziv (realizat cu praf în aerul de aspiraţie) corespunzătoare situaţiei de pe teren.

La Institutul pentru studiul motoarelor de automobil din Praga se studiază de asemenea cu izotopi radioactivi uzura motoarelor Skoda (în laborator şi apoi pe parcurs, folosind acelaşi motor). Remarcăm că

viteza de uzură se măsoară în mg/100 km în cazul probei de teren și în mg/100 min în cazul probei de laborator.

Cercetări cu sisteme bazate pe principii similare se fac în S.U.A., Franța, Anglia, R.F.G. etc. [61]—[63].

Mașinile-pendul constituie o altă categorie de aparate de încercat la uzură cu mișcare alternativă. În afară de sistemul amintit cu trei saboți (pendulul Martens. fig. 8), Gläser și colaboratorii săi au utilizat un nou sistem pentru studiul lubrifianților în cazul unei game de temperatură între —35 și +800°C. La acest tip, față de situația cu trei saboți, se utilizează un lagăr plasat de asemenea la baza ciocanului pendulului care poate oscila începînd de la un unghi de 45° [5].

— *Tamai* a utilizat un aparat asemănător (mai mic și cu unghi maxim de 28°) pentru studii de alunecare cu următoarele metale : aur, argint, cupru și platină, încărcarea maximă fiind 100 g, iar viteza de alunecare maximă 3 mm/s [5].

Remarcăm că variația vitezei în cursul unei perioade constituie un impediment, putîndu-se schimba regimul de ungere și, în consecință, viteza de uzură ; unii autori menționează de asemenea și caracterul diferit al deformării asperităților superficiale în condiții de contact plastic [7].

Cu toate acestea se remarcă că acest tip de mașină de încercare este larg răspîndit datorită modelării unor mișcări și tipuri de frecări întîlnite în practică (motoare, mașini-unelte etc.).

G. MAȘINI DE ÎNCERCARE LA UZURĂ PRIN METODA AMPRENTEI

Dintre instalațiile care utilizează acest sistem de sesizare a evoluției uzurii, menționăm *mașina de încercare la uzură prin zgîriere*, realizată de M. M. Hrușciov și E. S. Bercovici ; autorii au imaginat o nouă metodă

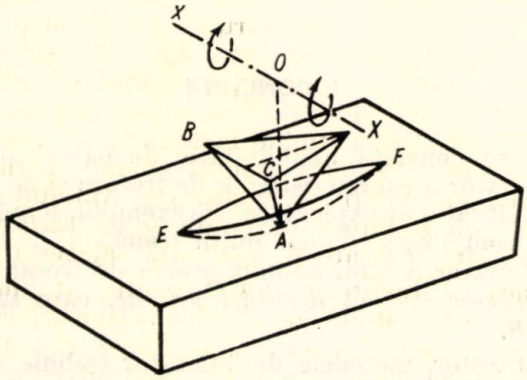


Fig. 20. — Schița marcării amprentei la sistemul HB, cu o piramidă triunghiulară dură.

pentru determinarea uzurii organelor de mașini, și anume prin zgîrierea prealabilă a unor „semilune", ca în figura 20, și determinarea uzurii pe cale optică în funcție de reducerea amprentei. Pe acest principiu s-a

construit în U.R.S.S. instalația de măsură industrială UPOI-6 [64] pentru măsura uzurii segmenților, cămășilor de cilindru, cuzineților, arborilor cotiți etc.

H. METODE PENTRU DETERMINAREA APROPIERII ȘI A SUFRAFEȚEI REALE DE CONTACT

Determinarea apropierii nu a fost folosită mult timp ca factor în analiza procesului de frecare și uzură, deși, au fost făcute aprecieri teoretice; în prezent nu există metode răspîndite în această privință, deși acestei probleme i se acordă o atenție sporită [65]. Menționăm dificultatea măsurării directe a apropierii suprafețelor rugoase, cauzată de mărimea deformației asperităților la compresiunea a două suprafețe, comparativ cu deformația de volum a corpurilor respective.

Au fost propuse diferite metode: măsurarea apropierii totale a corpurilor (suma deformației de volum și superficiale), măsurarea rezistenței electrice a contactului suprafețelor rugoase, aplicarea izotopilor și luminoforilor pentru determinarea suprafeței de tangență etc. Kraghelski apreciază ca o metodă sugestivă metoda „celor două modele transparente", elaborate în laboratorul de frecare al fostului Institut de mașini al Academiei de Științe a U.R.S.S. [7], care se bazează pe difracția diferită a luminii în punctele de tangență reală și în goluri.

În orice caz, toate aceste metode sînt afectate de erori importante. Dacă avem în vedere caracterul variat al stării de rugozitate în funcție de gradul de uzură al suprafeței [26], reflectat cu palpatoare sensibile, apreciem că erorile de măsură în determinarea apropierii descresc pe măsura evoluției procesului de frecare-uzură de la faza inițială la cea de stabilizare (netezire).

I. CONCLUZII

În general se constată unanimitate de păreri asupra faptului că evaluarea în laborator a caracteristicilor de frecare și de uzură conduce la diferențe față de situația de exploatare. De exemplu, Kraghelski o consideră chiar mult mai complicată și mai puțin exactă [7], arătînd că pentru modelarea în laborator a unui anumit proces de frecare și de uzură din exploatare sînt necesare *două modelări diferite*, care să poată cuprinde toți factorii reali.

După acest autor, metodele de laborator trebuie să poată îndeplini următoarele condiții:

— să producă același coeficient de acoperire reciprocă și aceeași viteză de alunecare;

— să mențină presiunea specifică reală și să permită determinarea suprafeței reale de contact;

— variind condiţiile de degajare a căldurii, să se creeze temperatura de contact egală cu cea de exploatare (inclusiv variaţia gradientului de temperatură);

— să se poată măsura coeficientul şi forţa de frecare şi să se poată calcula forţa de frecare specifică, care să coincidă cu cea din exploatare;

— epruvetele să reproducă cuplurile de frecare reale, rugozitatea reală şi caracterul peliculelor de lubrifiant existent în exploatare.

Faţă de această gamă de condiţii şi parametri, alţi autori apreciază, cu unele excepţii, că nu există rezultate comparative între diferitele sisteme de încercat la frecare şi uzură. Astfel. W.G. Forbes [5], după ce enumără principalele maşini pentru determinarea calităţilor de încercare a lubrifianţilor : maşini cu piese normale (lagăre, roţi dinţate, rulmenţi etc.), maşina S.A.E. (Society of Automative Engineers), maşina Timken, maşina General Motors, maşina Almen, maşina cu patru bile, maşina Falex, este de părere că aceste instalaţii principial diferite, deşi furnizează anumite date, nu sînt în concordanţă ; cu alte cuvinte, un ulei care suportă pe o maşină sarcini ridicate poate suporta pe alta, sarcini reduse.

Pe de altă parte, Braithwaite afirmă, în urma unei comparaţii între rezultatele obţinute cu maşina Almen-Wieland, maşina Falex şi maşina cu patru bile în condiţii similare de temperatură, încărcare specifică şi viteză de alunecare, că se pot obţine totuşi rezultate concordante între diferite tipuri de maşini de frecare-uzură.

Trebuie ţinut seama de faptul că încărcarea specifică creşte după tipul cuplului de frecare în ordinea sistemelor de mai sus, iar la frecarea-limită declanşarea anumitor efecte chimice necesită anumite condiţii de temperatură. În privinţa calităţilor de ungere a unor uleiuri s-au apropiat rezultatele mai mult între maşina Falex şi cea cu patru bile ; de asemenea între maşina cu patru bile şi bancul de uzură al roţilor dinţate.

Cu instalaţia pentru roţi dinţate (Heidebrock) şi instalaţia pentru lagăre mici a lui Tränkner s-au găsit aproape valori egale ale coeficientului de frecare în cazul anumitor uleiuri şi viteze de alunecare. În această privinţă, între valorile găsite cu maşina S.A.E. şi maşina Timken, pe de o parte, şi cu aparatul cu patru bile (încărcarea de gripare pentru 2,5 s), pe de altă parte, nu a putut fi stabilită nici o relaţie univocă.

În orice caz este de reţinut părerea exprimată de autorul englez, care, bazîndu-se pe experienţa de mai mulţi ani a laboratoarelor A.E.I. din Aldermaston, recomandă un aparat simplu (cuplu de frecare : ac — inel) care să asigure reproductivitatea în cazul unui tip de uzură [5].

Faţă de experienţa cîştigată în ţară de peste zece ani, considerăm că instalaţiile de laborator sînt totuşi extrem de utile atît pentru studii privind fenomenul frecare-uzură, cît şi diferite aplicaţii ; de exemplu, utilitatea în cazul determinării a acţiunii diferitor factori asupra calităţii de a suporta sarcini a variatelor feluri de lubrifianţi. În general o parte din instalaţiile de laborator enunţate, dacă nu se bazează pe cupluri principial greşite, *nu dau diferenţe importante* între uleiurile minerale pure. Ele au fost concepute mai ales pentru studierea gripajului şi proprietăţilor de antiuzură, pentru care încercarea trebuie să rupă filmul de lubrifiant şi astfel să pună în contact suprafeţele de metal.

Am subliniat în lucrările noastre că anumite tipuri de mașini pentru *studiul uzurii în prezența lubrifiantului* pot fi uneori *principial greșite* față de scopul propus. Considerăm că în această situație se află toate acelea al cărui cuplu de frecare permite crearea, independent de voința experimentatorului, a regimului hidrodinamic (de exemplu cuplurile de frecare din figurile 1. 6—1. 8, precum și cele care au drept cuplu de frecare un lagăr).

Deși a rezultat că unii autori au utilizat același tip de instalație experimentală în variate studii (de exemplu mașini cu patru bile) [8], [14], [16] [18] etc., subliniem necesitatea corelării instalației cu fenomenul în special prin prisma cuplului de frecare (geometria și contactul) și caracterului cinematic.

Sîntem de părere că tipul mașinii de modelare este impus de condițiile de exploatare și că o singură mașină de un anumit tip nu poate acoperi decît o gamă redusă de aspecte. Se pot obține date apropiate dacă se compară tipurile de mașini ale *aceleiași categorii*, stabilită pe baza tipului de contact al cuplului de frecare (și, bineînțeles, în condițiile celorlalți parametri egali). De asemenea sînt absolut indispensabile studierea și cunoașterea amănunțită a condițiilor de funcționare, performențelor și erorilor instalației respective, precum și adîncirea cercetărilor experimentale privind evoluția uzurii sau a coeficientului de frecare prin metode moderne de investigație a stării de suprafață, care completează metalografia, optica clasică, cu microscopia electronică, difracția electronilor pe suprafață, difracția razelor X. așa cum se desprinde din lucrările din ultimii ani ale unor autori din S.U.A., Japonia, U.R.S.S. și Anglia.

Utilizarea instalațiilor adecvate metodelor radiometrice se dovedește din ce în ce mai răspîndită mai ales în studii ce urmăresc evoluția globală a uzurii. Autorul a studiat limitarea acestei metode în cercetările asupra evoluției fenomenului uzurii [33], [34].

Dintre instalațiile privind studiul uzurii privite prin prisma cuplului de frecare, mai răspîndite sînt îndeosebi sistemele : patru bile, Timken, Amsler și S.A.E. ; pentru studii privind fenomenul de frecare, transferul de metal, producerea uzurii etc., se preferă mașinile cu contact punctiform (ac), datorită reproductibilității sporite.

Din punctul de vedere al clasificării după criteriul cinematic constatăm că mașinile cu mișcare alternativă sînt de asemenea răspîndite atît pentru studii de frecare, cît și de uzură ; se remarcă utilizarea diferitor cupluri de frecare : bilă — două plăci plane, Timken, Amsler, ac sau semisferă și suprafață plană, două suprafețe plane, două sau trei suprafețe cilindrice etc., determinarea uzurii fiind făcută prin metode obișnuite sau radioactive.

Indiferent de sistemul ales pentru modelarea unui proces de frecare, subliniem necesitatea verificării în exploatare a rezultatelor obținute în laborator, ținîndu-se seama în același timp și de caracterul statistic al acestor determinări.

Primită la redacție la 2 martie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. D. Pavelescu, *Stadiul actual al cercetărilor în domeniul uzurii. Evoluția concepțiilor asupra frecării*, St. cerc. metalurg., Timișoara, *1* (1966).
2. — *Evoluția și stadiul cercetărilor asupra uzurii. Aspecte metalurgice asupra frecării și uzurii*, St. cerc. metalurg., Timișoara, *2* (1966).
3. — *Metode de calcul la uzură și utilizarea în construcția de mașini*, St. cerc. mec. apl., *3* (1966).
4. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solid*, II, Oxford et the Clarendon Press, 1964.
5. E. R. Breithwaite, *Solid Lubrification and Surfaces*, London, Pergamon Press, 1964, p. 1—29.
6. E. Rabinowicz, *Friction and Wear of Materials*, London, Wiley, 1965.
7. И. В. Крагелски, *Трение и износ*, Москва, Машгиз, 1962.
8. J. J. Coubert, *Théorie et pratique industrielle du frottement*, Paris, Ed. Technic-Dunod, 1964, p. 348.
9. M. M. Hrusciov, *Tendințe actuale în dezvoltarea științei asupra rezistenței la uzură a materialelor. Probleme noi de ungere în uzură*, vol. I, Extr. din Lucr. Conf. a III-a unională, Inst. de mașini al Academiei de Științe a U.R.S.S., Moscova, 1958, I.D.T., Buc., 1962, p. 9—16.
10. D. Pavelescu, I. Iliuc, S. Barbul, *Studiul unei metode radioactive pentru aprecierea calităților lubrifiante ale uleiurilor aditivate prin prisma uzurii suprafețelor*, II, St. cerc. mec. apl., *1*, p. 200 (1962).
11. G. H. Wenderoth, *Untersuchungen über den Verschleiss von Grauguss mit einer Prüfmaschine für hin und hergehende Bewegung*, Dissert. Techn., D. 83, Univers. Berlin, 1960.
12. H. H. Zuidema, *The Performance of Lubrication Oils*, New York, Reinhold Publishing Co., 1952, p. 2—8.
13. D. Godfrey, *Boundary Lubrication*, Proceed. Internat. Symp. on Lubricant. and Wear, Huston, Ed. D. Muster, B. Steanlicht, 1965, p. 286.
14. J. Pomey, *Le frottement lubrifié sous conditions sévères*, Revue de l'Inst. Franç. du Pétrole, **XII**, *6*, 753—780 (1957).
15. M. R. Mustafa, *Considerații asupra determinării temperaturii de rupere a filmului de lubrifiant*, Conf. de mecanică aplicată, București, sept., 1965.
16. G. Țurcan, V. G. Vinogradov, *O nouă mașină cu 4 bile pentru aprecierea proprietăților de antiuzură ale uleiurilor lubrifiante*, I.D.T., din Zavod. lab., **23**, *11*, 1 394—1 396 (1959).
17. Ch. Spar, F. Damasco, *High-Temperature Fluid Lubrication*, ASLE Trans, *7*, 214 (1964).
18. G. V. Vinogradov, Iu. Ia. Podolskii, M. D. Bezborodko, *Utilizarea mașinii cu contact punctiform pentru evaluarea uzurii metalelor* (trad.), Izdat. Akad. Nauk SSSR, 1962, Trudî soveținaia, sostoia, *7—10*, 156—157 (1957).
19. E. T. Tallian și colab., *Lubricant Films in Rolling Contact of Rough Surfaces*, ASLE Trans, *7*, 109—120 (1964).
20. S. Feyer, I. Precup, *Aditivi pentru uleiuri minerale*, București, Edit. tehnică, 1964.
21. F. P. Bowden, *Recent Experimental Studies of Solid Friction*, Detroit, Proc. of the Symp. on Fr. and Wear, 1957.
22. R. C. Drutowski, *Energy Losses of Balls Rolling on Plates*, Detroit, Proc. of the Symp. on Fr. and Wear, 1957, p. 18.
23. * * * *Les essais de frottement et d'usure des matériaux*, Machine Moderne, Février 1964, p. 49—52.
24. G. F. Rounds, *Effects of Additives on the Friction of Steel on Steel*, I. *Surface Topography and Film Composition Studies*, ASLE Trans, *7*, 11—23 (1964).
25. S. G. Reichenbach și colab., *Lubricant Behavoir in High Vacuum*, ASLE Trans, *7*, 82—80 (1964).
26. J. Pons, *Étude de certains éxemples de l'influence du frottement sec et lubrifié sur la modification des couches superficielles des metaux*, Rev. J.F.P., **XV**, *10*, 1 483 — 1 493 (1960).

27. V. Climov, *Încercarea motoarelor Diesel de tracțiune feroviară*, București, Edit. transp. și telecomunicații, 1962, p. 240—243.
28. A. Chisu, T. Maros și colab., *Contribuții asupra cercetării uzurii roților dințate cu ajutorul izotopilor radioactivi*, St. cer. mec. apl., *6*, 1 549—1 556 (1962).
29. * * * *Les essais de frottement et d'usure des matériaux*, Machine Moderne, Dec. 1963, p. 55—64.
30. M. M. Hrusciov, M. A. Bibicev, *Metodă de încercare a metalelor de uzură prin frecare în prezența unui lichid* (trad.), I.D.T., București, 1956. Frecare și uzură, *X*, p. 40—48.
31. D. Pavelescu, I. Iliuc, S. Barbul, *Studiul unei metode radioactive pentru aprecierea calităților lubrifiante a uleiurilor prin prisma uzurii suprafețelor*, St. cerc. mec. apl., 2 (1961).
32. D. Pavelescu, I. Iliuc, *Aspecte privind evoluția uzurii și temperaturii unor cupluri radioactive bronz-oțel*, St. cerc. mec. apl., *1* (1963).
33. D. Pavelescu, *Cu privire la erorile de măsură și ponderea acestor erori în cazul studiului uzurii cu izotopi radioactivi*, St. cerc. mec. apl., *3* (1963).
34. — *Aspecte ale evoluției uzurii legate de caracterul statistic al metodei de măsură cu izotopi radioactivi*, St. cerc. mec. apl., *6* (1965).
35. I. Iliuc, *Evoluția coeficientului de frecare la un cuplu cu trei contacte liniare*, St. cerc. mec. apl., *3* (1966).
36. Е. П. Дьяченко, *Применения радиоактивных изотопов в технике*, Москва, Машгиз, 1958, p. 95—153.
37. L. Rozeanu, O. Preoțescu, *Câteva aspecte fundamentale ale proceselor de uzură*, St. cerc. mec. apl., **IX**, *1*, 170—181 (1958).
38. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica, O. Niță, *Lagăre cu alunecare*, București, Edit. Acad. R.P.R., 1961, p. 36—37 și 373—397.
39. Olga Biță, I. Dincă, *Aspecte ale frecării și uzurii în cazul lubrifierii cu bisulfură de molibden*, St. cerc. mec. apl., **18**, *2*, 250—251 (1965).
40. — *Aspecte ale influenței suprafețelor în frecare asupra rezistenței la abraziune*, St. cerc. mec. apl., **13**, *2*, 409—418 (1962).
41. — *Comportarea la sarcini ridicate a unor aditivi pe bază de fosfor*, St. cerc. mec. apl., **13**, *5*, 1 223—1 224 (1962).
42. D. Pavelescu și colab., *Metodă pentru studiul uzurii lagărelor cu izotopi radioactivi*, St. cerc. mec. apl., *6* (1960).
43. Gh. Vasilica, Al. Nica, *Aspecte de structură în suprafața activă la unele materiale pentru lagăre*, St. cerc. mec. apl., **13**, *2*, 311—315 (1963).
44. S. Faur, Al. Popescu, I. Carabogdan, *Determinarea cu ajutorul izotopilor radioactivi a modului de comportare la uzură a unui motor monocilindric experimental*, Protocol 1961, Inst. de energetică, București.
45. J. J. Gumbleton, *Piston Ring and Cylinder Wear Messurements*, Illustrated the Potention and Limitation of the radioactive Technic, New York, S.A.E. Trans., **70**, 333—349 (1962).
46. A. H. Eliava, *Metode și instalații pentru studiul uzurii pieselor de mașini cu ajutorul indicatorilor radioactivi* (trad.), Tehnica nucleară, **6**, *10*, 586 (1963).
47. I. Michels, E. Iovitiu, *Determinarea unei metode de laborator pentru încercarea la uzură a oțelurilor utilizate în construcția mașinilor agrotehnice*, Acad. R.P.R., Baza Timișoara, **III**, *3—4* (1956).
48. P. Sulea, A. Țiganoiu, *Studiul îmbunătățirii calităților de exploatare ale saboților turnați din fontă utilizați la frînarea vagoanelor de cale ferată*, St. cerc. Șt. tehn., Timișoara, *1—2*, *3—4*, 288—309 (1961).
49. P. Sulea, *Saboți din fontă barbotată cu azot pentru frînarea vehiculelor de cale*, Nota I, *Vagoane de tramvai*, St. cerc. șt. tehn., **X**, *3—4*, 303—317 (1963).
50. Șt. Năda șan, *Versuche mit Bremsklötzen aus abgewandelten Phosphorhaltungen*, Eisenbahntehn, **11**, *9*, 420—422 (1963).
51. P. Sulea, *Considerații asupra rezistenței la uzură și coeficient de frecare al unor materiale aglomerate ca înlocuitoare ale fontei la saboții-talpă pentru vagoanele de tramvai*, Constr. de mașini, **17**, *4*, 184—195 (1965).
52. G. V. Vinogradov, M. D. Bezborodko, *Friction, Wear and Lubricating of Plastic*, Wear, *5*, 467—477 (1962).

53. D. Tabor, *Friction and Wear*, Proc. Internat. Symp. on Lubrication and Wear, California, Ed. Mc. Cutchon Berkeley, p. 705—753.
54. B. J. Hunt, I. Torbe, C. G. Spencer, *The Phase-Plane Analysis of Sliding Metion*, Wear, *8*, 455—465 (1965).
55. D. Buckley, L. R. Johnson, *Mechanism of Lubrication for Solid Carbon Materials in Vacuum to* 10^{-9} *Millimeter of Mercury*, ASLE Trans, *7*, 91—100 (1964).
56. E. Bisson, *Étude du frottement et de l'usure à des températures élévées (jusqu'à* 815 °C) *ou très basses* (—250 °C), Rev. de l'Inst. Franç. du Pétrole, **XVI**, *4*, 495—505 (1961).
57. F. L. jr. Coffin, *Some Metallurgical Aspects of Friction and Wear*, Proceed. of the Symp. on F. and W. Detroit, 1957, Londra, Ed. Elseier Publisg Comp., p. 36—66, 1959.
58. L. Támás, *Cercetarea proprietăților de ungere prin tehnica trasorilor radioactivi*, Magyar kémkusak Lopja, Budapesta, *9*, 381 (1960).
59. Gh. Vasilica, O. Biță, I. Dincă, *Aspecte de uzură și rodaj la unele structuri eutectice de aluminiu*, St. cerc. mec. apl., **18**, *1*, 166—167 (1965).
60. D. Pavelescu, *Aspecte ale dependenței perioadei inițiale a uzurii de factorii mecanici și chimici în cazul frecării de alunecare mixte sau limită*, St. cerc. mec. apl., *3*, 570—572 (1965).
61. И. А. Нискевич, *Применение радиоактивных изотопов для изучения долговечности деталей машин Гост*, Москва, Атомиздат, 1962.
62. A. Schilling, *Les huiles pour moteurs et le graissage des moteurs*, Paris, Ed. Technip., vol. I—II, 1962.
63. R. G. Fox, C. R. Elwell, *Radioactive Determination of Bearing Wear in a Refrigeration Compressor*, Lubrication Engineering, **15**, *4* (1959).
64. M. M. Hrusciov, *A New Method for the Determination of Wear of Maschine Ports*, Wear, *3*, 60—71 (1960).
65. T. Tsukizoe, T. Hisakado, *On the Mechanism of contact Between Metal Surfaces*, The Penetrating Depth and the Average Clearance, Journ. of Basic. Engineering, **87**, *D. 3*, 666—674 (1965).
66. D. Rașeev, *Studiul îmbunătățirii cuplului cămașă-piston la pompele de extracție*, Sesiunea Jubiliară IMA 4—7 iulie 1960. I—3.

ASUPRA BAZELOR FIZICE ALE PROCESELOR DE FRECARE ŞI UNGERE

II. UNGEREA CU LUBRIFIANŢI SOLIZI

de AL. NICA

539.6

Lucrarea cuprinde ultimele teorii emise pentru a se explica fenomenele legate de lubrificaţia cu ajutorul corpurilor solide. O atenţie deosebită se dă fenomenelor legate de acţiunea lubrifianţilor solizi lamelari; se ia în consideraţie influenţa adsorbţiei asupra fenomenelor de frecare, influenţa forţelor intercristaline etc.
Se trece de asemenea în revistă teoria ungerii „prin contact", precum şi fenomenele de dislocare şi rostogolire întîlnite la lubrifianţii solizi. Se dau unele indicaţii privind coeficienţii de frecare, scopul lucrării fiind punerea la îndemînă a datelor necesare pentru înţelegerea fenomenelor legate de lubrificaţia cu corpuri solide şi aprecierea frecărilor în acest caz.

Înţelegerea fenomenelor legate de ungerea cu lubrifianţi solizi este deosebit de utilă, dată fiind importanţa practică tot mai mare a acestor lubrifianţi, singurii utilizabili în anumite condiţii funcţionale. Totodată, lămurirea mecanismului fizic al comportării straturilor din lubrifianţi solizi va permite punerea corectă a problemei din punct de vedere teoretic. Unul dintre aspectele esenţiale care trebuie elucidate în vederea utilizării cu succes a acestor lubrifianţi îl constituie aspectul termic, dat fiind că de o corectă evacuare a căldurii produse prin frecări depinde posibilitatea realizării unei construcţii adecvate.

Principiul ungerii cu film solid de lubrifiant este redat schematic [6] în figura 1.

O bilă de dimensiuni mari este aşezată sub sarcină pe o placă plană,

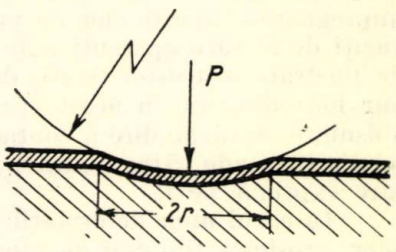


Fig. 1

acoperită cu un strat subțire de lubrifiant solid, aderent, avînd tensiunea de forfecare τ. Bila va pătrunde în interior pînă cînd suprafața de contact va căpăta o valoare $A_1 = \pi r^2$, astfel ca încărcarea P să fie preluată prin tensiuni egale cu limita de curgere σ_{c_1}. Filmul în sine va juca un rol foarte redus în acest proces, mai ales dacă este subțire. Forța F necesară pentru a se provoca alunecarea bilei fără rostogolire va fi determinată de forța de forfecare a filmului în regiunea aceleiași suprafețe A_1. Astfel

$$P = A_1 \sigma_{c_1} ; F = A_1 \tau_2 ; f = \frac{\tau_2}{\sigma_{c_1}} . \tag{1}$$

Aceste ecuații sînt identice cu cele stabilite de Bowden și Tabor [4] pentru frecarea între metale fără ungere și care explică frecarea redusă a acoperirilor cu metale moi. Este interesant de remarcat faptul că aceste relații leagă frecarea nu de numărul de puncte de contact, ci de proprietățile mecanice ale stratului de bază și ale filmului lubrifiant. Astfel, dacă tensiunea de forfecare τ_2 a filmului este mică în raport cu tensiunea de curgere a materialului de bază, coeficientul de frecare va fi scăzut fie că există contact pe întreaga suprafață sau nu. În cele mai multe cazuri întîlnite în practică, încărcarea nu este suficientă pentru a determina deformația plastică a vreuneia dintre piesele conjugate. Suprafața de contact A' va fi determinată în acest caz de modulele de elasticitate E_1 și E_2 ale celor două corpuri :

$$A' = k P^{2/3} ; k = \pi . 1{,}2 \left[\frac{r}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right]^{2/3} . \tag{2}$$

În acest caz nu mai este corectă utilizarea termenului „coeficient de frecare", deoarece f, așa cum a fost definit cu ajutorul relațiilor (1), va depinde de P :

$$F = A' \tau_2 = k \tau_2 P^{2/3} ; f' = \frac{F}{P} = k \tau_2 P^{-\frac{1}{3}} . \tag{3}$$

Cazurile de scădere a „coeficientului de frecare" cu creșterea sarcinii își găsesc astfel explicația. Un nou sistem de lubrificație, constînd din impregnarea suprafețelor cu praf de diamant pentru a se produce coeficienți de frecare aparenți reduși, poate fi considerat un exemplu extrem de ilustrare a acestei teorii, deși nu este exclusă producerea unui efect pur hidrodinamic în acest caz. Este de remarcat că, pentru condițiile obișnuite de răspîndire a contactelor elastice, exponentul lui P din prima relație (3) tinde către unitate, P nemaifăcînd parte din structura relației care exprimă pe f.

În cazul unor deformații puternice, de exemplu la prelucrarea metalelor, grosimea filmului de lubrifiant poate juca un rol important : dacă filmul este gros, rezistența sa la curgere este hotărîtoare pentru determinarea suprafeței de contact, dar dacă aceasta este determinată de materialul existent, de bază, o mare varietate de materiale moi pot fi utilizate

drept lubrifiant, incluzîndu-se metale, polimeri și materiale solide organice, cu catene structurale lungi. De obicei la prelucrarea metalelor filmul lubrifiant depășește în grosime mărimea asperităților și coeficienții de frecare sînt, în consecință, reduși. Una dintre principalele funcții ale lubrifianților constă în prevenirea sau limitarea creșterii numărului de suduri ce se pot produce între cele două suprafețe în frecare prin separarea lor cu un film avînd rezistența la forfecare mai scăzută decît a oricăruia dintre materialele în frecare.

Experiențele făcute cu piese în frecare încălzite au arătat că produsele solide de reacție între acizii grași din lubrifiant și metalele în frecare constituie factorul de bază în reducerea frecărilor. Astfel, în cazul compușilor solizi ai acidului lauric pe platină s-a constatat că eficacitatea lor este mai redusă cînd temperatura depășește 44°C, adică punctul de topire al acidului. De asemenea în cazul cuprului frecările sînt reduse pînă la 110°C, care este temperatura de topire a sării de cupru a acidului lauric. Studiile de difracție electronică au confirmat de altfel această concluzie, arătînd formarea săpunurilor metalice, a căror molecule sînt puternic orientate cu grupele polare spre suprafața metalică și cu lanțurile de hidrocarburi normale pe suprafețe. Formarea săpunurilor necesită prezența oxizilor metalici și se constată că acizii grași aplicați pe suprafețe proaspăt prelucrate de cupru sau oțel nu au efect în absența oxigenului.

a) TEORIA UNGERII CU LUBRIFIANȚI SOLIZI LAMELARI

Utilizarea pe scară tot mai largă în ultimul timp a grafitului și bisulfurii de molibden ca lubrifianți a pus problema cercetării din acest punct de vedere a proprietăților corpurilor cu structura constînd dintr-o rețea cristalină în straturi, structură comună atît grafitului, cît și bisulfurii de molibden. S-a constatat cu acest prilej că majoritatea materialelor (deși nu toate) cu astfel de structură prezintă frecări foarte reduse. Prima explicație care s-a dat, pornindu-se de la lubrificația cu grafit, s-a bazat pe o legătură directă între anizotropie și frecare. Într-adevăr, distanța caracteristică dintre atomii de carbon la grafit este de 1,42 Å, în inele contigue hexagonale, dispuse în planuri paralele, separate la 3,41 Å. Aceasta a făcut să se presupună că planurile respective vor rezista deformației, pe cînd legăturile mai slabe dintre straturi ar facilita forfecarea. Studiile de difracție electronică arată că, de fapt, însăși mișcarea de alunecare produce o orientare favorabilă pentru un astfel de proces și că pe suprafața metalică ia naștere un film orientat în procesul de frecare cu grafitul policristalin. Măsurători directe realizate recent [7] au arătat de asemenea că proprietățile de rezistență sînt accentuat anizotrope în direcția necesară, cel puțin în cazul încercărilor efectuate. Totuși, în prezent reiese clar din numeroasele experiențe efectuate că această interpretare simplă nu este mulțumitoare pentru explicarea tuturor aspectelor funcționale observate în cazul grafitului și altor corpuri solide lamelare, fie și numai în mod calitativ. Mai multe explicații au fost propuse, însă nu s-a ajuns încă la un acord general.

Din multe puncte de vedere, grafitul și bisulfura de molibden se comportă la fel, fapt scos în evidență de studiile metalografice, cînd diferențele s-au considerat ca factori de importanță secundară ; teoria adsorbției însă a lăsat să se întrevadă că tocmai aceste mici diferențe denotă deosebiri fundamentale.

b) INFLUENȚA ADSORBȚIEI ASUPRA FENOMENELOR DE FRECARE

În general s-a ajuns la concluzia că simpla ipoteză structurală nu este adecvată. Astfel, în timp ce grafitul alunecînd pe cupru în condiții atmosferice normale produce frecări reduse și o uzură neglijabilă a suprafețelor, în vid înaintat frecările sînt mult mai ridicate, iar uzura suprafețelor este rapidă. Deoarece cu ajutorul microscopului electronic s-a demonstrat că acest fenomen pare să aibă loc indiferent de orientarea lamelelor, Savage [8] a ajuns la concluzia că legătura interstraturi este mai puternică decît presupune teoria. El apreciază energia la 20 kcal, ceea ce este aproximativ a treia parte din valoarea legăturilor planare, și consideră trei regiuni distincte în latice : atomi de vîrf legați doar de un alt atom de carbon, atomi de vîrf legați de cîte doi alți atomi de carbon și atomi la suprafața rețelei legați de trei alți atomi de carbon. Ultimii sînt cei mai numeroși și s-ar fi putut presupune că determină în cea mai mare măsură coeziunea, însă măsurătorile nu au confirmat acest punct de vedere.

Bisulfura de molibden a fost de asemenea mult studiată și s-a ajuns în general la concluzia că prezintă frecări reduse chiar în vid înaintat. S-a presupus chiar că vaporii în general nu sînt necesari și că vaporii de apă și vaporii unor substanțe organice pot mări chiar frecarea, deoarece, reacționînd chimic, dau naștere la unii compuși care nu au structură lamelară sau sînt volatili. Se constată de asemenea o influență diferită a temperaturii asupra comportării în vid a grafitului și bisulfurii de molibden ; astfel, frecarea grafitului scade cu creșterea temperaturii. S-au semnalat diferențe în această direcție și în cazul altor compuși lamelari ; s-a încercat să se explice aceste fenomene pe baza diferențelor existente la legăturile dintre straturi.

c) INFLUENȚA FORȚELOR INTERCRISTALINE ASUPRA FENOMENELOR DE FRECARE ȘI UNGERE PRIN CONTACT

Datele experimentale citate pînă în prezent au fost obținute cu ajutorul unor straturi de lubrifianți solizi depuse prin reacții chimice sau folosindu-se materialele sub forma lor obișnuită, fără vreun proces de pulverizare. Alte cercetări, care au fost întreprinse cu ajutorul unor filme depuse sub formă de praf sau suspensii de praf în aer, au relevat aspecte funcționale diferite. Astfel, experiențele realizate cu patru lubrifianți lamelari — grafit, MoS_2, BN și talc, aplicați prin depunerea dintr-o suspensie apoasă — au condus la concluzia că forțele de primă importanță în determinarea comportării la frecare sînt cele acționînd între cristalite.

Într-adevăr, frecarea grafitului, de exemplu, crește peste 400—600°C, pe cînd pierderea în greutate arată o oxidare rapidă peste 600°C. De asemenea s-a constatat că oxidarea în mediu gazos a cristalitelor de grafit luate separat are loc mai rapid la vîrfurile lor decît pe suprafețele de clivaj. La nitrura de bor și bisulfura de molibden s-a constatat de asemenea o creștere a frecărilor datorită oxidărilor. Totodată, îndepărtarea gazelor adsorbite de grafit, nitrură de bor și talc a mărit frecările, ceea ce se poate atribui măririi adeziunii dintre vîrfurile cristalitelor. La bisulfura de molibden s-a constatat un efect contrar, ceea ce se explică prin legături adiționale de hidrogen între cristalite, datorate prezenței apei. Cercetări întreprinse cu ajutorul difracției electronice au confirmat această ipoteză.

Braithwaite a sugerat, pe baza acestor constatări și a unor lucrări personale [6], [9], existența așa-numitei „ungeri prin contact", pentru a se sintetiza aspectele funcționale complexe ale lubrifianților lamelari. Acest fenomen nu este considerat ca o extindere a lubrificației semifluide, deoarece lubrifianții la limită lichizi sînt legați de suprafețele metalice doar prin forțele de adsorbție, pe cînd lubrifianții solizi lamelari constituie în mod efectiv o parte a suprafeței metalice, deoarece sînt înglobați în aceasta în cursul procesului de rodaj. Într-adevăr, în timpul deformațiilor plastice ale asperităților în cursul procesului de rodaj, lubrifianții solizi lamelari se plasează între aceste asperități, care altfel ar fi îndepărtate prin sudura lor reciprocă și ruperea ulterioară a acestor suduri. Mai mult, un strat de lubrifiant solid atașat în acest mod nu poate fi îndepărtat de pe suprafața metalică respectivă prin nici una dintre metodele chimice care ar putea fi eficace pentru îndepărtarea completă a unui strat de lubrifiant la limită lichid. Astfel, două suprafețe rodate cu ajutorul unui lubrifiant solid lamelar vor continua să prezinte o uzură scăzută chiar după spălare cu solvenți sau detergenți; în plus, nu există nici o indicație că detergenții pentru uleiuri ar fi capabili să îndepărteze acest strat de grafit inclus în suprafața metalică. Braithwaite ajunge, în consecință, la concluzia că trebuie făcută o distincție netă între ungerea semifluidă sau la limită și ungerea prin contact, ultima caracterizîndu-se prin distanțe foarte mici între straturile de materiale implicate, fiind deci posibilă doar în cazul lubrifianților solizi, care ajung să facă parte integrantă din suprafața metalică de contact.

Aceasta spre deosebire de lubrifianții fluizi sau semifluizi, care pot fi doar atașați sau adsorbiți de suprafața metalică; proprietățile fizico-chimice ale suprafeței de contact (interfața) lubrifiant solid—metal diferă de altfel față de cele specifice contactului lichid-metal. Lubrificația prin contact, realizată deci printr-un film foarte subțire de lubrifiant solid (metalic sau nemetalic), se explică prin creșterea rezistenței la curgere datorită filmului, combinată cu mișcările dislocațiilor în metal.

Ipoteza lubrificației prin contact dă o explicație faptului că perioada de rodaj pentru motoarele cu combustie internă la care se folosesc lubrifianți solizi este sensibil mai mare decît în cazul cînd acești lubrifianți nu sînt utilizați; într-adevăr, rodajul în condițiile prezenței unui lubrifiant solid uniformizează asperitățile, mărindu-le totodată rezistența

la curgere, ceea ce conduce la o finisare superioară, însă într-un timp mai îndelungat.

Noţiunea de ungere prin contact contribuie de asemenea la explicarea eficienţei mai reduse a lubrifianţilor solizi în cazul rodajului pieselor mai dure : duritatea filmului creat de lubrifiant cu metalul respectiv poate fi mai mare decît a vîrfului asperităţilor lubrifiantului solid.

În cazul prelucrării metalelor, stratul format de lubrifiantul solid şi particulele metalice este mult mai elastic decît metalul de bază şi este capabil să absoarbă deformaţiile suplimentare din timpul prelucrării, mărind astfel randamentul operaţiei şi permiţînd totodată obţinerea unei suprafeţe cu un grad de finisare superior. Interfeţele care se nasc în această situaţie sînt deosebit de interesante (fig. 2) [9] :

1) interfaţa dintre granulele metalului ;
2) interfaţa dintre metal şi oxizii metalici sau filmul adsorbit ;
3) interfaţa dintre oxizii metalici sau filmul adsorbit şi învelişul lubrifiantului solid ;
4) interfaţa dintre învelişul lubrifiantului solid şi lubrifiantul solid ;
5) interfeţe intramoleculare sau intercristaline în lubrifiantul solid.

Rolul lubrifianţilor solizi în cazul contactelor metalice poate fi rezumat astfel :

— în timpul prelucrării (extruziune, forjare, trefilare etc.), cînd acţiunea sa se vădeşte prin interfeţele 1 şi 2 : interfaţa 1 va determina duritatea şi rezistenţa la tracţiune, iar interfaţa 2 va determina gradul de finisare ;

— în timpul funcţionării pieselor, cînd interfaţa 3 va determina eficienţa ungerii ; prin „învelişul" lubrifiantului solid se înţeleg în acest caz aditivii care formează filmul într-o dispersie de lubrifiant solid ;

— interfeţele 4 şi 5 prezintă importanţă pentru viaţa lubrifiantului solid.

Măsurători ale coeficientului de frecare şi rezistenţei la uzură a grafitului şi bisulfurii de molibden [6] realizate la temperatura obişnuită în trei medii diferite : atmosferă de oxigen, atmosferă de azot şi aer umed, au arătat că, în timp ce grafitul are bune calităţi lubrifiante în aer umed, se comportă slab în oxigen, pentru ca în azot calităţile lubrifiante să dispară cu desăvîrşire, bisulfura de moldibden se comportă invers, prezentînd bune calităţi lubrifiante în azot, mai puţin în oxigen şi slabe în aer umed. Aceste anomalii aparente trebuie explicate de o teorie generală a ungerii ; în cazul grafitului, de exemplu, se poate presupune că forţa de adeziune faţă de stratul metalic, a unei particule necontaminate prin chemisorbţie sau adsorbţie de suprafaţă este de acelaşi ordin de mărime, dacă nu chiar mai mică, decît forţa de forfecare într-o direcţie

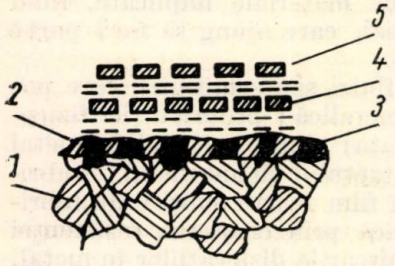


Fig. 2

paralelă cu planul stratului. În consecință, particula respectivă de grafit se va desprinde de pe suprafața metalică de sprijin în procesul mișcării de alunecare și va lăsa o porțiune de metal descoperită. Urmarea va fi în acest caz lipsa lubrificației, în ciuda unui flux continuu de particule dislocate, care vor tinde să acopere spațiile descoperite prin forfecarea particulelor dinaintea lor; aceasta se întîmplă în cazul atmosferei de azot uscat, cînd nu se constată adsorbția acestui gaz de către cristalite. Într-o atmosferă de oxigen, moleculele de gaz vor fi chemisorbite de valențele nesaturate de la vîrfurile planurilor de bază, reducîndu-se astfel rezistența de forfecare a rețelei grafitului prin scăderea energiei de suprafață. În felul acesta se va reduce tendința grafitului de a se desprinde de pe suprafața metalică în loc să se foarfece de-a lungul planurilor proprii de clivaj sub influența unei forțe tangențiale de alunecare și se va obține o oarecare protecție împotriva uzurii.

În atmosferă cu vapori de apă, rezistența la forfecare a grafitului se va reduce încă și mai mult, de această dată prin adsorbție fizică la vîrfurile planurilor de bază. În acest caz este îndeplinită condiția ca rezistența la forfecare a rețelei să fie mai redusă decît adeziunea față de stratul de sprijin metalic, fiind posibilă, în consecință, o lubrificație eficientă. S-ar putea presupune, în cazul unei umidități relative ridicate, că nu ar mai fi posibilă adeziunea grafitului pe suprafața metalică din cauza adsorbției moleculelor de apă pe suprafața planurilor bazale. Trebuie avut însă în vedere faptul că temperatura lubrifiantului solid și a moleculelor de gaz în imediata apropiere a suprafețelor în frecare va fi cu mult superioară mediului ambiant și în felul acesta presiunea parțială a vaporilor de apă în aceste regiuni va fi mai scăzută. Rezultă că adsorbția fizică la planurile bazale în timpul procesului de alunecare poate fi neglijată, deoarece acoperirea lor cu apă nu poate fi importantă decît atunci cînd presiunea parțială a ajuns să fie de ordinul 0,8.

O ilustrare a considerațiilor de mai sus privind mecanismul lubrificației cu grafit o constituie și măsurătorile efectuate în vid a energiei legăturilor interlamelare, care a fost găsit cu un ordin de mărime superior valorilor corespunzătoare în aer [10], ceea ce demonstrează că grafitul nu poate fi considerat ca făcînd parte din categoria solidelor lamelare cu legături slabe și deci cu proprietăți lubrifiante intrinseci. Pentru o bună lubrificație cu grafit este, în consecință, necesară prezența proceselor mecano-chimice specificate; astfel, în cadrul ultimelor experiențe citate, s-a constatat că prezența oxigenului produce alunecări suplimentare o dată cu relaxarea tensiunilor.

Dacă se extinde teoria lubrificației cu grafit la bisulfura de molibden, este necesar să se presupună în primul rînd că rezistența la forfecare a rețelei este mai redusă decît adeziunea planurilor bazale necontaminate față de stratul metalic, și, în al doilea rînd, că în oxigen sau în aer umed are loc o contaminare a planurilor bazale, avînd ca rezultat reducerea acestei adeziuni. O serie de cercetători au arătat [6] că, deși planurile bazale ale bisulfurii de molibden pure sînt hidrofobe, ca și în cazul grafitului, un monostrat de trioxid fără proprietăți lubrifiante, însă hidrofilic, se formează în oxigen la temperaturi scăzute; acesta reduce forțele

de legătură între planuri și, în consecință, capacitatea lubrifiantă a bisulfurii de molibden. Este posibil, de altfel, ca procesul de oxidare să nu se reducă la un monostrat și întreaga latice să fie distrusă, cu consecințe nefavorabile pentru proprietățile lubrifiante ale acestui material.

Creșterea coeficientului de frecare a MoS_2 în prezența umidității a fost atribuită de unii cercetători formării în acest caz, pe cale mecano-chimică, a H_2S [11]. În figura 3 este reprezentată variația coeficientului de frecare a MoS_2 în funcție de umiditate; umiditatea relativă a suprafeței este mai mică decît cea a aerului, datorită încălzirii în cursul procesului de frecare. Se constată creșterea coeficientului de frecare cu umiditatea, fiind considerabil mai mare la începutul procesului de frecare (f_i) decît la sfîrșitul lui (f_f).

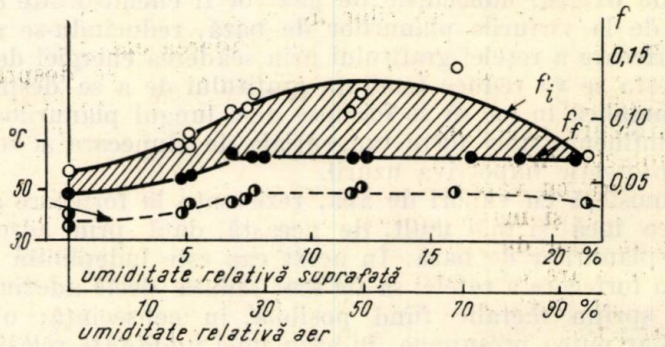


Fig. 3

În prezența azotului însă, nefiind posibilă nici o adeziune față de planurile bazale, ele vor putea să adere la suprafața metalică și să asigure protecția necesară, ca și în cazul grafitului; o reducere a rezistenței la forfecare a laticei de MoS_2 va avea loc atît în atmosferă de oxigen, cît și în aer umed, ca urmare a adsorbției la vîrfurile cristalitelor. Totuși, în acest caz, fenomenul de adsorbție nu influențează proprietățile lubrifiante, deoarece, așa cum s-a presupus de la început, chiar în cazul cînd nu există fenomene de adsorbție, rezistența la forfecare a laticei este mai scăzută decît adeziunea față de stratul metalic.

Prezența impurităților reduce de asemenea eficacitatea MoS_2 ca lubrifiant [12], fapt care vine în sprijinul ipotezelor amintite, explicația putînd consta în reducerea forțelor de legătură între planuri.

Cercetările întreprinse de Haltner [13] privind lubrificația cu MoS_2 în vid înaintat au dus de asemenea la concluzia că bunele sale proprietăți lubrifiante nu depind de existența unor anumite reacții mecano-chimice, ceea ce l-a condus să emită părerea că sînt intrinseci, proprii materialului. Ca o consecință se poate aminti faptul că bisulfura de molibden apare ca un excelent lubrifiant spațial.

Unii cercetători [6] și-au exprimat îndoiala față de valabilitatea teoriei forfecării planurilor bazale de către laticea grafitului în condițiile procesului de alunecare, deoarece ar fi necesară o forță tangențială suficient

de mare pentru a fi rupte simultan toate legăturile dintre straturi. O astfel de forță rezultînd inadmisibil de mare, se presupune în continuare că separarea planurilor bazale are loc nu prin forfecare, ci prin clivaj, adică o forfecare progresivă a forfecărilor dintre straturi, plecîndu-se de la vîrfurile cristalitelor. Această corectare a teoriei nu afectează însă mecanismul descris mai sus, deoarece forța necesară pentru a se iniția clivajul va fi micșorată de către atomii adsorbiți la vîrfuri, exact în același mod ca și forțele de forfecare.

c) FENOMENE DE DISLOCARE ȘI DE ROSTOGOLIRE LA LUBRIFIANȚII SOLIZI

Studiile privind frecarea și rezistența corpurilor solide lamelare au fost realizate pe eșantioane mari, policristaline din aceste materiale sau pe dispersii complexe. Microscopia electronică a permis însă să se examineze în detaliu cristale de grafit și MoS_2 [14]. Într-adevăr, este posibil să se obțină lamele suficient de subțiri din materialele respective pentru ca să aibă loc transmisia directă de electroni. Se constată imediat că planurile bazale sînt bogate în dislocații și s-a observat chiar că unele devin mobile sub influența eforturilor termice induse de fascicolul electronic. Dislocațiile apar ca fiind generate la treptele de clivaj și sînt conținute în planurile bazale [6].

Două grupe de dislocații în același plan alunecă una peste alta datorită tensiunilor, formînd apoi rețele hexagonale. S-a crezut că acestea produc blocări, ceea ce s-a constatat că nu corespunde cu realitatea, fiind și aceste rețele mobile în planurile bazale. Atît în cazul grafitului, cît și a MoS_2, dislocațiile se transformă cu ușurință în particule. Mai recent s-a constatat că dislocațiile se pot mișca cu ușurință pe planul de alunecare, fenomen întrerupt însă de cel mai mic obstacol. Pînă în prezent, influența dislocațiilor în planurile bazale asupra frecării nu este complet elucidată.

Alte studii de microscopie electronică [15] au scos în evidență existența printre produsele de uzură ale grafitului a unor particule aglomerate sub formă de rulouri. S-a emis părerea că li s-ar putea datora frecările reduse prin amorsarea unei mișcări de rostogolire. De altfel acest punct de vedere interesant este în acord cu multe din datele publicate privind comportarea grafitului în procesul de frecare; într-adevăr, nu s-a semnalat pînă în prezent nici o lucrare experimentală la care să se facă distincția netă dintre intercalările apropiate de suprafață și formarea rulourilor, după cum nu s-a putut stabili pînă în prezent frecvența acestor rulouri. Spreadborough emite opinia că formarea rulourilor este precedată de o orientare corespunzătoare ; nu este însă clar dacă ele se formează în timpul procesului de alunecare sau imediat după dispariția efortului de compresiune. Se poate aminti de asemenea că s-au observat rulouri de uzură la policlorura de vinil [6], ele constituind de fapt o formă obișnuită de uzură a elastomerilor.

e) COEFICIENȚII DE FRECARE

O activitate considerabilă — experimentală și teoretică — a fost depusă în vederea determinării coeficienților de frecare în cazul contactelor dintre corpurile solide. Kraghelski și Vinogradova au publicat astfel o lucrare consacrată acestei probleme [16], în care se dau numeroase date experimentale, tratîndu-se pe larg și cazul prelucrării metalelor, pe lîngă o serie de relații în vederea prinderii în calcul a coeficienților de frecare.

Bowden și Tabor au publicat de asemenea recent o serie de detalii privitoare la aspectele legate de determinarea și de calculul coeficienților de frecare [17].

Primită la redacție la 26 februarie 1966

BIBLIOGRAFIE

6. E. R. Braithwaite, G. W. Rowe, *Principles and Applications of Lubrication With Solids*, Scientific Lubrication, **15**, *3* (1963).
7. R. J. Diefendorf, E. P. Stoner, *Pyrolytic Graphite-How Structure Affects Properties*, Metal Progress, **81**, *5* (1962).
8. R. H. Savage, *Physically and Chemically Adsorbed Films in Lubrication of Graphite*, Trans. ASME, *70*, 497 (1948).
9. E. R. Braithwaite, *Solid Lubricants and Surfaces*, Oxford, Pergamon Press, 1964.
10. P. J. Bryant, P. L. Gutshall, L. H. Taylor, *A Study of Mechanisms of Graphite Friction and Wear*, Wear, **7**, *1* (1964).
11. G. Salomon, A. W. J. de Gee, J. H. Zast, *Mechano-Chemical Factors in MoS_2-Film Lubrication*, Wear, **7**, *1* (1964).
12. Olga Biță, I. Dincă, *Aspecte ale frecării și uzurii în cazul lubrifierii cu bisulfură de molibden*, St. cerc. mec. apl., **18**, *2* (1965).
13. A. J. Haltner, *An Evaluation of the Role of Vapor Lubrication Mechanism in MoS_2*, Wear, **7**, *1* (1964).
14. S. Amelinks, R. Delavignette, *Electron Optical Study of Basel Dislocations in Graphite*, Journal of Applied Physics, **31**, *12* (1960).
15. J. Spreadborough, *The Frictional Behaviour of Graphite*, Wear, **5**, *1* (1962).
16. I. V. Kraghelski, I. E. Vinogradova, *Koefițienti treniia*, Moskva, Mașghiz, 1955.
17. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids*, Oxford University Press, 1964.

RECENZII

CHARLES MASSONNET, *Résistance des matériaux, tome II*, Liège, Sciences et Lettres.

Semnalăm apariţia recentă a volumului cu titlul de mai sus, scris de profesorul Ch. Massonnet, de la Facultatea de ştiinţe aplicate a Universităţii din Liège. Cartea cuprinde următoarele capitole : „Piese curbe", „Solicitări prin şoc", „Corpuri de rotaţie încărcate axial simetric", „Tensiuni interne", „Fenomene de instabilitate elastică sau plastică", „Complemente asupra analizei tensiunilor şi deformaţiilor în jurul unui punct", „Proprietăţile mecanice ale materialelor", „Reprezentarea matematică a comportării neelastice a materialelor", „Reguli generale pentru dimensionarea structurilor".

Aşa cum arată autorul în prefaţă, cartea, destinată atît inginerilor mecanici, cît şi constructori, caută să prezinte o serie de probleme noi, ţinînd seama de comportarea plastică şi vîscoasă a materialelor, ieşind din cadrul limitat al teoriei elasticităţii. Prin problemele pe care le tratează şi prin modul cum le abordează, cartea profesorului Massonnet părăseşte factura clasică a tratatelor de rezistenţa materialelor şi devine o carte de tip nou.

Ne vom opri în special asupra părţilor care aduc elemente noi în modul de tratare a rezistenţei materialelor.

În capitolul asupra barelor curbe se studiază, printre altele, barele curbe cu pereţi subţiri şi rezistenţa barelor curbe în domeniul plastic. Capitolul asupra solicitărilor prin şoc studiază, în afara şocului elastic general, următoarele probleme : bare prismatice şi neprismatice supuse la şoc plastic, teoria exactă a şocului axial-elastic şi plastic, deformaţii la şocul plastic de încovoiere.

Un capitol deosebit de interesant pentru aplicaţiile inginerului este cel referitor la tensiunile interne. Autorul examinează tensiunile de montaj în sisteme static nedeterminate, tensiunile interne de origine termică, tensiunile interne datorite unor deformări plastice, metodele de măsurare a tensiunilor interne, efectele pozitive sau negative ale tensiunilor interne, tensiuni produse de variaţii periodice ale temperaturii.

Se dă o amplă dezvoltare capitolului asupra instabilităţii, studiat cu ajutorul metodelor variaţionale Rayleigh, Ritz, Galerkin. De-a lungul a 114 pagini, acest capitol prezintă o amplă dezvoltare a teoriei stabilităţii în regim elastic şi plastic, static sau dinamic, la bare drepte sau curbe, la profile subţiri, la compresiune, răsucire sau încovoiere ; se prezintă de asemenea modul de studiu pe modele a problemelor de stabilitate.

Capitolul asupra analizei tensiunilor şi deformaţiilor cuprinde atît expunerea corespunzătoare din teoria elasticităţii, cît şi descrierea metodei fotoelastice şi a celei tensometrice.

ST. CERC. MEC. APL. TOM 22 NR. 4 P. 1173–1178 BUCUREŞTI 1966

În capitolul asupra proprietăților mecanice ale materialelor se face o incursiune în problemele moderne ale fizicii metalelor, se examinează teoria încercărilor la întindere, compresiune și rezilienţă, se descrie cu multe detalii fluajul metalelor și mecanismul ruperii materialelor, după care se face o amplă analiză a rezistenței la oboseală și a ruperii prin oboseală.

Capitolul asupra reprezentării matematice a comportării neelastice a materialelor face o introducere în reologie, în teoria plasticității, în teoriile de rezistență, în teoria fluajului și în studiul amortizărilor interne ale materialelor.

Ultimul capitol examinează noțiunea de coeficient de siguranță, indicînd metoda modernă de calcul a pieselor supuse la solicitări variabile.

Lectura cărții este comodă atît pentru ingineri, cît și pentru studenți. Parcurgînd-o, rămîi cu impresia că ai citit o carte modernă, deosebit de reușită.

Gh. Buzdugan

Г. Н. САВИН, *Основы плоской задачи моментной теории упругости* (Bazele problemei plane a teoriei cu momente a elasticității), Kiev, Universitatea „T. G. Șevcenko", 1965, 162 p.

În 1909 E. și F. Cosserat publicau o carte despre teoria corpurilor deformabile, în care se punea în evidență posibilitatea apariției unor cupluri de tensiune ; aceasta a constituit prima lucrare importantă de mecanică a solidelor deformabile cu asimetrie mecanică. Ulterior s-au publicat puține lucrări în această direcție, pînă la sfîrșitul deceniului trecut, cînd un număr destul de mare de cercetători au reluat problema sub diferite aspecte (Mindlin, Tiersten, Koiter, Neuber, Schaefer etc.). R. D. Mindlin a considerat în special cazul corpurilor cu rotire împiedicată (rotirile sînt legate de deplasări prin relațiile binecunoscute).

Cazul mai general al corpurilor de tip Cosserat, cum sînt numite în prezent (cu toate că fenomenul a fost pus în evidență încă în secolul trecut de către W. Voigt), caz în care rotirile sînt considerate independente și în care se admite ca lege constitutivă o relație între tensiuni și cupluri de tensiune și anumite mărimi care caracterizează deformațiile, a fost considerat de E. L. Aero și V. L. Kuvșinski ca problemă liniară. Rezultatele au fost reluate de V. A. Palmov, care a dat și o formulare corespunzătoare a problemei plane ; o asemenea formulare fusese găsită anterior, tot în caz general, de către H. Schaefer. Menționăm că toate aceste lucrări au fost publicate după 1960, ceea ce ne arată că ele sînt foarte recente. O formulare cu caracter general în cadrul corpurilor cu microstructură se datorește lui C. A. Eringen. G. N. Savin și A. N. Guz au considerat și cazul domeniilor multiplu conexe.

La noi în țară s-au ocupat de aceste probleme M. Mișicu (pentru corpuri cu proprietăți plastice și vîscoelastice), Cr. Teodosiu (pentru a pune în evidență asimetria și cuplurile de tensiune ce pot fi generate de dislocații) și N. Șandru (generalizînd teoremele de reciprocitate și dînd formulări generale în tensiuni și deplasări pentru problemele elasticității asimetrice).

Am menționat toate aceste preocupări pentru a scoate în evidență noutatea acestor probleme, precum și interesul pe care l-au stîrnit. Lucrarea lui G. N. Savin este litografiată și nu este, poate, suficient de finisată. Ea reprezintă conspectul lecțiilor ținute de autor la Universitatea din Kiev. Interesul ei este însă cu totul deosebit, deoarece reprezintă prima lucrare de sinteză a unui capitol important al solidelor deformabile cu asimetrie mecanică ;

menționăm și faptul că s-a considerat necesar să se țină un curs special în această direcție pentru studenții dintr-o universitate.

Lucrarea lui G. N. Savin cuprinde patru capitole și este urmată de o bibliografie de 25 de titluri.

Primul capitol este destinat unei introduceri cu caracter istoric. Al doilea capitol cuprinde, pe scurt, ecuațiile fundamentale ale elasticității asimetrice tridimensionale. Capitolul al treilea este destinat relațiilor fundamentale și ecuațiilor ce apar în cazul problemei plane corespunzătoare, admițînd că avem de-a face cu corpuri omogene și izotrope. Problema este tratată în cazul unei stări de deformație plană, pentru care se precizează ecuațiile de echilibru, relațiile între deformații și deplasări ca și legea liniară constitutivă. Cele trei probleme fundamentale sînt formulate în variabile reale. Prin introducerea energiei de deformație se pune în evidență și unicitatea soluției problemei. După ce se găsește funcția de tensiune în variabile reale se trece la utilizarea metodei funcțiilor de variabilă complexă, introducîndu-se un potențial complex de tip Kolosov-Mushelișvili. Se aplică metoda transformărilor integrale și se trece apoi la coordonate curbilinii. Cazul unei stări de tensiune plană este de asemenea luat în considerare.

În capitolul al patrulea se tratează problema concentrărilor de tensiuni în jurul golurilor. Se consideră astfel atît goluri circulare, cît și goluri de formă oarecare ; menționăm astfel cazul golurilor de formă eliptică, triunghiulară, pătratică, dreptunghiulară etc.

Monografia lui G. N. Savin prezintă un mare interes pentru toți cercetătorii din domeniul mecanicii solidelor deformabile.

P. P. Teodorescu

HERBERT HEIDE, *Praktische Statik nach Cross, Steinman und Kani* (Statica practică după Cross, Steinman și Kani), Leipzig, B. G. Teubner, 1966, 228 p. + XII

În lucrare sînt prezentate principalele metode de calcul iterativ al structurilor formate din bare.

Partea întîi a cărții se ocupă de metoda Cross. După o prezentare succintă a bazelor teoretice ale metodei, sînt date tabelele necesare și se expune modul practic de conducere a calculului. Se dau de asemenea o serie de exemple de calcul pentru grinzi continue, cadre cu noduri fixe și cadre cu noduri deplasabile.

Ultimul paragraf al acestei părți prezintă bazele metodei Csonka privind calculul „cadrelor proporționate".

În partea a doua a lucrării se prezintă metoda Steinman, dîndu-se și o serie de exemple de calcul.

În partea a treia se expune metoda Kani, insistîndu-se asupra modului de organizare a calculului în special în cazul cadrelor cu noduri deplasabile.

O prezentare critică a metodelor prezentate se face în partea a patra a lucrării. Arătînd avantajele și dezavantajele fiecărei metode, se caută a se stabili domeniul optim de folosire a fiecărei metode în parte.

Prin prezentarea sistematică a principalelor metode de calcul iterativ al structurilor, prin tabelele și numărul mare de exemple pe care le conține, lucrarea poate fi de un real folos inginerilor proiectanți.

Sandu Răutu

D. ABIR, F. OLLENDORF, M. REINER, *Topics in Applied Mechanics*, Amsterdam — Londra — New York, Elsevier, 1965.

Volumul este dedicat memoriei lui Edwin Schwerin, fost profesor la Institutul tehnologic din Haifa, și cuprinde 20 de articole reprezentînd contribuții originale în domeniul teoriei plăcilor plane și curbe, al studiului proprietăților materialelor, dinamicii mașinilor, dinamicii fluidelor, reologiei, mecanicii construcțiilor, mecanicii solului și metodelor matematice de calcul.

Problema stabilității plăcilor curbe subțiri este studiată în articolele *Pierderea stabilității plăcilor curbe sferice supuse la presiune externă* de Th. v. Kármán și A. Kerr, în care se trec în revistă principalele rezultate teoretice și experimentale obținute asupra stabilității plăcilor curbe subțiri sferice, și *Flambajul plăcilor curbe conice circulare supuse la torsiune combinată cu presiune externă sau internă* de J. Singer și M. Baruch, care prezintă o metodă de analiza flambajului plăcilor conice supuse la solicitări combinate și la distribuții asimetrice de temperatură și compară rezultatele teoretice obținute cu diferite studii experimentale.

În *Notă asupra funcțiilor de tensiune și ecuațiilor de compatibilitate în teoria plăcilor curbe*, E. Reissner deduce o reprezentare a eforturilor secționale prin patru funcții de tensiune cu ajutorul cărora obține patru ecuații de compatibilitate, care se reduc la cele stabilite de Goldenweizer dacă se adoptă ipoteza anulării tensiunilor tangențiale transversale.

Articolele *Segmente sferice rezemate elastic supuse la sarcini antisimetrice* de M. G. Salvadori și S. Lichtenstein și *Soluție aproximativă pentru încovoierea plăcilor curbe de mică curbură în formă de paraboloid circular* de L. Fisher sînt consacrate determinării pe cale aproximativă a stării de tensiune produse de sarcini statice în plăci curbe de formă particulară.

În lucrarea *Asupra teoriei plăcilor plane cu neomogenitate simetrică avînd aceeași variație a modulilor elastici pe grosime* de Y. Stavski, se extinde metoda de calcul elaborată pe Reissner pentru plăcile plane omogene la cazul plăcilor cu neomogenitate de formă specială și cu coeficientul lui Poisson constant.

Problema scurgerii fluidelor vîscoase între pereți mobili este studiată în articolele *Stabilitatea scurgerii vîscoase între doi cilindri concentrici în rotație inversă* de P. Lieber și L. Rintel și *Scurgerea între frontiere paralele în mișcare liniară pentru două modele de scurgere pseudoplastică cu trei constante reologice* de Z. Rotem.

În lucrarea *Cutremurele și subpresiunea în teoria elastică a barajelor triunghiulare de greutate* de S. Irmay, este extinsă metoda lui Pigeaud pentru studiul stabilității elastice a barajelor triunghiulare de greutate în cazul cînd se iau în considerație forțele de inerție provenite din cutremur și presiunea ascensională sub talpa barajului.

Articolul *Geomecanica deformațiilor și tensiunilor; teorie și experiment* de I. Haber-Schaim analizează distribuția deformațiilor și tensiunilor într-un semispațiu infinit solicitat de o forță concentrată, în scopul stabilirii unei metode de calcul concordante cu rezultatele experimentale obținute în mecanica solurilor.

În articolul *Tensiuni efective în soluri parțial saturate*, I. Alpan deduce expresia tensiunilor efective în soluri parțial saturate ca funcție de tensiunea totală, de presiunea aerului și apei din pori și de gradul de saturație.

Lucrarea *Performanțele grinzilor de beton armat calculate plastic în stadiul de lucru* de A. Zaslavski analizează comparativ comportarea grinzilor de beton armat calculate plastic cu cea a grinzilor calculate elastic și arată că în stadiul de lucru primele prezintă săgeți mai mari, dar fisuri mai mici.

În articolul *Asupra analizei tensorilor de deformație* de Z. Karni, este introdus un tensor de rotație finită și este studiat efectul rotației asupra tensorilor de deformație.

Lucrările *Viscozitatea de solid a oțelului moale* de D. Abir, H. Manor și M. Reiner, *Tensiuni transversale în scurgerea unor gaze diferite* de A. Foux și M. Reiner, *Teoria încercărilor triaxiale pe epruvete cu raport mare între diametru și înălțime* de M. Livneh și E. Shklarski, *Fisurarea și ruperea întîrziată a mortarului de ciment supus la variații hidrometrice extreme* de O. Ishai sînt consacrate studiului pe cale experimentală a proprietăților mecanice ale materialelor și solurilor.

Volumul mai cuprinde articolele *Teoria de cîmp a mașinilor cu influență autoexcitată* de F. Ollendorff, *Cercul lui Mohr ca auxiliar pentru transformarea tensorilor simetrici de ordinul doi și pentru rezolvarea altor probleme* de A. Werfel și *Nomograme pentru unele ecuații algebrice* de L. Bonifiglioli.

Cristian Teodosiu

H. A. ТУМАНСКИЙ, *Графический расчет стержневых систем и механизмов.* (*Calculul grafic al sistemelor cu bare și al mecanismelor*), Москва, Издательство Машиностроение, 1964, Ленинград, 300 p. + 145 fig.

Lucrarea de față, pe baza analizei grafice, face un studiu asupra sistemelor plane și a sistemelor spațiale. Autorul folosește tocmai această metodă, întrucît consideră că analiza grafică are o serie de avantaje, ca simplitatea și sugestivitatea soluțiilor, comoditatea controlului, dă o imagine clară asupra mărimilor și comparării lor relative, în unele cazuri ale practicii inginerești fiind singurul mijloc de rezolvare a problemelor.

Lucrarea este împărțită în două secțiuni : prima se ocupă cu sistemele plane, iar a doua cu sistemele spațiale.

Prima parte, a sistemelor plane, are cinci capitole și tratează probleme legate de teoria forțelor exterioare, forțe distribuite, sisteme de bare, grinzi pe mai multe reazeme și elemente pe suporți elastici și, în final, elemente de mașini care au formă de placă. Dezvoltarea acestor idei fundamentează și clarifică în final noua metodă de calcul grafic al sistemelor de bare, propusă de autor.

Dacă pînă acum în rezolvarea problemelor mecanicii grafice se foloseau două construcții : poligonul forțelor și poligonul funicular, o primă caracteristică a noii metode este că necesită o singură construcție. O a doua caracteristică constă în generalitatea legilor sale atît pentru forțele plane, cît și pentru cele spațiale. În ultimul caz, sistemul de forțe spațiale (vectori) se reduce la plan, ușurînd studierea construcțiilor spațiale în geometrie, statică și cinematică. Pentru înțelegerea acestei metode, în prima parte a lucrării se face un studiu

asupra operațiilor de bază cu vectori paraleli sau concurenți ; de asemenea aplicarea metodei pentru determinarea centrului de greutate al diferitelor construcții mecanice prin integrarea și diferențierea fără poli. Metoda „liniilor de greutate" se folosește în special în calculul construcțiilor de bare, a axelor pe mai multe reazeme și a arborilor, datorită simplității și preciziei sale.

Partea a doua a lucrării are trei capitole, care tratează despre reducerea elementelor spațiale la plan, despre sisteme de bare spațiale și despre mecanisme spațiale.

Pentru a se putea folosi și în acest caz metoda „liniilor de greutate", trebuie ca fiecare sistem spațial (figură geometrică, construcție de bare sau mecanism) să se reducă la unul plan. În acest scop se studiază la început legile geometriei reducerilor ; dacă în geometria descriptivă elementele de bază sînt punctele, liniile și suprafețele, în geometria reductivă elementul de bază este vectorul și derivatele sale.

Geometria reductivă are o largă întrebuințare și în statica grafică spațială, problema de bază fiind descompunerea unei forțe cunoscute P după o serie de direcții date : cazul sistemelor de bare spațiale.

Ultimul capitol al cărții studiază mecanismele spațiale ; începînd cu mișcarea corpului solid în spațiu, se trece apoi la diagrame de viteză pentru mecanisme avînd cuple de translație și de rotație, la determinarea vitezelor și accelerațiilor în mecanismele sferice, la studiul mecanismelor cu cuple cinematice superioare și mecanisme cu mai multe elemente. În final se cercetează cinetostatica mecanismelor spațiale și apoi transmisii spațiale cu dinți înclinați.

În general, partea a doua a lucrării arată caracterul universal al metodei reducției și teoriei bivectorilor în rezolvarea problemelor legate de mecanismele spațiale. Reducerea construcțiilor spațiale cu multe dimensiuni la plan, ușurează rezolvarea sistemelor de ecuații liniare prin programări liniare.

În toate cazurile, ca elemente de bază generale au servit vectorii și derivatele lor : bivectorii și formele lor complexe.

Bibliografia folosită indică un număr de 40 de titluri de lucrări din teoria mecanismelor, statică, cinematică, de calcul grafic.

Lucrarea ajută pe ingineri în munca de proiectare la calculul construcțiilor de bare ale mașinilor și mecanismelor.

Tudor Vasile Huncher

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice în care se expune : stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române sau străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, reintrarea în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aeromecanică (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanică generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul statistic şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurărilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul „16 Februarie".

F2557 5-6.110. F2557 46

5
TOMUL 23
1966

(83) 2193

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. **E. CARAFOLI** – *redactor responsabil,*
Acad. **D. DUMITRESCU** – *redactor responsabil adjunct,*
Prof. **I. ANTON,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CONSTANTIN AVRAM,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. **ȘT. BALAN,**
Prof. **GH. MANEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CR. MATEESCU,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. **N. PATRAULEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România.
Prof. **N. TIPEI,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU VOINEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Conf. **RADU C. BOGDAN** – *secretar de redacție.*

În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134–135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Redacția : **București,**

str. Const. Mille 15, tel. 14.89.07

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 23, nr. 5 1966

SUMAR

STUDII

Pag.

GEORGETA STĂNCULESCU, MARIANA IONESCU şi ION VĂDUVA, Studiu statistic al deschiderii fisurilor la elemente încovoiate din beton armat 1181

H. SANDI, Asupra siguranţei structurilor supuse încărcărilor temporare 1203

M. MIHAILESCU, CR. IACOB, G. COMBIESCU şi M. ZGURĂ, O metodă de calcul operaţional pentru reţele de grinzi 1223

MIHAI SIMONICI şi MIRCEA SOARE, Aplicarea metodelor variaţionale pentru determinarea frecvenţelor vibraţiilor transversale ale grinzilor cu secţiune variabilă 1243

VALERIU PETCU, Calculul plastic al structurilor de oţel pe baza concepţiei stărilor-limită 1257

P. P. TEODORESCU, Asupra calculului sfertului de spaţiu elastic 1283

A. CERNĂTESCU şi N. UNGUREANU, Radiere pe piloţi — determinarea eforturilor în dală şi piloţi 1315

ŞT. N. SĂVULESCU, Consideraţii asupra apariţiei variaţiilor bruşte de viteză în diferite scurgeri tranziţionale 1325

ELIE CARAFOLI şi DAN MATEESCU, Mişcarea oscilatorie armonică a sistemului aripă-fuzelaj conic în regim supersonic 1343

RECENZII 1355

St. cerc. mec. apl., Tom. 23, Nr. 5, P. 1179—1356, Bucureşti 1966

1989

F
2557

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratkölcsönző
39/1967

STUDIU STATISTIC AL DESCHIDERII FISURILOR LA ELEMENTE ÎNCOVOIATE DIN BETON ARMAT[1])

de GEORGETA STĂNCULESCU, MARIANA IONESCU,
Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București

ION VĂDUVA
Centru de statistică matematică

539.4 : 519

Studiul cuprinde o analiză statistică a datelor obținute la încercări efectuate în ultimii ani la INCERC-București și la Materialprüfungsamt für das Bauwesen der Technischen Hochschule München, privind fisurarea elementelor din beton armat solicitate la încovoiere. Prin aplicarea metodelor analizei corelației și regresiei se determină importanța influenței distanței dintre fisuri, a rezistenței la întindere a betonului și a efortului în armătură asupra deschiderii fisurilor.

Încercările care au stat la baza lucrării sînt efectuate pe elemente din beton armat, grupate în funcție de forma secțiunii, de tipul barelor de armătură, de calitatea betonului și de laboratorul de încercări.

Din compararea regresiilor liniare stabilite pentru deschiderile de fisuri măsurate atît la INCERC, cît și în străinătate, se deduc ecuații unificate, deoarece se demonstrează că rezultatele experimentale obținute pe cîte două serii de elemente aparțin aceleiași colectivități statistice.

1. INTRODUCERE

Pe măsura extinderii și evoluției construcțiilor din beton armat, fisurarea lor a atras atenția din ce în ce mai mult. În elementele de construcții moderne de secțiuni reduse armate cu oțeluri superioare, executate după tehnologii noi și supuse la condiții speciale de exploatare, fisurarea are efecte defavorabile multiple asupra aspectului, rigidității, permeabili-

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech.-Mécanique Appliquée" **11**, *5* (1966) (în limba engleză).

tăţii şi durabilităţii construcţiilor şi mai ales asupra coroziunii armăturii şi a conlucrării acesteia cu betonul.

Cercetările recente privind fisurarea elementelor din beton armat se referă la următorele trei probleme :

— determinarea momentului de fisurare ;

— mărimea deschiderii fisurilor ;

— stabilirea lăţimii maxime admisibile a fisurilor sub acţiunea încărcărilor de exploatare.

Avînd în vedere marea împrăştiere a valorilor deschiderii fisurilor, inerentă diferitelor tipuri de elemente din beton armat sau de solicitări, se prezintă în acest studiu o analiză statistică a datelor obţinute la încercările la încovoiere efectuate la INCERC şi în străinătate.

Metoda folosită pentru valorificarea statistică a datelor experimentale, cunoscută sub numele de analiză a corelaţiei şi regresiei, a permis cercetarea importanţei influenţei diferiţilor factori asupra deschiderii fisurilor. Prin compararea corelaţiilor multiple dintre deschiderea fisurilor şi factorii de care depinde, s-a ajuns la expresii unificate ale funcţiilor de regresie care reprezintă suficient de bine legătura dintre aceşti parametri.

Pentru acest studiu s-au ales aproximativ 2 700 de măsurători de deschideri de fisuri, efectuate pe circa 240 de elemente din beton armat încercate la INCERC Bucureşti şi la München, R.F.G., care au fost sistematizate în 17 serii în funcţie de următorii factori variabili :

— secţiunea elementului (grinzi dreptunghiulare, grinzi T sau plăci),

— calitatea betonului (beton obişnuit sau uşor),

— calitatea oţelului (armătură cu profil periodic laminată la cald (PC), cu profil periodic torsionată la rece (TOR) sau din bare netede (OL),

— laboratorul unde s-au efectuat încercările (de la INCERC sau de la München, sub conducerea profesorului H. Rüsch).

Caracteristicile grinzilor considerate în această lucrare au fost indicate în alte studii anterioare [1], [3]. În tabela 1 se poate vedea gruparea datelor experimentale în fiecare dintre cele 17 serii.

Valorile considerate pentru deschiderile de fisuri şi pentru distanţele dintre fisuri au fost măsurate în următoarele condiţii :

— pe zona de moment constant a elementelor simplu rezemate, încărcate static cu două forţe concentrate situate la treimea sau sfertul deschiderii,

— pe fisurile normale pe axa longitudinală a elementelor simplu armate,

— în dreptul barelor de armătură mai apropiate de fibra extremă întinsă a grinzilor sau de marginea plăcii,

— pe una dintre feţele laterale ale grinzii sau pe faţa întinsă a plăcii,

— la treapta de încărcare corespunzătoare aceleiaşi fracţiuni din momentul de rupere ($0{,}56\ M_r$), determinat pe baza caracteristicilor reale ale materialelor şi a dimensiunilor măsurate ale secţiunilor de beton şi oţel.

Şi în alte studii s-a menţionat [4] că, la trepte de încărcare corespunzătoare la $0{,}4-0{,}6\ M_r$, valorile experimentale au avut abaterile cele mai mici faţă de cele teoretice.

Tabela 1

Ansamblul probelor utilizate

Seria	Autor	Secțiune	Beton	Oțel	Numărul grinzilor	Numărul măsurătorilor
1	INCERC		obișnuit	PC	48	509
2	INCERC		ușor	PC	13	132
3	INCERC		obișnuit	TOR	37	347
4	INCERC		ușor	TOR	7	60
5	INCERC		obișnuit	OL	27	288
6	INCERC		ușor	OL	7	56
7	INCERC		ușor + obișnuit	TOR+ PC	17	206
8	INCERC		ușor + obișnuit	OL	9	77
9	RÜSCH		obișnuit	PC	14	216
10	RÜSCH		obișnuit	TOR	8	101
11	RÜSCH		obișnuit	OL	5	42
12	RÜSCH		obișnuit	PC+ TOR	10	216
13	RÜSCH		obișnuit	OL	8	150
14	INCERC		obișnuit	TOR	10	105
15	RÜSCH		obișnuit	TOR	5	43
16	RÜSCH		obișnuit	PC	4	40
17	INCERC RÜSCH		obișnuit	OL	11	93

Prelucrarea statistică a datelor experimentale se bazează pe studiul efectuat de matematicianul I. Văduva. O prezentare succintă a acestui studiu este dată în anexă.

Calculul numeric s-a făcut cu ajutorul mașinilor electronice de tipul CIFA-3, CIFA-4 și CIFA-202, prin utilizarea programului alcătuit de matematicianul V. Mierlea de la INCERC.

Într-o publicație recentă, prof. F. Leonhardt menționează că prof. H. Rüsch încearcă în prezent de asemenea să cuprindă factorii care influențează fisurarea cu ajutorul unui calcul la mașinile electronice pornind de la releveul fisurilor de pe grinzile încercate [5].

2. FUNCȚIA DE REGRESIE LINIARĂ

Pentru studierea semnificației influenței diferiților factori asupra deschiderii fisurilor s-au folosit metodele analizei corelației sau regresiei, luîndu-se în considerare valorile măsurate ale fiecărei distanțe dintre fisuri și deschidere de fisură în parte.

Din studii anterioare [1], [2], [3] a reieșit că se poate admite practic normală distribuția deschiderii fisurilor pe fiecare grindă pentru stadiul de exploatare.

Dintre factorii de care depinde deschiderea fisurilor (α_f) s-au ales distanța dintre fisuri (λ_f), limita de curgere a armăturii ($\sigma_{0,2}$) și rezistența la întindere a betonului (R_t), deoarece a fost pusă în evidență influența lor determinantă prin metode de analiză dispersională și de corelație aplicate în studii anterioare [1], [2].

Pentru prelucrarea datelor s-a folosit metoda celor mai mici pătrate, estimîndu-se valoarea medie a lui α_f în raport cu λ_f, R_t și $\sigma_{0,2}$, adică s-au calculat (conform § 3 din anexă), funcțiile empirice de regresie de forma

$$\alpha_f = a_0 + a_1\lambda_f + a_2R_t + a_3\sigma_{0,2}, \tag{1}$$

unde coeficienții a_0, a_1, a_2, a_3 s-au estimat pentru fiecare serie de măsurători cu ajutorul algoritmului prezentat în tabela 2.

În calcule s-au folosit următoarele notații și unități de măsură :

$y = \alpha_f$ în 0,01 mm,

$x_1 = \lambda_f$ în cm,

$x_2 = R_t$ în kgf/cm^2,

$x_3 = \sigma_{0,2}$ în tf/cm^2.

Numărul de observații n considerat în fiecare serie de grinzi a depășit 34 valori (conform § 6 din anexă).

Tabela 2

Schema 1. algoritm pentru estimarea coeficienților de regresie și de corelație, precum și a dispersiilor

1	C_{00}	$= \frac{1}{N}$	25	C''_{22}	$= \frac{1}{\Sigma x^2_{2.1}}$
2	K'_{10}	$= \bar{x}_1 = \frac{\Sigma x_1}{N}$	26	C''_{21}	$= K''_{21}\, C''_{22}$
3	K'_{20}	$= \bar{x}_2 = \frac{\Sigma x_2}{N}$	27	C''_{20}	$= K''_{20}\, C''_{22}$
4	K'_{30}	$= \bar{x}_3 = \frac{\Sigma x_3}{N}$	28	C''_{11}	$= C'_{11} + K''_{21}\, C''_{21}$
5	$\Sigma x^2_{1.0}$	$= \Sigma x_1^2 - K'_{10}\, \Sigma x_1$	29	C''_{00}	$= C'_{00} + K''_{20}\, C''_{20}$
6	$\Sigma x^2_{2.0}$	$= \Sigma x_2^2 - K'_{20}\, \Sigma x_2$	30	$\Sigma x_3 x_{2.1}$	$= \Sigma x_3 x_2 - K''_{21} \Sigma x_3 x_1 - K''_{20} \Sigma x_3$
7	$\Sigma x^2_{3.0}$	$= \Sigma x_3^2 - K'_{30}\, \Sigma x_3$	31	K''_{32}	$= C''_{22}\, \Sigma x_3 x_{2.1}$
8	a_0	$= \frac{\Sigma y}{N}$	32	K'''_{21}	$= K''_{31} - K''_{21}\, K'''_{32}$
9	Σd_0^2	$= \Sigma y^2 - a_0\, \Sigma y$	33	K'''_{30}	$= K''_{30} - K''_{20}\, K'''_{32}$
10	C'_{11}	$= \frac{1}{\Sigma x^2_{1.0}}$	34	$\Sigma x^2_{3.21}$	$= \Sigma x^2_{3.1} - K'''_{32}\, \Sigma x_3\, x_{2.1}$
11	C'_{10}	$= K'_{10}\, C'_{11}$	35	$\Sigma y x_{2.1}$	$= \Sigma y x_2 - K''_{21}\, \Sigma y x_1 - K''_{20}\, \Sigma y$
12	C'_{00}	$= C_{00} + K'_{10}\, C'_{10}$	36	a''_2	$= \Sigma y x_{2.1}\, C''_{22}$
13	$\Sigma x_2 x_{1.0}$	$= \Sigma x_2\, x_1 - K'_{10}\, \Sigma x_2$	37	a''_1	$= a'_1 - K''_{21}\, a''_2$
14	K''_{21}	$= C'_{11}\, \Sigma x_2\, x_{1.0}$	38	a''_0	$= a'_0 - K''_{20}\, a''_2$
15	K''_{20}	$= K'_{20} - K'_{10}\, K''_{21}$	39	Σd_2^2	$= \Sigma d_1^2 - a''_2\, \Sigma y\, x_{2.1}$
16	$\Sigma x_3 x_{1.0}$	$= \Sigma x_3\, x_1 - K'_{10}\, \Sigma x_3$	40	C'''_{33}	$= \frac{1}{\Sigma x^2_{3.21}}$
17	K''_{31}	$= C'_{11}\, \Sigma x_3\, x_{1.0}$	41	C'''_{32}	$= K'''_{32}\, C'''_{33}$
18	K''_{30}	$= K'_{30} - K'_{10}\, K''_{31}$	42	C'''_{31}	$= K'''_{31}\, C'''_{33}$
19	$\Sigma x^2_{2.1}$	$= \Sigma x^2_{2.0} - K''_{21}\, \Sigma x_2 x_{1.0}$	43	C'''_{30}	$= K'''_{30}\, C'''_{33}$
20	$\Sigma x^2_{3.1}$	$= \Sigma x^2_{3.0} - K''_{31}\, \Sigma x_3 x_{1.0}$	44	C'''_{22}	$= C''_{22} + K'''_{32}\, C'''_{32}$
21	$\Sigma y x_{1.0}$	$= \Sigma y x_1 - K'_{10}\, \Sigma y$	45	C'''_{11}	$= C''_{11} + K'''_{31}\, C'''_{31}$
22	a'_1	$= C'_{11}\, \Sigma y\, x_{1.0}$	46	C'''_{00}	$= C''_{00} + K'''_{30}\, C'''_{30}$
23	a'_0	$= a_0 - K'_{10}\, a'_1$	47	$\Sigma y x_{3.21}$	$= \Sigma y x_3 - K'''_{32}\, \Sigma y x_2 - K'''_{31}\, \Sigma y x_1 - K'''_{30}\, \Sigma y$
24	Σd_1^2	$= \Sigma d_0^2 - a'_1\, \Sigma y\, x_{1.0}$	48	a'''_3	$= \Sigma y x_{3.21}\, C'''_{33}$
			49	a'''_2	$= a''_2 - K'''_{32}\, a'''_3$
			50	a'''_1	$= a''_1 - K'''_{31}\, a'''_3$
			51	a'''_0	$= a''_0 - K'''_{30}\, a'''_3$
			52	Σd_3^2	$= \Sigma d_2^2 - a'''_3\, \Sigma y x_{3.21}$

3. ZONA DE REGRESIE

Domeniul în care se găsesc valorile experimentare ale deschiderilor de fisuri cu o probabilitate dată $(1-q)$, denumit zona de regresie pentru funcția de regresie liniară α_f, s-a determinat pe baza dispersiei valorilor experimentale $s^2_{\alpha\,(3)}$ (conform § 4 din anexă).

Acest domeniu din spațiu de coordonate (α_f, λ_f, R_t și $\sigma_{0.2}$) este cuprins între hiperplanele definite de relația

$$\alpha_f = a'''_0 + a'''_1 \lambda_f + a'''_2\, R_t + a'''_3\ \sigma_{0.2} \pm z(q)\, s_{\alpha\,(3)}$$

Tabela 3

Zona de regresie referitoare la media lui α_f

Seria	Autorul	oţel	Secţiunea		$\alpha_f = a_0''' + a_1''' \lambda_f + a_2''' R_l + a_3''' \sigma \pm 1{,}64 \sqrt{\frac{s^2}{n}}$
1	INCERC	PC		*b.o*[1]	$\alpha_f = -7{,}72 + 0{,}41\,\lambda_f - 0{,}042\,R_l + 2{,}99\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{41{,}7}{509}}$
2	INCERC	PC		*b.u*[2]	$\alpha_f = 19{,}93 + 0{,}36\,\lambda_f - 0{,}79\,R_l - 0{,}39\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{14{,}3}{132}}$
3	INCERC	TOR		*b.o*	$\alpha_f = 12{,}58 + 0{,}57\,\lambda_f - 0{,}085\,R_l - 2{,}16\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{69{,}7}{347}}$
4	INCERC	TOR		*b.u*	$\alpha_f = 13{,}34 + 0{,}32\,\lambda_f - 2{,}315\,R_l + 7{,}14\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{38{,}9}{60}}$
5	INCERC	OL		*b.o*	$\alpha_f = 3{,}35 + 0{,}29\,\lambda_f - 0{,}23\,R_l + 1{,}05\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{9{,}55}{288}}$
6	INCERC	OL		*b.u*	$\alpha_f = 22{,}02 + 0{,}25\,\lambda_f - 0{,}004\,R_l - 6{,}32\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{19{,}02}{56}}$
7	INCERC	PC+ TOR		*b.u.*+ *b.o*	$\alpha_f = -7{,}73 + 0{,}11\,\lambda_f + 0{,}58\,R_l + 0{,}20\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{14{,}16}{206}}$
8	INCERC	OL		*b.o.*+ *b.u*	$\alpha_f = 4{,}5 + 0{,}12\,\lambda_f + 0{,}47\,R_l - 4{,}08\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{4{,}1}{77}}$
9	RÜSCH	PC		*b.o*	$\alpha_f = 3{,}16 + 0{,}33\,\lambda_f - 0{,}26\,R_l + 1{,}56\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{26{,}5}{216}}$
10	RÜSCH	TOR		*b.o*	$\alpha_f = -10{,}58 + 0{,}34\,\lambda_f - 0{,}21\,R_l + 4{,}30\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{45}{101}}$
11	RÜSCH	OL		*b.o*	$\alpha_f = -15{,}21 + 0{,}32\,\lambda_f - 0{,}89\,R_l + 2{,}68\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{95}{42}}$
12	RÜSCH	PC+ TOR		*b.o*	$\alpha_f = 24{,}58 + 0{,}36\,\lambda_f - 0{,}35\,R_l - 2{,}52\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{19{,}6}{216}}$
13	RÜSCH	OL		*b.o*	$\alpha_f = 1{,}33 - 0{,}44\,\lambda_f - 0{,}17\,R_l + 1{,}45\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{95{,}9}{150}}$
14	INCERC	TOR		*b.o*	$\alpha_f = -9{,}44 + 1{,}17\,\lambda_f + 1{,}21\,R_l - 0{,}93\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{87{,}2}{105}}$
15	RÜSCH	TOR		*b.o*	$\alpha_f = -122{,}66 + 0{,}22\lambda_f + 3{,}076 R_l + 18{,}31\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{32{,}7}{43}}$
16	RÜSCH	PC		*b.o*	$\alpha_f = -41{,}18 + 0{,}206\,\lambda_f - 2{,}09\,R_l + 15{,}42\,\sigma + 1{,}64\sqrt{\frac{34}{40}}$
17	INCERC RÜSCH	OL		*b.o*	$\alpha_f = -5{,}53 + 0{,}005\,\lambda_f + 0{,}28\,R_l + 2{,}13\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{7{,}18}{93}}$

[1]) Beton obişnuit
[2]) Beton uşor

pentru valorile individuale ale deschiderii de fisură și de relația

$$\alpha'_f = a'''_0 + a'''_1 \lambda_f + a'''_2 R_t + a'''_3 \sigma_{0,2} \pm z(q) \frac{s_{\alpha(3)}}{\sqrt{n}}$$

pentru media valorilor deschiderilor de fisuri (conform § 8 din anexă).

Pentru cele 17 serii de grinzi considerate în tabela 3 sînt date zonele de regresie referitoare la media valorilor deschiderilor de fisuri, astfel ca în afara domeniului să rămînă 10% din aceste valori.

Pentru pragul de semnificație ales de 10% se ia $z(q) = 1{,}64$, așa cum rezultă din tabela pentru repartiția normală $N_{(0.1)}$.

Se observă că la majoritatea grinzilor de secțiune dreptunghiulară sau T, limitele zonei de regresie au fost destul de apropiate de $\pm$ 0,05 mm (seriile 1, 2, 5, 7, 8, 9, 12) și au ajuns la $\pm$ 0,1 mm (seriile 3, 6, 10) sau $\pm$ 0,15 mm (seriile 4 și 13) la unele grinzi armate cu bare torsionate sau netede.

La grinzile dreptunghiulare armate cu bare netede încercate la München, limitele domeniului de încredere deosebit de mari, de $\pm$ 0,25 mm, se datoresc oțelurilor speciale folosite cu palier de curgere în jur de 5 000 kgf/cm^2.

Pentru plăci, aceste limite au fost ceva mai mari decît la grinzi de $\pm$ 0,15 mm, ajungînd la ordinul de mărime al lățimii admise de fisură.

Valorile deschiderilor de fisuri calculate pe baza relațiilor care definesc zona de regresie referitoare la media deschiderilor de fisuri pentru cîteva grinzi T armate cu bare cu profil periodic s-au deosebit de cele experimentale cu $-20 \ldots + 80\%$, considerate la treapta de încărcare de 0,56 M_r, corespunzătoare unui efort în armătură de circa 2 200 kgf/cm^2.

Datorită mecanismului formării fisurilor și în special impreciziei măsurării deschiderilor de fisuri și a determinării caracteristicilor materialelor, este cunoscut că s-a obținut și la aplicarea altor relații de calcul abateri de peste $\pm$ 40% [6].

4. COEFICIENȚI DE CORELAȚIE

Pentru stabilirea intensității cu care fiecare dintre factorii λ_f, R_t sau $\sigma_{0,2}$ influențează deschiderea fisurilor s-au studiat și s-au făcut interpretări pe baza coeficienților de corelație, calculați conform § 4 din anexă și dintre care unii sînt indicați în tabela 4.

Coeficienți de corelație liniară, care măsoară intensitatea corelației liniare între deschiderea fisurilor și distanța dintre fisuri $r_{\alpha\lambda}$, au variat între 0,2 și 0,5, indicînd o corelație suficient de strînsă în cazul corelațiilor multiple.

Coeficienții multiplii de corelație pentru 2 sau 3 factori au avut valori mai mari decît coeficienții de corelație liniară, arătînd că cu cît sînt mai apropiați de 1 cu atît este mai strînsă legătura liniară dintre deschiderea fisurilor și factorii considerați și cu atît valorile experimentale ale deschiderilor de fisuri sînt mai apropiate de hiperplanul (1).

Tabela 4

Coeficienți de corelație

Seria	$r_{\alpha\lambda}$	$R_{\alpha\lambda R}$	$R_{\alpha\lambda R\sigma}$	Seria	$r_{\alpha\lambda}$	$R_{\alpha\lambda R}$	$R_{\alpha\lambda R\sigma}$
1	0,30	0,31	0,42	10	0,32	0,32	0,35
2	0,44	0,53	0,53	11	0,43	0,45	0,46
3	0,36	0,36	0,39	12	0,33	0,42	0,45
4	0,38	0,38	0,52	13	0,33	0,33	0,43
5	0,49	0,49	0,49	14	0,30	0,39	0,39
6	0,28	0,28	0,51	15	0,42	0,45	0,60
7	0,21	0,36	0,36	16	0,31	0,31	0,47
8	0,41	0,43	0,46	17	0,19	0,21	0,46
9	0,32	0,33	0,46				

5. COREL AȚIA MULTIPLĂ ȘI ANALIZA DISPERSIONALĂ

Prin analiza dispersională s-a verificat, conform § 4 din anexă, semnificația influenței fiecăruia dintre factorii λ_f, R_t, $\sigma_{0.2}$ asupra deschiderii fisurilor.

În tabela 5, din compararea valorilor F calculate cu valorile din tabelele raportului F corespunzătoare nivelului de semnificație $P = 0{,}90$ și la 1 și $n - 4$ grade de libertate, se poate ajunge la următoarele concluzii :

— influența distanței dintre fisuri, care include implicit influența procentului de armare și a diametrului armăturii, a fost semnificativă la toate seriile cercetate, cu excepția grinzilor dreptunghiulare armate cu bare torsionate și a grinzilor T armate cu bare netede încercate la München. De asemenea se observă că, la majoritatea seriilor, dintre parametrii semnificativi, influența preponderentă a avut-o distanța dintre fisuri ;

— influența rezistenței la întindere a betonului a fost semnificativă numai la 7 din cele 17 serii examinate, și în special la grinzile dreptunghiuare din beton ușor armate cu bare cu profil periodic laminate la cald, precum și la grinzile T armate cu bare cu profil periodic ;

— influența efortului în armătură a fost semnificativă pentru majoritatea seriilor examinate și numai în cinci cazuri nu se poate afirma ca sigură și necesită în continuare încercări suplimentare.

Tabela 5

Schema 2. analiza dispersională pentru aprecierea semnificației influenței lui λ_f, R_t și $\sigma_{0,2}$

Seria	Factorul	Nr. gradelor de libertate	Dispersia empirică	Testul F calculat	$F_{1,n-4}$ ($P=0,90$) tabelă
	λ	1	$s^2_{(y_{x_1}-\overline{y})}$	$s^2_{(y_{x_1}-\overline{y})}/s^2_{y(3)}$	
	R	1	$s^2_{(y_{x_1x_2}-y_{x_1})}$	$s^2_{(y_{x_1x_2}-y_{x_1})}s/^2_{y(3)}$	
	σ	1	$s^2_{(y_{x_1x_2x_3}-y_{x_1x_2})}$	$s^2_{(y_{x_1x_2x_3}-y_{x_1x_2})}/s^2_{y(3)}$	
	α	$n-1$	$s^3_{y(3)}$	1	
	λ	1	2266	54,4	
	R	1	13	0,36	
1	σ	1	2067	49,6	2,72
	α	505	41,7	1	
	λ	1	485	33,9	
	R	1	221	15,4	
2	σ	1	4	0,28	2,75
	α	128	14,3	1	
	λ	1	3638	52	
	R	1	10	0,14	
3	σ	1	547	7,85	2,725
	α	343	69,7	1	
	λ	1	424	10,9	
	R	1	7	0,18	
4	σ	1	390	10	2,8
	α	56	38,9	1	
	λ	1	808	84,6	
	R	1	45	4,72	
5	σ	1	11	1,16	2,726
	α	284	9,5	1	
	λ	1	98	5,1	
	R	1	0,00123	0,00006	
6	σ	1	187	9,75	2,806
	α	52	19	1	
	λ	1	38	3,36	
	R	1	216	19,1	
7	σ	1	1,5	1,33	2,73
	α	202	11,3	1	
	λ	1	63	15,3	
	R	1	13	3,17	
8	σ	1	8	1,95	2,777
	α	73	4,1	1	
	λ	1	647	24,4	
	R	1	53	2,02	
9	σ	1	508	19,2	2,73
	α	212	26,5	1	
	λ	1	14,5	0,32	
	R	1	9	0,2	
10	σ	1	253	5,63	2,763
	α	97	45	1	
	λ	1	837	8,8	
	R	1	124	1,31	
11	σ	1	33	0,35	2,845
	α	38	95	1	

Tabela 5

(*Continuare*)

Seria	Factorul	Nr. gradelor de libertate	Dispersia empirică	Testul F calculat	$F_{1,n-4}$ ($P=0{,}90$) tabelă
12	λ	1	562	28,7	2,73
	R	1	345	17,6	
	σ	1	181	9,2	
	α	212	19,6	1	
13	λ	1	2023	2,11	2,74
	R	1	71	0,74	
	σ	1	1310	13,7	
	α	146	95,9	1	
14	λ	1	1159	13,3	2,76
	R	1	414	4,74	
	σ	1	3345	38,4	
	α	101	87,2	1	
15	λ	1	354	10,8	2,844
	R	1	59	1,8	
	σ	1	314	9,6	
	α	39	32,7	1	
16	λ	1	148	4,35	2,856
	R	1	10	0,3	
	σ	1	195	5,75	
	α	36	3,4	1	
17	λ	1	29	4,04	2,765
	R	1	8	1,11	
	σ	1	181	25,2	
	α	89	7,2	1	

6. COMPARAREA REGRESIILOR LINIARE MULTIPLE

Pe baza rezultatelor experimentale obținute la INCERC sau la München s-a ajuns la relații sub formă de regresii liniare pentru deschiderea fisurilor la elemente încovoiate.

Prin compararea regresiilor empirice, stabilite pe serii de grinzi similare, care diferă prin laboratorul în care s-au încercat, prin calitatea betonului și a armăturii sau prin forma secțiunii, s-au verificat dacă aceste regresii liniare estimează aceeași funcție teoretică sau, cu alte cuvinte, dacă datele din măsurătorile care au stat la baza stabilirii celor două regresii empirice comparate fac parte din aceeași colectivitate statistică.

Dispersiile coeficienților de regresie $s^2_{a_0}$, $s^2_{a_1}$, $s^2_{a_2}$ și $s^2_{a_3}$, calculate conform § 4 din anexă, sînt indicate în tabela 6. Se poate urmări în tabela 7 dacă pentru fiecare comparație între două funcții de regresie sînt satisfăcute testele :

— F pentru compararea dispersiilor coeficienților de regresie ;

— χ^2 pentru verificarea ipotezei că cele două funcții de regresie sînt estimații ale aceleiași funcții de regresie.

Tabela 6

Dispersiile coeficienţilor de regresie

Seria	$s^2_{a_0'''}$	$s^2_{a_1'''}$	$s^2_{a_2'''}$	$s^2_{a_3'''}$	Seria	$s^2_{a_0'''}$	$s^2_{a_1'''}$	$s^2_{a_2'''}$	$s^2_{a_3'''}$
1	11,35	0,0034	0,0204	0,1806	10	40,50	0,0123	0,1143	10,100
2	20,20	0,0051	0,0492	0,496	11	50,30	0,0201	0,780	20,420
3	26,90	0,0063	0,0351	0,6020	12	28,00	0,0077	0,0052	0,7320
4	58,90	0,0407	0,645	5,0600	13	17,00	0,0163	0,0226	0,1535
5	14,15	0,0012	0,0128	1,3450	14	100,80	0,056	0,3010	2,2150
6	63,30	0,0127	0,0857	6,1500	15	2870	0,0124	4,360	34,600
7	8,92	0,0023	0,0190	0,3560	16	587	0,0215	0,992	41,500
8	50,00	0,0017	0,0567	9,5500	17	6,19	0,0033	0,0181	0,2460
9	17,90	0,0053	0,0179	1,1080					

Această ipoteză s-a considerat practic verificată la 8 perechi de serii la care valoarea χ^2 calculată a fost mai mică decît valoarea χ^2 citită în tabele pentru 4 grade de libertate şi pentru un prag de semnificaţie $\geqslant 0{,}05$, indicat în aplicaţiile curente. Această verificare a fost mai puţin sigură în cazul unui prag de semnificaţie cuprins între 0,025 şi 0,001, prezentat de alte şase perechi de serii.

Măsurătorile asupra deschiderii fisurilor, efectuate la INCERC şi la München, pot fi comparabile şi se pot considera ca aparţinînd aceleiaşi colectivităţi statistice, conducînd la determinarea de formule unificate, valabile în special în cazul grinzilor dreptunghiulare armate cu bare cu profil periodic laminate la cald şi cu bare netede.

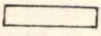
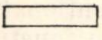
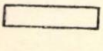
În ceea ce priveşte calitatea betonului, se poate trage concluzia că nu s-au putut grupa seriile de grinzi similare, executate din beton obişnuit sau uşor, cu excepţia grinzilor dreptunghiulare armate cu bare netede, în care caz totuşi ipoteza de mai sus s-a verificat pentru un prag de semnificaţie prea mic (0.01).

În ceea ce priveşte calitatea oţelului, din aplicarea testului χ^2 a reieşit în mod evident, pentru un prag de semnificaţie de 0,05, că valorile deschiderilor de fisuri la exploatare aparţin aceleiaşi colectivităţi numai în cazul grinzilor dreptunghiulare, încercate la München şi armate cu bare cu profil periodic sau netede. Barele netede au fost dintr-un oţel special, după cum s-a mai menţionat.

Faptul că dintre cele 17 serii considerate în acest studiu au fost comparabile numai seriile prezentate în tabela 7 şi în condiţiile menţionate reprezintă o justificare pentru clasificarea aleasă a elementelor în funcţie de forma secţiunii, de tipul de beton şi al barelor de armare.

Tabela 7

Criteriile F şi χ^2 pentru compararea regresiilor

Secţiunea	Oţelul şi betonul	Autorul	Seria	Nr. de probe	F calcul				$F(\alpha)$	χ^2		
					F_0	F_1	F_2	F_3	tabel	calculat	tabel	P
	PC obişnuit	INCERC	1	509	1,58	1,54	1,14	6,13	1,21	8,79	9,49	0,95
		RŰSCH	9	216								
	TOR obişnuit	INCERC	3	347	1,50	1,97	3,26	16,77	1,33	15,29	18,5	0,999
		RŰSCH	10	101								
	OL obişnuit	INCERC	5	288	3,66	16,8	60,8	15,2	2,05	7,12	9,49	0,95
		RŰSCH	11	42								
	obişnuit OL uşor	INCERC	5	288	4,47	10,62	6,68	4,7	1,44	12,35	13,3	0,99
		INCERC	6	6								
	PC obişnuit	INCERC	1	509	1,25	2,82	1,87	7,44	1,19	11,3	13,3	0,99
	OL	INCERC	5	288								
	PC uşor	INCERC	2	132	3,14	2,49	1,74	12,4	1,48	10,79	11,1	0,975
	OL	INCERC	6	56								
	PC obişnuit	RŰSCH	9	216	2,26	2,31	6,38	9,12	1,34	3,4	9,49	0,95
	TOR	RŰSCH	10	101								
	PC obişnuit	RŰSCH	9	216	2,81	3,76	43,5	18,45	1.57	5,55	9,49	0,95
	OL	RŰSCH	11	42								
	TOR obişnuit	RŰSCH	10	101	1,24	1,63	6,82	2,02	1,57	1,17	9,49	0,95
	OL	RŰSCH	11	42								
	TOR + PC obişnuit + uşor	INCERC	7	206	5,62	1,35	2,98	26,8	1,38	4,53	9,49	0,95
	OL	INCERC	8	77								
	OL obişnuit	RŰSCH	11	42	2,96	1,23	34,5	133	1,48	6,11	9,49	0,95
	OL		13	150								
	PC obişnuit	RŰSCH	16	40	94,9	6,6	54,9	168,7	1,55	13,61	18,5	0,999
	OL	INCERC	17	93								
	TOR	INCERC	3	347	3,75	8,90	8,57	7,37	1,33	13,86	18,5	0,999
			14	105								
	PC	RŰSCH	9	216	31,1	4,02	57,7	37,5	1,54	8,65	9,49	0,95
			16	40								

7. FUNCȚIILE DE REGRESIE EMPIRICĂ „MEDIATĂ" ȘI ZONELE LOR DE REGRESIE

Relațiile stabilite pentru calculul deschiderii fisurilor la diferite serii de elemente sub formă de regresii liniare multiple care au rezultat că estimează aceeași funcție teoretică de regresie au putut fi înlocuite cu o funcție de regresie empirică „mediată", cu coeficienții calculați conform § 7 din anexă.

Zonele de regresie pentru aceste noi funcții, similare celor definite mai înainte la punctul 3 „Zona de regresie", sînt

$$\alpha_f = A_0 + A_1 \lambda_f + A_2 R_t + A_3 \sigma_{0,2} \pm us$$

și

$$\alpha_f = A_0 + A_1 \lambda_f + A_2 R_t + A_3 \sigma_{0,2} \pm u \sqrt{\frac{{}^1s^2_{\alpha\,(3)}}{n_1} + \frac{{}^2s^2_{\alpha\,(3)}}{n_2}},$$

în care

$$s = \sqrt{{}^1s^2_{\alpha\,(3)} + {}^2s^2_{\alpha\,(3)}}$$

este abaterea medie pătratică rezultantă a variabilei în funcție de dispersiile valorilor experimentale ale celor două funcții de regresie comparate,

iar

$$\sqrt{\frac{{}^1s^2_{\alpha\,(3)}}{n_1} + \frac{{}^2s^2_{\alpha\,(3)}}{n_2}}$$

este abaterea medie pătratică a mediei empirice în cazul cînd prin testul F s-a pus în evidență că pentru cele două funcții de regresie comparate dispersiile teoretice ${}^1\sigma^2$ și ${}^2\sigma^2$ diferă semnificativ.

În tabela 8 sînt date zonele de regresie ale funcțiilor mediate pentru grinzile dreptunghiulare armate cu bare cu profil periodic laminate la cald (seriile 1 și 9) sau cu bare netede (seriile 5 și 11), încercate la INCERC și la München, precum și pentru grinzile dreptunghiulare armate cu bare PC sau TOR (seriile 9 și 10), încercate numai la München.

Domeniile de încredere pentru funcțiile de regresie mediate ale seriilor 3—10 și 5—6 sînt date numai informativ, deoarece s-a găsit că estimează aceeași regresie liniară la un prag de semnificație mai mic de 0,05.

Limitele acestor domenii de încredere, care includ 90% din valorile experimentale, sînt comparabile, dar acoperitoare față de limitele stabilite la zonele de regresie pentru fiecare serie în parte. Astfel la grinzile dreptunghiulare armate cu bare PC s-a ajuns la limite de $\pm$ 0,07 mm față de valorile inițiale de circa 0,05 și 0,06 mm, iar la grinzile dreptunghiulare armate cu bare PC sau TOR încercate la München la 0,12 mm față de 0,06 și 0,1 mm.

Se observă că prin suprapunerea domeniilor de încredere limitele domeniului rezultant sînt acceptabile, rămînînd deosebit de mari, de $\pm$ 0,25 mm, numai în cazul grinzilor dreptunghiulare armate cu bare netede, date fiind calitățile acestor oțeluri speciale.

Tabela 8

Zona de regresie a funcţiei de regresie comune referitoare la media lui α_f

Seria	Autorul	Calitate oţel secţiunea calitate beton	$\alpha_f = A_0 + A_1\lambda_f + A_2 R_t + A_3\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{{}^1s^2_{\alpha(3)}}{n_1} + \frac{{}^2s^2_{\alpha(3)}}{n_2}}$
1 9	INCERC PC RŰSCH	□	$\alpha_f = 0{,}041 + 0{,}35\,\lambda_f - 0{,}17 R_t + 1{,}69\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{41{,}7}{509} + \frac{26{,}5}{216}} =$ $= 0{,}041 + 0{,}35\,\lambda_f - 0{,}17\,R_t + 1{,}69\,\sigma \pm 0{,}741$
3 10	INCERC TOR RŰSCH	□	$\alpha_f = -3{,}63 + 0{,}40\,\lambda_f - 0{,}16\,R_t + 4{,}06\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{69{,}7}{347} + \frac{45}{101}} =$ $= -3{,}63 + 0{,}40\,\lambda_f - 0{,}16\,R_t + 4{,}06\,\sigma \pm 1{,}318$
5 11	INCERC OL RŰSCH	□	$\alpha_f = -1{,}93 + 0.31\,\lambda_f - 0{,}74\,R_t + 2{,}15\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{9{,}5}{288} + \frac{95}{42}} =$ $= -1{,}93 + 0{,}31\,\lambda_f - 0{,}74\,R_t + 2{,}15\,\sigma \pm 2{,}476$
5 6	obişnuit INCERC OL INCERC uşor	□	$\alpha_f = 16{,}28 + 0{,}256\,\lambda_f - 0{,}05\,R_t - 4{,}52\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{9{,}5}{288} + \frac{19}{56}} =$ $= 16{,}28 + 0{,}256\,\lambda_f - 0{,}05\,R_t - 4{,}52\,\sigma \pm 1$
9 10	RŰSCH PC RŰSCH TOR	□	$\alpha_f = -4{,}68 + 0{,}34\,\lambda_f - 0{,}22\,R_t + 3{,}87\,\sigma \pm 1{,}64\sqrt{\frac{26{,}5}{216} + \frac{45}{101}} =$ $= -4{,}68 + 0{,}34\,\lambda_f - 0{,}22 R_t + 3{,}87\,\sigma \pm 1{,}236$

8. CONCLUZII

Din prelucrarea statistică a mai multor serii de date experimentale s-au stabilit expresii unificate sub formă de relaţii liniare pentru deschiderea fisurilor la elemente încovoiate din beton armat în funcţie de trei parametrii : distanţa dintre fisuri, rezistenţa la întindere a betonului şi limita de curgere a armăturii.

Cu toată împrăştierea datelor experimentale s-a găsit o concordanţă acceptabilă între deschiderile de fisuri observate şi cele calculate pe baza formulei zonei de regresie.

După cum s-a apreciat într-un studiu anterior [2] privind corelaţia multiplă a mediei deschiderilor de fisuri de pe fiecare grindă, în prezentul studiu, considerînd fiecare deschidere de fisură în parte s-a putut aprecia de asemenea însemnătatea parametrilor menţionaţi.

În condițiile în care au fost efectuate cercetările pe elemente de beton armat, analiza de corelație și de regresie a permis să se arate că expresiile stabilite pentru deschiderea fisurilor diferă semnificativ în ce privește forma secțiunii, tipul de beton și al barelor de armătură și numai întîmplător în ce privește laboratorul de încercări.

Metoda folosită pentru verificarea statistică a datelor experimentale este generală și se poate aplica și la alte cercetări cu privire la beton și la beton armat.

De asemenea se poate aplica și în cazul variației deschiderii fisurilor, depinzînd de un parametru variabil, cum ar fi, de exemplu, deducerea formulei de calcul a deschiderii fisurilor în cazul curgerii lente a betonului prin considerarea în plus și a parametrului timp.

Primită la redacție la 1 martie 1966

ANEXĂ

CONSIDERAȚII TEORETICE DE STATISTICĂ MATEMATICĂ

NOȚIUNI DE ANALIZA REGRESIEI ȘI CORELAȚIEI

1. Fiind dată o variabilă aleatoare Y [7], vom nota cu $F(u)$ funcția ei de repartiție

$$F(u) = P(Y < u)$$

și cu $f(u)$ densitatea de repartiție (cînd aceasta există). Numim medie teoretică a variabilei aleatoare Y mărimea

$$\mu = M[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} u \, \mathrm{d}F(u) \int_{-\infty}^{+\infty} u f(u) \, \mathrm{d}u \tag{1}$$

și numim dispersie a variabilei aleatoare Y mărimea

$$\sigma^2 = D[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - \mu)^2 \, \mathrm{d}F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - \mu)^2 f(u) \, \mathrm{d}u. \tag{1'}$$

Mărimea σ se numește abatere medie pătratică a variabilei aleatoare Y.

2. Să presupunem că variabila aleatoare Y depinde de m „factori" variabili $X_1, X_2 \ldots, X_m$, unde variabilele X_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ nu sînt neapărat aleatoare. Atunci media teoretică a lui Y cînd X_i ia valoarea x_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, este o funcție de valorile $x_1, x_2, \ldots, x_m$, adică

$$y = M[Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m] = \varphi(x_1, \ldots, x_m; \alpha_1, \ldots, \alpha_s), \tag{2}$$

unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ sînt parametri în raport cu $x_1, \ldots, x_m$.

Funcția definită de (2) se numește funcție de regresie a lui Y în raport cu $X_1, \ldots, X_m$ [10]. Printre funcțiile de forma (2), cele mai frecvente și utile pentru practică sînt funcțiile de regresie liniare, adică de forma [8]

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m. \tag{3}$$

Ecuația (3) reprezintă un hiperplan în spațiul euclidian cu $m + 1$ dimensiuni.

Funcția de regresie ne dă în general legătura dintre valoarea medie teoretică a lui Y și factorii numerici de care depinde Y.

3. O problemă importantă a statisticii matematice este estimarea funcției de regresie $\varphi(x_1, \ldots, x_m; \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, care în general se rezolvă cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate

[8], [9]. Vom arăta cum se estimează funcţia de regresie dată de (3) în cazul în care presupunem că

$$\sigma^2 = D\ [Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m]. \tag{4}$$

Peste tot în această lucrare presupunem că Y este o variabilă aleatoare normală.

Să presupunem că se dau n observaţii care au fost efectuate asupra variabilei Y şi a factorilor $X_1, \ldots, X_m$. Scriem aceste experienţe sub forma următorului tablou :

$$\begin{aligned} E_1 &: (y_1, x_{11}, \ldots, x_{m1}) \\ E_2 &: (y_2, x_{12}, \ldots, x_{m2}), \\ E_n &: (y_n, x_{1n}, \ldots, x_{mn}). \end{aligned} \tag{5}$$

Conform metodei celor mai mici pătrate, parametrii α trebuie estimaţi din condiţia

$$S = \sum_{j=1}^{n} [y_j - \alpha_0 - \alpha_1 x_{1j} - \ldots - \alpha_m x_{mj}]^2 = \min,$$

fapt care revine la rezolvarea următorului sistem de $m + 1$ ecuaţii liniare cu m + 1 necunoscute

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} [y_j - \alpha_0 - \alpha_1\ x_{1j} - \ldots - \alpha_m\ x_{mj}] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{6}$$

unde convenim să notăm

$$x_{0j} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Rezolvarea sistemului de ecuaţii (6) se poate face prin mijloace diferite. Există însă un procedeu de rezolvare a sistemului (6) care uşurează rezolvarea multor probleme statistice legate de funcţiile de regresie liniare. Acest procedeu este cunoscut sub numele de schema lui Nemcinov. Schema 1, prezentată sub forma unui algoritm, se referă la cazul $m = 3$, adică la funcţii de regresie de forma

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2\ x_2 + \alpha_3\ x_3. \tag{3'}$$

Ne ocupăm de această schemă întrucît ea este aplicată în cadrul lucrării de faţă. Observăm că pentru a putea rezolva sistemul (6) după schema 1 este necesar mai întîi să se calculeze următoarele sume :

$$\begin{array}{cccc} \Sigma\, x_1 & \Sigma\, x_2 & \Sigma\, x_3 & \Sigma\, y \\ \Sigma\, x_1^2 & \Sigma\, x_1x_2 & \Sigma\, x_1x_3 & \Sigma\, x_1y \\ \Sigma\, x_2^2 & \Sigma\, x_2x_3 & \Sigma\, x_2\, y & \\ & \Sigma\, x_3^2 & \Sigma\, x_3y & \\ & & \Sigma\, y^2 & \end{array} \tag{7}$$

Schema 1 ne dă posibilitatea să estimăm pe rînd funcţiile de regresie liniară ale lui y în raport cu x_1 ; x_1x_2 şi $x_1x_2x_3$.

În schemă sînt notate cu a estimaţiile parametrilor α. Valorile a_0''', a_1''', a_2''', a_3''' reprezintă estimaţiile parametrilor α_0, α_1, α_2, α_3.

4. Schema 1 a lui Nemcinov [8] ne permite să dăm răspuns la multe alte probleme lgate de funcţia de regresie de forma (3'). Folosind notaţiile din schemă, vom prezenta aceste probleme.

1°. Schema ne permite să estimăm dispersia σ^2 a lui Y, pe care am presupus-o constantă. Această estimaţie este

$$s^2_{y\,(3)} = \overline{d}_3^2 = \frac{\Sigma\, d_3^2}{n - 4}. \tag{8}$$

2°. Schema 1 ne permite să estimăm și dispersiile $\sigma^2_{a_0'''}$, $\sigma^2_{a_1'''}$, $\sigma^2_{a_2'''}$, $\sigma^2_{a_3'''}$ ale coeficienților de regresie empirici a_0''', a_1''', a_2''', a_3'''.

Aceste estimații sînt, respectiv,

$$\begin{aligned} s^2_{a_0'''} &= \overline{d}_3^2\, C_{00}''' \\ s^2_{a_1'''} &= \overline{d}_3^2\, C_{11}''' \\ s^2_{a_2'''} &= \overline{d}_3^2\, C_{22}''' \\ s^2_{a_3'''} &= \overline{d}_3^2\, C_{33}'''. \end{aligned} \qquad \overline{d}_3^2 = \frac{\sum d_3^2}{n-4} \tag{9}$$

3°. Schema 1 ne furnizează de asemenea datele necesare estimării diferiților coeficienți de corelație ca de exemplu :

— coeficienții de corelație liniară

$$r_{yx_i} = \frac{\sum yx_{i\cdot 0}}{\sqrt{\sum d_0^2 \cdot \sum x_{i\cdot 0}^2}} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{10}$$

— coeficienții de corelație parțială

$$r_{yx_2\,\cdot\, x_1} = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{\sum d_2^2}{\sum d_1^2}}\,; \quad r_{yx_1\cdot x_2} = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{\sum d_2^2}{\sum d_2^2 + \dfrac{(a_1''')^2}{C_{11}''}}},$$

$$r_{yx_3\cdot x_2x_1} = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{\sum d_3^2}{d_2^2}}, \tag{10'}$$

$$r_{yx_2\cdot x_1x_3} = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{\sum d_3^2}{\sum d_3^2 + \dfrac{(a_2''')^2}{C_{22}'''}}}\,; \quad r_{yx_1\cdot x_2x_3} = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{\sum d_3^2}{\sum d_3^2 + \dfrac{(a_{11}''')^2}{C_{11}'''}}},$$

unde semnul ε al lui $r_{yx_1\cdot x_jx_k}$, este semnul lui r_{yx_i} din (10),

— coeficienții multiplii de corelație

$$R_{y\cdot x_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\sum d_2^2}{\sum d_0^2}}\,; \quad R_{y\cdot x_1x_2x_3} = \sqrt{1 - \frac{\sum d_3^2}{\sum d_0^2}}. \tag{10''}$$

Nu insistăm asupra interpretării valorilor acestor coeficienți de corelație.

5. După estimarea funcției de regresie de forma (3′) se poate trata problema referitoare la semnificația influenței fiecăruia din factorii X_1, X_2, X_3 asupra lui Y.

Folosind notațiile din schema 1, să considerăm următoarele dispersii empirice :

$$\begin{aligned} s^2_{(y_{x_1}-\bar{y})} &= a_0'\sum y + a_1' \sum yx_1 - \frac{(\sum y)^2}{n}, \\ s^2_{(y_{x_1x_2}-y_{y_1})} &= (a_0'' - a_0')\ \sum y + (a_1'' - a_1')\ \sum yx_1 + a_2 \sum yx_2, \\ s^2_{(y_{x_1x_2x_3}-y_{x_1x_2})} &= (a_0''' - a_0'')\sum y + (a_1''' - a_1'')\ \sum yx_1 + (a_2''' - a_2'')\ \sum yx_2 + \\ &\quad + a_3''' \sum yx_3. \\ s^2_{y(3)} &= \overline{d}_3^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Dacă fiecare dintre factorii X_1, X_2, X_3 nu au influență asupra lui Y, atunci primele trei dispersii empirice (11), estimează aceeași dispersie teoretică σ^2 ca și ultima dispersie empirică (11).

Pentru a decide asupra semnificației factorilor X_1, X_2, X_3 asupra lui Y, folosim schema 2 de analiză dispersională, bazată pe aplicarea testului F.

Schema 2

Factorul	Nr. gradelor de libertate	Dispersia empirică	Statistica F	Valoarea teoretică F
X_1	1	$s^2_{(y_{x_1}-\bar{y})}$	$\dfrac{s^2_{(y_{x_1}-\bar{y})}}{s^2_{y(3)}}$	$F_{1,n-4}(q)$
X_2	1	$s^2_{(y_{x_1x_2}-y_{x_1})}$	$\dfrac{s^2_{(y_{x_1x_2}-y_{x_1})}}{s^2_{y(3)}}$	$F_{1,n-4}(q)$
X_3	1	$s^2_{(y_{x_1x_2x_3}-y_{x_1x_2})}$	$\dfrac{s^2_{(y_{x_1x_2x_3}-y_{x_1x_2})}}{s^2_{y(3)}}$	$F_{1,n-4}(q)$
	$n-4$	$s^2_{y(3)}$	1	

Să notăm cu $F_{1,n-4}(q)$ valoarea teoretică a variabilei F cu 1 și $n-4$ grade de libertate corespunzătoare unui prag de semnificație q, adică

$$P(F_{1,n-4} < F_{1,n-4}(q)) = 1-q.$$

Atunci schema 2 se aplică astfel: dacă statistica F din penultima coloană, corespunzătoare factorului X_i, satisface relația

$$F > F_{1,n-4}(q),$$

atunci influența factorului X_i este semnificativă; în caz contrar, influența este nesemnificativă. Dacă considerăm disperia empirică

$$s^2_{(y_{x_1x_2x_3}-\bar{y})} = \frac{a'''_0 \sum y + a'''_1 \sum yx_1 + a'''_2 \sum yx_2 + a'''_3 \sum yx_3 - \dfrac{(\sum y)^2}{n}}{3}, \tag{12}$$

care are trei grade de libertate, atunci putem decide și asupra semnificației influenței „globale''' a factorilor X_1, X_2, X_3 asupra lui Y. Astfel, cînd

$$F = \frac{s^2_{(y_{x_1x_2x_3}-\bar{y})}}{s^2_{y(3)}} > F_{3,\,n-4}(q), \tag{12'}$$

înseamnă că influența este semnificativă; în caz contrar ea nu este semnificativă.

6. Ne vom pune acum problema comparării a două funcții de regresie empirice. Mai precis să presupunem că se cunosc estimațiile a două funcții liniare de regresie:

$$\begin{aligned} y &= a'''_0 + a'''_1 x_1 + a'''_2 x_2 + a'''_3 x_3, \\ y &= b'''_0 + b'''_1 x_1 + b'''_2 x_2 + b'''_3 x_3, \end{aligned} \tag{13}$$

și ne propunem să constatăm dacă ele estimează aceeași funcție teoretică de regresie

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3. \tag{14}$$

Dacă acest lucru ar fi adevărat atunci, a'''_i, b'''_i sînt estimații absolut corecte pentru α_i ($i = 0, 1, 2, 3$) și repartițiile lor sînt normale. Dacă notăm cu $s^2_{(a'''_i - b'''_i)}$ estimația dispersiei

teoretice a lui $a_i''' - b_i'''$ ($i = 0, 1, 2, 3$), atunci se știe că variabila aleatoare

$$t_i = \frac{a_i''' - b_i'''}{s_{(a_i''' - b_i''')}} \tag{14'}$$

este o variabilă student. Să presupunem că funcțiile de regresie empirice (13) au fost estimate respectiv pe baza a n_1 și n_2 observații. Atunci rezultă că dispersiile empirice $s^2_{a_i'''}$, $s^2_{b_i'''}$ au respectiv $f_1 = n_1 - 4$ și $f_2 = n_2 - 4$ grade de libertate.

Să considerăm dispersiile empirice $s^2_{a_i'''}$ și $s^2_{b_i'''}$ și să notăm cu $s^2_{M_i}$, $s^2_{m_i}$ respectiv pe cea mai mare și cea mai mică și cu f_{M_i}, f_{m_i} gradele de libertate corespunzătoare.

Dacă

$$F = \frac{s^2_{M_i}}{s^2_{m_i}} < F_{f_{M_i},\, f_{m_i}}\ (q), \tag{15}$$

atunci

$$s^2_{(a_i''' - b_i''')} = \frac{f_1 s^2_{a_i'''} + f_2 s^2_{b_i'''}}{f_1 + f_2}, \tag{16}$$

iar dacă $F \geqslant F_{f_{M_i},\, f_{m_i}}\ (q)$, (15')

atunci

$$s^2_{(a_i''' - b_i''')} = s^2_{a_i'''} + s^2_{b_i'''}. \tag{16'}$$

În cazul cînd are loc (15), variabila (14') este o variabilă student cu $f = f_1 + f_2$ grade de libertate, iar cînd are loc relația (15') atunci t_i este o variabilă student cu f grade de libertate, unde f este dat de relația

$$\frac{1}{f} = \frac{c^2}{f_1} + \frac{1 - c^2}{f_2}, \tag{17}$$

$$c = \frac{\dfrac{s^2_{a_i'''}}{n_1}}{\dfrac{s^2_{a_i'''}}{n_1} + \dfrac{s^2_{b_i'''}}{n_2}}, \tag{17'}$$

În acest ultim caz se vede că

$$\min\,(f_1, f_2) < f < f_1 + f_2. \tag{18}$$

Se știe că, dacă $f > 30$, se poate considera cu o aproximație suficient de bună din punct de vedere practic că variabila (14') este o variabilă aleatoare normală cu media zero și dispersia unu, adică o variabilă normală standard.

Condiția $f > 30$ este satisfăcută în orice caz cînd $n_1 > 34$, $n_2 > 34$.

Rezultă deci că pentru $n_1 > 34$, $n_2 > 34$ variabila aleatoare

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{3} \left[\frac{a_i''' - b_i'''}{s_{(a_i''' - b_i''')}} \right]^2 \tag{19}$$

este o variabilă χ^2 cu 4 grade de libertate și deci putem formula următorul test pentru compararea a două funcții empirice de regresie : dacă χ^2 dat de (19) satisface condiția

$$\chi^2 < \chi^2_4\,(q), \tag{20}$$

atunci funcțiile de regresie empirice (13) estimează aceeași funcție de regresie liniară (14) ; dacă

$$\chi^2 \geqslant \chi^2_4\,(q), \tag{20'}$$

atunci funcţiile de regresie (13) nu estimează aceeaşi funcţie de regresie (14), deci ele diferă semnificativ.

În (20) şi (20′) am notat cu $\chi_4^2(q)$ valoarea care satisface relaţia

$$P(\chi_4^2 < \chi_4^2(q)) = 1-q,$$

unde q este pragul de semnificaţie ales. Este indicat să se aleagă în aplicaţii $q = 0{,}05$. Mărimea $\chi_4^2(q)$ se citeşte din tabela repartiţiei χ^2 cu 4 grade de libertate.

7. Să presupunem acum că sîntem în condiţiile formulei (20), adică funcţiile de regresie (13) estimează aceeaşi funcţie teoretică de regresie (14). Putem obţine o nouă estimaţie pentru funcţia de regresie (14) prin „medierea" celor două funcţii (13). Coeficienţii noii funcţii de regresie empirică vor fi daţi de formulele

$$A_i = \frac{{}^1C_{ii}''' a_i''' + {}^2C_{ii}''' b_i'''}{{}^1C_{ii}''' + {}^2C_{ii}'''} \qquad (i = 0, 1, 2, 3), \qquad (21)$$

unde ${}^1C_{ii}'''$ şi ${}^2C_{ii}'''$ sînt coeficienţi obţinuţi pe baza schemei 1 respectiv pentru cele două funcţii de regresie (13). Deci funcţia de regresie empirică „mediată" este

$$y = A_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3. \qquad (13')$$

Dacă, comparînd trei funcţii de regresie empirice două cîte două, ajungem la concluzia că ele estimează aceeaşi funcţie de regresie teoretică, atunci funcţia de regresie empirică „mediată" va avea coeficienţii daţi de formulele

$$A_i = \frac{{}^1C_{ii}''' a_i''' + {}^2C_{ii}''' b_i''' + {}^3C_{ii}''' g_i'''}{{}^1C_{ii}''' + {}^2C_{ii}''' + {}^3C_{ii}'''}. \qquad (21')$$

Formulele (21) şi (21′) se pot generaliza pentru mai multe funcţii de regresie empirice.

8. În sfîrşit, vom prezenta şi problema zonei de regresie. Presupunem că funcţia de regresie este de forma (3) şi că Y este o variabilă aleatoare normală cu dispersia σ^2 constantă. Dacă ne dăm o probabilitate q şi notăm cu $z(q)$ soluţia ecuaţiei

$$\int_{-z(q)}^{z(q)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1-q,$$

care se poate citi din tabele, atunci probabilitatea ca o valoare a lui Y să se găsească între hiperplanele

$$y = \alpha_0 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 - z(q)\sigma, \qquad (22)$$

$$y = \alpha_0 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + z(q)\sigma$$

este $1-q$. Zona din spaţiul cu patru dimensiuni definită de formulele

$$y = \alpha_0 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 \pm z(q)\sigma \qquad (22')$$

se numeşte zona de regresie a lui Y.

Ţinînd seama de faptul că σ^2 se estimează prin $s^2_{y\,(3)}$ şi funcţia de regresie se estimează prin

$$y = a_0''' + a_1''' x_1 + a_2''' x_2 + a_3''' x_3,$$

rezultă că zona de regresie a lui Y se estimează prin

$$y = a_0''' + a_1''' x_1 + a_2''' x_2 + a_3''' x_3 \pm z(q)\, s_{y\,(3)}, \qquad (23)$$

în cazul cînd numărul n al observaţiilor a fost suficient de mare ($n > 34$).

Se poate estima şi o zonă de regresie pentru media variabilei aleatoare Y, care este de forma

$$y = a_0''' + a_1''' x_1 + a_2''' x_2 + a_3''' x_3 \pm z(q)\frac{s_{y\,(3)}}{\sqrt{n}}, \qquad (23')$$

tot în cazul cînd $n > 34$.

Evident, formulele (23) şi (23′) permit să se decidă practic dacă alegerea funcţiei de regresie a fost bine făcută şi dacă rezolvarea problemei de regresie este corectă: acest lucru se face verificîndu-se experimental dacă frecvenţa valorilor lui Y în zona de regresie (23) este mai mare sau egală decît $1-q$, pe de o parte, sau mai mică decît $1-q$, pe de altă parte.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Stănculescu, M. Ionescu, *Influenţa diferiţilor parametri asupra distanţei între fisuri şi deschiderii fisurilor la elemente de beton armat supuse la încovoiere*, INCERC, Studii şi cercetări, beton armat, beton precomprimat, 1 (1965).
2. G. Stănculescu, M. Ionescu, *Studiu statistic al distanţei dintre fisuri şi al deschiderii lor la elemente încovoiate de beton armat*, St. cerc. mec. apl., **21**, *1*, (1966).
3. H. Rüsch, G. Rehm, *Versuche mit Betonformstählen (Teil I, II, III)*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 140, 160, 164 (1963, 1964).
4. Н. М. Мулин, В. П. Артемьев, И. К. Белобров, Е. А. Гузеев, Г. М. Красовская, К. В. Петрова, В. В. Фигаровский, *Обоснование расчета деформаций железобетонных конструкций по проекту новых норм*, Бетон и железобетон, *11* (1962).
5. F. Leonhardt, *Die verminderte Schubdeckung bei Stahlbeton Tragwerken, Begründung durch Versuchsergebnisse mit Hilfe einer erweiterten Fachwerkanalogie*, Der Bauingenieur, *1* (1965).
6. E. Reis, J. Mozer, A. Bianchini, C. Kesler, *Causes and control of cracking in concrete reinforced with high-strength steel bars — a review of research*, Bulletin from the University of Illinois College of Engineering, *479* (1965).
7. O. Onicescu, G. Mihoc, *Lecţii de statistică matematică*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1958.
8. N. Rancu, L. Tövissi, *Statistica matematică cu aplicaţii în producţie*, Bucureşti, Edit. Acad. R.P.R., 1963.
9. И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов, Теория вероятностей, *математическая статистика в технике*, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1955.
10. А. Хальд, *Математическая статистика с техническими приложениями*, Москва, 1956.

ASUPRA SIGURANȚEI STRUCTURILOR SUPUSE ÎNCĂRCĂRILOR TEMPORARE[1])

de H. SANDI

Institutul de cercetări în construcții
și economia construcțiilor (INCERC) București

539.4

Încărcările temporare sînt reprezentate cu ajutorul distribuției Poisson pentru care se aduc o serie de precizări referitoare la structura argumentului. Pe baza distribuției adoptate se dau relații referitoare la distribuția tensiunilor extreme, la probabilitatea de avariere etc. în funcție de durata de exploatare și de alți factori caracteristici pentru încărcări și structuri. Relațiile deduse sînt aplicate la studiul siguranței unui element de acoperiș supus acțiunii zăpezii. Aplicația permite să se determine coeficientul de siguranță necesar ca funcție de durata de exploatare, de greutatea proprie a acoperișului și de probabilitatea de rupere admisă și să se prezinte recomandări pentru îmbunătățirea normelor de calcul.

1. INTRODUCERE

O privire de ansamblu asupra calculului structurilor de rezistență pune în evidență o apreciabilă diferență între diferitele etape de calcul (stabilirea datelor inițiale, determinarea eforturilor și deplasărilor, dimensionarea secțiunilor) din punctul de vedere al nivelului de precizie și de rigurozitate. În timp ce etapa de calcul specifică mecanicii construcțiilor (determinarea eforturilor și deplasărilor, evaluarea capacității portante etc.) se situează în prezent la un nivel ridicat, fiindu-i proprii în majoritatea cazurilor metode riguroase și bine prelucrate pentru aplicarea practică, celelalte etape de calcul sînt caracterizate prin adoptarea unor valori

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech.-Mécanique Appliquée", **11**, *5* (1966) (în limba engleză).

convenţionale şi prin verificări pe baza unor coeficienţi a căror semnificaţie pentru siguranţa structurilor este adeseori redusă.

Studiile şi cercetările recente relative la utilizarea noţiunilor şi a metodelor probabilistice în evaluarea siguranţei structurilor şi în elaborarea de metode riguroase de dimensionare sînt menite să reducă decalajul dintre etapele de calcul enumerate şi să contribuie la elaborarea unei teorii unitare a calculului structurilor.

Unele lucrări de sinteză [1],[2],[10] pun în evidenţă varietatea mare a preocupărilor acestor studii : aplicarea metodelor probabilistice în mecanica construcţiilor (pentru calculul eforturilor şi deplasărilor statice sau dinamice, calculul de stabilitate, evaluarea capacităţii portante etc.), în studiul încărcărilor (permanente sau temporare), în definirea şi în evaluarea siguranţei structurilor, în prelucrarea datelor experimentale etc.

Preocupările pentru aplicarea metodelor probabilistice în calculul structurilor au fost o consecinţă a necesităţii practice stringente de elaborare a unor metode corecte de dimensionare şi, ca atare, a apărut tendinţa firească de a introduce rapid în practică utilizarea fie a acestor metode, fie a rezultatelor obţinute pe baza aplicării lor. Astfel, deşi în prezent nu există o disciplină constituită pentru teoria dimensionării, aşa cum există discipline specifice mecanicii construcţiilor, se tinde cu perseverenţă spre o definire şi chiar spre o determinare cantitativă pe baze probabilistice a valorilor convenţionale de calcul utilizate în practica proiectării. În această ordine de idei este remarcabil progresul obţinut prin introducerea în ţara noastră a coeficienţilor de siguranţă diferenţiaţi o dată cu elaborarea noilor normative de proiectare. Chiar dacă sensul şi valorile coeficienţilor noii metode de calcul sînt susceptibile de aprofundări considerabile în viitor, introducerea lor permite în prezent o analiză mai corectă a siguranţei structurilor şi, în consecinţă, o dimensionare mai judicioasă, cu considerarea, cel puţin sub raport calitativ, a unor factori de primă importanţă, ca variabilitatea aleatoare a diferiţilor parametri (rezistenţe, rigidităţi, încărcări etc.), existenţa diferitelor scheme de încărcări, problema grupărilor de încărcări şi a simultaneităţii lor etc.

În prezent, deşi coeficienţii de dimensionare sînt definiţi drept caracteristici globale ale distribuţiilor probabilistice ale rezistenţelor sau încărcărilor, valorile lor convenţionale sînt prescrise empiric şi nu se poate stabili o legătură între siguranţa structurilor (reprezentată cantitativ prin probabilitatea de comportare normală) şi valorile acestor coeficienţi. Discordanţa semnalată este o consecinţă naturală a considerării izolate a distribuţiilor rezistenţelor şi încărcărilor, iar o remediere a acestei discordanţe nu poate fi aşteptată în absenţa unor dezvoltări teoretice corespunzătoare.

În lucrare sînt abordate unele aspecte ale problemei siguranţei structurilor, cu aplicaţie la cazul încărcărilor temporare, în intenţia de a contribui la o prescriere mai corectă a acestor încărcări. Sînt discutate pe rînd unele consideraţii generale asupra siguranţei structurilor, reprezentarea probabilistică a încărcărilor temporare, expresii referitoare la siguranţa structurilor supuse încărcărilor temporare şi o aplicaţie referitoare la cazul acţiunii zăpezii. În lucrare s-a căutat să se utilizeze în cît mai mare măsură terminologia adoptată în noile normative de calcul pentru construcţii.

2. REPREZENTAREA SIGURANȚEI STRUCTURILOR

Experiența pune în evidență variabilitatea întîmplătoare a diferiților factori care condiționează capacitatea unei structuri de a rezista încărcărilor în decursul exploatării. Această variabilitate, care nu respectă o lege simplă, evidentă, se manifestă pentru încărcări, caracteristicile materialului de construcție și caracteristicile geometrice ale structurii. Alături de variabilitatea întîmplătoare se poate remarca în paralel stabilitatea de masă a principalelor caracteristici ale acestor factori. Ea se manifestă în faptul că frecvențele relative ale valorilor rezistențelor, încărcărilor etc. obținute din serii de determinări variază în mică măsură de la o serie la alta.

Caracterul întîmplător și stabilitatea de masă a factorilor amintiți creează premise de aplicare a metodelor teoriei probabilităților pentru analiza lor. Pentru cele ce urmează va fi adoptat un punct de vedere fenomenologic pentru reprezentarea caracteristicilor unei structuri: se vor considera date caracteristicile globale de rezistență și de rigiditate ale acesteia, fără a se căuta legătura analitică între acestea, și caracteristicile mecanice ale materialelor de construcție sau caracteristicile geometrice ale elementelor de construcție (stabilirea unei astfel de legături analitice, care comportă dificultăți de calcul excepționale, nu a fost făcut pînă în prezent decît pentru cazuri cu totul schematice [1], [2], [7] și ea nu prezintă interes direct pentru lucrarea de față).

În cadrul lucrării se va admite că toate încărcările considerate pentru construcție au o schemă geometrică comună, putînd varia numai proporțional cu un parametru comun (care are semnificația unei intensități și poate fi eventual o funcție de timp). Considerarea diferitelor scheme geometrice de încărcare ar duce la necesitatea punerii în evidență a unei structuri matematice de spațiu vectorial și metric [13] pentru mulțimea încărcărilor care pot acționa asupra construcției date.

Se vor considera astfel numai încărcări de tipul

$$S = \alpha S_0, \tag{1}$$

unde S_0 reprezintă o încărcare (adică un sistem de forțe exterioare) de referință, iar S o încărcare obținută prin multiplicarea tuturor forțelor încărcării S_0 cu același factor α.

O structură supusă unei încărcări perfect determinate (notată S) poate fi solicitată în diferite stadii, în funcție de relația dintre intensitatea încărcării și valorile limită ale acesteia pe care structura le poate suporta. Astfel, structura poate să suporte încărcarea dată fără nici un fel de degradare, cu degradări microscopice sau locale, să sufere plastificări parțiale sau ruină totală. Diferitele stadii de solicitare amintite pot fi notate cu simbolurile Ω_k. Uneori poate fi utilă introducerea unei măsuri a degradării (sau a stadiului de solicitare), D, care să ia valori crescătoare pentru diferitele stadii de solicitare (mergînd, spre exemplu, de la 0 pentru stadiul nesolicitat pînă la 1 pentru ruina totală).

Natura aleatoare a caracteristicilor structurii face ca, sub o încărcare S dată, structura să lucreze în mod întîmplător într-un stadiu de soli-

citare sau altul. Probabilitatea lucrului în stadiul Ω_k, în cazul acțiunii unei încărcări S, date de relația (1), va fi notată prin

$$P(\Omega_k ; \alpha).$$

În cazul adoptării unei măsuri a degradării, D, probabilitatea $P(\Omega_k ; \alpha)$ poate fi reprezentată într-un mod mai adecuat pentru aplicații, prin funcția de repartiție a măsurii D,

$$F(d ; \alpha) = P(D < d ; \alpha), \tag{2}$$

care reprezintă probabilitatea unei degradări cu o măsură D mai mică decît valoarea d în cazul acțiunii unei încărcări S (exprimată sub forma (1)).

Încărcările au, la fel ca unele caracteristici ale structurii, un caracter aleator. Dacă se admite dependența (1) de un singur parametru α, acest parametru este o variabilă aleatoare în cazul încărcărilor permanente. În cazul încărcărilor temporare, parametrul α devine variabil în timp și va trebui deci considerat o funcție aleatoare în raport cu timpul. Pentru început se vor considera doar încărcări permanente. În acest caz, variabila aleatoare α va putea fi caracterizată printr-o densitate de repartiție, $g(\alpha)$.

Pentru verificarea siguranței unei structuri interesează cunoașterea probabilității de atingere a diferitelor stadii de lucru în decursul exploatării. Dacă se consideră caracterul aleator al parametrului α, atunci probabilitatea $P(\Omega_k ; \alpha)$ și funcția de repartiție $F(d ; \alpha)$, dată de relația (2), devin probabilități condiționate. Pentru determinarea probabilităților de atingere a diferitelor stadii în decursul exploatării se va putea aplica formula probabilităților totale [8]. Astfel, probabilitatea de lucru al structurii în stadiul Ω_k, va fi

$$P(\Omega_k) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\Omega_k ; \alpha)\, g(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha, \tag{3}$$

iar funcția de repartiție a măsurii degradării, $H(d)$, va avea expresia

$$H(d) = \int_{-\infty}^{\infty} F(d ; \alpha)\, g(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha \tag{4}$$

(mărimea $H(d)$ reprezintă probabilitatea de apariție a unei valori D a măsurii degradării, $D < d$, în condiții de exploatare reală).

În cadrul lucrării se va admite că datele statistice disponibile, referitoare la caracteristicile structurii și ale încărcărilor, sînt perfecte, cu alte cuvinte că probabilitățile $P(\Omega_k ; \alpha)$, $F(d ; \alpha)$ și densitatea de probabilitate $g(\alpha)$ sînt perfect cunoscute. În acest caz, expresiile (3) și (4) pot să dea date perfecte asupra probabilităților de depășire a diferitelor stări-limită. În realitate, datele referitoare la mărimile $P(\Omega_k ; \alpha)$, $F(d ; \alpha)$ sau $g(\alpha)$ sînt afectate de un grad mai mare sau mai mic de incertitudine, fapt care se reflectă într-o incertitudine adesea apreciabilă în privința rezultatelor date de expresii de tipul (3) sau (4). Discuția acestui aspect, de importanță capitală pentru dimensionarea structurilor, iese însă din cadrul lucrării de față.

Expresiile (3) și (4) sînt susceptibile de generalizare imediată în cazul considerării mai multor scheme geometrice de încărcare posibile,

în care caz apare necesară considerarea mai multor parametri α_i. În cele ce urmează se va acorda însă atenție cazului cînd schema geometrică de încărcare este fixă, iar parametrul α este variabil în timp, datorită prezenței încărcărilor temporare.

Introducerea noțiunilor calculului probabilităților permite deducerea unor criterii raționale de dimensionare, considerînd dimensionarea structurilor drept problema găsirii unui optimum între risipa produsă de supradimensionare și riscul exagerat produs de subdimensionare. Criteriul de evaluare a corectitudinii dimensionării este costul total probabil, $\overline{C}$, iar drept soluție optimă se consideră soluția care minimează acest cost [5], [9]:

$$\overline{C} = C' + \overline{C''} = \min. \tag{5}$$

În expresia (5), C' reprezintă costul de investiție, iar $\overline{C''}$ costul probabil al inconvenientelor datorite degradărilor apărute în exploatare (costul reparațiilor, pagubelor, întreruperii procesului tehnologic etc.). Costul C'' poate fi considerat ca o măsură a degradării, iar pentru el pot fi stabilite expresii de formele (2) sau (4). Întrucît în criteriul de optimizare (5) intervine valoarea medie $\overline{C''}$ a variabilei aleatoare C'', este utilă obținerea unei expresii similare cu (4) pentru mărimea $\overline{C''}$:

$$\overline{C''} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{C''(\alpha)}\, g(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha. \tag{6}$$

În expresia (6), $\overline{C''(\alpha)}$ reprezintă costul probabil al urmărilor economice ale degradărilor structurii în cazul acțiunii unei încărcări S corespunzînd unei intensități α (mărimea $C''(\alpha)$ este o mărime aleatoare, datorită naturii aleatoare a caracteristicilor de rezistență ale structurii, ca și a condițiilor de exploatare, datorită căreia aceeași deteriorare sau avariere poate avea urmări economice diferite).

3. REPREZENTAREA ÎNCĂRCĂRILOR TEMPORARE

În principiu, diferitele încărcări temporare ar trebui considerate ca avînd scheme diferite, chiar dacă ele admit o schemă geometrică comună, S_0. Această necesitate rezultă din faptul că efectele solicitărilor cu diferite evoluții în timp sînt, la rîndul lor, de naturi diferite (spre exemplu stadiile de degradare corespunzătoare unor solicitări repetate de un număr mare de ori diferă de stadiile de degradare corespunzătoare unor solicitări aplicate o singură dată). Pentru a nu se face apel la considerarea mai multor scheme de încărcare, se va admite în lucrare că toate încărcările (permanente sau temporare) aplicate structurii produc solicitări de aceeași natură, iar stadiul de lucru atins depinde exclusiv de intensitatea extremă a solicitării. Un astfel de caz poate fi considerat acela al acțiunii greutății proprii și zăpezii pentru un element de acoperiș, unde se poate admite practic că istoria încărcării cu zăpadă nu influențează asupra stadiului de lucru).

În ipotezele admise se va considera drept eveniment caracteristic pentru o încărcare temporară

$$A_n(\alpha_1, \alpha_2, T),$$

apariția de n ori într-un interval de timp de lungime T, a unor intensități de referință α ale încărcării, cuprinse în intervalul

$$\alpha_1 \leqslant \alpha < \alpha_2 .$$

(prin intensitate de referință se înțelege în lucrare o valoare caracteristică pentru parametrul α, în mod curent valoarea extremă a acestui parametru în decursul unei apariții a încărcării S).

Probabilitatea evenimentului $A_n(\alpha_1, \alpha_2, T)$ se va nota $G_n(\alpha_1, \alpha_2, T)$. Evident, probabilitățile $G_n(\alpha_1, \alpha_2, T)$ satisfac pentru orice valori α_1, α_2, T relația

$$\sum_{n}^{0,\infty} G_n(\alpha_1, \alpha_2, T) = 1. \tag{7}$$

Se va admite că probabilitățile $G_n(\alpha_1, \alpha_2, T)$ satisfac următoarele condiții:

— atunci cînd lungimea $\alpha_2 - \alpha_1$ a intervalului de intensități sau lungimea T a intervalului de timp tind către zero, mărimea $G_n(\alpha_1, \alpha_2, T)$ tinde către zero, ca și $(\alpha_2 - \alpha_1)^n$, respectiv T^n;

— apariția unor încărcări în intervale de intensități sau de timp fără puncte comune este probabilistic independentă.

Ipoteza cu privire la modul în care probabilitățile $G_n(\alpha_1, \alpha_2, T)$ tind către zero poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_2-\alpha_1\to 0} \frac{G_n(\alpha_1, \alpha_2, T)}{(\alpha_2 - \alpha_1)^n} &= k_n(\alpha_1, T), \\ \lim_{T\to 0} \frac{G_n(\alpha_1, \alpha_2, T)}{T^n} &= l_n(\alpha_1, \alpha_2) \qquad (\text{cu } n \geqslant 1). \end{aligned} \tag{8}$$

Relațiile (7) și (8) duc la concluzia

$$\begin{aligned} \lim_{(\alpha_2-\alpha_1)\to 0} \frac{1 - G_0(\alpha_1, \alpha_2, T)}{\alpha_2 - \alpha_1} &= k_1(\alpha_1, T), \\ \lim_{T\to 0} \frac{1 - G_0(\alpha_1, \alpha_2, T)}{T} &= l_1(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \tag{9}$$

Ipoteza independenței probabilistice a evenimentelor $A_n(\alpha_1, \alpha_2, T)$, enunțată mai sus, duce la relația

$$G_n(\alpha_1, \alpha_2, T + \Delta) = \sum_{p}^{0,n} G_{n-p}(\alpha_1, \alpha_2, T) G_p(\alpha_1, \alpha_2, \Delta) \tag{10}$$

sau la relația echivalentă

$$\frac{G_n(\alpha_1, \alpha_2, T + \Delta) - G_n(\alpha_1, \alpha_2, T)}{\Delta} = -\frac{1 - G_0(\alpha_1, \alpha_2, \Delta)}{\Delta} \cdot G_n(\alpha_1, \alpha_2, T) + \frac{1}{\Delta} \sum_{p}^{1,n} G_{n-p}(\alpha_1, \alpha_2, T) \cdot G_p(\alpha_1, \alpha_2, T) \tag{10'}$$

sau, în fine, prin trecere la limită, cu considerarea relațiilor (8), la

$$\frac{\partial G_n(\alpha_1, \alpha_2, T)}{\partial T} = -l_1(\alpha_1, \alpha_2)\,[G_n(\alpha_1, \alpha_2, T) - G_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, T)]. \quad (10'')$$

Deducerea unor relații analoge pentru derivatele $\frac{\partial G_n(\alpha_1, \alpha_2, T)}{\partial \alpha_1}$ și $\frac{\partial G_n(\alpha_1, \alpha_2, T)}{\partial \alpha_2}$ și integrarea lor duc la expresia

$$G_n(\alpha_1, \alpha_2, T) = \frac{[\overline{N}(\alpha_1, \alpha_2, T)]^n}{n!} \cdot e^{-\overline{N}(\alpha_1, \alpha_2, T)} \quad (11)$$

pentru probabilitățile $G_n(\alpha_1, \alpha_2, T)$ și la expresia

$$\overline{N}(\alpha_1, \alpha_2, T) = T \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} s(\alpha)\, d\alpha \quad (12)$$

pentru numărul mediu $\overline{N}(\alpha_1, \alpha_2, T)$ de apariții ale unor încărcări de intensități de referință $\alpha_1 \leqslant \alpha < \alpha_2$ într-un interval de timp de lungime T.

Distribuția (19) este distribuția Poisson [3], [8], iar expresia (12) pune în evidență structura argumentului ei [12].

În ultima analiză, pentru stabilirea distribuției (11) a unei încărcări temporare în cadrul ipotezelor admise, este necesară cunoașterea unei singure funcții : densitatea $s(\alpha)$ a apariției intensităților de valoare α în unitatea de timp, $T = 1$. Se poate verifica ușor satisfacerea relațiilor (7)—(10) de către distribuția (11).

Ipoteza independenței probabilistice a apariției încărcărilor în intervale de intensitate sau de timp disjuncte este fără discuție criticabilă. Ea este în contradicție cu tendința spre periodicitate a încărcărilor climatice, seismice sau tehnologice. Totuși, pentru intervale de timp suficient de lungi, ea poate da indicații prețioase referitoare la siguranța construcției.

4. SIGURANȚA STRUCTURILOR SUPUSE ÎNCĂRCĂRILOR TEMPORARE

Distribuția (11) permite deducerea unor expresii care generalizează relațiile (3), (4) și (6) pentru cazul acțiunii încărcărilor temporare. Se pot astfel trage concluzii referitoare la influența duratei de exploatare și a frecvenței apariției încărcărilor temporare asupra siguranței structurii. În cele ce urmează sînt prezentate cîteva expresii susceptibile de aplicare pentru evaluarea siguranței structurilor în decursul exploatării. Aceste expresii se referă la distribuția costului urmărilor degradărilor, la distribuția măsurii degradării sau la distribuția solicitărilor extreme. În deducerea expresiilor se va admite că, în cazul apariției degradărilor, structura se repară, readucîndu-se integral în starea inițială.

a) O primă expresie se poate stabili relativ la costul probabil al degradărilor, $\overline{C''(T)}$, pentru perioada de exploatare prestabilită.

Dacă se admite că o apariție a unei încărcări temporare la intensitatea α produce degradări al căror cost probabil este $\overline{C''(\alpha)}$, costul $\overline{C''(T)}$ va avea expresia

$$\overline{C''(T)} = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{n}^{0,\infty} \sum_{i} G_n(\alpha_i, \alpha_i + \Delta, T) \cdot n \, \overline{C''(\alpha_i)} =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \sum_{n}^{0,\infty} \sum_{i} n \frac{[\overline{N}(\alpha_i, \alpha_i + \Delta, T)]^n}{n!} e^{-\overline{N}(\alpha_i, \alpha_i+\Delta, T)} \overline{C''(\alpha_i)} =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i} \overline{N}(\alpha_i, \alpha_i + \Delta, T) \left[\sum_{n} G_n(\alpha_i, \alpha_i + \Delta, T)\right] \overline{C''(\alpha_i)} =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i} \overline{N}(\alpha_i, \alpha_i + \Delta, T) \, \overline{C''(\alpha_i)} = \lim_{\Delta\to 0} T \sum_{i} \overline{C''(\alpha_i)} \times$$

$$\times \int_{\alpha_i}^{\alpha_i+\Delta} s(\alpha)\, d\alpha = T \int_0^{\infty} \overline{C''(\alpha)}\, s(\alpha)\, d\alpha. \qquad (13)$$

Din relația (13) se constată că urmările economice probabile ale degradărilor, în ipotezele admise, sînt proporționale cu durata de exploatare T și cu densitatea de frecvență a apariției încărcărilor, $s(\alpha)$. Relația (13) prezintă un aspect al interdependenței între criteriul de dimensionare (în care intervine mărimea $\overline{C''(T)}$), caracteristicile de rezistență și de importanță ale structurii (de care depind efectele degradărilor $\overline{C''(\alpha)}$), caracteristicile încărcărilor (reprezentate prin densitatea $s(\alpha)$) și durata de exploatare T.

Pe această bază se creează premise pentru stabilirea soluției optime în dimensionare cu considerarea caracteristicilor de rezistență și de importanță funcțională ale structurii, a frecvenței încărcărilor de diferite intensități și a duratei de exploatare prevăzute, introducînd pentru diferitele variante de proiectare posibile mărimea $\overline{C''(T)}$ în criteriul de optimizare (5).

b) O altă expresie se poate stabili pentru probabilitatea degradărilor extreme. Dacă se notează prin $H(d, T)$ probabilitatea evenimentului caracterizat prin aceea că pentru orice apariție a încărcării, considerată individual, măsura corespunzătoare a degradării să satisfacă relația $D < d$, atunci funcția de repartiție a degradărilor produse de încărcări cu intensități de referință variind în intervalul $[\alpha_i, \alpha_i + \Delta)$ va fi dată de relația

$$1 - H(d; T)_{(\alpha_i,\ \alpha_i+\Delta)} = [1 - F(d; \alpha_i)] G_1(\alpha_i, \alpha_i + \Delta, T) + 0(\Delta^2)$$

(unde $0(\Delta^2)$ este o mărime care tinde către zero la fel ca Δ^2), din care rezultă

$$H(d; T)_{(\alpha_i,\ \alpha_i+\Delta)} \cong 1 - [1 - F(d; \alpha_i)] G_1(\alpha_i, \alpha_i + \Delta, T) \cong 1 -$$

$$- [1 - F(d; \alpha_i)] \cdot T \int_{\alpha_i}^{\alpha_i+\Delta} s(\alpha)\, d\alpha \cong 1 -$$

$$- [1 - F(d; \alpha_i)] \cdot T s(\alpha_i) \Delta \cong e^{-[1-F(d;\,\alpha_i)]\cdot T s(\alpha_i)\Delta}.$$

Funcția de repartiție $H(d; T)$ va rezulta din condiția ca nici un interval de intensități $[\alpha_i, \alpha_i + \Delta)$ să nu producă degradări $D \geqslant d$:

$$H(d; T) = \lim_{\Delta \to 0} \prod_i H(d; T)(\alpha_i, \alpha_i + \Delta) = \lim_{\Delta \to 0} e^{-\sum_i [1 - F(d; \alpha_i)] T s(\alpha_i) \Delta} =$$

$$= e^{-T \int_0^\infty [1 - F(d; \alpha)] s(\alpha) \, d\alpha} \tag{14}$$

sau, sub o formă echivalentă,

$$\ln H(d; T) = -T \int_0^\infty [1 - F(d; \alpha)] s(\alpha) \, d\alpha. \tag{14'}$$

Întrucît membrul drept în relația (14') este totdeauna nepozitiv, funcția $H(d; T)$ este totdeauna mai mică sau egală cu 1, deci poate fi o probabilitate. Se constată că funcția de repartiție $H(d; T)$ are o dependență de tipul distribuției valorilor extreme în grupe de m observații (m continuu) în raport cu parametrii T și $s(\alpha)$ (durata de exploatare și frecvența repetării încărcării). Cu cît acești parametri cresc, cu atît scad valorile $H(d; T)$ și deci crește riscul de avariere. În cazul unei structuri foarte rezistente, ($F(d; \alpha) \approx 1$), membrul drept din (14') este foarte mic în valoare absolută, deci $H(d; T)$ diferă puțin de unitate, deci și riscul de avariere în timp este foarte redus. În cazul unei structuri foarte slabe, ($F(d; \alpha) \approx 0$), membrul drept din (14') poate deveni foarte mare n valoare absolută, deci probabilitatea de supraviețuire $H(d; T)$ devine foarte redusă o dată cu creșterea duratei de exploatare.

Ca și relația (13), relațiile (14) și (14') realizează o sinteză între rezistența structurii (reprezentată prin $F(d; \alpha)$, durata de exploatare T, condițiile de exploatare (reprezentate prin $s(\alpha)$), și siguranța structurii (reprezentată prin funcția de repartiție $H(d; T)$), permițînd o evaluare a probabilității de avariere în funcție de factorii enumerați și permițînd adoptarea unor soluții raționale de proiectare în funcție de toți acești parametri.

c) O nouă expresie se poate stabili pentru funcția de repartiție a tensiunilor maxime (sau a eforturilor, deplasărilor etc. maxime) în stadiul de comportare liniară, în cazul considerării simultane a încărcării permanente (cu parametrul α_p) și a unei încărcări temporare (cu parametrul α_t). Parametrii α_p și α_t se consideră probabilistic independenți.

Tensiunea σ într-un punct dat al structurii este exprimată printr-o relație liniară

$$\sigma = a_p \alpha_p + a_t \alpha_t, \tag{15}$$

unde a_p și a_t sînt coeficienți care depind de natura structurii. Dacă densitatea de repartiție a parametrului α_p se notează $g(\alpha_p)$, iar funcția de repartiție a valorii maxime a parametrului α_t se notează (în concordanță cu relația (11)) $G_0(\alpha_t, \infty, T)$, atunci funcția de repartiție a tensiunilor maxime $H(\sigma, T)$ se obține ca produs de compoziție între funcțiile de repartiție $\int_{-\infty}^{\alpha_p} g(\alpha) \, d\alpha$ și $G_0(\alpha_t, \infty, T)$:

$$H(\sigma; T) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0\left(\frac{\sigma - a_p \alpha_p}{a_t}, \infty, T\right) g(\alpha_p) \, d\alpha_p. \tag{16}$$

Într-adevăr, densitatea de repartiţie comună a parametrilor α_p şi α_t va fi $g(\alpha_p) \cdot \frac{\partial G_0(\alpha_t, \infty, T)}{\partial \alpha_t}$, iar integrarea acestei densităţi în semiplanul $(a_p \alpha_p + a_t \alpha_t) < \sigma$ duce la relaţia (16).

Expresia (16) permite analiza contribuţiei încărcărilor permanente şi temporare la probabilitatea de depăşire a diferitelor valori ale tensiunilor (deplasărilor, eforturilor etc.). În cazul adoptării ipotezei liniarităţii fizice în calcul, expresia (16) este direct utilizabilă pentru dimensionare.

În cazul considerării mai multor încărcări permanente şi în ipoteza lucrului structurii în stadiul liniar, expresia funcţiei de repartiţie a deplasărilor, tensiunilor etc. într-un punct dat al structurii se poate stabili fără dificultăţi, ca produs de compoziţie al funcţiilor de repartiţie ale încărcărilor considerate.

În schimb, în cazul considerării mai multor încărcări temporare, determinarea funcţiei de repartiţie a diferitelor efecte (deplasări, tensiuni etc.) într-un punct dat al structurii poate să devină deosebit de dificilă, chiar admiţînd ipotezele liniarităţii fizice şi geometrice. Principala cauză care produce complicaţii este numărul mare de parametri care caracterizează evoluţia în timp a procesului de solicitare : intervale de timp la care apar încărcările, evoluţia intensităţii în decursul unei apariţii a uneia din încărcări şi, în fine, anumite moduri de dependenţă probabilistică (manifestate fie prin tendinţa spre periodicitate a unora din încărcări, fie prin interdependenţa, uneori chiar deterministă, între diferitele încărcări).

Dacă se admite ipoteza simplificatoare a independenţei probabilistice a diferitelor apariţii ale încărcărilor, succesiunea acestor apariţii se poate analiza în continuare adoptînd ca bază distribuţia Poisson. În acest caz există două posibilităţi de analiză a distribuţiei tensiunilor : fie se consideră o distribuţie de forma

$$G_n(\Omega, T) = e^{-\overline{N}(\Omega, T)} \frac{[\overline{N}(\Omega, T)]^n}{n!}, \tag{17}$$

care generalizează distribuţia (11) şi în care Ω reprezintă un domeniu din spaţiul parametrilor care caracterizează evoluţia încărcărilor, fie se consideră cîte o distribuţie de forma (11) pentru fiecare din încărcări şi se caută distribuţia unei combinaţii liniare a lor (efectul într-un punct oarecare), adoptînd anumite ipoteze în calcule.

Dacă se adoptă prima dintre căi, este necesar să se calculeze numărul mediu de atingeri sau depăşiri ale valorii $\sigma = a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots + a^{(p)}\alpha^{(p)}$ în intervalul de timp T (α', α'', ..., $\alpha^{(p)}$ notează aici intensităţile diferitelor încărcări). Acest număr se va nota cu $\overline{N}(a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots + a^{(p)}\alpha^{(p)} < \sigma, T)$. În acest caz, funcţia de repartiţie a tensiunilor, deplasărilor etc. va lua forma

$$H(\sigma, T) = G_0(a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots + a^{(p)}\alpha^{(p)} < \sigma ; T) =$$

$$= e^{-\overline{N}(a'\alpha' + a''\alpha'' + \cdots + a^{(p)}\alpha^{(p)} < \sigma ; T)}. \tag{18}$$

Calea adoptată nu cere dezvoltări complicate, în schimb necesită un sistem foarte bogat şi bine ordonat de date statistice care să stea la baza estimării funcţiei $\overline{N}$.

Dacă se adoptă cea de-a doua cale, este suficient să se dispună de date statistice individuale pentru fiecare dintre cele p încărcări pentru a se determina expresiile distribuțiilor Poisson corespunzătoare; în schimb apare o problemă de calcul mult mai complicată, aceea a analizei pe această bază a simultaneității de acțiune a diferitelor încărcări. Deducerea unor expresii generale pentru acest caz depășește cadrul prezentei lucrări, dar este util să se dea unele limitări pentru funcțiile de repartiție ale efectelor în cazul în care se consideră două încărcări probabilistic independente. Se va admite în această ordine de idei că efectul celor două încărcări este dat de relația

$$\sigma = a'\alpha' + a''\alpha''. \tag{19}$$

În cazul în care încărcările acționează suficient de rar și pe intervale de timp suficient de scurte pentru a se putea exclude practic posibilitatea acțiunii lor simultane, funcția de repartiție $H(\sigma, T)$ va fi dată de expresia

$$H(\sigma, T) = G_0'\left(\frac{\sigma}{a'}, \infty, T\right) G_0''\left(\frac{\sigma}{a''}, \infty, T\right) = \mathrm{e}^{-T\left[\int_{\frac{\sigma}{a'}}^{\infty} s'(\alpha')\,\mathrm{d}\alpha' + \int_{\frac{\sigma}{a''}}^{\infty} s''(\alpha'')\,\mathrm{d}\alpha''\right]}. \tag{20}$$

În cazul particular cînd cele două încărcări au aceleași densități, $s'(\alpha) = s''(\alpha)$, iar coeficienții a' și a'' din (19) sînt egali, funcția de repartiție $H(\sigma, T)$ devine aceeași ca și pentru cazul cînd ar acționa una dintre încărcări, dar pe o durată dublă decît cea reală, $2T$.

În cazul cînd încărcările acționează la intervale dese sau pe durate relativ mari, astfel încît suprapunerea efectelor lor este foarte frecventă, funcția de repartiție $H(\sigma, T)$ va avea o expresie asemănătoare cu (16),

$$H(\sigma, T) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0'\left(\frac{\sigma - a''\alpha''}{a'}, \infty, T\right) \frac{\partial G_0''(\alpha'', \infty, T)}{\partial \alpha''}\,\mathrm{d}\alpha''. \tag{16'}$$

În cazurile reale, funcțiile de repartiție $H(\sigma, T)$ pot să se situeze între cele două limite date de expresiile (19) și (16').

În realitate, ipoteza independenței probabilistice a încărcărilor sau a efectelor lor poate să fie în multe cazuri necorespunzătoare. Astfel, încărcările date de vînt și de zăpadă nu pot fi considerate în mod riguros independente, datorită efectelor vîntului asupra repartizării zăpezii. De asemenea, efectele dinamice ale vîntului, podurilor rulante etc. nu sînt independente de masele elementelor de construcție, deci de încărcarea permanentă. Dependența probabilistică în astfel de cazuri poate să se manifeste sub forme complexe, care trebuie analizate de la caz la caz.

d) Dacă este cunoscută funcția de repartiție a tensiunilor într-un punct dat, $H(\sigma, T)$, probabilitatea depășirii anumitor praguri de solicitare ca limita de curgere, limita de rupere etc., notate generic R_k (admițînd în continuare ipoteza liniarității mecanice), poate fi dedusă pe baza unor relații simple, care au fost deseori abordate în literatură [4], [6], [9] etc. Dacă limita R_k este o variabilă aleatoare cu densitatea de repartiție $f_k(r)$, probabilitatea de a nu se atinge sau depăși această limită va fi

$$P(\sigma < R_k, T) = \int_{\sigma - R_k < 0} \frac{\partial H(\sigma, T)}{\partial \sigma} f_k(r)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}r = \int_{-\infty}^{\infty} H(r, T) f_k(r)\,\mathrm{d}r, \tag{21}$$

iar probabilitatea atingerii sau depășirii ei va fi

$$P(\sigma \geqslant R_k, T) = 1 - P(\sigma < R_k, T). \tag{22}$$

Un caz mai general și mai complex este acela al unui material de construcție cu limite R_k variabile în timp după o lege determinată sau aleatoare. Astfel de cazuri pot apărea frecvent. Ca exemplu pot fi citate îmbătrînirea betonului sau efectele coroziunii. În acest caz, expresia (21) trebuie generalizată, ținînd seama de vîrsta construcției la care apare solicitarea și stabilindu-se o expresie mai generală pentru distribuția încărcărilor (11).

În cazul cînd rezistența structurii nu depinde exclusiv de valoarea tensiunilor extreme într-un punct, cum s-a presupus în stabilirea expresiei (21), trebuie făcută legătura între distribuția rezistențelor materialului și distribuția stărilor-limită pentru structuri, corespunzătoare diferitelor scheme de încărcare. Legătura dintre element și structură a fost făcută pentru unele cazuri simple de conlucrare [1], [5], [11], dar o legătură analitică explicită între distribuțiile caracteristicilor materialului și acelea ale caracteristicilor structurii pe baza unui model reprezentativ pentru neomogenitatea aleatoare a materialului, cu considerarea diferitelor scheme de încărcare și stadii de solicitare, prezintă dificultăți cu totul deosebite [7].

5. APLICAȚIE: SIGURANȚA UNUI ELEMENT DE ACOPERIȘ SUPUS ACȚIUNII ZĂPEZII

În cele ce urmează este prezentată o aplicație a rezultatelor precedente referitoare la siguranța unui element de acoperiș supus greutății proprii și zăpezii. Aplicația permite ca, pe baza unor calcule relativ simple, să se tragă concluzii interesante pentru proiectarea elementelor de acoperiș. Calculele au fost efectuate în următoarele ipoteze:

a) Se consideră o singură stare-limită, anume aceea referitoare la capacitatea portantă. Se consideră o singură schemă geometrică de încărcare atît pentru greutatea proprie, cît și pentru zăpadă.

b) Se consideră că încărcarea limită R este aleatoare și are densitatea de repartiție gaussiană, cu un coeficient de variație de 5%:

$$f(r) = \frac{1}{0{,}05\, R^n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(r-R^n)^2}{(0{,}05\, R^n)^2}} \tag{23}$$

(valoarea medie R^n se consideră și ca încărcare limită normată; valoarea 0,05 adoptată pentru coeficientul de variație se încadrează în valorile obținute prin serii de încercări pe elemente de construcție).

Pentru parametrul R^n s-au considerat pe rînd valorile: 200; 400; 600; 800; 1 000 kgf/m^2.

c) Se consideră că greutatea proprie, P, a elementului de construcție este fixă, avînd valoarea P^n (această ipoteză simplificatoare nu poate să afecteze considerabil rezultatele, deoarece variabilitatea încărcării date de zăpadă este mult mai mare decît aceea a greutății proprii).

Au fost considerate pe rînd următoarele valori pentru parametrul P^n: 50; 100; 200; 300; 500 kgf/m^2.

d) Încărcarea dată de zăpadă, Z, a fost considerată o încărcare temporară, caracterizată prin distribuția Poisson :

$$G_n(z_1, z_2, T) = e^{-\overline{N}(z_1, z_2, T)} \frac{[\overline{N}(z_1, z_2, T)]^n}{n!}, \tag{11'}$$

unde

$$\begin{aligned} \overline{N}(z_1, z_2, T) &= T\overline{N}_0(z_1, z_2), \\ \overline{N}_0(z, \infty) &= e^{-\frac{z-60}{20}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Adoptarea distribuției considerate implică depășirea încărcării de :

60	kgf/m²,	în	medie,	odată	la	1 an
80	,,	,,	,,	,,		2,72 ani
100	,,	,,	,,	,,		7,4 ,,
120	,,	,,	,,	,,		20,2 ,,
140	,,	,,	,,	,,		55,1 ,,
160	,,	,,	,,	,,		150 ,,
180	,,	,,	,,	,,		408 ,,
200	,,	,,	,,	,,		1 107 ,,

Drept valoare normată a încărcării date de zăpadă s-a considerat, în acord cu normativul românesc de încărcări în construcții civile și industriale [14], media maximelor anuale :

$$Z^n = \int_0^\infty z \frac{\partial G_0(z, \infty, 1)}{\partial z} \, dz = -\int_0^\infty z \frac{\partial \overline{N}_0(z, \infty)}{\partial z} G_0(z, \infty, 1) \, dz =$$

$$= \int_0^\infty \frac{z}{20} e^{-\frac{z-60}{20}} e^{-e^{-\frac{z-60}{20}}} dz = 74{,}59 \cong 75 \text{ kgf/m}^2.$$

Funcția de repartiție $G_0(z, \infty, T)$ a încărcării maxime atinse în T ani și densitatea de repartiție corespunzătoare $\frac{\partial G_0(z, \infty, T)}{\partial z}$ sînt reprezentate în figura 1.

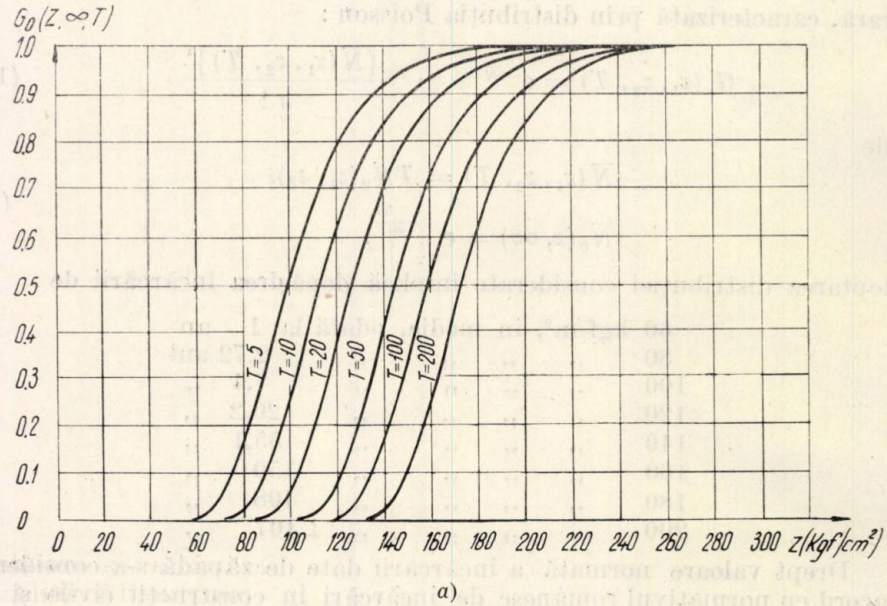
Distribuția admisă prin relația (24) pentru încărcarea dată de zăpadă nu ține seama de problema aglomerării zăpezii, problemă care implică considerarea diferitelor scheme de încărcare. Distribuția (24) poate fi considerată apropiată de distribuția reală a încărcării cu zăpadă în unele zone ale țării noastre (spre exemplu în București).

În cadrul ipotezelor admise, probabilitatea de avariere a elementului de construcție considerat a fost calculată pe baza relației (21), care duce la formula

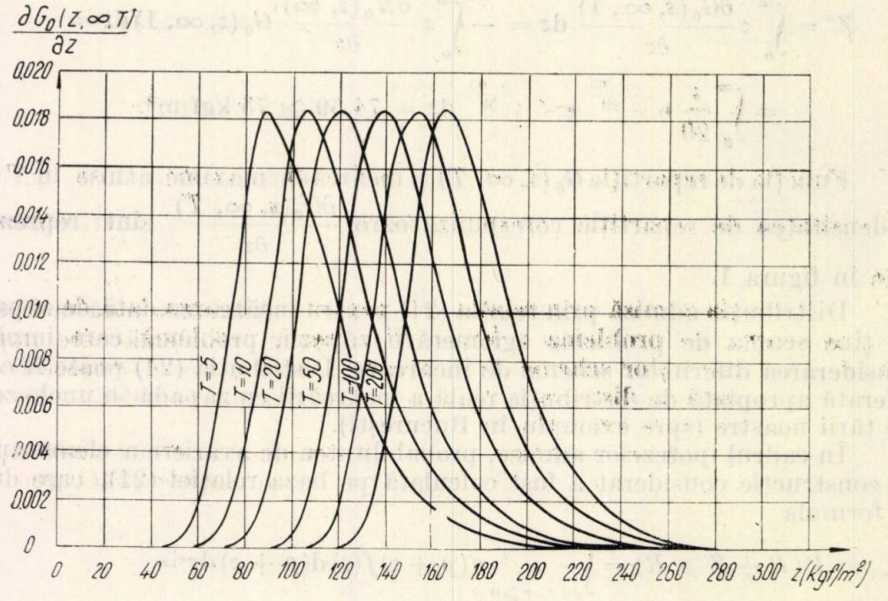
$$P_{(-)} = P(P + Z \geqslant R) = \int_{p+z-r \geqslant 0} g(p+z) f(r) \, d(p+z) \, dr =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(p+z) F(p+z) \, d(p+z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G_0(\zeta - P^n, \infty, T)}{\partial \zeta} F(\zeta) \, d\zeta, \tag{25}$$

unde $F(r) = \int_{-\infty}^{r} f(\varrho) \, d\varrho$ pentru $f(r)$ dat de (23).


$G_0(Z,\infty,T)$
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
T=5
T=10
T=20
T=50
T=100
T=200
0 20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 z(kgf/cm²)

a)


$\frac{\partial G_0(Z,\infty,T)}{\partial Z}$
0.020
0.018
0.016
0.014
0.012
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
0
T=5
T=10
T=20
T=50
T=100
T=200
0 20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 z(kgf/cm²)

b)

Fig. 1

Pentru valorile P^n și R^n pentru care s-au efectuat calcule, există următoarele rapoarte $\frac{Z^n}{P^n}$ și coeficienți de siguranță $\frac{R^n}{P^n + Z^n}$:

Tabela 1

Încărcarea permanentă P^n (kgf/m²)	Raportul Z^n/P^n	Încărcarea-limită normată, R^n (kgf/m²)				
		200	400	600	800	1 000
50	1,492	1,606	3,21	—	—	—
100	0,746	—	2,29	3,44	—	—
200	0,373	—	1,454	2,18	2,91	—
300	0,249	—	—	1,600	2,13	—
500	0,1492	—	—	—	1,390	1,739

Integralele (25) au fost calculate numeric pentru toate variantele pentru care sînt determinați coeficienții de siguranță în tabela precedentă și pentru duratele de exploatare :

$$T = 5\,;\ 10\,;\ 20\,;\ 50\,;\ 100\,;\ 200 \text{ de ani}$$

Rezultatele obținute sînt următoarele :

Tabela 2

Încărcarea permanentă P^n (kgf/m²)	Încărcarea limită R^n (kgf/m²)	Durata de exploatare					
		5	10	20	50	100	200
50	200	$5{,}995 \cdot 10^{-2}$	$1{,}1545 \cdot 10^{-1}$	$2{,}167 \cdot 10^{-1}$	$4{,}387 \cdot 10^{-1}$	$6{,}707 \cdot 10^{-1}$	$8{,}605 \cdot 10^{-1}$
	400	$4{,}276 \cdot 10^{-6}$	$8{,}552 \cdot 10^{-6}$	$1{,}7105 \cdot 10^{-5}$	$4{,}276 \cdot 10^{-5}$	$8{,}552 \cdot 10^{-5}$	$1{,}7105 \cdot 10^{-4}$
100	400	$4{,}90 \cdot 10^{-5}$	$9{,}79 \cdot 10^{-5}$	$1{,}957 \cdot 10^{-5}$	$4{,}89 \cdot 10^{-4}$	$9{,}77 \cdot 10^{-4}$	$1{,}953 \cdot 10^{-3}$
	600	$4{,}14 \cdot 10^{-9}$	$8{,}28 \cdot 10^{-9}$	$1{,}655 \cdot 10^{-8}$	$4{,}14 \cdot 10^{-8}$	$8{,}28 \cdot 10^{-8}$	$1{,}655 \cdot 10^{-7}$
200	400	$7{,}37 \cdot 10^{-3}$	$1{,}453 \cdot 10^{-2}$	$2{,}851 \cdot 10^{-2}$	$6{,}79 \cdot 10^{-2}$	$1{,}258 \cdot 10^{-1}$	$2{,}203 \cdot 10^{-1}$
	600	$6{,}17 \cdot 10^{-7}$	$1{,}233 \cdot 10^{-6}$	$2{,}466 \cdot 10^{-6}$	$6{,}17 \cdot 10^{-6}$	$1{,}233 \cdot 10^{-5}$	$2{,}466 \cdot 10^{-5}$
	800	$6{,}55 \cdot 10^{-11}$	$1{,}309 \cdot 10^{-10}$	$2{,}618 \cdot 10^{-10}$	$6{,}55 \cdot 10^{-10}$	$1{,}309 \cdot 10^{-10}$	$2{,}618 \cdot 10^{-9}$
300	600	$9{,}25 \cdot 10^{-5}$	$1{,}850 \cdot 10^{-4}$	$3{,}70 \cdot 10^{-4}$	$9{,}22 \cdot 10^{-4}$	$1{,}840 \cdot 10^{-3}$	$3{,}642 \cdot 10^{-3}$
	800	$9{,}40 \cdot 10^{-9}$	$1{,}880 \cdot 10^{-8}$	$3{,}76 \cdot 10^{-8}$	$9{,}40 \cdot 10^{-8}$	$1{,}880 \cdot 10^{-7}$	$3{,}76 \cdot 10^{-7}$
500	800	$2{,}223 \cdot 10^{-4}$	$4{,}419 \cdot 10^{-4}$	$8{,}796 \cdot 10^{-4}$	$2{,}143 \cdot 10^{-3}$	$4{,}156 \cdot 10^{3}$	$7{,}969 \cdot 10^{3}$
	1 000	$3{,}09 \cdot 10^{-8}$	$6{,}18 \cdot 10^{-8}$	$1{,}236 \cdot 10^{-7}$	$3{,}09 \cdot 10^{-7}$	$6{,}18 \cdot 10^{-7}$	$1{,}236 \cdot 10^{-6}$

Reprezentarea grafică a rezultatelor (fig. 2) a permis ca pentru fiecare durată de exploatare T să se traseze curbe de egal coeficient de siguranță c în planul de coordonate $\left\{\log P_{(-)}, \log \frac{Z^n}{P^n}\right\}$. Pe baza acestor gra-

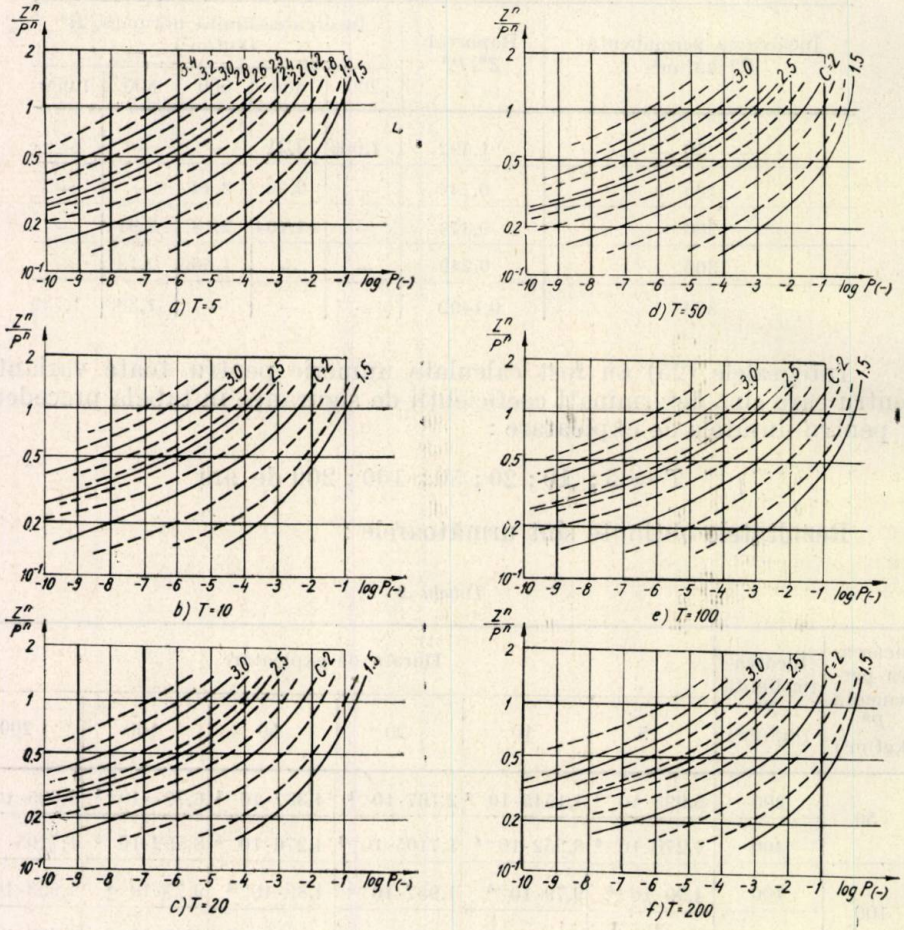


Fig 2

fice s-au întocmit în figura 3 grafice în care pentru fiecare din probabilitățile de avariere $P_{(-)} = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ sînt reprezentate curbele de egal raport $\frac{Z^n}{P^n}$ în planul de coordonate $\{\log T, c\}$. Analiza figurii 3 arată că se poate considera cu o foarte bună aproximație coeficientul de siguranță necesar c ca o funcție liniară de fiecare dintre parametrii $\log T$; $\log \frac{Z^n}{P^n}$; $\log P_{(-)}$.

Prelucrarea figurii 3 a permis să se deducă o formulă empirică pentru coeficientul de siguranță c, în funcție de probabilitatea de avariere $P_{(-)}$, de durata de exploatare T și de raportul $\frac{Z^n}{P^n}$:

$$c = 0{,}950 + 0{,}331 \log \frac{1}{P_{(-)}} + 0{,}430 \log T + \\ + 0{,}012 \log \frac{Z^n}{P^n} - 0{,}174 \log \frac{1}{P_{(-)}} \log T + \\ + 0{,}282 \log \frac{1}{P_{(-)}} \log \frac{Z^n}{P^n} + 0{,}406 \log T \times \\ \times \log \frac{Z^n}{P^n} - 0{,}021 \log \frac{1}{P_{(-)}} \log T \log \frac{Z^n}{P^n} . \tag{26}$$

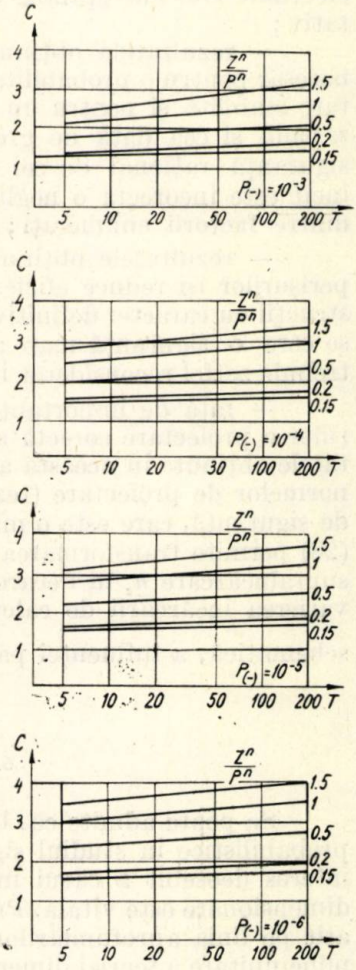


Fig. 3

Formula (26) dă astfel indicații asupra modului în care coeficientul de siguranță trebuie ales în funcție de parametrii T, $P_{(-)}$ și Z^n/P^n. Examinarea figurii 3 și a formulei (26) arată că dependența coeficientului de siguranță necesar în raport cu toți cei trei parametri este marcată și că este de dorit o revizuire a normelor referitoare la încărcarea cu zăpadă, pentru a se înlătura supradimensionări și subdimensionări nejustificate.

Dacă se ține seama de relațiile de dimensionare în cele două metode utilizate în prezent în practică,

$$c(P^n + Z^n) = R^n \quad \text{(în metoda coeficientului de siguranță unic),}$$
$$n_p P^n + n_z Z^n = kR^n \quad \text{(în metoda coeficientului de siguranță diferențiat),} \tag{27}$$

unde n_p și n_z reprezintă respectiv coeficienții de supraîncărcare pentru greutatea proprie și zăpadă, iar k coeficientul de omogenitate, coeficientul de supraîncărcare al zăpezii, n_z, poate fi exprimat sub forma

$$n_z = \frac{kc\left(1 + \frac{Z^n}{P^n}\right) - n_p}{\frac{Z^n}{P^n}} \cong \frac{0{,}85\,c\left(1 + \frac{Z^n}{P^n}\right) - 1{,}1}{\frac{Z^n}{P^n}} . \tag{28}$$

Analiza ipotezelor și a rezultatelor aplicației duce la următoarele concluzii :

— ipotezele referitoare la caracteristicile probabilistice ale încărcării date de zăpadă și ale încărcării-limită a elementului de construcție con-

siderat, deşi nu au la bază date statistice concrete, se încadrează practic în condiţiile existente în prezent în ţara noastră, deci rezultatele calculelor efectuate sînt susceptibile de utilizare practică, cel puţin sub raport calitativ;

— rezultatele obţinute pun în evidenţă coeficientul de siguranţă necesar pentru o probabilitate de avariere dată, pentru o durată de exploatare stabilită şi pentru un raport fixat între încărcarea normată dată de zăpadă şi cea dată de greutatea proprie; dependenţa coeficientului de siguranţă raţional de cei trei factori consideraţi este pronunţată, astfel încît este incorectă o neglijare a acestei dependenţe în raport cu oricare dintre factorii enumeraţi;

— rezultatele obţinute arată că reducerea greutăţii proprii a acoperişurilor îşi reduce eficienţa economică atunci cînd este vorba de construcţii cu caracter definitiv şi cu importanţă funcţională mare pentru care se cere o siguranţă mare; domeniul de utilizare al acoperişurilor uşoare trebuie astfel reconsiderat în mod critic;

— faţă de importanţa pe care o prezintă pentru sectorul construcţiilor o proiectare corectă a elementelor de acoperiş, este necesar ca rezultatele obţinute în această aplicaţie să fie utilizate în vederea îmbunătăţirii normelor de proiectare (rezultatele au fost prezentate pentru coeficientul de siguranţă, care este o mărime mai uşor intuită în prezent, dar expresia (28) permite transformarea rezultatelor pentru a se stabili coeficientul de supraîncărcare n_z în fiecare caz în parte); pe această linie apare necesară varierea încărcării de calcul date de zăpadă, cu considerarea, cel puţin schematică, a influenţei parametrilor $P_{(-)}$, T şi $\frac{Z^n}{P^n}$.

6. CONSIDERAŢII FINALE

Se poate admite că, în prezent, aplicarea concepţiilor şi a metodelor probabilistice în studiul siguranţei structurilor a devenit un domeniu de interes deosebit a cărui importanţă pentru îmbunătăţirea metodelor de dimensionare este vitală. Progresele în această direcţie vor trebui să apară atît pe linia aprofundărilor teoretice, tinzîndu-se spre crearea unei discipline unitare a teoriei dimensionării, cît şi pe linia aplicării imediate în practică a rezultatelor parţiale obţinute.

În această ordine de idei, aplicarea în practică este susceptibilă de a duce la:

— îmbunătăţirea unora dintre prevederile prescripţiilor de proiectare (cu menţinerea procedeului actual de prescriere a unor valori convenţionale pentru dimensionare);

— analiza aprofundată a unor probleme cu caracter de unicat, care apar pentru construcţii de importanţă deosebită.

Efectuarea unei analize de natură probabilistică, chiar în mod schematic, fără disponibilitatea unor date de bază complete şi cu ajutorul unor metode de calcul expeditive, poate să ducă de multe ori la concluzii practice dintre cele mai interesante, înlăturînd astfel erori uneori grosolane, generate de utilizarea unor concepţii simpliste.

În lucrare s-au abordat, în cadrul unor ipoteze simplificatoare, aspecte specifice siguranței structurilor în cazul acțiunii încărcărilor temporare, obținîndu-se o serie de expresii aplicabile pentru analiza siguranței structurilor în cazuri reale. În cadrul aplicației prezentate s-au obținut rezultate cantitative care prezintă interes practic direct. Pe această linie este recomandabilă atît luarea în considerație a concluziilor aplicației pentru îmbunătățirea prescripțiilor de determinare a încărcărilor, cît și elaborarea unor studii similare pentru alte cazuri de încărcare, de către unități de cercetare din sectorul construcțiilor.

Primită la redacție la 31 martie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. В. В. Болотин, *Статистические методы в строительной механике*, Москва, 1961.
2. В. В. Болотин, И. И. Голденблат, А. Ф. Смирнов. *Современные проблемы строительной механики*, Москва, 1965.
3. J. F. Borges, *Statistical estimate of seismic loading*, Proc. V-th. Congr. IABSE, 1956.
4. A. M. Freudenthal, *Safety and the probability of structural failure*, Trans. ASCE, 1956.
5. — *Safety, reliability and structural design*, Proc. ASCE, ST3 (1961).
6. M. Hangan, H. Sandi, *Siguranța construcțiilor în calculul făcut prin metoda stărilor limită*, Bul. St. I.C.B. 8(1961).
7. M. Hangan, I. Făcăoaru, H. Sandi, *Aspecte ale corespondenței între rezistența betonului în încercări de laborator și în construcții*, Revista Construcțiilor, **11**, (1961).
8. O. Onicescu și colab., *Calculul probabilităților și aplicații*, București, 1956.
9. А. Р. Ржаницин, *Определение характеристики безопасности и коэффициентов запаса из экономических соображений* (în culegere) Москва, 1961.
10. E. Rosenblueth, *Probabilistic design to resist earthquakes*, Proc. ASCE, EM5, 1964.
11. H. Sandi, *Proprietăți statistice ale capacității portante a structurilor nedeterminate*. St. cerc. mec. apl., 3 (1961).
12. — *Statistical approach of a seismic design, 1-st Chilean* Sessions on Seismology and Earthquake Engineering, Santiago, 1963.
13. — *Domeniul de rezistență al structurilor nedeterminate, ideal elasto-plastice*, Conferința de mecanică, București, 1965.
14. C.S.C.A.S., Comisia Centrală pentru elaborarea prescripțiilor de calcul al construcțiilor și elementelor de construcție la stările limită, *Normativ condiționat pentru calculul construcțiilor la stările-limită*. Partea a II-a, p. 7—62 : *Încărcări în construcții civile și industriale*. București, 1962.

O METODĂ DE CALCUL OPERAȚIONAL PENTRU REȚELE DE GRINZI [1)]

M. MIHAILESCU
Institutul politehnic Cluj

CR. IACOB, G. COMBIESCU și M. ZGURĂ
Institutul de proiectări construcții tip, București

539.4 : 517.9

Plecînd de la ecuația diferențială de ordinul IV a fibrei medii deformate, scrisă pentru două familii rectangulare de grinzi, acționînd paralel cu axele x și y, s-a pus în evidență calculul rețelelor de grinzi rezemate elastic pe contur.
Folosind transformata lui Laplace se scriu expresiile generale ale săgeților celor două familii de grinzi și condițiile de egalitate ale săgeților în diferitele noduri ale rețelei funcție de necunoscutele static nedeterminate, Z_i. Se dă un exemplu numeric de calcul și schema logică folosită pentru rezolvarea problemei cu ajutorul mașinii electronice de calcul.

1. Problema de calcul care se prezintă s-a pus cu ocazia proiectării acoperișurilor pentru *hale universale*, la care rețelele plane alcătuite din grinzi cu zăbrele constituie una dintre soluțiile cele mai potrivite, pentru că :

1.1. Din punct de vedere *funcțional* permit să se realizeze hale cu travee pătrate sau apropiate de pătrat, cu deschideri mari : 18 × 18, 18 × 24, 24 × 24 m² ș.a.

Oferă libertatea de a amplasa oriunde pe acoperiș *luminatoare*, *ventilatoare*, *poduri tehnice* și lasă posibilitatea agățării la intervale mici a căilor de rulare, pentru grinzi rulante, monoșine ș.a. fig. (1).

1.2. Din punct de vedere *static*, structura se comportă *spațial*, adică toate elementele conlucrează la preluarea eforturilor pentru orice solicitare dată (din sarcini permanente, utile, vînt, cutremur), spre deosebire

[1)] Publicată și în „Rev. roum. sci. tech.-Mécanique Appliquée", **11**, 5 (1966) (în limba engleză)

de structurile tradiționale, formate din elemente cu funcții diferențiate : plăci, pane, ferme, contravînturi, care, acționînd separat pe cîte o direcție sau pentru o anumită solicitare, conduc pe ansamblu la suprapuneri și la concentrări locale de eforturi. La sistemele spațiale, datorită calității lor de a distribui eforturile pe mai multe direcții, se obțin reduceri de eforturi în vecinătatea punctelor de aplicare a sarcinilor, încărcîndu-se în compensație secțiunile mai îndepărtate ; rezultă astfel pe totalitatea

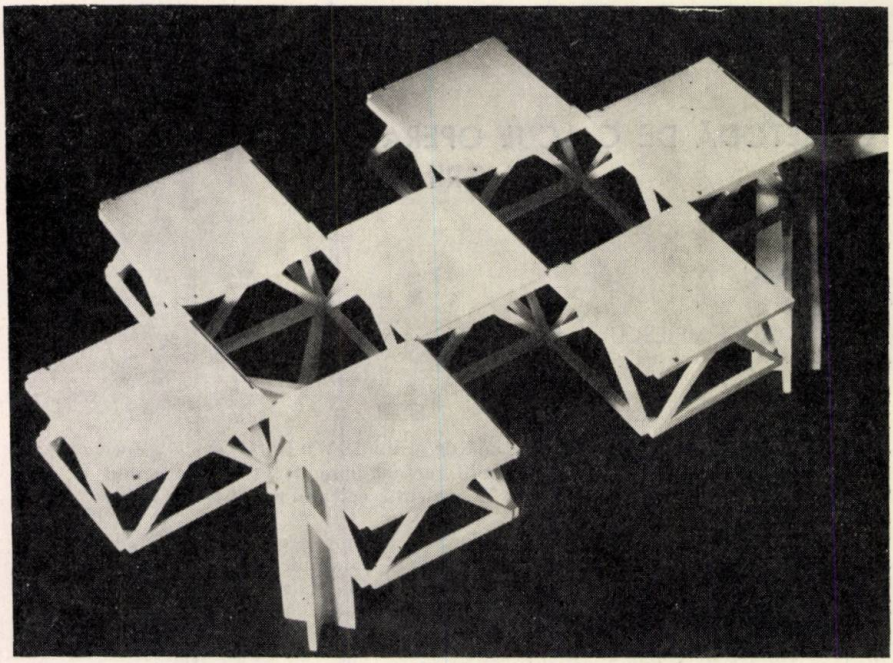


Fig. 1

suprafeței acoperite o economie de energie acumulată față de soluția oferită de *structurile tradiționale.*

1.3. Într-un studiu amplu s-au analizat comparativ diferite rezolvări constructive în beton armat corespunzătoare unor scheme de rețele ortogonale de grinzi cu zăbrele dispuse paralel cu laturile conturului, insistînd asupra mărimii ochiului din rețea. În ansamblu s-au comparat două tipuri de rețele cu ochiurile 3 × 3 și 6 × 6 m și trei tipuri de rezolvări constructive, care se pot executa în condițiile actuale de fabricare, transport și montaj.

Acestea sînt :

— *o structură formată din chesoane spațiale reticulare, dispuse în șah și asamblate prin precomprimare, realizînd rețele cu ochiuri 3 × 3m.* Chesoanele reticulare, avînd dimensiunile 3,17 × 3,17 × 1,70 m și greutatea 4,5 t, se asamblează prin post comprimare pe tronsoane de acoperiș 75 × × 36 m, operația efectuîndu-se la sol, anfilînd pe fiecare rînd de grinzi două cabluri continue : unul la talpa superioară și altul la talpa inferioară. Structura acoperișului se ridică la cotă prin liftare ;

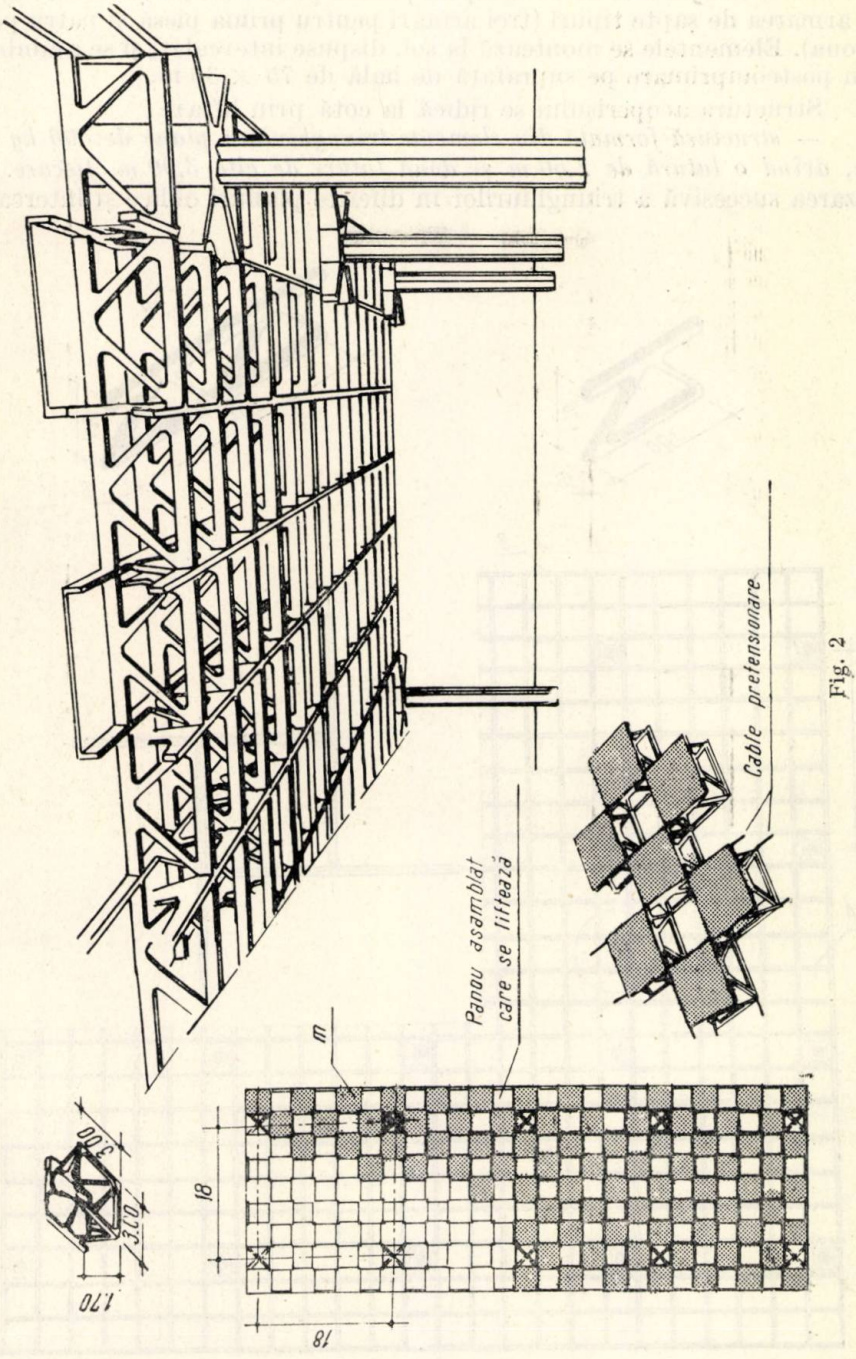

Cable pretensionare
Panou asamblat care se liftează
m
18
18
3,00
3,10
1,70

Fig. 2

— *structură formată din elemente plane reticulare cu rețea din ochiuri* 3×3 *n.* Cofrajul este de două tipuri pentru piese $3 \times 1{,}70$ și $5{,}84 \times 1{,}70$ m, iar armarea de șapte tipuri (trei armări pentru prima piesă și patru pentru a doua). Elementele se montează la sol, dispuse intercalat, și se asamblează prin postcomprimare pe suprafață de hală de 75×36 m.

Structura acoperișului se ridică la cotă prin liftare ;

— *structură formată din elemente triunghiulare plane de 800 kg greutate, avînd o latură de 2,50 m și două laturi de cîte 3,00 m fiecare.* Prin așezarea succesivă a triunghiurilor în diferite planuri oblice și intercalarea

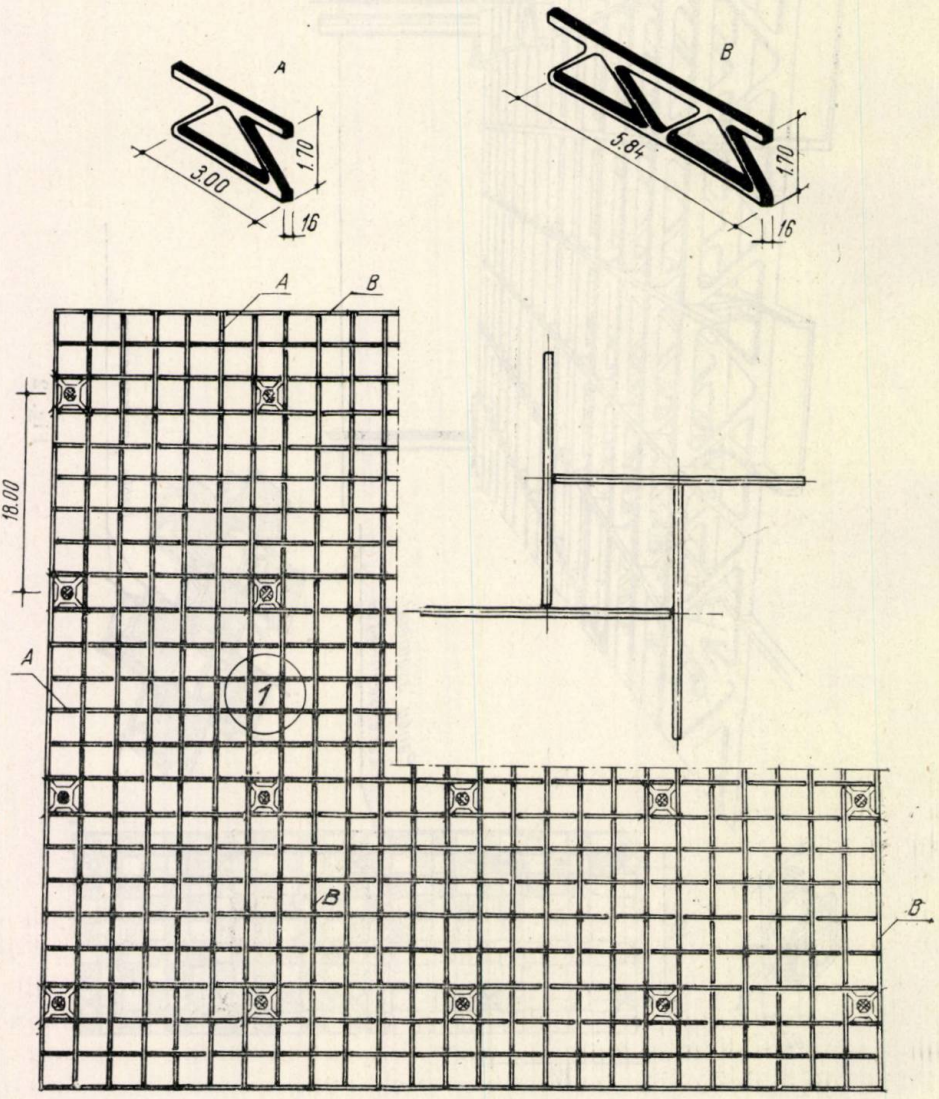


Fig. 3

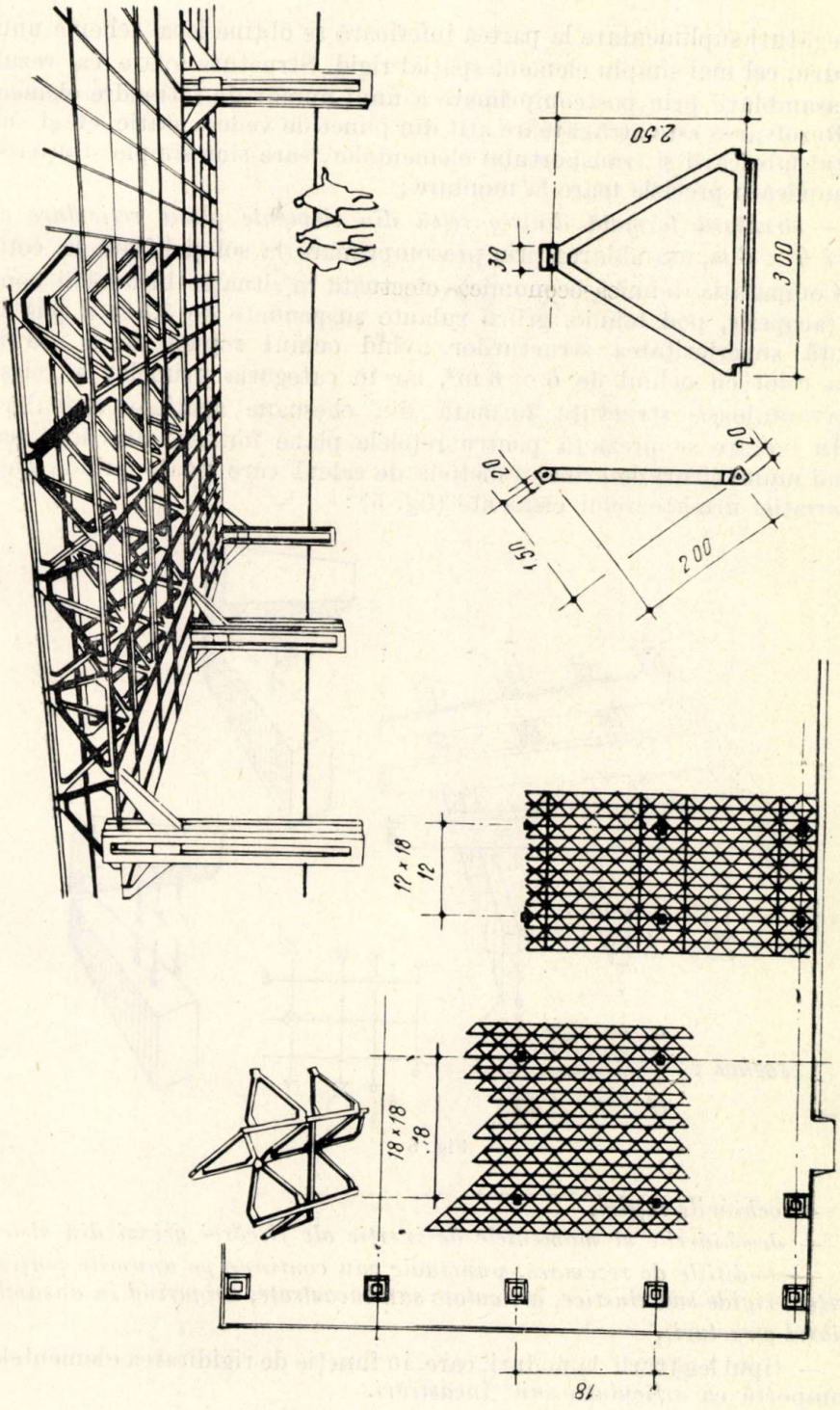


Fig. 4

unor legături suplimentare la partea inferioară se obține local schema unui tetraedru, cel mai simplu element spațial rigid. Structura apare ca rezultatul asamblării prin postcomprimare a unui număr de tetraedre elementare. Rezolvarea este atrăgătoare atît din punct de vedere static, cît și sub aspectul fabricării și transportului elementelor, care sînt simple și ușoare, însă implică o precizie mare la montare ;

— *structură formată dintr-o rețea din elemente plane reticulare cu ochiuri* 6×6 *m*, asamblarea prin precomprimare la sol și liftată la cotă.

Comparația tehnică-economică efectuată în situația încărcării complete (acoperiș, pod tehnic, grinzi rulante suspendate de 3,5 t) a pus în evidență superioritatea structurilor avînd ochiul rețelei de 3×3 m^2 asupra celor cu ochiul de 6×6 m^2, iar în categoria primelor a reieșit mai avantajoasă structura formată din chesoane spațiale reticulare.

2.1. În lucrare se prezintă pentru rețelele plane formate din două sau din mai multe șiruri de grinzi o metodă de calcul care poate prinde efectul variației următoarelor elemente (fig. 5) :

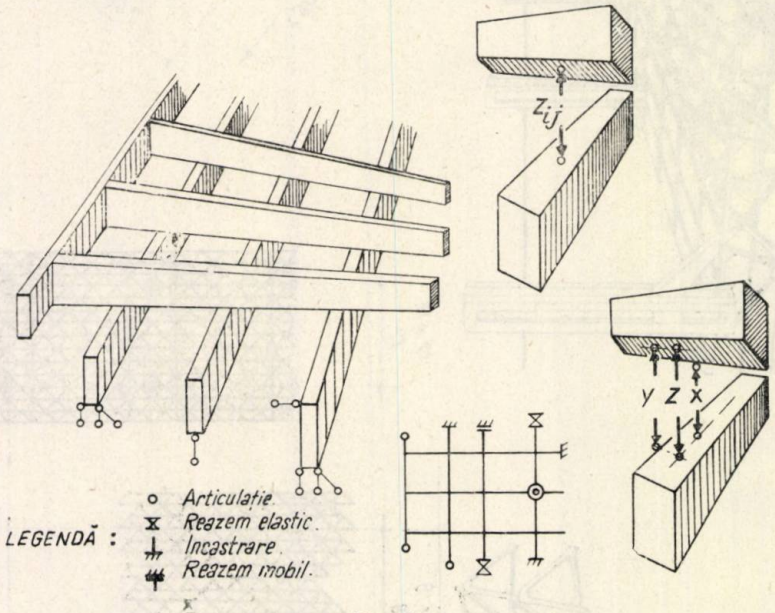


Fig. 5

— *ochiurile rețelei,*

— *deschiderile și momentele de inerție ale fiecărei grinzi din sistem,*

— *condițiile de rezemare, punctuale sau continue pe anumite porțiuni din rețea, rigide sau elastice, articulate sau încastrate, asigurînd în ansamblu echilibrul structurii,*

— tipul legăturii la noduri, care, în funcție de rigiditatea elementelor, se comportă ca *articulații sau încastrări.*

2.2. Parametrii enumerați au o variație *discontinuă* în planul *xOy*, trăsătura caracteristică rețelelor de grinzi; ca urmare, metodele de calcul care asimilează această structură cu *medii continue izotrope* limitează generalitatea problemei, micșorînd totodată în mod inutil gradul de precizie al rezultatelor.

Mai apropiate de realitatea fizică apar metodele staticii construcțiilor, care, plecînd de la echilibrul fiecărei grinzi în parte, stabilesc, pe baza relațiilor de deformări la noduri, valoarea eforturilor nedeterminate de legătură.

2.3. Cele mai multe memorii din literatura tehnică tratează problema rețelelor prin *metoda forțelor*, foarte operativă atîta timp cît structura formează un panou care reazemă pe un contur închis netasabil [1].

Într-o serie de cazuri practice, cum ar fi și acela al halelor universale, rețelele lucrează cu continuitate pe mai multe panouri în două sensuri și sînt rezemate numai local pe stîlpi.

Pentru această situație, extinderea metodei de calcul a forțelor prin suplimentarea condițiilor de margini în ipoteza de reazeme tasabile conduce la calcule laborioase, dificil de efectuat și de controlat, și la care, față de volumul total de lucru, aportul calculatoarelor electronice este redus.

2.4. Pentru a utiliza cît mai mult capacitatea de lucru a mașinilor electronice de calcul, ușurînd concomitent activitatea de scriere a ecuațiilor, se expune în continuare *o metodă de calcul mixtă* (adoptînd ca necunoscute eforturi și deplasări).

Scrierea condițiilor de echilibru se face cu ajutorul *calculului operațional* [2], [3], *folosind transformata lui Laplace.*

Metoda de calcul se prezintă pentru *rețele ortogonale* în două *ipoteze*, referitoare la modul în care se consideră că lucrează îmbinările grinzilor la noduri ca articulații sau încastrări.

3.1. *În ipoteza rețelei de grinzi articulate la noduri* (fig. 6), calculul s-a organizat plecînd de la forma cea mai simplă a ecuației diferențiale a fibrei medii deformate, scrisă pentru cele două șiruri de grinzi ortogonale, paralele cu axele x și, respectiv, y (fig. 7), folosind următoarele notații: u și v — *deplasările verticale* ale șirurilor de grinzi orientate pe direcțiile x și y cu ξ și η *distanțele în plan* în direcțiile x și y măsurate de la originea 0;

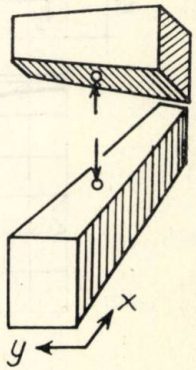


Fig. 6

încărcările normale exterioare aplicate la noduri; valorile lor se deduc cunoscînd sarcinile, care încarcă sistemul. Desfăcînd rețeaua în două familii de grinzi, unele orientate pe direcția x și altele pe direcția y, se consideră că încărcările P_{ij} sînt aplicate numai pe grinzile paralele cu axa y;

Z_{ij} — *necunoscute static nedeterminate normale* care apar la contactul dintre cele două șiruri de grinzi, considerînd că încarcă grinzile paralele cu x și descarcă pe cele paralele cu y;

EI — rigiditatea la încovoiere a secțiunilor transversale constantă și aceeași în lungul celor două șiruri de grinzi;

δ — *Funcția unitară* sau funcția *impuls a lui Dirac*, definită prin condițiile

$$\delta(x-\xi_i)=0 \quad \text{dacă } x\neq\xi_i \text{ și } \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\xi_i)\,dx=1$$

$$\delta(y-\eta_i)=0 \quad \text{dacă } y\neq\eta_i$$

$$\delta(x-\xi_i)=\infty \quad \text{dacă } x=\xi_i \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}(y-\eta_i)\,dy=1.$$

$$\delta(y-\eta_i)=\infty \quad \text{dacă } y=\eta_i$$

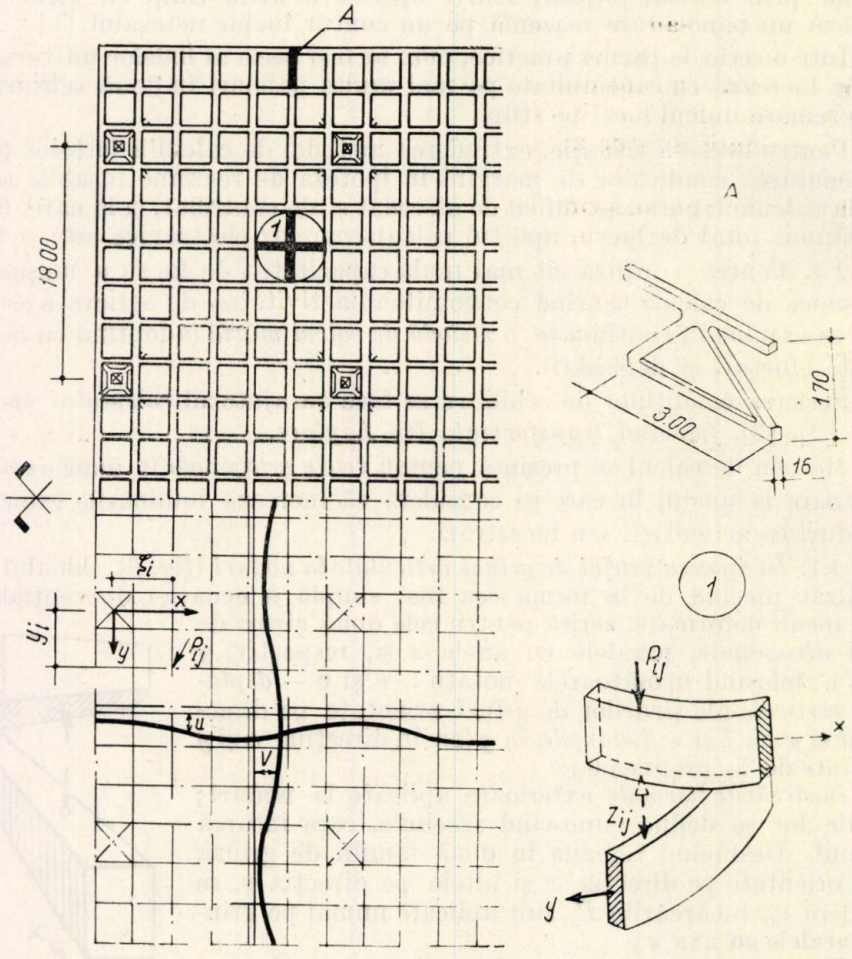


Fig. 7

Introducerea acestei funcții reprezintă un artificiu de calcul, care permite să se prindă în ecuația diferențială de ordinul IV a fibrei medii deformate influența sarcinilor concentrate.

3.2. Ecuațiile diferențiale ale fibrei medii pentru cele două familii de grinzi orientate pe direcțiile x și y se scriu în consecință

$$EI^x u^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - \sum_{i,j=1}^{n} Z_{ij}\,\delta(x-\xi_i) = 0, \tag{1}$$

$$EI^y v'''' - \sum_{i,j=1}^{n} (P_{ij} - Z_{ij})\,\delta(y-\eta_i) = 0. \tag{2}$$

Cu puncte s-au notat derivatele în raport cu x.

Cu accente s-au notat derivatele în raport cu y.

3.3. Pentru a lucra cu termeni finiți s-a folosit calculul operațional care transformă ecuațiile diferențiale cu coeficienți constanți în ecuații algebrice. Față de calculul cu diferențe finite care realizează și el această transformare, afectată însă de un grad de aproximație, calculul operațional are avantajul că este exact.

Efectuînd pentru primul membru din (1) transformata lui Laplace, se obține după regulile cunoscute

$$\mathcal{L}\,u^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = p^4\,\mathcal{U}(p) - p^3\,u(0) - p^2u^{\cdot}(0) - pu^{\cdot\cdot}(0) - u^{\cdot\cdot\cdot}(0) \tag{3}$$

în care $U(p)$ este funcția transformată, $u(0)$ $u^{\cdot}(0)$, $u^{\cdot\cdot}(0)$ și $u^{\cdot\cdot\cdot}(0)$ sînt valorile funcției u și ale derivatelor ei în punctul de origine ($x = 0$), iar p o variabilă complexă.

Se efectuează transformata și pentru expresia sarcinii concentrate:

$$\mathcal{L}\,Z_{ij}\,\delta(x-\xi_i) = Z_{ij}\,e^{-\xi_i p}. \tag{4}$$

Astfel ecuația (1) se transformă în

$$EI^x\,[p^4\mathcal{U}(p) - p^3\,u(0) - p^2\,u^{\cdot}(0) - pu^{\cdot\cdot}(0) - u^{\cdot\cdot\cdot}(0)] -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} Z_{ij}\,e^{-\xi_i p} = 0. \tag{5}$$

Din această ecuație se deduce imediat *funcția transformată* $\mathcal{U}(p)$:

$$\mathcal{U}(p) = \frac{u(0)}{p} + \frac{u^{\cdot}(0)}{p^2} + \frac{u^{\cdot\cdot}(0)}{p^3} + \frac{u^{\cdot\cdot\cdot}(0)}{p^4} + \frac{1}{EI^x}\,\frac{\sum_{i,j=1}^{n} Z_{ij}\,e^{-\xi_i p}}{p^4}. \tag{6}$$

În continuare, după regulile calculului operațional, se trece la *funcția originală*, aplicînd formula simbolică $\mathcal{U}(x) = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{U}(p)$, obținînd:

$$u(x) = u(0) + xu^{\cdot}(0) + \frac{x^2}{2!}u^{\cdot\cdot}(0) + \frac{x^3}{3!}u^{\cdot\cdot\cdot}(0) + \frac{1}{EI^x}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{Z_{ij}}{6}\,(x-\xi_i)^3. \tag{7}$$

În ecuația 7, termenii care conțin pe x sînt valabili pentru $x > 0$ și se anulează pentru $x = 0$; termenii care conțin factorii $x - \xi_i$ sînt valabili pentru $x - \xi_i > 0$ și se anulează pentru $x - \xi_i \leqslant 0$; $u(0)$ are valori numai în domeniul $x > 0$

Analog se obține ecuația pe direcția y.

Particularizînd diferite valori ale lui x și y, egale respectiv cu ξ_i și η_i (abscisele și ordonatele) diferitelor noduri, se obțin ecuațiile de egalitate de săgeți între cele două familii de curbe. Sistemul de ecuații de completează scriind condiții de deformație în dreptul unor noduri la care se cunoaște comportarea structurii, de exemplu :

în dreptul unui *nod netasabil* : $u = 0$; $v = 0$,

în dreptul unei *secțiuni încastrate* : $u' = 0$; $v' = 0$,

în dreptul unei secțiuni care se *poate roti liber* : $u'' = 0$; $v'' = 0$,

în dreptul unei secțiuni în care *forța tăietoare* se anulează : $u''' = 0$; $v''' = 0$.

4. Cînd șirurile de grinzi se consideră fixate rigid la noduri, conexiunea lor se poate reprezenta static prin trei bare de legătură (fig. 8), în care acționează eforturile static nedeterminate X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}.

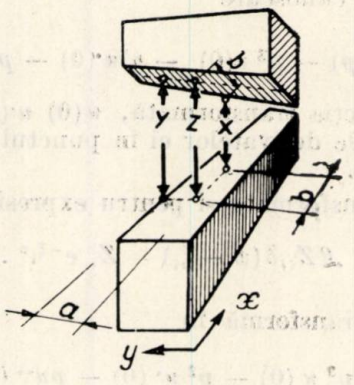


Fig. 8

Conform figurii 8, efortul Z_{ij} asigură egalitatea de săgeată, iar X_{ij} și Y_{ij} egalitățile de rotiri din încovoiere și răsucire ale celor două familii de grinzi.

Pentru grinzile de pe direcția x necunoscutele X_{ij} și Z_{ij}, acționînd în plane principale trecînd prin centrele de lunecare ale secțiunilor, vor produce numai încovoieri.

Necunoscutele Y_{ij} se reduc în aceste plane principale, obținînd echivalent forțe Y_{ij} și momente de răsucire $Y_{ij} \cdot a_i$, unde a_i sînt distanțele de la marginea grinzilor de pe directia x la centrul de lunecare din fiecare secțiune unde se aplică Y_{ij}.

În consecință, încovoierea în planele principale trecînd prin centrele de lunecare ale grinzilor de pe direcția x se exprimă similar cu pct. 3 prin

$$EI^x u''' - \sum_1^n (Z_{ij} + Y_{ij}) \delta(x - \xi) - \sum_1^n X_{ij} \delta(x - \xi_i - b_i) = 0. \qquad (8)$$

Pe direcția y analog se scrie :

$$EI^y v'''' - \sum_1^n (P_{ij} - Z_{ij} - X_{ij})\delta(y - \eta_{ij}) + \sum_{i,j=1}^n Y_{ij}\,\delta(y-\eta_i-a_i)=0 \quad (9)$$

în care : a_i și b_i reprezintă distanțele de la marginile secțiunilor la centrele de lunecare pe direcțiile x și y

Răsucirile celor două familii de grinzi se exprimă prin :

$$GI_T^x u^{\bullet\bullet\prime} - \sum_1^n Y_{ij}\, a_i\, \delta(x - \xi_i) = 0, \quad (10)$$

$$GI_T^y v^{\bullet\prime\prime} + \sum_1^n X_{ij}\, b_i\, \delta(y - \eta_i) = 0. \quad (11)$$

Cu ajutorul calculului operațional se scrie (4) :

$$\mathcal{L}\, u^{\bullet\bullet\prime} = p^2 q\, \mathcal{U}(p, q) - p^2 u^{\mathrm{I}}(p, 0) - p\, q\, u^{\mathrm{II}}(0, q) - q\, u^{\bullet\mathrm{II}}(0, q) + pu(0, 0) + u^{\bullet}(0, 0), \quad (12)$$

$$\mathcal{L}\, Y_{ij}\, a_i\, \delta(x - \xi_i) = \frac{1}{q} Y\, \mathrm{e}^{-p\xi_i} \quad (13)$$

în care p și q sînt variabile complexe corespunzătoare lui x și y.

Înlocuind expresiile transformate 12 și 13 în ecuația 10, ea devine explicitată în raport cu funcția transformată $\mathcal{U}(p, q)$:

$$\mathcal{U}(p,q) = \frac{u^{\mathrm{I}}(p, 0)}{q} + \frac{u^{\mathrm{II}}(0, q)}{p} + \frac{u^{\bullet\mathrm{II}}(0,q)}{p^2} - \frac{1}{pq} u(0, 0) - \frac{1}{p^2 q} u^{\bullet}(0, 0) + \frac{1}{GI_T^x} \Sigma\, Y_{ij} \frac{a_i}{p^2 q^2} \mathrm{e}^{-p\xi_i}. \quad (14)$$

Trecînd la funcția originală, ecuația (14) devine :

$$u(x, y) = u(x, 0) + u(0, y) + x\, u^{\bullet}(0, y) - u(0, 0) + x\, u^{\bullet}(0, 0) + \frac{1}{GI_T^x} \Sigma\, Y_{ij}\, a\, y\, (x - \xi_i).$$

Analog se obține și pentru ecuația 11 expresia funcției necunoscute :

$$v(x, y) = v(0, y) + v(x, 0) + y\, v'(x, 0) - v(0, 0) + y\, v'(0, 0) + \frac{1}{GI_T^y} \Sigma\, X_{ij}\, b\, x\, (y - y_i).$$

Condițiile de margini se scriu asupra derivatelor : $u'(0, y) = v^{\bullet}(x. 0) = 0$ indică încastrare perfectă, iar $u^{\bullet\prime}(0, y) = v^{\bullet\prime}(x, 0) = 0$ indică rotire liberă.

5. Pentru exemplificarea metodei se expune calculul unui panou făcînd parte dintr-o rețea continuă (fig. 9), cu următoarele caracteristici :

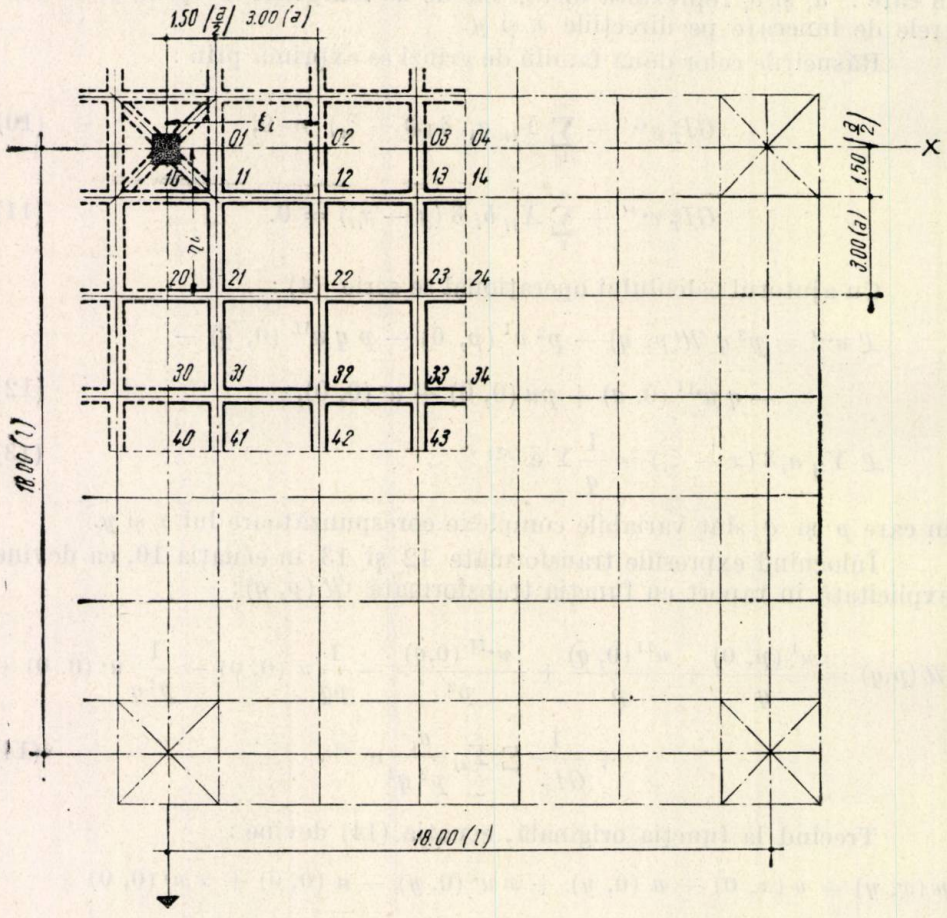


Fig. 9

5. 1. Rețeaua este *pătrată* cu ochiuri de $a \times a$ și *rezemată* pe stîlpi așezați pe trama $6a \times 6a$. Fiecare stîlp susține prin intermediul unor console patru noduri din rețea (fig. 11).

Îmbinările grinzilor la nodurile rețelei se consideră *articulații*; grinzile care alcătuiesc rețeaua au toate aceleași date fizice și geometrice care sînt constante.

5.2. Întrucît panoul face parte *dintr-un ansamblu simetric* ca *alcătuire* și *încărcare* în dreptul liniilor care delimitează panourile, se poate scrie că *tangențele* la fibrele medii ale grinzilor perpendiculare pe contur

sînt *orizontale* și forțele tăietoare se anulează, adică

$$u'(0) = u'''(0) = 0,$$

$$v'(0) = v'''(0) = 0.$$

5.3. Separînd pe considerente de *simetrie* un sfert de panou, se precizează în plan următoarele date cunoscute :

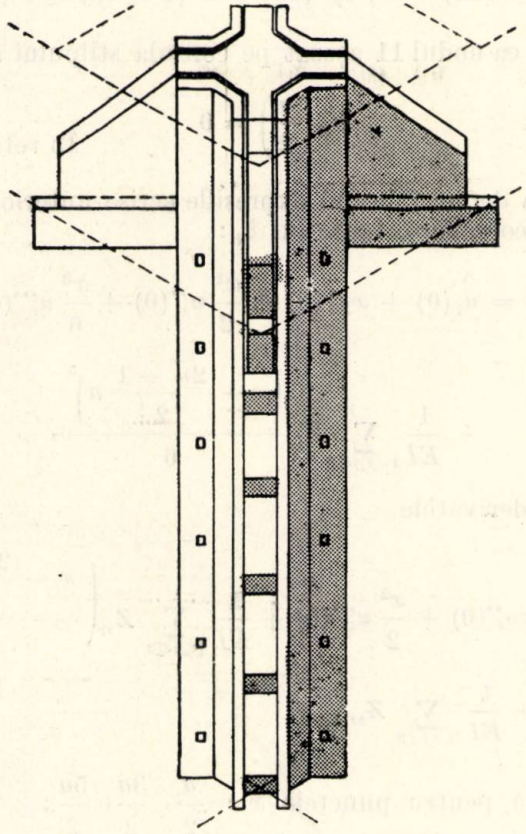


Fig. 10

— *rigiditatea la încovoiere* EI ; I se calculează cunoscînd datele geometrice ale grinzilor ;

— *sarcinile* acționînd la *noduri*,

$$P_{11} = P_{12} = P_{13} = P_{22} = P_{23} = P_{31} = P_{32} = P_{33} = P,$$

care se evaluează cunoscînd sarcinile uniform distribuite pe suprafață.

5.4. Sistemul de ecuații are următoarea alcătuire :

— *ecuații exprimînd condițiile de egalități de săgeți* :

$$u_i\left(\frac{2j-1}{2}a\right) = v_j\left(\frac{2i-1}{2}a\right);\ (1 \leqslant i, j \leqslant 3), \quad 9 \text{ ecuații};$$

— *ecuații de continuitate la mijlocul deschiderilor* :
— *condiții de tangentă orizontală la mijlocul panoului* :

$$u_i^{\bullet}(3a) = 0\,;\ v_j'(3\,a) = 0\ (1 \leqslant i,\ j \leqslant 3), \qquad 6 \text{ ecuații};$$

— *condiții de anulare a forței tăietoare la mijlocul panoului* :

$$u_i^{\bullet\bullet\bullet}(3a) = 0\,;\ v_j'''(3a) = 0\ (1 \leqslant i, j \leqslant 3), \qquad 6 \text{ ecuații};$$

— condiția ca nodul 11 așezat pe consola stîlpului să fie netasabil :

$$u_{11}\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \qquad \text{1 ecuație}$$

În total 22 de ecuații.

Ecuațiile se deduc folosind expresiile scrise anterior, în care se înlocuiesc valorile corespunzătoare lui ξ_i :

$$u_i(x) = u_i(0) + xu_i^{\bullet}(0) + \frac{x^2}{2}u_i^{\bullet\bullet}(0) + \frac{x^3}{6}u_i^{\bullet\bullet\bullet}(0) +$$

$$+ \frac{1}{EI}\sum_{1<i,j\leqslant 3} Z_{ij}\frac{\left(x - \dfrac{2n-1}{2}a\right)^3}{6}, \tag{15}$$

și în continuare derivatele

$$u_i^{\bullet}(x) = u_i^{\bullet}(0) + xu_i^{\bullet\bullet}(0) + \frac{x^2}{2}u_i^{\bullet\bullet\bullet}(0) + \frac{1}{EI}\sum_{1\leqslant i\leqslant 3} Z_{ij}\left(\frac{x - \dfrac{2n-1}{2}}{2}\right), \tag{16}$$

$$u_i^{\bullet\bullet\bullet}(x) = u_i^{\bullet\bullet\bullet}(0) + \frac{1}{EI}\sum_{1<i<3} Z_{ij}, \tag{17}$$

care se precizează pentru punctele $x = \dfrac{a}{2},\ \dfrac{3a}{2},\ \dfrac{5a}{2}$;

derivatele se deduc în mod analog prin înlocuirea succesivă a valorilor $x = \dfrac{a}{2},\ \dfrac{3a}{2},\ \dfrac{5a}{2}$ în expresiile anterioare.

În mod similar se procedează pe direcția y.

5.6. În sistemul de ecuații necunoscutele sînt :

— *deplasările pe contur* :

$$u_i(0)\,;\ v_j(0)\quad (1 \leqslant i,\ j \leqslant 3), \qquad 6 \text{ necunoscute};$$

— *momentele pe contur* caracterizate prin termenii

$$u_i^{\bullet\bullet}(0) \text{ și } v_j''(0)\quad (1 \leqslant i,\ j \leqslant 3), \qquad 6 \text{ necunoscute};$$

— *eforturile de legătură* în ochiurile rețelei :

$$Z_{ij} \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 3), \qquad 9 \text{ necunoscute};$$

— reacțiunea consolei de sub nodul 11, notată cu X_{11},

1 necunoscută

În total se determină 22 de necunoscute

În metoda forțelor s-ar fi scris numai nouă ecuații de egalitate de săgeți, însă cu coeficienți mult mai dificil de exprimat.

În tabela 1 s-au dat pentru exemplificarea conducerii calculului expresiile săgeților u_{ij} și v_{ij} pe direcțiile x și y.

În tabela 2 se arată ecuațiile de condiție.

Tabela 1

SĂGEȚILE DE DIRECȚIA x, u_{ij}

Pentru $x = \dfrac{a}{2}$

$$u_{11}\left(\frac{a}{2}\right) = u_{10} + \frac{a}{2}\,u'_{10} + \frac{a^2}{8}\,u''_{10} + \frac{a^3}{48}\,u'''_{10}$$

analog pentru $x = \dfrac{3a}{2}$ se obține :

$$u_{12}\left(\frac{3a}{2}\right) = u_{10} + \frac{3a}{2}\,u'_{10} + \frac{9a^2}{8}\,u''_{10} - \frac{1}{EI}\,\frac{Z_{11}\,a^3}{6}$$

pentru $x = \dfrac{5a}{2}$

$$u_{13}\left(\frac{5a}{2}\right) = u_{10} + \frac{5a}{2}\,u'_{10} + \frac{25}{8}\,a^2\,u''_{10} + \frac{125}{48}\,a^3\,u'''_{10} - \frac{1}{EI}\,\frac{a^3}{6}\,Z_{12} - \frac{1}{EI}\,\frac{8a^3}{6}\,Z_{11}$$

SĂGEȚILE PE DIRECȚIA y, v_{ij}

pentru $y = \dfrac{a}{2}$

$$v_{12}\left(\frac{a}{2}\right) = v_{02} + \frac{a}{2}\,v'_{02} + \frac{a^2}{8}\,v''_{02} + \frac{a^3}{48}\,v'''_{02}$$

Tabela 2

ECUAȚIILE DE EGALITATE DE SĂGEȚI

Punctul 1—1

$$u_{10} + \frac{a^2}{8}\,u''_{10} = v_{01} + \frac{a^2}{8}\,v''_{01} = 0$$

Punctul 1—2

$$u_{10} + \frac{3a}{2}\,u'_{10} + \frac{9a^2}{8}\,u''_{10} + \frac{27}{48}\,a^3\,u'''_{10} - \frac{1}{EI}\,\frac{a^3}{6}\,z_{11} = v_{02} + \frac{a}{8}\,v'_{02} + \frac{a^2}{8}\,v''_{02} + \frac{a^3}{48}\,v'''_{02}$$

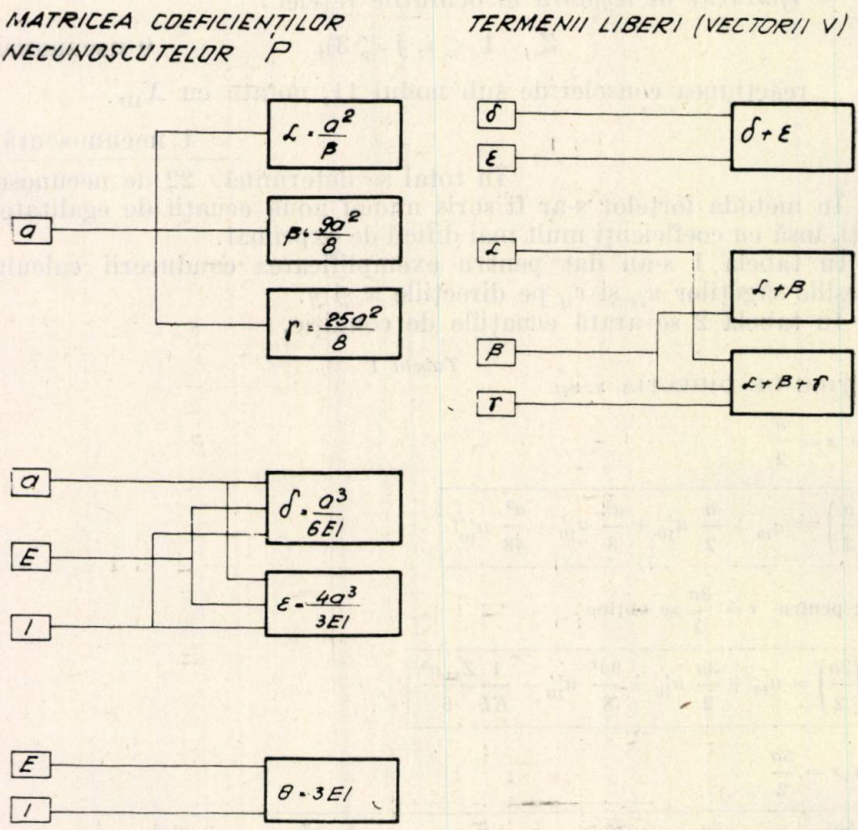


Fig. 11

Schema logică a algoritmului

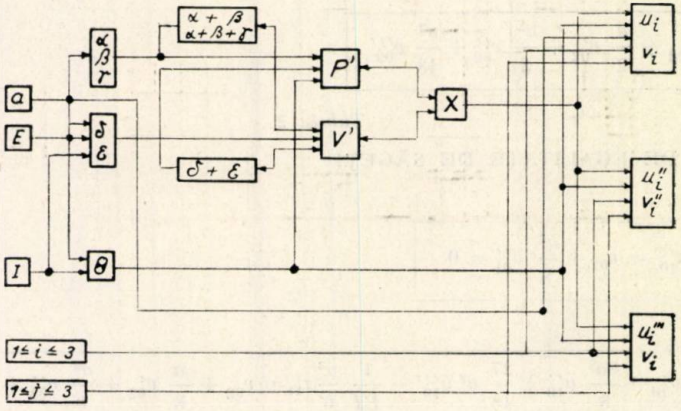


Fig. 12

Tabela 3

Necunoscute / Nr. ecuații	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}		
	U_1	U_2	U_3	V_1	V_2	V_3	U_1''	U_2''	U_3''	V_1''	V_2''	V_3''	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}	Z_{21}	Z_{22}	Z_{23}	Z_{31}	Z_{32}	Z_{33}	X_{11}		
1	1			−1			α			$-\alpha$													0	1
2	1				−1		β				$-\alpha$		δ										0	2
3	1					−1	γ					$-\alpha$	ε	δ									0	3
4		1		−1				α		$-\beta$			δ									δ	0	4
5		1			−1			β			$-\beta$			δ		δ							δ	5
6		1				−1		γ				$-\beta$			δ	ε	δ						δ	6
7			1	−1					α	$-\gamma$			ε			δ							δ	7
8			1		−1				β		$-\gamma$			ε			δ		δ				$\delta+\varepsilon$	8
9			1			−1			γ			$-\gamma$			ε			δ	ε	δ			$\delta+\varepsilon$	9
10							$3E1$						γ	β	α								0	10
11								$3E1$								γ	β	α					0	11
12									$3E1$										γ	β	α		0	12
13										$-3E1$			γ			β			α			$-\gamma$	$\beta+\alpha$	13
14											$-3E1$			γ			β			α			$\gamma+\beta+\alpha$	14
15												$-3E1$			γ			β			α		$\gamma+\beta+\alpha$	15
16													1	1	1								0	16
17																1	1	1					0	17
18																			1	1	1		0	18
19													1			1			1			−1	2	19
20														1			1			1			3	20
21															1			1			1		3	21
22	1						α																0	22
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22		

P — V

$2+4\to 2'$; $3+7\to 3'$; $7+10\to 7'$; $8+11\to 8'$; $10+13\to 10'$; $11+14\to 11'$; $12+15\to 12'$; $16+17\to 16$; $18+21\to 18$; $22+19\to 22$. Operații pe linii pentru a se obține diagonala diferită de 0.

Tabela 4

Nr. ecuatii / Necunoscute	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}	X_{21}	X_{22}		
	U_1	U_2	U_3	V_1	V_2	V_3	U_1''	U_2''	U_3''	V_1''	V_2''	V_3''	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}	Z_{21}	Z_{22}	Z_{23}	Z_{31}	Z_{32}	Z_{33}	X_{11}		
1	1			-1			α			$-\alpha$													0	1
2	1	1		-1	-1		β	α		$-\beta$	$-\alpha$		2δ									$-\delta$	0	2
3	1		1	-1		-1	δ					$-\alpha$	2ε	δ		δ						$-\varepsilon$	δ	3
4		1		-1				α		$-\beta$			δ									$-\delta$	0	4
5		1			-1			β			$-\beta$			δ		δ							δ	5
6		1				-1		δ				$-\beta$			δ	ε	δ						δ	6
7			1	-1			3E1		α	$-\delta$			$\varepsilon+\delta$	β	α	δ						$-\varepsilon$	δ	7
8			1		-1			3E1	β		$-\delta$			ε		δ	$\delta+\beta$	α	δ				$\delta+\varepsilon$	8
9			1			-1			δ			$-\delta$			ε			δ	ε	δ				$\delta+\varepsilon$	9
10							3E1			-3E1			2δ	β	α	β			α				$\beta+\alpha$	10
11								3E1			-3E1			δ		δ	2β	α		α			$\delta+\beta+\alpha$	11
12												-3E1			δ			β	δ	β	2α			12
13										-3E1			δ			β			α			$-\delta$	$\beta+\alpha$	13
14											-3E1		δ	δ			β			α			$\delta+\beta+\alpha$	14
15												-3E1		δ	δ			β			α		$\delta+\beta+\alpha$	15
16													1	1	1	1		1					0	16
17																1	1	1					0	17
18															1			1	1	1	2		3	18
19													1			1			1			-1	2	19
20														1			1			1			3	20
21															1			1			1		3	21
22	1												1			1			1			-1	2	22
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22		

P' V'

6. Algoritmul pentru scrierea sistemului de 22 de ecuații se deduce imediat :

Dezvoltînd ecuațiile din tabela 2 se ajunge la formularea coeficienților pentru necunoscute și termeni liberi, așa cum apare scris simbolic în tabela 3.

Schema logică pentru calculul coeficienților necunoscutelor (matricea P) și a coeficienților pentru termeni liberi (vectori V) apar în figura nr. 11.

Pentru a putea rezolva sistemul de ecuații din tabela 2 cu ajutorul algoritmului lui Gauss, s-au efectuat o serie de operații (adunări de linii), așa cum se indică în tabela 3, pentru ca toți coeficienții de pe diagonala principală să fie diferiți de zero. În felul acesta, matricea P și vectorul V din tabela 3 se transformă în matricea P' și vectorul V', dați în tabela 4, în care coeficienții au semnificațiile din figura 11.

Rezolvarea problemei în totalitate se face conform reprezentării simbolice date pentru schema logică a algoritmului de calcul din figura 12.

7. *Exemplificare numerică* pentru cazul $a = 3{,}00$ m :

$$E = 2\,100\,000 \text{ t/m}^2 \quad I = 0{,}03375 \text{ m}^4 ; \quad P = 100^t$$

rețeaua din figura 9) ; conducînd calculul conform schemei logice din figura 2, au rezultat valorile

$$u_{10} = v_{01} = -\,0{,}014831334 \text{ m}$$

$$u_{20} = v_{02} = \quad 0{,}08616062 \text{ m}$$

$$u_{30} = v_{03} = \quad 0{,}16775775 \text{ m}$$

$$u''_{10} = v''_{01} = \quad 0{,}131834080$$

$$u''_{20} = v''_{02} = \quad 0{,}0630\,51096$$

$$u''_{30} = v''_{03} = \quad 0{,}016754833$$

$$Z_{11} = 400^t \qquad Z_{21} = -165{,}\,624^t \qquad Z_{31} = -34{,}375^t$$

$$Z_{12} = 265{,}625^t \qquad Z_{22} = Z_{33} = 49{,}998^t \qquad Z_{32} = 15{,}624^t$$

$$Z_{13} = 134{,}374^t \qquad Z_{23} = 115{,}625^t \qquad X_{11} = 800^t .$$

Rezultatele verifică condițiile de simetrie :

$$u_1 = v_1 \qquad u_2 = v_2 \qquad u_3 = v_3 ,$$

$$u''_1 = v''_1 \qquad u''_2 = v''_2 \qquad u''_3 = v''_3 ,$$

$$Z_{12} = P - Z_{21} \qquad Z_{22} = P - Z_{22} \qquad Z_{12} + Z_{13} = 4P ,$$

$$Z_{13} = P - Z_{31} \qquad Z_{33} = P - Z_{33} \qquad Z_{23} = Z_{12} - \frac{3P}{2} .$$

$$Z_{11} = P_{11} - Z_{11} \qquad X_{11} = -\,8P$$

În continuare s-au reprezentat diagramele de moment în cazul cînd valoarea sarcinii exterioare este $P = 5.3^t$, aplicată la noduri (fig. 13).

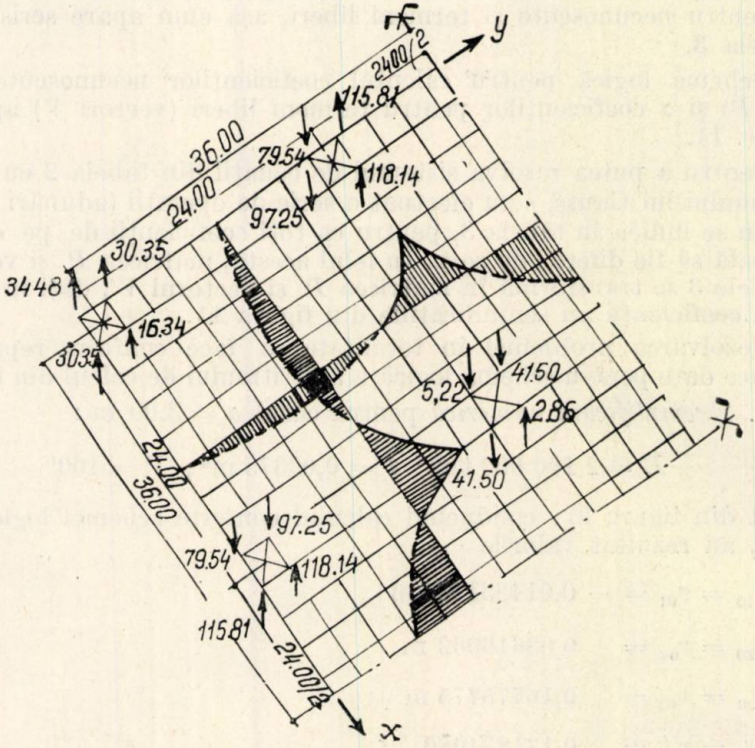


Fig. 13

Primită la redacție la 10 februarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. Z. S. Makovski, *Räumliche tragwerke aus Stahl*, Düsseldorf, Verlag Stahleisen, *6* (1963)
2. N. Ciorănescu, *Lecții de matematici superioare*, București, Edit. tehnică, 1960.
3. G. Doetsch, D. Voelker, *Die zweidimensionale Laplace-Transformation*, Basel, Birkenhäuser Verlag, 1950.

APLICAREA METODELOR VARIAȚIONALE PENTRU DETERMINAREA FRECVENȚELOR VIBRAȚIILOR TRANSVERSALE ALE GRINZILOR CU SECȚIUNE VARIABILĂ [1)]

de MIHAI SIMONICI și MIRCEA SOARE
Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor, București

539.4 : 519 : 534

Se studiază aplicarea metodelor variaționale pentru determinarea frecvențelor proprii ale vibrațiilor transversale ale grinzilor cu secțiune variabilă.
Prin alegerea convenabilă a funcțiilor de aproximare care satisfac condiția de completitudine relativă, se ajunge la un sistem de ecuații canonice omogene. Prin anularea determinantului principal rezultă frecvențele proprii ale grinzii.
Ca exemplu de aplicare se tratează grinda dublu încastrată, la care înălțimea variază parabolic.

§ 1. INTRODUCERE

Căutarea căilor de alcătuire cît mai rațională a elementelor unei structuri a dus, printre altele, și la varierea secțiunii în lungul barelor. Din punct de vedere analitic, aceasta introduce serioase dificultăți atît în calculul static, cît și în cel dinamic al barelor.

Dacă în cazul aplicării statice a încărcărilor problema și-a găsit o rezolvare devenită clasică (de exemplu tabelele pentru calculul grinzilor cu vute), situația este mult mai complexă în cazul vibrațiilor, cînd ecuația care guvernează fenomenul are derivate parțiale.

---

[1] Publicată și în „Rev. roum. sci. tech.-Mécanique Appliquée", **11**, *5*, (1966) (în limba franceză).

Dacă ne referim la vibrațiile libere ale grinzii, de masă și moment de inerție variabil, ecuația cu derivate parțiale pe care o satisfac săgețile se scrie

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI_x \frac{\partial^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) + m_x \frac{\partial^2 y}{\mathrm{d}t^2} = 0, \tag{1.1}$$

la care trebuie asociate condițiile-limită pentru capetele grinzii.

Căutînd soluții în care variabilele sînt separate,

$$y(x, t) = Y(x) \cdot \sin(\omega t + \theta), \tag{1.2}$$

introducînd în (1.1) și simplificînd apoi funcția de timp, se ajunge la următoarea ecuație diferențială obișnuită :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI_x \frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}x^2}\right) - m_x \omega^2 Y = 0, \tag{1.3}$$

în care ω reprezintă pulsația proprie a vibrațiilor.

Vom nota mai departe

$$I_x = I_0 \cdot \eta(x), \tag{1.4}$$

$$m_x = m_0 \cdot \lambda(x), \tag{1.4'}$$

în care I_0 și m_0 reprezintă, respectiv, un moment de inerție și o masă arbitrară, iar $\eta(x)$ și $\lambda(x)$ reprezintă funcții adimensionale care caracterizează legile de variație ale lui I_x și m_x în lungul grinzii.

Cu acestea relația (1.3) se aduce la o formă mai simplă :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\eta \frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}x^2}\right) - \frac{m_0 \omega^2}{EI_0} \lambda Y = 0, \tag{1.5}$$

care, după dezvoltare, devine

$$\eta \frac{\mathrm{d}^4 Y}{\mathrm{d}x^4} + 2\eta' \frac{\mathrm{d}^3 Y}{\mathrm{d}x^3} + \eta'' \frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{m_0 \omega^2}{EI_0} \lambda Y = 0. \tag{1.6}$$

Evident, în cazul secțiunii constante avem $\eta = \lambda = 1$ și relațiile (1.5), (1.6) se reduc la ecuația cunoscută

$$\frac{\mathrm{d}^4 Y}{\mathrm{d}x^4} - \frac{m\omega^2}{EI} Y = 0,$$

cu soluția generală

$$Y = C_1 \sin \alpha \frac{x}{l} + C_2 \cos \alpha \frac{x}{l} + C_3 \operatorname{sh} \alpha \frac{x}{l} + C_4 \operatorname{ch} \alpha \frac{x}{l} \tag{1.7}$$

$$\left(\alpha^4 = \frac{m\omega^2}{EI} l^4\right).$$

Soluția exactă a ecuației diferențiale (1.5) sau (1.6) nu poate fi obținută în cazul general. De aceea în locul metodelor analitice exacte au

fost utilizate diferite metode aproximative de obținere a soluției, ca : diferite variante de metode variaționale (Rayleigh, Ritz, Bubnov-Galerkin etc.), metoda diferențelor finite, metoda aproximațiilor succesive, înlocuirea barei reale cu o bară la care secțiunea variază în trepte etc.

Dintre legile de variație a secțiunii și condițiile de rezemare de la capete se menționează : pana triunghiulară [11], variația în formă de butoi la grinda simplu rezemată [10], secțiunea circulară variind exponențial la bare în consolă [9] etc.

Secțiunile interesante pentru elementele de construcții au fost studiate într-o foarte mică măsură și, din cauza complexității problemei, este greu să se aprecieze mărimea frecvențelor proprii corespunzătoare la diferite legi de variație a secțiunilor.

În studiul de față ne-am propus să arătăm modul general de aplicare a metodelor variaționale, ajungîndu-se la scrierea unui sistem de *ecuații canonice*. Dintre diferitele variante de aproximare variațională am ales *metoda ortogonalizării* (Galerkin).

Ca exemplu de aplicare am tratat grinda dublu încastrată, la care secțiunea variază parabolic.

Pe marginea rezultatelor obținute, sînt făcute, la concluzii, o serie de observații asupra influenței variației secțiunii în lungul barei.

§ 2. ECUAȚIILE CANONICE ALE METODEI VARIAȚIONALE

Dacă, pentru simplificarea scrierii, notăm

$$k^4 = \frac{m_0 \omega^2}{EI_0}, \tag{2.1}$$

ecuația (1.3) poate fi scrisă sub forma

$$\Phi \equiv \frac{d^2}{dx^2}\left(\eta \frac{d^2 Y}{dx^2}\right) - k^4 \lambda Y = 0. \tag{2.2}$$

Se observă că soluțiile Y vor anula funcția Φ.

Vom putea căuta însă soluția sub forma

$$Y^* = \Sigma c_i \cdot \varphi_i(x), \tag{2.3}$$

în care funcțiile $\varphi_i(x)$ nu safisfac ecuația dată, adică

$$\Phi \equiv \frac{d^2}{dx^2}\left(\eta \frac{d^2 Y^*}{dx^2}\right) - k^4 \lambda Y^* \neq 0,$$

însă satisfac toate condițiile-limită sau de rezemare.

Constantele c_i urmează să fie determinate astfel încît expresia (2.3) să aproximeze *cît mai bine* funcționala Φ.

În acest scop vom utiliza metoda variațională a ortogonalizării, exprimînd că, pe deschiderea grinzii l, funcționala este ortogonală la fiecare funcție $\varphi_i(x)$, adică

$$\int_{(l)} \Phi^* \cdot \varphi_i(x)\, dx = 0.$$

Se pot scrie atîtea relaţii cîte funcţii φ_i avem, obţinînd un sistem de ecuaţii care determină constantele c_i. Calculele pot fi sistematizate astfel încît putem obţine un sistem de *ecuaţii canonice*, avînd drept necunoscute coeficienţii c_i.

În acest scop vom scrie dezvoltat operatorul Φ^*, înlocuind pe Y prin soluţia (2.3):

$$\Phi^* = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\eta \sum_i c_i \frac{\mathrm{d}^2\varphi_i}{\mathrm{d}x^2}\right) - k^4\lambda \sum_i c_i \varphi_i .$$

Ortogonalitatea cu funcţia φ_j se scrie

$$\int \Phi^* \cdot \varphi_j(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\eta \sum_i c_i \frac{\mathrm{d}^2\varphi_i}{\mathrm{d}x^2}\right)\varphi_j\,\mathrm{d}x - k^4 \int \lambda \sum_i c_i \varphi_i \varphi_j\,\mathrm{d}x = 0, \quad (2.4)$$

intervalul de integrare fiind deschiderea grinzii.

Pentru fixarea ideilor vom presupune că există o simetrie geometrică şi a maselor, în raport cu mijlocul grinzii; luînd în acest punct originea axelor de coordonate, se introduc notaţiile

$$A_{ij} = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\eta \frac{\mathrm{d}^2\varphi_i}{\mathrm{d}x^2}\right)\varphi_j\,\mathrm{d}x, \quad (2.5)$$

$$B_{ij} \quad \int_{-l/2}^{+l/2} \lambda \varphi_i\,\varphi_j\,\mathrm{d}x. \quad (2.5')$$

Cu aceasta, condiţia de ortogonalitate (2.4) se scrie

$$\sum_i c_i A_{ij} - k^4 \sum_i c_i B_{ij} = 0 \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots n)$$

sau, dezvoltat,

$$\left.\begin{aligned} &c_0(A_{00} - k^4 B_{00}) + c_1(A_{01} - k^4 B_{01}) + \ldots + c_n(A_{0n} - k^4 B_{0n}) = 0,\\ &c_0(A_{10} - k^4 B_{10}) + c_1(A_{11} - k^4 B_{11}) + \ldots + c_n(A_{1n} - k^4 B_{1n}) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &c_0(A_{n0} - k^4 B_{n0}) + c_1(A_{n1} - k^4 B_{n1}) + \ldots + c_n(A_{nn} - k^4 B_{nn}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2.6)$$

Sistemul (2.6) reprezintă ecuaţiile canonice căutate [13].

Din (2.5') rezultă direct că $B_{ij} = B_{ji}$. Ne propunem să arătăm că şi $A_{ij} = A_{ji}$. Integrînd de două ori prin părţi, în (2.5) se obţine

$$A_{ij} = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\eta \frac{\mathrm{d}^2\varphi_i}{\mathrm{d}x^2}\right)\varphi_j\right|_{-l/2}^{+l/2} - \left|\eta \frac{\mathrm{d}^2\varphi_i}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\mathrm{d}x}\right|_{-l/2}^{+l/2} + \int_{-l/2}^{+l/2} \eta \frac{\mathrm{d}^2\varphi_i}{\mathrm{d}x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\varphi_j}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Dacă grinda are reazeme simple sau încastrate perfect, ori este în consolă, primii doi termeni din membrul al doilea se anulează şi rezultă

$$A_{ij} = A_{ji} = \int_{-l/2}^{+l/2} \eta \frac{\mathrm{d}^2\varphi_i}{\mathrm{d}x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\varphi_j}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x. \quad (2.7)$$

Pentru $i = j$, din (2.7) și (2.5′) rezultă

$$A_{ii} = \int_{-l/2}^{+l/2} \eta \left(\frac{\mathrm{d}^2\varphi_i}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x, \qquad (2.8)$$

$$B_{ii} = \int_{-l/2}^{+l/2} \lambda \varphi_i^2 \, \mathrm{d}x. \qquad (2.8')$$

Sistemul (2.6) este astfel complet precizat. Numărul de ecuații depinde de numărul considerat de funcții φ_i. Este de observat că expresiile coeficienților A_{ij} și B_{ij} sînt aceleași dacă se variază numărul funcțiilor.

Astfel, pentru un singur termen φ_0, sistemul (2.6) se reduce la ecuația

$$c_0(A_{00} - k^4 B_{00}) = 0. \qquad (2.9)$$

Pentru doi termeni φ_0 și φ_1 corespund cele două ecuații

$$\left.\begin{aligned} c_0(A_{00} - k^4 B_{00}) + c_1(A_{01} - k^4 B_{01}) &= 0, \\ c_0(A_{10} - k^4 B_{00}) + c_1(A_{11} - k^4 B_{11}) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2.9')$$

și așa mai departe.

Coeficienții A_{00} și B_{00}, care figurează atît în (2.9), cît și în (2.9′) sînt aceiași, conform celor stabilite mai sus.

Observăm mai departe că sistemul (2.6) este *omogen* în raport cu necunoscutele c_i, astfel încît vor exista soluții nebanale doar dacă determinantul principal va fi nul, adică

$$\begin{vmatrix} A_{00} - k^4 B_{00} & A_{01} - k^4 B_{01} & \dots & A_{0n} - k^4 B_{0n} \\ A_{10} - k^4 B_{10} & A_{11} - k^4 B_{11} & \dots & A_{1n} - k^4 B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n0} - k^4 B_{n0} & A_{n1} - k^4 B_{n1} & \dots & A_{nn} - k^4 B_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.10)$$

Dezvoltînd determinantul de mai sus, se obține o ecuație de gradul n în k^4 care determină primele n valori proprii.

În prima aproximație, din (2.9) rezultă direct

$$k_0^4 = \frac{A_{00}}{B_{00}}. \qquad (2.11)$$

Considerînd două funcții φ_0 și φ_1, din anularea determinantului sistemului (2.9′) rezultă ecuația

$$(B_{00}B_{11} - B_{01}^2)(k^4)^2 - (A_{00}B_{11} + A_{11}B_{00} - 2A_{01}B_{01})k^4 + A_{00}A_{11} - A_{01}^2) = 0, \qquad (2.12)$$

care determină primele două valori proprii k_0 și k_1.

Este evident că alegerea unui număr finit de funcții φ reprezintă o soluție aproximativă a problemei.

Considerarea unei singure funcții $\varphi_0(x)$ permite determinarea doar a primei frecvențe proprii, și aceasta cu o aproximație grosieră, așa cum se va vedea și din aplicația numerică din § 4. În general, atunci cînd se

consideră n funcții, erorile cu care sînt determinate frecvențele proprii de diferite ordine cresc o dată cu ordinul lor.

O dată determinate valorile k_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$), frecvențele proprii succesive ale grinzii rezultă din (2.1):

$$\omega_i = k_i^2 \sqrt{\frac{EI_0}{m_0}}. \tag{2.13}$$

Cunoscînd valorile proprii k_i, se poate trece la determinarea *formelor proprii*. Considerînd, de exemplu, valoarea k_i și ducînd-o în sistemul (2.6), acesta poate fi rezolvat dacă una dintre necunoscute rămîne arbitrară.

Fie c_0 această necunoscută. Renunțînd la una dintre ecuațiile sistemului, rămîn n ecuații care determină rapoartele c_1/c_0, $c_2/c_0, \ldots$, c_n/c_0.

Ducînd aceste valori în (2.3), putem scrie dezvoltat

$$Y_i(x) = c_{0i}\left[\varphi_0(x) + \frac{c_{1i}}{c_{0i}}\varphi_1(x) + \frac{c_{2i}}{c_{0i}}\varphi_2(x) + \ldots\right]. \tag{2.14}$$

Relația precedentă constituie ecuația fibrei medii deformate corespunzătoare frecvenței proprii ω_i, adică reprezintă forma proprie de ordinul i a grinzii. Amplitudinea deformatei depinde de factorul c_{0i} și rămîne nedeterminată.

În toată dezvoltarea precedentă am admis implicit că soluțiile sînt astfel alese, încît cu cît numărul lor crește, cu atîta eroarea este mai mică. Fie (2.3) soluția variațională adoptată și

$$Y_i^* = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_i\varphi_i(x)$$

aproximația de ordinul i. Ea înglobează toate aproximațiile precedente

$$Y_0^* = c_0\varphi_0(x),$$

$$Y_1^* = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) \text{ etc.}$$

Se ridică întrebarea: în ce caz se poate afirma că șirul de funcții $Y_0^*, Y_1^*, \ldots, Y_i^*$ permite o aproximare oricît de bună a soluției.

În literatura de specialitate (vezi, de exemplu, [3]) se demonstrează că, dacă șirul de funcții este complet, atunci prin mărirea nedefinită a numărului de funcții φ se obține soluția exactă.

Nerespectarea condiției de completitudine poate duce la erori grosolane.

Desigur că această completitudine nu poate fi stabilită pentru orice alegere a funcțiilor $\varphi(x)$ sau chiar poate să nu aibă loc.

Ca exemplu de soluții pentru care este demonstrată completitudinea [3] menționăm polinoamele algebrice. Ele vor fi utilizate în cele ce urmează.

§ 3. GRINDA DUBLU ÎNCASTRATĂ CU ÎNĂLȚIMEA VARIIND PARABOLIC

Vom aplica teoria precedentă în cazul unei grinzi dublu încastrate, de lățime constantă, la care înălțimea variază parabolic.

Cu notațiile din figura 1 se poate scrie

$$h_x = h_0 + 4h'\frac{x^2}{l^2} = h_0\left(1 + \frac{4h'}{h_0}\cdot\frac{x^2}{l^2}\right).$$

Masa fiind proporțională cu secțiunea grinzii

$$A_x = bh_x = bh_0\left(1 + \frac{4h'}{h_0}\cdot\frac{x^2}{l^2}\right) = A_0\left(1 + \frac{4h'}{h_0}\cdot\frac{x^2}{l^2}\right),$$

rezultă

$$\lambda(x) = 1 + \frac{4h'}{h_0}\cdot\frac{x^2}{l^2}\cdot$$

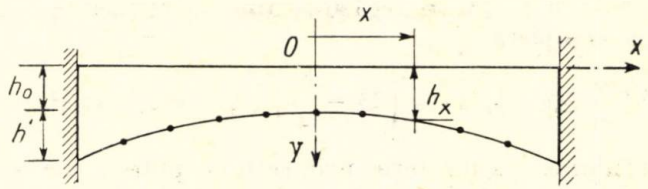


Fig. 1

În mod analog, momentul de inerție rezultă sub forma

$$I_x = \frac{bh_x^3}{12} = \frac{bh_0^3}{12}\left(1 + \frac{4h'}{h_0}\cdot\frac{x^2}{l^2}\right)^3 = I_0\left(1 + \frac{4h'}{h_0}\cdot\frac{x^2}{l^2}\right)^3,$$

de unde

$$\eta(x) = \left(1 + \frac{4h'}{h_0}\cdot\frac{x^2}{l^2}\right)^3.$$

Se observă că între η și λ subzistă în cazul considerat relația

$$\eta = \lambda^3.$$

La efectuarea calculelor va fi mai comod să lucrăm cu variabila adimensională

$$\xi = \frac{x}{l}. \tag{3.1}$$

De asemenea vom particulariza înălțimea grinzii pe reazeme, luînd $h' = h_0$. Din relațiile precedente deducem atunci

$$\lambda = 1 + 4\xi^2, \quad \eta = 1 + 12\xi^2 + 48\xi^4 + 64\xi^6. \tag{3.2}$$

Pentru construirea funcției $\varphi_0(x)$ vom adopta soluția de la grinda dublu încastrată, de secțiune constantă și încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe toată deschiderea.

Îndepărtînd factorul dimensional, se poate scrie :

$$\varphi_0(x) = \left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right)^2, \tag{3.3}$$

care satisface condițiile-limită

$$\varphi_0 = 0 \text{ și } \varphi_0' = 0 \quad \left(\text{pentru } \xi = \pm\frac{1}{2}\right).$$

Pentru funcțiile succesive se poate lua

$$\varphi_i(x) = \xi^i\left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.4}$$

astfe încît pentru $i = 0$ se regăsește funcția inițială φ_0.

Soluția completă

$$Y^* = \sum c_i \cdot \varphi_i(x) = \left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right)^2 (c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + \ldots)$$

poate fi considerată ca o soluție prin serii de puteri, care satisface condițiile-limită, însă nu satisface ecuația diferențială dată.

Datorită simetriei, valorile și formele proprii de vibrație se vor separa în *simetrice* (pentru $i = 0, 2, 4, \ldots$) și *antisimetrice* (pentru $i = 1, 3, 5, \ldots$).

Forma relativ simplă a funcțiilor adoptate permite să obținem coeficienții A_{ij} și B_{ij} sub formă generală, independent de paritatea lui i și j.

Din motive de simetrie se poate restrînge intervalul de integrare la jumătate pentru toți coeficienții.

Ținînd seama că

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi_i}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{l^2}\left[(i+4)(i+3)\,\xi^{i+2} - \frac{1}{2}(i+2)(i+1)\xi^i + \frac{1}{16}i(i-1)\xi^{i-2}\right],$$

expresiile generale ale coeficienților A_{ij} și B_{ij} se scriu

$$A_{ij} = A_{ji} = \frac{1}{l^4}\int_0^{l/2}(1 + 12\xi^2 + 48\xi^4 + 64\xi^6)\cdot\left[(i+4)(i+3)\xi^{i+2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(i+2)(i+1)\xi^i + \frac{1}{16}i(i-1)\xi^{i-2}\right]\cdot\left[(j+4)(j+3)\,\xi^{j+2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(j+2)(j+1)\xi^j + \frac{1}{16}j(j-1)\xi^{j-2}\right]\mathrm{d}x,$$

$$B_{ij} = B_{ji} + \int_0^{l/2}(1 + 4\xi^2)\left(\xi^{i+4} - \frac{1}{2}\xi^{i+2} + \frac{1}{16}\xi^i\right)\left(\xi^{i+4} - \frac{1}{2}\xi^{j+2} + \frac{1}{16}\xi^j\right)\mathrm{d}x.$$

Calculul coeficienților $B_{ij} = B_{ji}$ este mai simplu și, după efectuarea tuturor reducerilor, se obține forma generală

$$B_{ij} = B_{ji} = l\,\frac{3}{2^{i+j+1}}\cdot$$

$$\cdot\,\frac{i+j+6}{(i+j+1)(i+j+3)(i+j+5)(i+j+7)(i+j+9)(i+j+11)}\cdot \tag{3.5}$$

Coeficienții $A_{ij} = A_{ji}$ conduc la o expresie foarte complicată, care se mai poate scrie

$$A_{ij} = A_{ji} = \frac{1}{l^3} \cdot \frac{1}{2^{i+j+5}} \left(\frac{i^2 j^2 - 52\,ij + 672}{i+j+11} - \frac{i^2 j^2 - 38\,ij + 384}{i+j+9} - \right.$$

$$- \frac{3\,i^2 j^2 - 12\,ij + 960}{i+j+7} + \frac{3\,i^2 j^2 - 78\,ij + 384}{i+j+5} + \frac{3\,i^2 j^2 - 84\,ij + 288}{i+j+3} -$$

$$\left. - \frac{3\,i^2 j^2 - 42\,ij}{i+j+1} - \frac{i^2 j^2 - 16\,ij}{i+j-1} + \frac{i^2 j^2 - 2\,ij}{i+j-3} \right). \tag{3.6}$$

Formula de mai sus poate fi adusă la o formă mai simplă pentru calculele numerice, analogă celei de mai sus pentru B_{ij}, pentru diferite valori ale lui j. Astfel se obține pentru $j = 0, 2, 4$

$$A_{i,0} = A_{0,i} = \frac{1}{l^3} \cdot \frac{3}{2^{i-5}} \cdot \frac{5\,i^2 + 64\,i + 183}{(i+3)(i+5)(i+7)(i+9)(i+11)}, \tag{3.7}$$

$$A_{i,2} = A_{2,i} = \frac{1}{l^3} \cdot \frac{3}{2^{i+5}} \left(\frac{225}{i+13} - \frac{142}{i+11} - \frac{341}{i+9} + \frac{172}{i+7} + \frac{119}{i+5} - \right.$$

$$\left. - \frac{30}{i+3} - \frac{3}{i+1} \right), \tag{3.7'}$$

$$A_{i,4} = A_{4,i} = \frac{1}{l^3} \cdot \frac{3}{2^{i+6}} \left(\frac{308}{i+15} - \frac{211}{i+13} - \frac{502}{i+11} + \frac{295}{i+9} + \right.$$

$$\left. + \frac{208}{i+7} - \frac{85}{i+5} - \frac{14}{i+3} + \frac{1}{i+1} \right). \tag{3.7''}$$

Cu acestea dispunem de toate elementele necesare calculului. Valorile lui A_{ij} și B_{ij} pentru cazul simetric și luînd $i, j = 0, 2, 4$ au fost trecute în tabelele 1, respectiv 2.

Tabela 1

Valorile $l^3 A_{ij}$

i \ j	0	2	4
0	$\frac{1952}{3.5.7.11}$	$\frac{2648}{3.5.7.11.13}$	$\frac{346}{3.5.7.11.13}$
2	$\frac{2648}{3.5.7.11.13}$	$\frac{2}{3.13}$	$\frac{4519}{2.3.5.7.11.13.17}$
4	$\frac{346}{3.5.7.11.13}$	$\frac{4519}{2.3.5.7.11.13.17}$	$\frac{11189}{2^3.3.5.11.13.17.19}$

Tabela 2

Valorile $\frac{1}{l} B_{ij}$

i \ j	0	2	4
0	$\frac{1}{3.5.7.11}$	$\frac{1}{5.7.9.11.13}$	$\frac{1}{2^4.5.7.9.11.13}$
2	$\frac{1}{5.7.9.11.13}$	$\frac{1}{2^4.5.7.9.11.13}$	$\frac{1}{2^5.7.11.13.15.17}$
4	$\frac{1}{2^4.5.7.9.11.13}$	$\frac{1}{2^5.7.11.13.15.17}$	$\frac{1}{2^8.3.11.15.17.19}$

§ 4. DETERMINAREA FRECVENȚELOR PROPRII

Odată cunoscute valorile numerice ale coeficienților A_{ij} și B_{ij}, putem trece să calculăm frecvențele proprii.

Primei aproximații

$$Y_0^* = c_0 \varphi_0(x) = c_0 \left(\xi^2 - \frac{1}{4} \right)^2$$

îi corespunde relația (2.11), din care se deduce direct

$$(kl)^4 = \frac{\frac{1952}{3.5.7.11}}{\frac{1}{3.5.7.11}} = 1952;$$

extrăgînd radicalul, avem

$$(k_0 l)_0^2 = \sqrt{1952} \approx 44{,}182.$$

Celei de-a doua aproximații

$$Y_2^* = c_0 \varphi_0(x) + c_2 \varphi_2(x) = c_0 \left(\xi^2 - \frac{1}{4} \right)^2 \left(1 + \frac{c_2}{c_0} \xi^2 \right)$$

îi corespunde relația (2.12), din care se deduce, după efectuarea tuturor reducerilor,

$$23\ (kl)^8 - 1263360\ (kl)^4 + 1803976704 = 0,$$

cu rădăcinile pozitive

$$(k_0 l)_2^2 = 38{,}303 \text{ și } (k_2 l)_2^2 = 231{,}218.$$

Următoarea aproximație

$$Y_4^* = c_0 \varphi_0(x) + c_2 \varphi_2(x) + c_4 \varphi_4(x) = c_0 \left(\xi^2 - \frac{1}{4} \right) \left(1 + \frac{c_2}{c_0} \xi^2 + \frac{c_4}{c_0} \xi^4 \right)$$

este mai greu de tratat numeric.

Determinantul (2.10) se scrie după simplificarea numitorilor

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1\,952 - (kl)^4 & \dfrac{2\,648 - \frac{1}{3}(kl)^4}{13} & \dfrac{346 - \frac{1}{48}(kl)^4}{13} \\ 2\,648 - \frac{1}{3}(kl)^4 & \dfrac{770 - \frac{1}{48}(kl)^4}{13} & \dfrac{4\,519 - \frac{1}{80}(kl)^4}{442} \\ \dfrac{346 - \frac{1}{48}(kl)^4}{13} & \dfrac{4\,519 - \frac{1}{80}(kl)^4}{442} & \dfrac{78\,323 - \frac{91}{96}(kl)^4}{8.13.17.19} \end{vmatrix} = 0.$$

Determinarea primei rădăcini $(kl)^4$ se face prin încercări, obținîndu-se

— pentru $(kl)^4 = 1\,388 \rightarrow \Delta = +\,23{,}135,$

$(kl)^4 = 1\,389 \rightarrow \Delta = +\,1{,}346,$

$(kl)^4 = 1\,390 \rightarrow \Delta = -\,3{,}004.$

Se poate lua deci

$$(k_0 l)_4^2 \approx 37{,}270.$$

Să formăm rapoartele :

$$\frac{(k_0 l)_2^2}{(k_0 l)_0^2} = \frac{38{,}303}{44{,}182} = 0{,}867,$$

$$\frac{(k_0 l)_4^2}{(k_0 l)_2^2} = \frac{37{,}270}{38{,}303} = 0{,}973.$$

Diferența dintre aproximația a doua și a treia fiind sub 3%, ultima poate fi considerată satisfăcătoare.

Din aplicarea relației (2.13) rezultă pentru frecvența fundamentală a grinzii

$$\omega_0 = \frac{37{,}27}{l^2}\sqrt{\frac{EI_0}{m_0}}. \tag{4.1}$$

§ 5. OBSERVAȚII FINALE ȘI CONCLUZII

Pe marginea rezultatelor precedente vom face o serie de observații interesante.

1. Să comparăm valoarea frecvenței fundamentale pentru grinda cu secțiune variabilă cu aceea a grinzii de secțiune constantă. Pentru grinda dublu încastrată, în ultimul caz avem

$$\omega_{const} = \frac{4{,}7300^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{22{,}373}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}. \tag{5.1}$$

Dacă admitem că cele două secțiuni sînt identice la mijlocul deschiderii ($m = m_0$, $I = I_0$), rezultă

$$\frac{\omega_{var}}{\omega_{const}} = \frac{37{,}270}{42{,}373} \simeq 1{,}65,$$

adică, *prin mărirea înălțimii secțiunii spre reazeme, frecvența fundamentală a crescut cu 65%*.

2. Valoarea dată de (4.1) se situează între prima și a doua frecvență proprie a grinzii de secțiune constantă (I_0):

$$\omega_{0,\,const} < \omega_{0,\,var} < \omega_{2,\,const}$$

sau

$$\frac{22{,}373}{l^2}\sqrt{\frac{EI_0}{m_0}} < \frac{37{,}270}{l^2}\sqrt{\frac{EI_0}{m_0}} < \frac{61{,}669}{l^2}\sqrt{\frac{EI_0}{m_0}}.$$

3. Să determinăm în continuare înălțimea constantă a grinzii, pentru care corespunde o frecvență proprie egală cu valoarea (4.1). Fie m, $A = bh$, $I = bh^3/12$ caracteristicile acestei grinzi.

Din egalitatea

$$\frac{22{,}373}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{37{,}270}{l^2}\sqrt{\frac{EI_0}{m_0}}$$

se deduce

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{32{,}270}{22{,}373}\right)^2 \frac{m}{m_0};$$

întrucît masele sînt proporționale cu ariile, se mai poate scrie

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{37{,}270}{22{,}373}\right)^2 \frac{A}{A_0}.$$

Pentru secțiunea dreptunghiulară avem

$$\frac{I}{A} = \frac{h^2}{12}, \quad \frac{I_0}{A_0} = \frac{h_0^2}{12},$$

și final rezultă

$$h = \frac{37{,}270}{22{,}373} h_0 = \frac{\omega_{var}}{\omega_{const}} h_0,$$

adică, pentru ca o grindă cu secțiune constantă și grinda cu secțiune variabilă considerată să aibă aceeași frecvență fundamentală, trebuie ca înălțimile lor h, respectiv h_0, să stea în același raport cu frecvențele grinzii cu aceeași variație a secțiunii și a grinzii de secțiune constantă, avînd înălțimea h_0 (fig. 2).

4. În cazul unei grinzi cu vute parabolice pe lungimile l_1 (fig. 3), frecvența proprie ω_{vute} va fi situată în intervalul

$$\frac{22{,}373}{l_2}\sqrt{\frac{EI_0}{m_0}} < \omega_{vute} < \frac{37{,}270}{l^2}\sqrt{\frac{EI_0}{m_0}}.$$

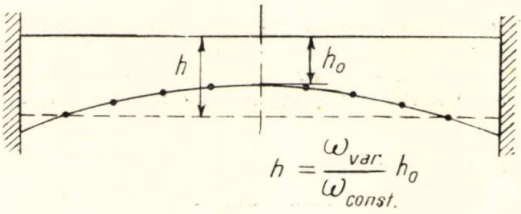


Fig. 2

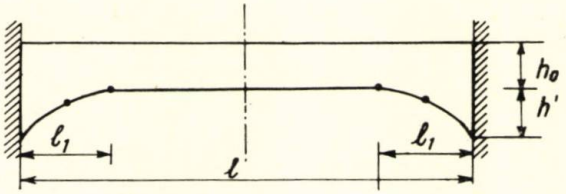


Fig. 3

5. Cazul mai general al grinzilor cu vute poate fi tratat, analog cu cel al grinzilor cu secțiune variabilă, prin fragmentarea intervalelor de integrare în relațiile (2.4) și următoarele. Întrucît pe porțiunea de înălțime constantă soluția este cunoscută (1.7), este indicat ca funcțiile $\varphi(x)$ să aibă această formă.

Primită la redacție la 11 martie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. O. Belluzzi, *Scienza delle Costruzioni*, vol. 4, Bologna, Nicola Zanichelli Editore, 1955.
2. K. Hohenemser, W. Prager, *Dynamik der Stabwerke. Eine Schwingungslehre für Bauingenieure*, Berlin, Verlag von Julius Springer, 1933.
3. L. V. Kantorovici, V. I. Krîlov, *Metode de aproximație ale analizei superioare*, vol. I (trad. din l. rusă) București, Inst. studii româno-sovietic, 1955.
4. V. Koloušek, *Calcul des efforts dynamiques dans les ossatures rigides, Vibrations des poutres, des portiques et des arcs*, Paris, Dunod, 1959.
5. — *Dynamik der Baukonstruktionen*, Berlin, VEB, Verlag für Bauwesen, 1962.
6. E. Krynicki, Z. Mazurkiewicz, *Determinarea frecvențelor proprii ale grinzii simplu rezemate cu înălțimea secțiunii variind liniar prin metoda lui Ritz* (în l. polonă) Inzynieria i Budownictwo, **XVI**, 8, 330—333 (1959).
7. I. A. Pratusevici, *Metode variaționale în mecanica construcțiilor* (trad. din l. rusă),București, I.D.T.

8. M. Simonici, *Dinamica construcțiilor*, București, Edit. tehnică, 1958.
9. A. Stan, *Determinarea aproximativă a frecvențelor vibrațiilor transversale ale barelor de secțiune variabilă cu ajutorul metodei diferențelor finite*, Bul. Inst. politehnic București, **XXIV**, *3*, 43—57 (1962).
10. W. F. Stokey, *Vibration of Systems Having Distributed Mass and Elasticity, Shock and Vibration Handbook*, edited by Cyril M.Harris ans Charles E.Crede, vol. I, NewYork, Mc.Graw-Hill Book Company, 1961.
11. S. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering*, New York, Mc. Graw-Hill Book Company, 1955.
12. R. Zurmühl, *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, 4-te Aufl.* Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1963.
13. F. W. Waltking, *Schwingungen in der Bautechnik. Schleicher Taschenbuch für Bauingenieure*, vol. I Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer-Verlag, 1955, 1065—1067.

CALCULUL PLASTIC AL STRUCTURILOR DE OȚEL PE BAZA CONCEPȚIEI STĂRILOR-LIMITĂ[1])

de VALERIU PETCU
Institutul de cercetări în construcții
și economia construcțiilor (INCERC), București

539.3 :624.014

Structurile de oțel dimensionate pe baza teoriei plastice simple prezintă în numeroase cazuri fenomene de instabilitate locală înainte de transformarea lor în mecanisme. De asemenea, aplicarea teoriei plastice simple poate avea ca rezultat obținerea în stadiul de exploatare a unor deformații superioare celor admise prin prescripții.
Pentru eliminarea acestor inconveniente, H.A. Sawyer a asociat teoriei plastice simple un criteriu suplimentar de calcul, denumit criteriul limitei de curgere. Conform acestui criteriu, la o structură solicitată de încărcările de exploatare limita de curgere poate fi atinsă cel mult în fibra extremă a secțiunii celei mai solicitate a structurii. Eficacitatea criteriului limitei de curgere a fost dovedită exclusiv în cadrul metodei de calcul bazate pe un coeficient unic de siguranță.
În acest studiu se examinează oportunitatea extinderii criteriului limitei de curgere la structurile al căror calcul plastic se face pe baza concepției stărilor-limită. În acest scop se studiază comportarea sub acțiunea încărcărilor a două structuri simple de oțel, reprezentînd cazuri tipice, dimensionate atît pe baza teoriei plastice simple, cît și prin asocierea criteriului limitei de curgere la această teorie. Rezultatele obținute arată că aplicarea criteriului limitei de curgere reprezintă o condiție necesară în calculul plastic al structurilor de oțel, indiferent de principiile metodei de calcul utilizate.

I. INTRODUCERE

De aproape două decenii, o activitate intensă se desfășoară în domeniul cercetării teoretice și experimentale a comportării în domeniul plastic a structurilor de oțel alcătuite din bare, solicitate în principal la încovoiere.

[1] Publicată și în „Rev. roum. sci. tech.-Mécanique Appliquée", **11**, *5*, (1966) (în limba engleză).

Rezultatele obținute în cadrul acestei activități a condus la crearea *teoriei plastice simple*, care, în prezent, constituie punctul de plecare al metodelor de calcul plastic al structurilor de oțel.

Teoria plastică simplă se bazează pe următoarele concepte și ipoteze fundamentale [1], [2], [3], [5]:

1. Oțelul este ductil, respectiv posedă proprietatea de a se deforma plastic într-o măsură apreciabilă fără a se rupe. Această proprietate se menține pînă în momentul în care are loc ruperea plastică a structurilor.

2. Fiecare secțiune normală a unei bare are capacitatea de a suporta un moment încovoietor maxim, *denumit moment plastic*, corespunzător plastificării complete a secțiunii.

3. Datorită ductilității oțelului, în zonele învecinate unei secțiuni complet plastificate se produc rotiri mari sub acțiunea unui moment încovoietor constant, egal cu momentul plastic al secțiunii. Aceste rotiri se presupun concentrate în secțiunea complet plastificată, denumită *secțiune critică*. Cu alte cuvinte, în secțiunea critică se formează o *articulație plastică*.

4. Mărimea momentului plastic dintr-o secțiune critică nu este influențată de forțele normală și tăietoare care acționează în această secțiune și nici de eforturile locale care apar în cazul în care se aplică o forță concentrată în dreptul secțiunii critice.

5. Prin creșterea încărcărilor după formarea primei articulații plastice se produce o redistribuție de momente, avînd drept consecință formarea succesivă de articulații plastice în alte secțiuni ale structurilor.

6. Îmbinările structurilor sînt capabile să transmită momentele plastice ale barelor pe care le leagă.

7. Încărcările-limită corespund stadiului în care structurile se transformă în mecanisme în totalitate sau în parte, ca urmare a formării unui număr suficient de articulații plastice.

8. Încărcările care acționează asupra unei structuri se presupun proporționale între ele. Cu alte cuvinte, rapoartele dintre diferitele încărcări rămîn constante pînă în momentul ruperii plastice a structurii.

9. Deformațiile elastice sînt neglijabile în raport cu cele plastice, iar deformațiile corespunzătoare momentului transformării structurilor în mecanisme sînt suficient de mici pentru a permite scrierea ecuațiilor de echilibru pe baza schemelor nedeformate ale structurilor.

10. Anterior transformării structurilor în mecanisme nu apar fenomene de instabilitate generală sau locală.

Trebuie subliniat faptul că ipotezele prezentate mai sus corespund unor condiții ideale de solicitare și de comportare a structurilor, care nu se realizează întotdeauna în practică.

În plus, teoria plastică simplă se bazează pe un criteriu unic de calcul, denumit *criteriul rezistenței maxime* [5], conform căruia structurile se transformă în mecanisme sub acțiunea încărcărilor de calcul (pentru terminologia folosită vezi cap. II). Acest criteriu nu reflectă însă realitatea decît în măsura în care fenomenele de instabilitate a echilibrului sînt împiedicate să se producă atît în domeniul elastic, dar mai ales în domeniul plastic. De asemenea, în numeroase cazuri, criteriul menționat nu are capacitatea de a asigura îndeplinirea condițiilor necesare pentru exploatarea normală a structurilor.

Observațiile prezentate mai sus, cunoscute încă din momentul elaborării teoriei plastice simple, au constituit punctul de plecare pentru numeroase studii teoretice și experimentale, efectuate în vederea stabilirii limitărilor și modificărilor care, asociate teoriei plastice simple, să asigure posibilitatea elaborării unor procedee și reguli de calcul capabile de a reflecta cît mai fidel comportarea reală a structurilor de oțel sub acțiunea încărcărilor.

Astfel s-au făcut progrese remarcabile în problemele referitoare la influența forțelor tăietoare și axiale asupra momentelor plastice, precum și la stabilitatea generală și locală a structurilor.

În același timp, aceste studii au dat posibilitatea ca pentru structurile cu un domeniu mare de comportare plastică să se deducă următoarele concluzii :

— în numeroase cazuri, într-una din secțiunile critice în care s-a format una dintre primele articulații plastice, are loc flambajul local al tălpii comprimate a elementului, datorită rotirii excesive a articulației plastice, înainte ca structura să se transforme în mecanism. Acest fenomen, care de regulă este însoțit de creșteri mari ale deformațiilor, provoacă scăderea rapidă a momentului capabil al secțiunii critice, aceasta avînd ca rezultat obținerea unei capacități de rezistență efective a structurii mai mici decît cea dedusă din condiția de mecanism ;

— dacă coeficienții de supraîncărcare de calcul nu au valori suficient de mari, este posibil ca structurile calculate în domeniul plastic să nu se situeze în domeniul elastic sub acțiunea încărcărilor de exploatare. În aceste cazuri se poate conta aproape întotdeauna pe depășirea valorilor maxime admise ale săgeților în stadiul de exploatare.

În plus, la structurile solicitate de încărcări care pot avea două direcții de acțiune opuse între ele, intrarea în domeniul plastic în stadiul de exploatare poate duce la ruperea progresivă a acestor structuri prin acumularea succesivă de deformații plastice.

Aceste concluzii pun în evidență necesitatea completării teoriei plastice simple cu un criteriu suplimentar de calcul care să asigure preîntîmpinarea manifestării fenomenelor descrise mai sus înainte ca încărcările care solicită structurile să atingă valorile lor de calcul.

Prezentarea unui astfel de criteriu constituie scopul prezentului studiu.

Lucrarea se bazează pe principiile metodei de calcul al construcțiilor la starea-limită de rezistență [6].

II. NOTAȚII

În cadrul acestui studiu se folosesc notațiile următoare :

f — coeficientul de formă al secțiunii $\left(f = \frac{W_p}{W_e}\right)$;

G — încărcarea permanentă de calcul, aplicată concentrat ;

l — deschiderea grinzii dublu încastrare, respectiv deschiderea centrală a grinzii continue ;

αl — mărimea deschiderilor marginale ale grinzii continue ;

ξl — distanța dintre punctul de aplicație al unei forțe și reazemul învecinat la grinda dublu încastrată ;

M_a — momentul elastic în dreptul punctelor de aplicație a încărcărilor ;

M_b — valoarea absolută a momentului elastic de pe fiecare reazem ;

M_c — valoarea absolută a momentului de curgere (moment încovoietor corespunzător atingerii limitei de curgere de calcul într-un singur punct al secțiunii, determinat în ipoteza neglijării eforturilor reziduale din secțiune) ;

M_p — valoarea absolută a momentului plastic ;

P — valoare arbitrară a încărcării temporare, aplicate concentrat ;

P_n — valoarea normată a încărcării temporare ;

P_c — valoarea încărcării temporare corespunzătoare atingerii limitei de curgere de calcul în fibra extremă a secțiunii celei mai solicitate a grinzii ;

P_1 — valoarea încărcării temporare corespunzătoare formării primei articulații plastice ;

P_m — valoarea încărcării temporare corespunzătoare transformării grinzii în mecanism (încărcare temporară limită) ;

P_{cm} — valoarea încărcării temporare corespunzătoare transformării în mecanism a grinzii dimensionate ținînd seama de criteriul limitei de curgere ;

P_u — valoarea de calcul a încărcării temporare ;

R — limita de curgere de calcul a oțelului ;

W_e — modulul de rezistență elastic ;

W_p — modulul de rezistență plastic ;

α — coeficient de influență al mărimii deschiderilor marginale ale grinzii continue ;

η — gradul de încastrare al extremităților deschiderii centrale a grinzii continue ($0 \leqslant \eta \leqslant 1$) ;

ξ — coeficientul de influență al mărimii distanței dintre punctul de aplicație al unei forțe și reazemul învecinat la grinda dublu încastrată :

$$K_n = \frac{P_n}{G}; \quad \lambda_c = \frac{P_c}{P_n}; \quad \lambda_m = \frac{P_m}{P_n}; \quad \lambda_{cm} = \frac{P_{cm}}{P_n}; \quad \lambda_u = \frac{P_u}{P_n}.$$

III. CRITERIUL LIMITEI DE CURGERE

Problema stabilirii unui criteriu suplimentar pentru calculul structurilor de oțel în domeniul plastic care să asigure rezistența acestora sub acțiunea încărcărilor de calcul, precum și comportarea lor normală în stadiul de exploatare, a fost tratată pentru prima dată de H. A. Sawyer, Jr.

Într-o lucrare publicată în 1958 [4], autorul menționat a arătat că la structurile cu un domeniu mare de comportare plastică flambajul local al elementelor datorită rotirilor excesive ale articulațiilor plastice poate fi preîntîmpinat prin limitarea gradului de redistribuție plastică a momentelor sub acțiunea încărcărilor de calcul.

Pentru realizarea acestei limitări pot fi elaborate criterii diferite. Dintre acestea însă *criteriul limitei de curgere*, enunțat de H. A. Sawyer, Jr., este cel mai indicat, deoarece este rațional din punctul de vedere al comportării structurilor sub acțiunea încărcărilor și este avantajos în ceea ce privește aplicarea lui practică.

Conform acestui criteriu, o structură calculată în domeniul plastic are capacitatea de a suporta încărcările de calcul fără manifestarea flambajului local, dacă, făcînd abstracție de existența eforturilor reziduale, materialul întregii structuri este solicitat în domeniul elastic de încărcările permanente și temporare normate pentru toate schemele posibile de încărcare. Cu alte cuvinte, criteriul limitei de curgere exprimă faptul că, la o structură solicitată de încărcările de exploatare, limita de curgere poate fi atinsă cel mult în fibra extremă a secțiunii celei mai solicitate.

Observație. Criteriul limitei de curgere a fost elaborat în cadrul metodei de calcul bazate pe admiterea unui coeficient unic de supraîncărcare de calcul, care afectează atît încărcările permanente normate, cît și încărcările temporare normate.

Criteriul limitei de curgere guvernează dimensionarea structurilor de oțel numai în cazurile în care dimensionarea acestora pe baza criteriului rezistenței maxime ar avea ca rezultat intrarea lor în domeniul plastic sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare normate.

Utilizarea în aceste cazuri a criteriului limitei de curgere conduce întotdeauna la formarea unui număr de articulații plastice sub acțiunea încărcărilor de calcul inferior celui necesar transformării structurilor în mecanisme. Cu alte cuvinte, sub acțiunea încărcărilor de calcul are loc o redistribuție parțială a momentelor.

Din cele de mai sus rezultă că la structurile a căror dimensionare este guvernată de criteriul limitei de curgere încărcările de calcul sînt întotdeauna mai mici decît încărcările corespunzătoare transformării acestor structuri în mecanisme.

Criteriul limitei de curgere a fost elaborat în următoarele condiții [4], [5]:

— toate încărcările, atît permanente, cît și temporare, cresc proporțional pentru fiecare schemă de încărcare;

— coeficientul de supraîncărcare de calcul este egal cu 1,85 pentru toate încărcările permanente și temporare;

— limita de curgere a oțelului este egală cu valoarea ei normată.

Condițiile în care se calculează structurile de oțel la starea limită de rezistență sînt însă următoarele:

— încărcările nu cresc proporțional;

— coeficienții de supraîncărcare sînt cuprinși în mod obișnuit între 1,1 și 1,4, în funcție de natura încărcărilor;

— limita de curgere a oțelului se consideră cu valoarea ei de calcul.

Întrucît cele două grupe de condiții prezentate mai sus diferă fundamental una de cealaltă, apare oportună verificarea valabilității și eficacității aplicării criteriului limitei de curgere la structurile al căror calcul plastic se face pe baza principiilor generale ale stării-limită de rezistență.

În acest scop, în cele ce urmează se studiază comportarea în domeniul plastic a două structuri simple, și anume:

— grinda încastrată perfect la ambele extremități, solicitată de două forțe concentrate egale, aplicate simetric în raport cu mijlocul grinzii, și

— grinda continuă pe patru reazeme, cu deschiderile marginale egale, solicitată de o forță concentrată aplicată în mijlocul deschiderii centrale.

Aceste două structuri reprezintă două cazuri tipice pentru problema ce se studiază, întrucît :

— prin modificarea poziției forțelor concentrate care solicită grinda dublu încastrată se obține un domeniu larg de variație a raportului dintre momentul elastic de pe unul dintre reazeme și momentul elastic din cîmp, care, teoretic, poate avea valori cuprinse între 1 și ∞. Pe lîngă aceasta, structura menționată permite să se examineze posibilitatea aplicării criteriului limitei de curgere în cazul în care forțele sînt aplicate în apropierea reazemelor ;

— prin modificarea raportului dintre mărimea deschiderilor marginale și mărimea deschiderii centrale ale grinzii continue pe patru reazeme se obține un domeniu larg de variație a raportului dintre momentul elastic de pe unul dintre reazemele intermediare și momentul elastic din mijlocul deschiderii centrale, care, teoretic, poate avea valori cuprinse între 0 și 1.

În acest mod, această structură permite să se examineze posibilitatea aplicării criteriului limitei de curgere la structurile ale căror grinzi au grade reduse de încastrare a extremităților sau, ceea ce este același lucru, la structurile cu deschideri disproporționate între ele ca mărime.

Pe baza rezultatelor acestui studiu se stabilesc concluzii referitoare la utilizarea criteriului limitei de curgere în calculul plastic al structurilor de oțel efectuat în conformitate cu principiile stării-limită de rezistență.

IV. IPOTEZE DE CALCUL

Studiul comportării celor două tipuri de grinzi prezentate anterior se efectuează în următoarele ipoteze :

1. Grinzile au secțiuni constante. La grinda continuă secțiunea este unică pentru toate deschiderile.

2. Încărcările permanente se consideră constante și egale cu valorile lor de calcul.

Această ipoteză este adoptată în calculul plastic al structurilor de oțel, efectuat pe baza principiilor stării-limită de rezistență indiferent de stadiul de solicitare, întrucît în numeroase cazuri valorile efective ale încărcărilor permanente depășesc valorile lor normate.

Pe de altă parte, verificarea comportării elastice în stadiul de exploatare prin admiterea valorilor de calcul ale încărcărilor permanente sporește siguranța realizării unei astfel de comportări, acoperind unele influențe secundare defavorabile care în mod obișnuit nu sînt luate în considerație în calcul.

3. Încărcările temporare se aplică static, ele putînd varia de la zero la valorile lor limită.

La ambele grinzi pentru încărcările temporare se consideră un coeficient de supraîncărcare de calcul $\lambda_u = 1{,}4$.

4. Grinzile sînt alcătuite din profile I laminate în România.

Ele se presupun rigidizate lateral împotriva flambajului lateral al tălpii comprimate.

5. Se neglijează influența eforturilor reziduale asupra procesului de plastificare a secțiunilor.

6. Limita de curgere a oțelului se ia cu valoarea ei de calcul.

V. GRINDA DUBLU ÎNCASTRATĂ

Schema grinzii și modul ei de solicitare sînt reprezentate în figura 1 *a*.

1. DISTRIBUȚIA MOMENTELOR ELASTICE

Momentele elastice în cîmp și pe reazeme au expresiile

$$M_a = \xi^2 (G + P) l, \tag{1}$$

$$M_b = \xi (1 - \xi) (G + P) l. \tag{2}$$

Raportul $\frac{M_b}{M_a}$ este reprezentat în figura 2, în funcție de parametrul ξ.

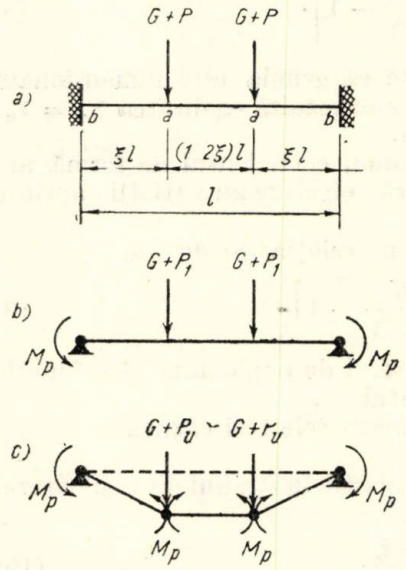


Fig. 1

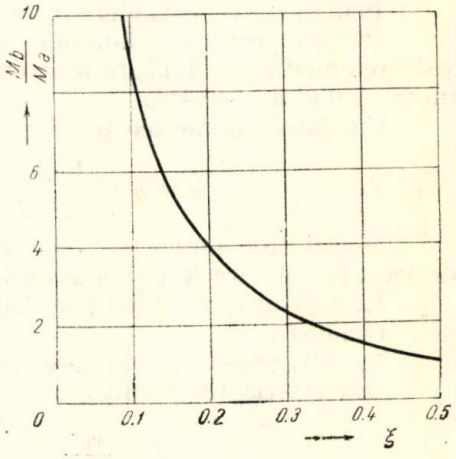


Fig. 2

2. COMPORTAREA GRINZII ÎN STADIUL DE EXPLOATARE

Pentru determinarea comportării grinzii în stadiul de exploatare se fac în prealabil următoarele observaţii :

— primele două articulaţii apar simultan pe reazeme întrucît raportul $\frac{M_b}{M_a}$ este întotdeauna supraunitar ;

— momentul de curgere şi momentul plastic se obţin din relaţia (2) prin înlocuirea încărcării arbitrare P cu încărcările P_c, respectiv P_1, rezultînd

$$M_c = \xi (1 - \xi) (G + P_c) l, \tag{3}$$

$$M_p = \xi (1 - \xi) (G + P_1) l ; \tag{4}$$

— din ecuaţia de echilibru plastic a grinzii se obţine următoarea expresie a momentului plastic :

$$M_p = \frac{\xi}{2} (G + P_m) l ; \tag{5}$$

— atît momentul de curgere, cît şi momentul plastic pot fi exprimate în funcţie de caracteristicile fizico-mecanice ale secţiunii grinzii, după cum urmează :

$$M_c = W_e R, \tag{6}$$

$$M_p = W_p R. \tag{7}$$

Ţinînd seama de relaţiile (3)—(7), pentru raportul $\frac{P_c}{P_n} = \lambda_c$ se obţine următoarea expresie

$$\lambda_c = \frac{1}{K_n} \left[\frac{1 + \lambda_m K_n}{2f (1 - \xi)} - 1 \right]. \tag{8}$$

În cadrul acestui paragraf se admite că grinda este dimensionată pe baza criteriului rezistenţei maxime. De aici rezultă egalitatea $\lambda_m = \lambda_u$.

Pentru λ_u se consideră valoarea 1,4.

Pentru profilele I laminate în România, coeficientul de formă are valoarea medie $f = 1{,}17$, faţă de care valorile efective au variaţii cuprinse între — 0,9 şi + 0,4%.

Cu datele numerice precizate mai sus, relaţia (8) devine

$$\lambda_c = \frac{1}{K_n} \left[\frac{1 + 1{,}4 K_n}{2{,}34 (1 - \xi)} - 1 \right]. \tag{9}$$

Modul de comportare a grinzii în stadiul de exploatare este funcţie de valorile pe care le poate avea coeficientul λ_c.

În legătură cu aceasta se disting următoarele trei cazuri.

Cazul 1 :

$\lambda_c > 1$, respectiv grinda se comportă elastic în stadiul de exploatare.

Din relaţia (9) rezultă

$$K_n > \frac{0{,}572 - \xi}{\xi - 0{,}402}. \tag{10}$$

Domeniul delimitat de inegalitatea (10), reprezentat în figura 3, este notat cu litera A.

Cazul 2:

$\frac{1}{K_n}\left[\frac{1+K_n}{1{,}17}-1\right] < \lambda_c \leqslant 1$, respectiv în stadiul de exploatare secțiunile de pe reazeme sînt parțial plastificate.

Limita superioară a lui λ_c corespunde stadiului în care secțiunile de pe reazeme sînt în domeniul elastic, cu excepția fibrelor extreme, în care se atinge limita de curgere de calcul.

Limita inferioară a lui λ_c corespunde stadiului în care secțiunile de pe reazeme sînt complet plastificate, respectiv în aceste secțiuni se formează articulații plastice.

Pentru λ_c cuprins între limitele de mai sus, din relația (9) se obține

$$\frac{0{,}5-\xi}{\xi-0{,}3} < K_n \leqslant \frac{0{,}572-\xi}{\xi-0{,}402}. \tag{11}$$

Domeniul delimitat de inegalitățile (11), reprezentat în figura 3, este notat cu litera B.

Cazul 3:

$\lambda_c \leqslant \frac{1}{K_n}\left[\frac{1+K_n}{1{,}17}-1\right]$, respectiv în secțiunile de pe reazeme se formează articulații plastice în stadiul de exploatare.

Pentru inegalitatea de mai sus, din relația (9) se obține

$$K_n \leqslant \frac{0{,}5-\xi}{\xi-0{,}3}. \tag{12}$$

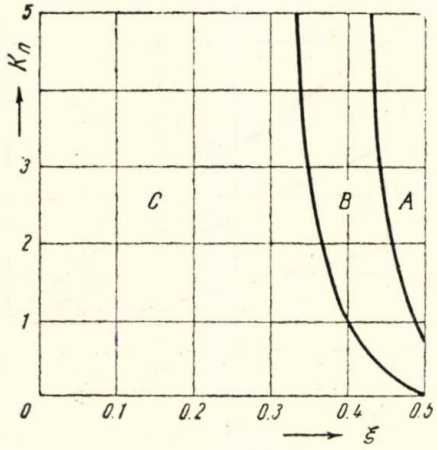


Fig. 3

Domeniul delimitat de inegalitatea (12), reprezentat în figura 3, este notat cu litera C.

Din examinarea diagramei reprezentate în figura 3 se deduc următoarele concluzii referitoare la comportarea grinzii în stadiul de exploatare:

1) pentru valori date ale coeficienților $\lambda_m = \lambda_u$ și f, modul de comportare a grinzii este funcție de distanța dintre punctele de aplicație a forțelor și de raportul dintre încărcarea temporară normată și încărcarea permanentă de calcul;

2) domeniile în care grinda se comportă elastic, respectiv în care secțiunile de pe reazeme sînt parțial plastificate, corespund unor variații suficient de mici ale distanței dintre punctele de aplicație a forțelor.

3) cel mai mare domeniu de variație a coeficienților K_n și ξ corespunde stadiului în care grinda lucrează cu articulații plastice în secțiunile de pe reazeme.

Acest domeniu cuprinde majoritatea valorilor uzuale ale celor doi coeficienți.

3. COEFICIENTUL DE SUPRAÎNCĂRCARE LIMITĂ CORESPUNZĂTOR CONDIȚIEI $\lambda_c \geqslant 1$

Pentru $P_c = P_n$, $P_m = P_{cm}$ și $f = 1{,}17$, din relațiile (3), (5), (6) și (7) rezultă

$$\lambda_{cm} = \frac{2{,}34\,(1 - \xi)\,(1 + K_n) - 1}{K_n}. \tag{13}$$

Relația (13) este valabilă atîta timp cît are loc inegalitatea $\lambda_{cm} > \lambda_u$.

Dacă această inegalitate nu este satisfăcută, calculul efectuat cu un coeficient $\lambda_m = \lambda_u$ asigură implicit satisfacerea condiției $\lambda_c > 1$.

Variația coeficientului λ_{cm} este dată în figura 4.

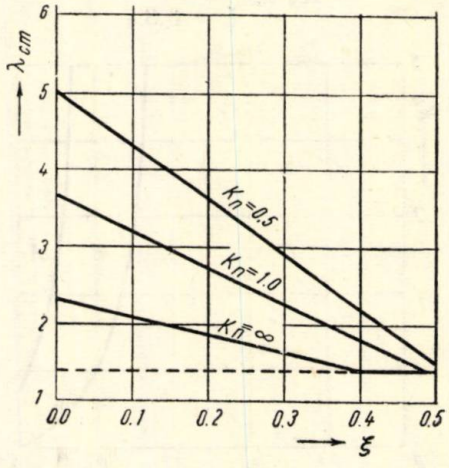


Fig. 4

Această diagramă arată că, pentru un domeniu foarte mare de variație a coeficientului ξ, criteriul limitei de curgere înlocuiește criteriul rezistenței maxime. Acest domeniu este cu atît mai mare și valorile coeficientului λ_{cm} sînt cu atît mai mari, cu cît coeficientul K_n este mai mic.

4. SĂGEATA GRINZII ÎN STADIUL DE EXPLOATARE

În cele ce urmează se determină săgeata produsă de încărcările de exploatare la mijlocul deschiderii grinzii reprezentate în figura 1, pentru următoarele cazuri de dimensionare :

Cazul 1 : grinda este dimensionată în domeniul elastic, respectiv sub acțiunea încărcărilor de calcul se atinge limita de curgere de calcul numai în fibra extremă a secțiunii celei mai solicitate ;

Cazul 2 : grinda este dimensionată în domeniul plastic pe baza criteriului rezistenței maxime, respectiv sub acțiunea încărcărilor de calcul grinda se transformă în mecanism ;

Cazul 3 : grinda este dimensionată în domeniul plastic astfel încît comportarea ei să fie elastică sub acțiunea încărcărilor de exploatare, iar încărcarea temporară limită să fie cel puțin egală cu încărcarea temporară de calcul.

Se fac următoarele notații suplimentare :

δ_{n1}, δ_{n2}, δ_{n3} — săgețile grinzii în mijlocul deschiderii, corespunzătoare cazurilor de dimensionare 1, 2 și 3 ;

I_1, I_2, I_3 — momentele de inerție ale grinzii corespunzătoare cazurilor de dimensionare 1, 2 și 3 ;

W_{p1}, W_{p2}, W_{p3} — modulele de rezistență plastice ale secțiunii grinzii corespunzătoare cazurilor de dimensionare 1, 2 și 3.

Admițînd o abatere de maximum $\pm 4\%$, între momentul de inerție și modulul de rezistență plastic ale profilelor *I* laminate în România există relația

$$I = W_p^{1,385}. \tag{14}$$

Cu precizările de mai sus, expresiile săgeții grinzii corespunzătoare celor trei cazuri de dimensionare sînt următoarele :

Cazul 1 :

$$\delta_{n1} = \frac{\xi^2 (3 - 4\xi)\ (G + P_n)\, l^3}{24\, EI_1}. \tag{15}$$

Cazul 2 :

$$\delta_{n2} = \frac{\xi^2 (3 - 4\xi)\ (G + P_n)\, l^3}{24\, EI_2} \tag{16}$$

pentru $P_1 > P_n$, adică $\xi > \dfrac{0{,}5 + 0{,}3\, K_n}{1 + K_n}$, respectiv

$$\delta_{n2} = \frac{\xi^2 (3 - 4\xi)\ (G + P_1)\, l^3}{24\, EI_2} + \frac{\xi (3 - 4\xi^2)\ (P_n - P_1)\, l^3}{24\, EI_2} \tag{17}$$

pentru $P_1 < P_n$, adică $\xi < \dfrac{0{,}5 + 0{,}3\, K_n}{1 + K_n}$.

Cazul 3:

$$\delta_{n3} = \frac{\xi^2 (3 - 4\xi)(G + P_n) l^3}{24 EI_3} \tag{18}$$

pentru $\lambda_{cm} > \lambda_u$, respectiv

$$\delta_{n3} = \delta_{n2} \tag{19}$$

pentru $\lambda_{cm} < \lambda_u$.

Considerînd δ_{n1} ca săgeată de referinţă, pentru rapoartele $\frac{\delta_{n2}}{\delta_{n1}}$ şi $\frac{\delta_{n3}}{\delta_{n1}}$ se obţin următoarele expresii:

$$\frac{\delta_{n2}}{\delta_{n1}} = \frac{I_1}{I_2} \tag{20}$$

pentru $P_1 > P_n$, respectiv

$$\frac{\delta_{n2}}{\delta_{n1}} = \left[\frac{G + P_1}{G + P_n} + \frac{3 - 4\xi^2}{3\xi - 4\xi^2} \cdot \frac{P_n - P_1}{G + P_n}\right] \cdot \frac{I_1}{I_2} \tag{21}$$

pentru $P_1 < P_n$;

$$\frac{\delta_{n3}}{\delta_{n1}} = \frac{I_1}{I_3} \tag{22}$$

pentru $\lambda_{cm} > \lambda_u$, respectiv

$$\frac{\delta_{n3}}{\delta_{n1}} = \frac{\delta_{n2}}{\delta_{n1}} \tag{23}$$

pentru $\lambda_{cm} < \lambda_u$.

În relaţiile (20)—(22) intervin rapoartele $\frac{I_1}{I_2}$ şi $\frac{I_1}{I_3}$ ale momentelor de inerţie corespunzătoare celor trei cazuri de dimensionare a grinzilor.

Folosind relaţia (14), pentru rapoartele de mai sus se obţin următoarele expresii:

$$\frac{I_1}{I_2} = \left[\frac{W_{p1}}{W_{p2}}\right]^{1,385} = [2{,}34\,(1 - \xi)]^{1,385}, \tag{24}$$

$$\frac{I_1}{I_3} = \left[\frac{W_{p1}}{W_{p3}}\right]^{1,385} = \left[\frac{1 + 1{,}4\,K_n}{1 + K_n}\right]^{1,385} \tag{25}$$

pentru $\lambda_{cm} > \lambda_u$, respectiv

$$\frac{I_1}{I_3} = \frac{I_1}{I_2} \tag{26}$$

pentru $\lambda_{cm} < \lambda_u$.

Relațiile (20)—(23) sînt reprezentate grafic în figura 5.

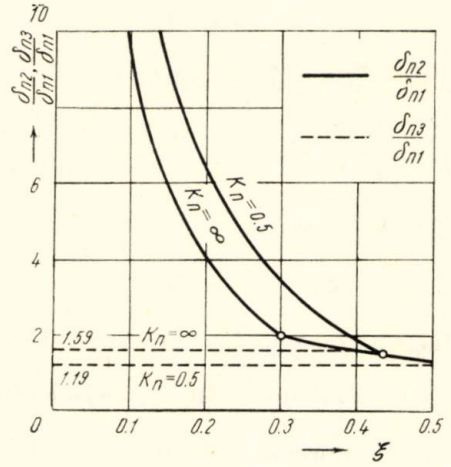


Fig. 5

Din această diagramă se deduc următoarele concluzii:

1. Raportul $\frac{\delta_{n2}}{\delta_{n1}}$ crește o dată cu scăderea valorilor coeficienților ξ și K_n. Pentru poziții ale încărcărilor apropiate de reazeme acest raport devine practic infinit de mare.

2. Pentru $\lambda_{cm} > \lambda_u$, raportul $\frac{\delta_{n3}}{\delta_{n1}}$ este independent de poziția încărcărilor pe grindă. Valoarea lui maximă, care corespunde unei încărcări permanente nule ($K_n = \infty$), este 1,59.

5. SĂGEATA GRINZII PRODUSĂ DE ÎNCĂRCĂRILE DE CALCUL

Determinarea săgeții produse de încărcările de calcul la mijlocul deschiderii grinzii se face pentru cele trei cazuri de dimensionare prezentate la începutul paragrafului precedent.

Fie δ_{u1}, δ_{u2} și δ_{u3} săgețile corespunzătoare acestor cazuri.

Se obțin următoarele rezultate:

Cazul 1:

$$\delta_{u1} = \frac{\xi^2(3-4\xi)(G+P_u)l^3}{24\,EI_1}. \tag{27}$$

Cazul 2:

$$\delta_{u2} = \frac{\xi^2(3-4\xi)(G+P_1)l^3}{24EI_2} + \frac{\xi(3-4\xi^2)(P_u-P_1)l^3}{24EI_2}. \tag{28}$$

Cazul 3:

$$\delta_{u3} = \frac{\xi^2(3-4\xi)(G+P_u)l^3}{24EI_3} \tag{29}$$

pentru $P_u \leqslant P_1$, adică $K_n \leqslant 0{,}74$, respectiv

$$\delta_{u3} = \frac{\xi^2(3-4\xi)(G+P_1)l^3}{24EI_3} + \frac{\xi(3-4\xi^2)(P_u-P_1)l^3}{24EI_3} \tag{30}$$

pentru $P_u > P_1$, adică $K_n > 0{,}74$.

Rapoartele $\frac{\delta_{u2}}{\delta_{u1}}$ și $\frac{\delta_{u3}}{\delta_{u1}}$ sînt reprezentate grafic în figura 6.

Din această diagramă se deduc următoarele concluzii:

1. Raportul $\frac{\delta_{u2}}{\delta_{u1}}$ este independent de coeficientul K_n.

Acest raport crește apreciabil o dată cu scăderea valorii parametrului ξ, devenind practic infinit de mare pentru poziții ale încărcărilor apropiate de reazeme.

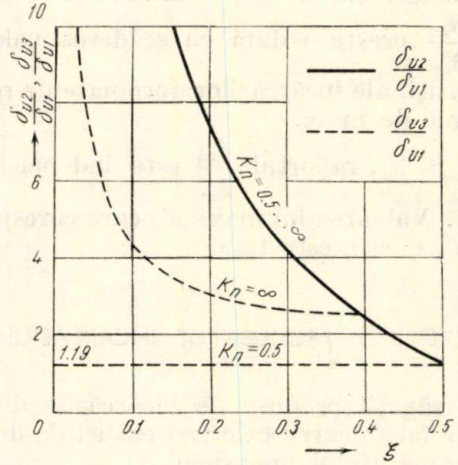


Fig. 6

2. Pentru $K_n \leqslant 0{,}74$, raportul $\frac{\delta_{u3}}{\delta_{u1}}$ este independent de parametrul ξ, valoarea lui maximă, corespunzătoare lui $K_n = 0{,}74$, fiind egală cu 1,24.

Pentru $K_n > 0{,}74$, raportul $\frac{\delta_{u3}}{\delta_{u1}}$ se mărește o dată cu scăderea parametrului ξ și cu creșterea coeficientului K_n, devenind practic infinit de mare pentru valori ale parametrului ξ inferioare valorii 0,05.

6. ROTIRILE ARTICULAȚIILOR PLASTICE

În cele ce urmează se determină rotirile articulațiilor plastice de pe reazemele grinzii sub acțiunea încărcărilor de calcul, pentru cazurile de dimensionare 2 și 3 prezentate la începutul paragrafului 4.

Fie θ_{u2} și θ_{u3} rotirile fiecărei articulații plastice, corespunzătoare acestor două cazuri.

Aceste rotiri au expresiile :

$$\theta_{u2} = \frac{\xi(1 - \xi)(P_u - P_1)l^2}{2EI_2} \tag{31}$$

respectiv

$$\theta_{u3} = \frac{\xi(1 - \xi)(P_u - P_1)l^2}{2EI_3}. \tag{32}$$

Relația (32) este valabilă numai pentru $P_u > P_1$, respectiv pentru $K_n > 0{,}74$.

Pentru $K_n \leqslant 0{,}74$, $\theta_{u3} = 0$.

Variația raportului $\frac{\theta_{u3}}{\theta_{u2}}$ este dată în figura 7.

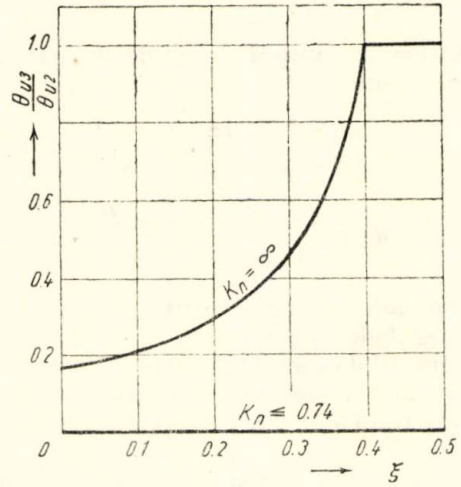


Fig. 7

Din această diagramă rezultă că rotirea θ_{u3} este mai mică decît rotirea θ_{u2} cu atît mai mult, cu cît coeficienții ξ și K_n au valori mai reduse.

VI. GRINDA CONTINUĂ

Schema grinzii şi modul ei de solicitare sînt reprezentate în figura 8*a*.

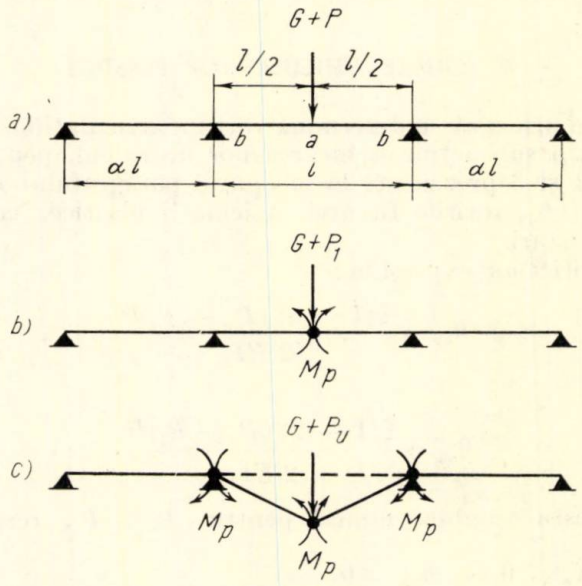


Fig. 8

1. DISTRIBUŢIA MOMENTELOR ELASTICE

Momentele elastice în cîmpul deschiderii centrale şi pe reazemele intermediare au expresiile

$$M_a = \frac{3 + 4\alpha}{3 + 2\alpha} \cdot \frac{(G + P)l}{8}, \tag{33}$$

$$M_b = \frac{3}{3 + 2\alpha} \cdot \frac{(G + P)l}{8}. \tag{34}$$

Deschiderea centrală a grinzii continue se comportă ca o grindă încastrată elastic la ambele extremităţi.

Prin definiţie, gradul de încastrare elastică a unei grinzi este raportul dintre momentul încovoietor efectiv din încastrare şi momentul de încastrare perfectă, ambele fiind determinate pentru aceleaşi valori ale încărcărilor.

Pentru grinda continuă considerată, fie η gradul de încastrare elastică a extremităţilor deschiderii centrale.

Coeficientul η are expresia

$$\eta = \frac{3}{3 + 2\alpha}, \tag{35}$$

din care rezultă

$$\alpha = \frac{3(1 - \eta)}{2\eta}. \tag{36}$$

Făcînd această înlocuire în relațiile (33) și (34), se obține

$$M_a = \frac{(2 - \eta)(G + P)l}{8}, \tag{37}$$

și

$$M_b = \frac{\eta(G + P)l}{8}. \tag{38}$$

Raportul $\frac{M_b}{M_a}$ este reprezentat în figura 9 în funcție de coeficientul η.

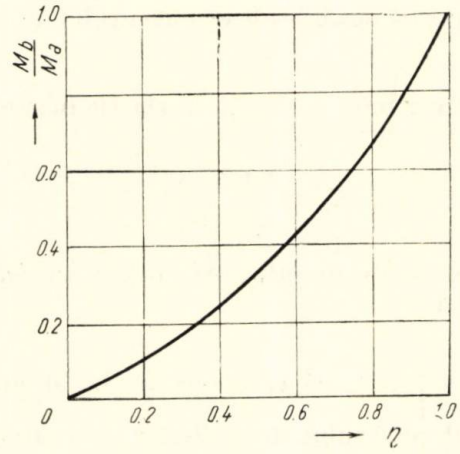


Fig. 9

2. COMPORTAREA GRINZII ÎN STADIUL DE EXPLOATARE

Modul de comportare a grinzii în stadiul de exploatare este funcție de valoarea coeficientului λ_c.

Pentru stabilirea expresiei acestui coeficient se fac în prealabil următoarele observații:

— prima articulație apare în cîmpul deschiderii centrale, în dreptul punctului de aplicație a încărcărilor permanentă și temporară (fig. 8*b* și 9);

— momentul de curgere și momentul plastic ale grinzii se obțin din relația (37) prin înlocuirea încărcării arbitrare P cu încărcările P_c, respectiv P_1, rezultînd

$$M_c = \frac{(2 - \eta)(G + P_c)l}{8}, \tag{39}$$

și

$$M_p = \frac{(2 - \eta)(G + P_1)l}{8}; \tag{40}$$

— din ecuația de echilibru plastic a deschiderii centrale a grinzii se obține următoarea expresie a momentului plastic :

$$M_p = \frac{(G + P_m)l}{8}; \tag{41}$$

— momentul de curgere și momentul plastic exprimate în funcție de caracteristicile fizico-mecanice ale secțiunii grinzii sînt date de relațiile (6) și (7).

Ținînd seama de relațiile (6), (7), (39)—(41) și de valorile $\lambda_m = \lambda_u = 1{,}4$ și $f = 1{,}17$, se obține pentru coeficientul λ_c următoarea expresie :

$$\lambda_c = \frac{1}{K_n}\left[\frac{1 + 1{,}4\,K_n}{1{,}17\,(2-\eta)} - 1\right]. \tag{42}$$

În funcție de valorile posibile ale coeficientului λ_c se disting următoarele trei cazuri :

Cazul 1 :

$\lambda_c > 1$, respectiv grinda se comportă elastic în stadiul de exploatare. Din relația (42) rezultă

$$K_n > \frac{1{,}15 - \eta}{\eta - 0{,}8}. \tag{43}$$

Domeniul delimitat de inegalitatea (43), reprezentat în figura 10, este notat cu litera *A*.

Cazul 2 :

$\frac{1}{K_n}\left[\frac{1 + K_n}{1{,}17} - 1\right] < \lambda_c \leqslant 1$, respectiv în stadiul de exploatare secțiunea din dreptul punctului de aplicație a încărcărilor este parțial plastificată.

Limita superioară a lui λ_c corespunde stadiului în care secțiunea din dreptul încărcărilor este în domeniul elastic, cu excepția fibrelor extreme în care se atinge limita de curgere de calcul.

Limita inferioară a lui λ_c corespunde stadiului în care secțiunea din dreptul încărcărilor este complet plastificată, respectiv în această secțiune se formează o articulație plastică.

Pentru λ_c cuprins între limitele de mai sus, din relația (42) se obține

$$\frac{1 - \eta}{\eta - 0{,}6} < K_n \leqslant \frac{1{,}15 - \eta}{\eta - 0{,}8}. \tag{44}$$

Domeniul delimitat de inegalitățile (44), reprezentat în figura 10, este notat cu litera *B*.

Cazul 3 :

$\lambda_c \leqslant \frac{1}{K_n}\left[\frac{1 + K_n}{1{,}17} - 1\right]$, respectiv în secțiunea din dreptul punctului de aplicație a încărcărilor se formează o articulație plastică în stadiul de exploatare.

Pentru inegalitatea de mai sus, din relația (42) se obține

$$K_n \leqslant \frac{1-\eta}{\eta - 0{,}6}. \tag{45}$$

Domeniul delimitat de inegalitatea (45), reprezentat în figura 10, este notat cu litera C.

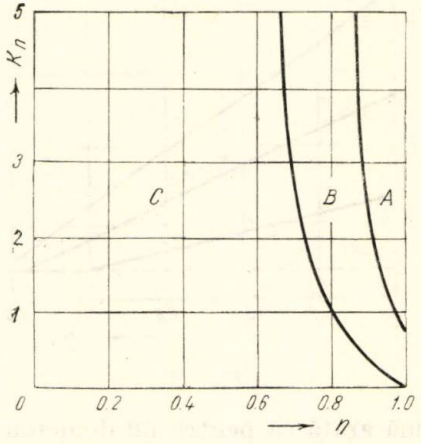


Fig. 10

Din examinarea diagramei reprezentate în figura 10 se deduc următoarele concluzii referitoare la comportarea grinzii în stadiul de exploatare :

1) pentru valori date ale coeficienților $\lambda_m = \lambda_u$ și f, modul de comportare a grinzii este funcție de gradul de încastrare al deschiderii centrale și de raportul dintre încărcarea temporară normată și încărcarea permanentă de calcul ;

2) domeniile în care grinda se comportă elastic, respectiv în care secțiunea din dreptul încărcărilor este parțial plastificată, corespund unor variații suficient de mici ale valorii gradului de încastrare a deschiderii centrale ;

3) cel mai mare domeniu de variație a gradului de încastrare corespunde stadiului în care grinda lucrează cu o articulație plastică în secțiunea din dreptul punctului de aplicație a încărcărilor.

Acest domeniu cuprinde majoritatea valorilor uzuale ale coeficienților K_n și η.

3. COEFICIENTUL DE SUPRAÎNCĂRCARE LIMITĂ CORESPUNZĂTOR CONDIȚIEI $\lambda_c \geqslant 1$

Pentru $P_c = P_n$, $P_m = P_{cm}$ și $f = 1{,}17$, din relațiile (6), (7), (39) și (41) rezultă

$$\lambda_{cm} = \frac{1{,}17\,(2-\eta)\,(1+K_n) - 1}{K_n}. \tag{46}$$

Relația (46) este valabilă atîta timp cît are loc inegalitatea $\lambda_{cm} > \lambda_u$.

Dacă această inegalitate nu este satisfăcută, calculul efectuat cu un coeficient $\lambda_m = \lambda_u$ asigură implicit satisfacerea condiției $\lambda_c > 1$.

Variația coeficientului λ_{cm} este dată în figura 11.

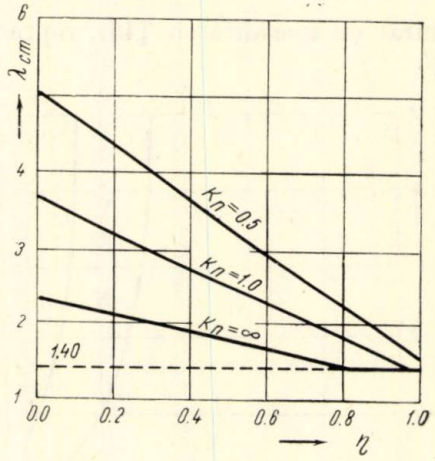


Fig. 11

Această diagramă arată că pentru un domeniu foarte mare de variație a gradului de încastrare η criteriul limitei de curgere înlocuiește criteriul rezistenței maxime. Acest domeniu este cu atît mai mare și valorile coeficientului λ_{cm} sînt cu atît mai mari, cu cît coeficientul K_n este mai mic.

4. SĂGEATA GRINZII ÎN STADIUL DE EXPLOATARE

În cele ce urmează se determină săgeata produsă de încărcările de exploatare la mijlocul deschiderii centrale a grinzii reprezentate în figura 8 pentru cele trei cazuri de dimensionare prezentate la pct. 4 al cap. V.

Folosind notațiile suplimentare făcute la punctul amintit, expresiile săgeții grinzii corespunzătoare celor trei cazuri de dimensionare sînt următoarele :

Cazul 1 :

$$\delta_{n1} = \frac{(4 - 3\eta)(G + P_n) l^3}{192\, EI_1} \tag{47}$$

Cazul 2 :

$$\delta_{n2} = \frac{(4 - 3\eta)(G + P_n) l^3}{192\, EI_2} \tag{48}$$

pentru $P_1 > P_n$, adică $\eta > \dfrac{1 + 0{,}6 K_n}{1 + K_n}$, respectiv

$$\delta_{n2} = \frac{(4-3\eta)(G + P_1) l^3}{192\, EI_2} + \frac{(3-2n)(P_n - P_1) l^3}{48\, EI_2} \tag{49}$$

pentru $P_1 < P_n$, adică $\eta < \dfrac{1 + 0{,}6 K_n}{1 + K_n}$.

Cazul 3:

$$\delta_{n3} = \frac{(4 - 3\eta)(G + P_n)l^3}{192\, EI_3} \tag{50}$$

pentru $\lambda_{cm} > \lambda_u$, respectiv

$$\delta_{n3} = \delta_{n2} \tag{51}$$

pentru $\lambda_{cm} < \lambda_u$.

Considerînd δ_{n1} ca săgeată de referință, pentru rapoartele $\frac{\delta_{n2}}{\delta_{n1}}$ și $\frac{\delta_{n3}}{\delta_{n1}}$ se obțin următoarele expresii:

$$\frac{\delta_{n2}}{\delta_{n1}} = \frac{I_1}{I_2} \tag{52}$$

pentru $P_1 > P_n$, respectiv

$$\frac{\delta_{n2}}{\delta_{n1}} = \left[\frac{G + P_1}{G + P_n} + \frac{4\,(3 - 2\eta)}{\eta\,(4 - 3\,\eta)} \cdot \frac{P_n - P_1}{G + P_n}\right] \cdot \frac{I_1}{I_2} \tag{53}$$

pentru $P_1 < P_n$.

$$\frac{\delta_{n3}}{\delta_{n1}} = \frac{I_1}{I_3} \tag{54}$$

pentru $\lambda_{cm} > \lambda_u$, respectiv

$$\frac{\delta_{n3}}{\delta_{n1}} = \frac{\delta_{n2}}{\delta_{n1}} \tag{55}$$

pentru $\lambda_{cm} < \lambda_u$.

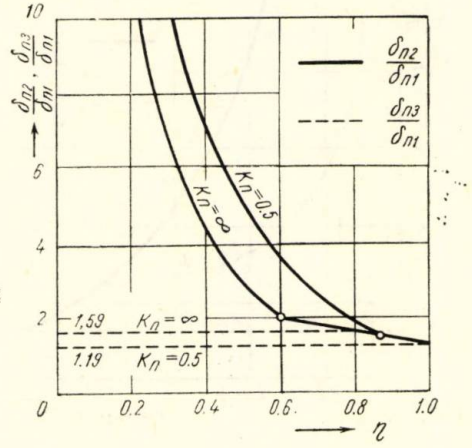


Fig. 12

Rapoartele $\frac{I_1}{I_2}$ și $\frac{I_1}{I_3}$ sînt date de relațiile (24) și (25).

Relațiile (52)—(55) sînt reprezentate grafic în figura 12.

Din această diagramă se deduc următoarele concluzii:

1) raportul $\frac{\delta_{n2}}{\delta_{n1}}$ crește o dată cu scăderea coeficienților η și K_n; pentru valori ale gradului de încastrare mai mici decît 0,3, acest raport devine practic infinit de mare;

2) pentru $\lambda_{cm} > \lambda_u$, raportul $\frac{\delta_{n3}}{\delta_{n1}}$ este independent de gradul de încastrare.

Valoarea lui maximă, care corespunde unei încărcări permanente nule ($K_n = \infty$), este 1,59.

5. SĂGEATA GRINZII PRODUSĂ DE ÎNCĂRCĂRILE DE CALCUL

Determinarea săgeții produse de încărcările de calcul la mijlocul deschiderii centrale a grinzii se face pentru cele trei cazuri de dimensionare prezentate la pct. 4 al cap. V.

Fie δ_{u1}, δ_{u2} și δ_{u3} săgețile corespunzătoare acestor cazuri.

Se obțin următoarele rezultate:

Cazul 1:

$$\delta_{u1} = \frac{(4 - 3\eta)(G + P_u) l^3}{192\, EI_1}. \tag{56}$$

Cazul 2:

$$\delta_{u2} = \frac{(4 - 3\eta)(G + P_1) l^3}{192\, EI_2} + \frac{(3 - 2\eta)(P_u - P_1) l^3}{48\eta\, EI_2}. \tag{57}$$

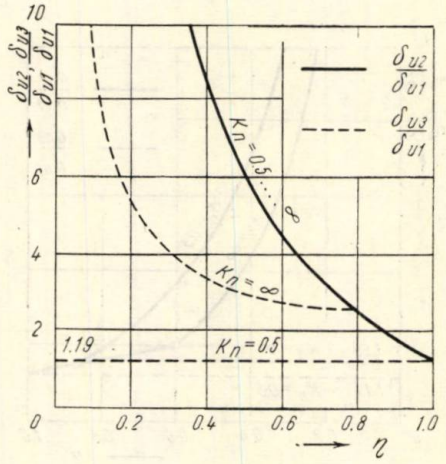


Fig. 13

Cazul 3:

$$\delta_{u3} = \frac{(4 - 3\eta)(G + P_u) l^3}{192\, EI_3} \tag{58}$$

pentru $P_u \leqslant P_1$, adică $K_n \leqslant 0{,}74$, respectiv

$$\delta_{u3} = \frac{(4 - 3\eta)(G + P_1) l^3}{192\, EI_3} + \frac{(3 - 2\eta)(P_u - P_1) l^3}{48\eta\, EI_3} \tag{59}$$

pentru $P_u > P_1$, adică $K_n > 0{,}74$.

Rapoartele $\frac{\delta_{u2}}{\delta_{u1}}$ și $\frac{\delta_{u3}}{\delta_{u1}}$ sînt reprezentate grafic în figura 13.

Din această diagramă se deduc următoarele concluzii:

1. Raportul $\frac{\delta_{u2}}{\delta_{u1}}$ este independent de coeficientul K_n.

Acest raport crește apreciabil o dată cu scăderea gradului de încastrare η, devenind practic infinit de mare pentru valori ale lui η mai mici decît 0,4.

2. Pentru $K_n \leqslant 0{,}74$, raportul $\frac{\delta_{u3}}{\delta_{u1}}$ este independent de parametrul η, valoarea lui maximă, corespunzătoare lui $K_n = 0{,}74$, fiind egală cu 1,24.

Pentru $K_n > 0{,}74$, raportul $\frac{\delta_{u3}}{\delta_{u1}}$ se mărește o dată cu scăderea parametrului η și cu creșterea coeficientului K_n, devenind practic infinit de mare pentru grade de încastrare mai mici decît 0,1.

6. ROTIRILE ARTICULAȚIEI PLASTICE

În cele ce urmează se determină rotirile articulației plastice corespunzătoare secțiunii critice din cîmpul central pentru cazurile de dimensionare prezentate la pct. 4 al cap. V.

Fie θ_{u2} și θ_{u3} rotirile articulației plastice corespunzătoare acestor două cazuri.

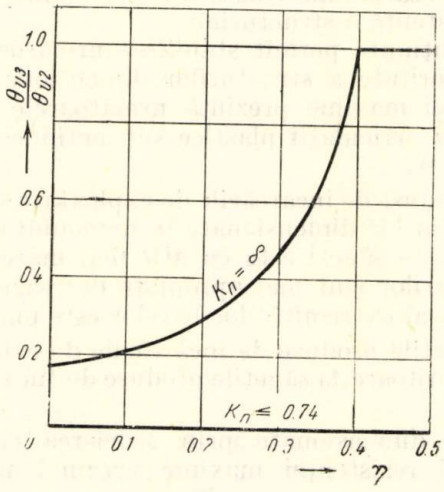


Fig. 14

Aceste rotiri au expresiile

$$\theta_{u2} = \frac{(2 - \eta)(P_u - P_1) l^2}{8 EI_2}, \tag{60}$$

respectiv

$$\theta_{u3} = \frac{(2 - \eta)(P_u - P_1) l^2}{8 EI_3}. \tag{61}$$

Relaţia (61) este valabilă numai pentru $P_u > P_1$, respectiv pentru $K_n > 0{,}74$.

Pentru $K_n \leqslant 0{,}74$, $\theta_{u3} = 0$.

Variaţia raportului $\frac{\theta_{u3}}{\theta_{u2}}$ este dată în figura 14.

Din această diagramă rezultă că rotirea θ_{u3} este mai mică decît rotirea θ_{u2} cu atît mai mult, cu cît coeficienţii η şi K_n au valori mai reduse.

VII. CONCLUZII

În cadrul acestui studiu s-a examinat comportarea sub acţiunea încărcărilor a două structuri simple de oţel, reprezentînd cazuri tipice din punctul de vedere al poziţiei punctelor de aplicaţie a forţelor şi al valorii gradului de încastrare a extremităţilor barelor.

Au fost considerate două cazuri de dimensionare în domeniul plastic, şi anume :

— dimensionarea bazată pe criteriul rezistenţei maxime,

— dimensionarea bazată pe asocierea criteriului limitei de curgere la criteriul rezistenţei maxime.

Aprecierea rezultatelor obţinute s-a făcut prin compararea lor cu cele corespunzătoare dimensionării în domeniul elastic.

Punctul de plecare l-au constituit principiile generale ale teoriei stării-limită de rezistenţă a structurilor.

Rezultatele obţinute permit stabilirea următoarelor concluzii :

1. Marea majoritate a structurilor dimensionate exclusiv pe baza criteriului rezistenţei maxime prezintă următoarele caracteristici :

— lucrează cu articulaţii plastice sub acţiunea încărcărilor de exploatare (fig. 3 şi 10) ;

— săgeţile produse de încărcările de exploatare sînt cu mult mai mari decît cele ale structurilor dimensionate în domeniul elastic (fig. 5 şi 12) ; diferenţa dintre aceste săgeţi este cu atît mai mare, cu cît punctele de aplicaţie ale încărcărilor sînt mai apropiate de reazeme (fig. 5) şi cu cît gradul de încastrare al extremităţilor barelor este mai mic (fig. 12) ;

— pentru săgeţile produse de încărcările de calcul, constatările sînt identice cu cele referitoare la săgeţile produse de încărcările de exploatare (fig. 6 şi 13).

2. Structurile dimensionate prin asocierea criteriului limitei de curgere la criteriul rezistenţei maxime prezintă următoarele caracteristici :

— sînt situate în întregime în domeniul elastic sub acțiunea încărcărilor de exploatare;

— săgețile produse de încărcările de exploatare sînt foarte apropiate de cele ale structurilor dimensionate în domeniul elastic. Pentru structurile examinate, diferența dintre aceste săgeți a variat între 19 și 59 % (fig. 5 și 12). În general, raportul acestor săgeți este independent de punctele de aplicație ale încărcărilor (fig. 5) și de gradul de încastrare al extremităților barelor (fig. 12);

— pentru valori uzuale ale coeficienților ξ și η ($\xi \geqslant 0{,}1$, respectiv $\eta \geqslant 0{,}2$), săgețile produse de încărcările de calcul sînt de cel mult 5 ori mai mari decît cele ale structurilor dimensionate în domeniul elastic (fig. 6 și 13).

Cu ajutorul diagramelor din figurile 6 și 13 se poate deduce cu ușurință că, pentru valori ale coeficienților ξ și η care satifac condițiile $\xi \geqslant 0{,}1$ și $\eta \geqslant 0{,}2$, săgețile produse de încărcările de calcul nu depășesc valoarea $\frac{l}{50}$.

Această concluzie prezintă o importanță deosebită, întrucît $\frac{l}{50}$ reprezintă o valoare-limită a săgeții pînă la care flambajul local poate fi evitat prin măsuri obișnuite [3].

3. La structurile dimensionate prin asocierea criteriului limitei de curgere la criteriul rezistenței maxime, rotirile articulațiilor plastice produse de încărcările de calcul sînt în general mult mai mici decît cele ce se obțin la structurile dimensionate exclusiv pe baza criteriului rezistenței maxime (fig. 7 și 14).

4. Concluziile de mai sus au fost stabilite pe baza studiului comportării în domeniul plastic a două tipuri caracteristice de grinzi static nedeterminate cu secțiunea constantă, solicitate de încărcări aplicate static.

Ele au însă un caracter mai general, fiind valabile pentru toate tipurile de structuri plane alcătuite din bare, care posedă următoarele caracteristici:

— cedarea lor plastică se produce datorită formării unuia sau a mai multor mecanisme de grindă;

— barele au secțiuni constante sau variabile;

— încovoierea reprezintă solicitarea principală a barelor;

— solicitările sînt provocate exclusiv de încărcări permanente și de încărcări temporare cu acțiune îndelungată sau de scurtă durată, aplicate static. În categoria încărcărilor de scurtă durată aplicate static se include și acțiunea vîntului [4].

De asemenea, concluziile din cadrul acestui studiu pot fi extinse și la structurile plane a căror cedare plastică are loc prin formarea unui mecanism de etaj sau a unui mecanism de grindă-etaj, cu observația că pentru unele dintre aceste structuri este necesară o verificare a deplasărilor laterale în stadiul de formare a mecanismelor de cedare plastică.

5. Rezultatele obținute justifică necesitatea extinderii criteriului limitei de curgere la structurile calculate în domeniul plastic pe baza concepției stărilor-limită.

Acest criteriu reprezintă o bază rațională pentru dezvoltarea unei teorii a calculului plastic al structurilor de oțel, întrucît asigură acestora:

— condiţii normale de exploatare;

— posibilitatea preîntîmpinării prin măsuri obişnuite a flambajului local înainte ca încărcările temporare să atingă valorile lor de calcul;

— deformaţii suficient de mici atît în stadiul de exploatare cît şi sub acţiunea încărcărilor de calcul;

— eliminarea posibilităţii ruperii progresive prin acumularea succesivă de deformaţii plastice la structurile solicitate de încărcări care pot avea două direcţii de acţiune opuse între ele.

6. Studiul efectuat a pus în evidenţă faptul că asocierea calculului elastic la teoria plastică simplă reprezintă una dintre condiţiile principale pentru obţinerea unei dimensionări corecte şi sigure a structurilor de oţel.

7. Rezultatele prezentate în cadrul acestui studiu au fost obţinute în ipoteza absenţei eforturilor reziduale.

În cazurile în care structurile posedă astfel de eforturi, criteriul limitei de curgere îşi păstrează în întregime valabilitatea, rolul lui fiind de astă dată de a limita deformaţiile plastice sub acţiunea încărcărilor de exploatare.

În ceea ce priveşte comportarea structurilor cu eforturi reziduale sub acţiunea încărcărilor de calcul, rolul criteriului limitei de curgere este analog celui corespunzător structurilor lipsite de eforturi reziduale.

Primită la redacţie la 17 decembrie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. J. F. Baker, M. R. Horne, J. Heyman, *The Steel Skeleton*, vol. II, Cambridge University Press, 1956.
2. L. S. Beedle, *Plastic design of steel frames*, New York, John Wiley & Sons, 1958.
3. Ch. Massonnet, M. Save, *Calcul plastique des constructions*, vol. I, Bruxelles, C.B.L.I.A. 1961.
4. H. A. Sawyer, Jr., *An elastic criterion for plastic design*, Journal of the Structural Division, Proceedings ASCE, 84, ST2 (1958).
5. *** *Commentary on plastic design in steel*: *Basic concepts*, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings ASCE, 85, EM3, (1959).
6. *** *Normativ condiţional pentru calculul construcţiilor la stări-limită*, vol. I, Bucureşti, Edit. tehnică, 1963.

ASUPRA CALCULULUI SFERTULUI DE SPAȚIU ELASTIC[1])

de P. P. TEODORESCU
Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România

539.3

Folosind o metodă generală de rezolvare a problemei tridimensionale a teoriei elasticității dată anterior, se determină starea de tensiune și starea de deformație în interiorul sfertului de spațiu elastic $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, acționat de sarcini normale periodice sau locale pe planele de separație. Din punct de vedere matematic, rezolvarea problemei se reduce la integrarea unui sistem de două ecuații integrale de tip Fredholm de speța a doua, pentru care se întreprinde un studiu. Rezultate analoge se obțin și în cazul sarcinilor tangențiale, ca și în cazul unor forțe masice oarecare. Prin particularizare se ajunge la rezultatele corespunzînd semispațiului elastic.

1. *Introducere.* Problema calculului stării de tensiune și a stării de deformație în regiunea unui unghi solid elastic oarecare a fost foarte puțin studiată pînă în prezent. După cunoștința noastră s-au dat rezultate numai în cazul plan (stare de tensiune plană și stare de deformație plană) pentru pana elastică finită și mai ales infinită [2]); cazul spațial (pana elastică infinită limitată de trei plane oarecare) a fost considerat de noi în [11], [12], [13].

În cele ce urmează vom studia o asemenea problemă, adică cazul unui unghi solid elastic infinit, limitat de două plane oarecare. În particular, fără a pierde generalitatea, ne putem mărgini la cazul planelor de separație ortogonale (adică la cazul sfertului de spațiu elastic), care poate fi studiat în coordonate carteziene ortogonale. Pentru cazul general se pot folosi coordonate carteziene oblice, studiul făcîndu-se în mod analog.

Se obține sfertul de spațiu elastic, aruncîndu-se la infinit patru fețe adiacente ale unui paralelipiped elastic. Rezultatele obținute pot fi

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. -Mécanique appliquée", **11**, 5 (1966) (în limba franceză).

[2]) Pentru literatura în această direcție se pot consulta lucrările [8], [9], [10].

folosite, de asemenea, pentru studiul efectului local (efect de colţ) în regiunea de reazem a unei grinzi. Cîteva rezultate în această direcţie au fost date în [14], [15].

Pentru a rezolva problema vom folosi formularea în tensiuni a problemei tridimensionale a teoriei elasticităţii, pe care am dat-o în [3], [4]; această rezolvare în tensiuni este convenabilă pentru prima problemă fundamentală a teoriei elasticităţii (condiţii în tensiuni pe contur), pe care o vom considera în cele ce urmează. Funcţiile de tensiune care dau soluţia problemei fac parte dintr-o familie de asemenea funcţii, corespunzînd domeniilor infinite obţinute din paralelipipedul elastic prin aruncarea la infinit a uneia sau a mai multora din feţele sale, după cum s-a sugerat în [7].

2. *Formularea în tensiuni a problemei tridimensionale a teoriei elasticităţii.* Starea de tensiune spaţială în interiorul unui corp elastic, omogen şi izotrop, în absenţa forţelor masice, se poate exprima sub forma [3])

$$\sigma_x = \Delta F_x - \frac{3m}{2m+1}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{3m}{2m+1}\,\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(F_{xy} - F_{zx}) + \varphi_x, \tag{1'}$$

starea de deformaţie fiind dată de

$$\begin{aligned} &\frac{mE}{m+1}[u - (-y\omega_z^0 + z\omega_y^0 + u_0)] = \\ &= \Delta\int\left(F_x - \frac{3m}{2m+1}F\right)dx - \frac{3m}{2m+1}\,\frac{\partial F}{\partial x} + 2\overline{F}_{yz} + f_{yz}, \end{aligned} \tag{2}$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinală, $m \geqslant 2$ este numărul lui Poisson corespunzător contracţiei transversale, funcţiile de tensiune $F_x = F_x(x, y, z)$, $F_y = F_y(x, y, z)$, $F_z = F_z(x, y, z)$ sînt funcţii biarmonice

$$\Delta\Delta F_x = \Delta\Delta F_y = \Delta\Delta F_z = 0, \tag{3}$$

funcţiile $F_{yz} = F_{yz}(y, z)$, $F_{zx} = F_{zx}(z, x)$, $F_{xy} = F_{xy}(x, y,)$, $\varphi_x = \varphi_x(x, y, z)$, $\varphi_y = \varphi_y(x, y, z)$, $\varphi_z = \varphi_z(x, y, z)$ sînt armonice

$$\Delta F_{yz} = \Delta F_{zx} = \Delta F_{xy} = 0, \tag{4}$$

$$\Delta\varphi_x = \Delta\varphi_y = \Delta\varphi_z = 0, \tag{4'}$$

funcţiile $\overline{F}_{yz} = \overline{F}_{yz}(y, z)$, $\overline{F}_{zx} = \overline{F}_{zx}(z, x)$, $\overline{F}_{xy} = \overline{F}_{xy}(x, y)$ sînt conjugatele armonice ale funcţiilor corespunzătoare de mai sus şi unde s-a introdus notaţia

$$F = \frac{1}{3}(F_x + F_y + F_z). \tag{5}$$

[3]) La acest punct celelalte formule se obţin prin permutări circulare.

Funcțiile φ_x, φ_y, φ_z trebuie să fie integrale particulare ale sistemului de ecuații cu derivate parțiale

$$\frac{\partial \varphi_y}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\Delta\left(F_x - \frac{3m}{2m+1}F\right). \tag{6}$$

Se pot alege ca integrale particulare funcțiile armonice

$$\varphi_x = \frac{3}{2(2m+1)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iint \Delta F\, dy\, dz + \frac{1}{2}\Delta\left(\int\frac{\partial Fy}{\partial z}dy + \int\frac{\partial F_z}{\partial y}dz\right), \tag{7}$$

având grijă ca funcțiile arbitrare care intervin datorită integrării nedefinite să fie determinate astfel ca sistemul (6) să fie verificat. Aceste funcții pot fi luate egale cu zero dacă funcțiile F_x, F_y, F_z se construiesc după formula lui E. Almansi [1], cu ajutorul a șase funcții armonice de forma

$$e^{\alpha x+\beta y+\gamma z} \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma = \text{const}), \tag{8}$$

unde

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0. \tag{8'}$$

Funcțiile $f_{yz} = f_{yz}(y, z)$, $f_{zx} = f_{zx}(z, x)$, $f_{xy} = f_{xy}(x, y)$ sînt integrale particulare ale sistemului de ecuații cu variabile separate

$$\frac{\partial f_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{zx}}{\partial z} = \frac{3}{2m+1}\left(\int\frac{\partial F}{\partial z}dy + \int\frac{\partial F}{\partial y}dz + \iint\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dy\, dz\right), \tag{9}$$

iar constantele u_0, v_0, w_0, ω_x^0, ω_y^0, ω_z^0 sînt deplasările, respectiv rotirile corpului considerat ca un rigid, fiind determinate de condițiile de fixitate în spațiu. Funcțiile f_{yz}, f_{zx}, f_{xy} pot fi luate egale cu zero în cazul funcțiilor armonice (8), (8').

Condițiile la limită se pun sub forma

$$p_{nx} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy}\cos(n, y) + \tau_{zx}\cos(n, z), \tag{10}$$

unde (p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}) este intensitatea încărcării pe elementul de frontieră de normală exterioară $\vec{n}$.

3. *Sfertul de spațiu elastic acționat de o sarcină periodică.* Fie întîi sfertul de spațiu elastic $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, acționat de o sarcină normală periodică pe două direcții $p_y(z, x)$ pe fața $y = 0$. Pentru a fixa ideile să admitem o simetrie în raport cu axa Ox și să reprezentăm acest caz de încărcare cu ajutorul unei serii duble Fourier, pară în raport cu variabilele z, x:

$$p_y(z, x) = b_0 + \sum_n \sum_l b_{nl}\cos\gamma_n z \cos\alpha_l x, \tag{11}$$

unde s-a notat

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{c},\quad \alpha_l = \frac{l\pi}{a}, \tag{12}$$

cu perioadele $L_z = 2c$ și $L_x = 2a$.

Se consideră sfertul de spațiu elastic $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ ca făcînd parte din semispațiul elastic $y \geqslant 0$, acționat de sarcina periodică (11), (12), si-

metrică în raport cu axele Oz şi Ox. Tensiunile tangenţiale vor fi nule pentru faţa $x = 0$, iar tensiunea normală va fi, în general, dată de [6]

$$\sigma_x(0, y, z) = \frac{1}{m-1} b_0 + \sum_n \sum_l \frac{b_{nl}}{\mu_{nl}^2}\left[\alpha_l^2(1 - \mu_{nl} y) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{m}\gamma_n^2\right] e^{-\mu_{nl} y} \cos \gamma_n z , \tag{13}$$

unde s-a notat

$$\mu_{nl} = \sqrt{\gamma_n^2 + \alpha_l^2}. \tag{14}$$

În felul acesta, starea de tensiune calculată va corespunde la cea care ia naştere în interiorul sfertului de spaţiu elastic, acţionat de sarcina periodică şi încărcat pe faţa $x = 0$ de sarcina normală $\sigma_x(0, y, z) = -p'_x(y, z)$. Dacă se suprapune starea de tensiune corespunzătoare sfertului de spaţiu elastic acţionat numai de sarcina normală $p'_x(y, z)$ pe $x = 0$, se obţine starea de tensiune corespunzătoare problemei pe care ne propunem s-o studiem.

Se poate studia sfertul de spaţiu elastic acţionat de sarcina aperiodică (locală) $p'_x(y, z)$ pe direcţia axei Oy şi periodică pe direcţia axei Oz cu ajutorul unor integrale Fourier în raport cu variabila z, observînd că coeficienţii Fourier b_{nl} verifică relaţiile

$$\int_0^\infty \left| \sum_n \sum_l \frac{b_{nl}}{\mu_{nl}^2}\left[\alpha_l^2(1 - \mu_{nl} y) + \frac{2}{m}\gamma_n^2\right] e^{-\mu_{nl} y} \right| dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_n \sum_l |b_{nl}| \left\{\left[\left(\frac{\alpha_l}{\mu_{nl}}\right)^2 + \frac{2}{m}\left(\frac{\gamma_n}{\mu_{nl}}\right)^2\right]\int_0^\infty e^{-\mu_{nl} y} dy + \left(\frac{\alpha_l}{\mu_{nl}}\right)^2 \mu_{nl} \int_0^\infty y e^{-\mu_{nl} y} dy\right\} =$$

$$= \sum_n \sum_l |b_{nl}| \left\{\frac{1}{\mu_{nl}}\left[\left(\frac{\alpha_l}{\mu_{nl}}\right)^2 + \frac{2}{m}\left(\frac{\gamma_n}{\mu_{nl}}\right)^2\right] + \frac{1}{\mu_{nl}^2}\left(\frac{\alpha_l}{\mu_{nl}}\right)^2\right\} = \text{finit.} \tag{15}$$

Menţionăm că aceste condiţii sînt verificate pentru orice caz de încărcare repartizată.

Considerînd cazul de încărcare normală periodică, reprezentat de o serie Fourier impară în raport cu variabila x, şi folosind acelaşi procedeu, se observă că tensiunea normală va fi nulă pentru $x = 0$. În felul acesta se obţin tensiunile tangenţiale $\tau_{xy}(0, y, z) = -t'_{xy}(y, z)$ şi $\tau_{xz}(0, y, z) = -t'_{xz}(y, z)$ şi sîntem obligaţi să studiem sfertul de spaţiu elastic acţionat de o sarcină tangenţială pe faţa $x = 0$, locală în raport cu variabila y şi periodică în raport cu variabila z.

Aceste consideraţii rămîn valabile pentru o încărcare normală antisimetrică în raport cu axa Ox, ca şi pentru orice caz de încărcare periodică tangenţială.

În concluzie, problema sfertului de spaţiu elastic, acţionat de o sarcină periodică oarecare pe două direcţii, poate să fie redusă — cu ajutorul principiului suprapunerii efectelor — la studiul aceluiaşi domeniu, acţionat de o sarcină locală pe direcţia semiinfinită şi periodică pe direcţia infinită, şi la studiul semispaţiului elastic, acţionat în mod analog. Acest caz de încărcare al sfertului de spaţiu elastic nu poate să fie redus la o formă mai simplă.

Menționăm cazul de încărcare al sfertului de spațiu elastic cu o sarcină locală pe direcția infinită și periodică pe direcția semiinfinită, care poate să fie redus la studiul aceluiași domeniu, acționat de o sarcină locală, și la studiul semispațiului elastic, acționat în mod analog.

În ceea ce urmează vom considera numai cazul unei sarcini locale.

4. *Sfertul de spațiu elastic acționat de o sarcină normală locală.* Fie sfertul de spațiu elastic $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, acționat de sarcinile normale

$$\begin{aligned} p_x(y, z) &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\beta, \gamma)\cos\beta y \cos\gamma z \, d\beta d\gamma, \\ p_y(z, x) &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} b(\gamma, \alpha)\cos\gamma z \cos\alpha x \, d\gamma \, d\alpha \end{aligned} \tag{16}$$

pe fețele $x = 0$, $y = 0$; s-a admis o simetrie de încărcare în raport cu axele Ox și Oy. Se folosesc integrale duble Fourier, pare în raport cu variabilele x, y, z, care pot reprezenta de asemenea funcții generalizate.

Se pun condițiile la limită

$$\begin{aligned} x = 0: &\quad \sigma_x = p_x(y, z), \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \\ y = 0: &\quad \sigma_y = p_y(z, x), \quad \tau_{yz} = \tau_{yx} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

În plus, starea de tensiune trebuie să se anuleze pentru $x \to \infty$, $y \to \infty$, $z \to \infty$.

Vom alege funcții de tensiune de forma [4])

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A_1'(\beta, \gamma) + \lambda x A_2'(\beta, \gamma)]\, e^{-\lambda x}\cos\beta y \cos\gamma z \, d\beta \, d\gamma + \\ &+ \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [B_1'(\gamma, \alpha) + \mu y B_2'(\gamma, \alpha)]\, e^{-\mu y}\cos\gamma z \cos\alpha x \, d\gamma \, d\alpha, \\ F_y &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [A_1''(\beta, \gamma) + \lambda x A_2''(\beta, \gamma)]\, e^{-\lambda x}\cos\beta y \cos\gamma z \, d\beta \, d\gamma + \\ &+ \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [B_1''(\gamma, \alpha) + \mu y B_2''(\gamma, \alpha)]\, e^{-\mu y}\cos\gamma z \cos\alpha x \, d\gamma \, d\alpha, \\ F_z &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [A_1'''(\beta, \gamma) + \lambda x A_2'''(\beta, \gamma)]\, e^{-\lambda x}\cos\beta y \cos\gamma z \, d\beta \, d\gamma + \\ &+ \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [B_1'''(\gamma, \alpha) + \mu y B_2'''(\gamma, \alpha)]\, e^{-\mu y}\cos\gamma z \cos\alpha x \, d\gamma \, d\alpha, \end{aligned} \tag{18}$$

[4]) Considerăm aceste integrale în sensul utilizat în teoria regularizării transformatelor Fourier, în teoria distribuțiilor [2].

unde s-a notat

$$\lambda = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}, \qquad \mu = \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2}. \tag{19}$$

Vom lua de asemenea

$$F_{yz} = F_{zx} = F_{xy} = 0. \tag{20}$$

Funcţiile integrabile $A_i'(\beta, \gamma)$, $B_i'(\gamma, \alpha)$, $A_i''(\beta, \gamma), \ldots, B_i'''(\gamma, \alpha)$ $(i = 1, 2)$ cu $(-\infty < \alpha, \beta, \gamma < \infty)$ trebuie să fie precizate prin condiţiile la limită. Aceste funcţii sînt considerate pare în raport cu variabilele α, β şi γ. Condiţiile la infinit sînt verificate în mod automat, metoda de calcul utilizată corespunzînd unei transformate Fourier.

Folosind formulele (1), (1'), alegînd funcţiile φ_x, φ_y, φ_z sub forma (7) şi observînd că funcţiile de tensiune sînt construite cu ajutorul funcţiilor armonice (8), (8'), se pot calcula tensiunile normale

$$\begin{aligned}
\sigma_x = &-\frac{1}{4(2m+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \{m A_1 + 2[(1+m)A_2' - m(A_2'' + A_2''')] + \\
&+ m\lambda x A_2\} e^{-\lambda x} \cos \beta y \cos \gamma z \, d\beta \, d\gamma + \\
&+ \frac{1}{4(2m+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [m\alpha^2 B_1 - 2(2m+1)\mu^2 B_2' + \\
&+ m\mu y \alpha^2 B_2] e^{-\mu y} \cos \gamma z \cos \alpha x \, d\gamma \, d\alpha, \\
\sigma_y = &\frac{1}{4(2m+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [m\beta^2 A_1 - 2(2m+1)\lambda^2 A_2'' + \\
&+ m\lambda x \beta^2 A_2] e^{-\lambda x} \cos \beta y \cos \gamma z \, d\beta \, d\gamma - \\
&- \frac{1}{4(2m+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 \{m B_1 + 2[(1+m)B_2'' - m(B_2''' + B_2')] + \\
&+ m\mu y B_2\} e^{-\mu y} \cos \gamma z \cos \alpha x \, d\gamma \, d\alpha, \\
\sigma_z = &\frac{1}{4(2m+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [m\gamma^2 A_1 - 2(2m+1)\lambda^2 A_2''' + \\
&+ m\lambda x \gamma^2 A_2] e^{-\lambda x} \cos \beta y \cos \gamma z \, d\beta \, d\gamma + \\
&+ \frac{1}{4(2m+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [m\gamma^2 B_1 - 2(2m+1)\mu^2 B_2''' + \\
&+ m\mu y \gamma^2 B_2] e^{-\mu y} \cos \gamma z \cos \alpha x \, d\gamma \, d\alpha
\end{aligned} \tag{21}$$

și tensiunile tangențiale

$$\tau_{yz} = -\frac{1}{4(2m+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\beta\gamma}\{m\beta^2\gamma^2 A_1 + \lambda^4 A_2' - \lambda^2[(2m\gamma^2-\beta^2)A_2'' + (2m\beta^2-\gamma^2)A_2'''] + m\lambda x\beta^2\gamma^2 A_2\}\,e^{-\lambda x}\sin\beta y\sin\gamma z\,d\beta\,d\gamma -$$
$$-\frac{1}{4(2m+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu}{\gamma}\{m\gamma^2 B_1-(m\gamma^2-\alpha^2)B_2'+[(1+m)\gamma^2+\alpha^2]B_2''-$$
$$-[(3m+1)\gamma^2+2m\alpha^2]B_2''' + m\mu y\gamma^2 B_2\}\,e^{-\mu y}\sin\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma\,d\alpha,$$

$$\tau_{zx} = -\frac{1}{4(2m+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda}{\gamma}\{m\gamma^2 A_1-(m\gamma^2-\beta^2)A_2''-$$
$$-[(3m+1)\gamma^2+2m\beta^2]A_2'''+[(1+m)\gamma^2+\beta^2]A_2' +$$
$$+m\lambda x\gamma^2 A_2\}\,e^{-\lambda x}\cos\beta y\sin\gamma z\,d\beta\,d\gamma - \qquad (21')$$
$$-\frac{1}{4(2m+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\gamma\alpha}\{m\gamma^2\alpha^2 B_1+\mu^4 B_2''-\mu^2[(2m\alpha^2-\gamma^2)B_2'''+$$
$$+(2m\gamma^2-\alpha^2)B_2'] + m\mu y\gamma^2\alpha^2 B_2\}\,e^{-\mu y}\sin\gamma z\sin\alpha x\,d\gamma\,d\alpha,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{4(2m+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda}{\beta}\{m\beta^2 A_1-(m\beta^2-\gamma^2)A_2'''+$$
$$+[(1+m)\beta^2+\gamma^2]A_2'-[(3m+1)\beta^2+2m\gamma^2]A_2''+$$
$$+m\lambda x\beta^2 A_2\}\,e^{-\lambda x}\sin\beta y\cos\gamma z\,d\beta d\gamma -$$
$$-\frac{1}{4(2m+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu}{\alpha}\{m\alpha^2 B_1-(m\alpha^2-\gamma^2)B_2'''-$$
$$-[(3m+1)\alpha^2+2m\gamma^2]B_2'+[(1+m)\alpha^2+\gamma^2]B_2''+$$
$$+m\mu y\alpha^2 B_2\}\,e^{-\mu y}\cos\gamma z\sin\alpha x\,d\gamma\,d\alpha,$$

unde s-a notat

$$A_i = A_i' + A_i'' + A_i''', \qquad B_i = B_i' + B_i'' + B_i''' \qquad (22)$$

pentru $i = 1,2$.

Punînd condițiile la limită pentru tensiunile tangențiale și ținînd seama de expresiile (21), se obțin relațiile

$$m\beta^2 A_1+[(1+m)\beta^2+\gamma^2]A_2'-[(3m+1)\beta^2+2m\gamma^2]A_2''-(m\beta^2-\gamma^2)A_2'''=0,$$
$$m\gamma^2 A_1+[(1+m)\gamma^2+\beta^2]A_2'-(m\gamma^2-\beta^2)A_2''-[(3m+1)\gamma^2+2m\beta^2]A_2'''=0, \qquad (23)$$

$$m\gamma^2 B_1-(m\gamma^2-\alpha^2)B_2'+[(1+m)\gamma^2+\alpha^2]B_2''-[(3m+1)\gamma^2+2m\alpha^2]B_2'''=0,$$
$$m\alpha^2 B_1-[3m+1)\alpha^2+2m\gamma^2]B_2'+[(1+m)\alpha^2+\gamma^2]B_2''-(m\alpha^2-\gamma^2)B_2'''=0 \qquad (23')$$

şi se deduce că

$$A_1 = -\frac{2m+1}{m(\gamma^2-\beta^2)}[(m\gamma^2+2\beta^2)A_2'' - (m\beta^2+2\gamma^2)A_2'''],$$
$$A_2' = \frac{1}{\gamma^2-\beta^2}[(2m\gamma^2+\beta^2)A_2'' - (2m\beta^2+\gamma^2)A_2'''], \tag{24}$$

$$B_1 = -\frac{2m+1}{m(\alpha^2-\gamma^2)}[(m\alpha^2+2\gamma^2)B_2''' - (m\gamma^2+2\alpha^2)B_2'],$$
$$B_2'' = \frac{1}{\alpha^2-\gamma^2}[(2m\alpha^2+\gamma^2)B_2''' - (2m\gamma^2+\alpha^2)B_2']. \tag{24'}$$

Rezultă de asemenea că

$$A_2 = \frac{2m+1}{\gamma^2-\beta^2}(\gamma^2A_2'' - \beta^2A_2'''),$$
$$B_2 = \frac{2m+1}{\alpha^2-\gamma^2}(\alpha^2B_2''' - \gamma^2B_2'). \tag{24''}$$

Se introduc notaţiile

$$A(\beta,\gamma) = -\frac{m\lambda}{\gamma^2-\beta^2}(\gamma^2A_2'' - \beta^2A_2'''),$$
$$B(\gamma,\alpha) = -\frac{m\mu}{\alpha^2-\gamma^2}(\alpha^2B_2''' - \gamma^2B_2'). \tag{25}$$

Componentele tensorului tensiune pot fi scrise sub forma

$$\sigma_x = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda A(\beta,\gamma)(1+\lambda x)\,e^{-\lambda x}\cos\beta y\cos\gamma z\,d\beta\,d\gamma +$$
$$+\frac{1}{4m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mu B(\gamma,\alpha)\left[m\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2(1-\mu y) +\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2\right]e^{-\mu y}\cos\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma\,d\alpha,$$

$$\sigma_y = \frac{1}{4m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda A(\beta,\gamma)\left[m\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2(1-\lambda x) +\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2\right]e^{-\lambda x}\cos\beta y\cos\gamma z\,d\beta\,d\gamma +$$
$$+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mu B(\gamma,\alpha)(1+\mu y)\,e^{-\mu y}\cos\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma\,d\alpha, \tag{26}$$

$$\sigma_z = \frac{1}{4m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda A(\beta,\gamma)\left[m\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2(1-\lambda x) + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2\right] e^{-\lambda y}\cos\beta y\cos\gamma z\,d\beta\,d\gamma +$$

$$+\frac{1}{4m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mu B(\gamma,\alpha)\left[m\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2(1-\mu y) + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2\right] e^{-\mu y}\cos\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma\,d\alpha,$$

$$\tau_{yz} = -\frac{1}{4m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta\gamma}{\lambda}A(\beta,\gamma)[m(1-\lambda x)-2]e^{-\lambda x}\sin\beta y\sin\gamma z\,d\beta\,d\gamma +$$

$$+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma B(\gamma,\alpha)\,\mu y\,e^{-\mu y}\sin\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma\,d\alpha,$$

$$\tau_{zx} = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma A(\beta,\gamma)\lambda x\,e^{-\lambda x}\cos\beta y\sin\gamma z\,d\beta\,d\gamma - \tag{26'}$$

$$-\frac{1}{4m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma\alpha}{\mu}B(\gamma,\alpha)[m(1-\mu y)-2]e^{-\mu y}\sin\gamma z\sin\alpha x\,d\gamma\,d\alpha,$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\beta A(\beta,\gamma)\lambda x\,e^{-\lambda x}\sin\beta y\cos\gamma z\,d\beta\,d\gamma +$$

$$+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha B(\gamma,\alpha)\,\mu y\,e^{-\mu y}\cos\gamma z\sin\alpha x\,d\gamma\,d\alpha.$$

Se observă că, datorită factorilor $e^{-\lambda x}$, $e^{-\mu y}$ funcțiile $A(\beta,\gamma)$, $B(\gamma,\alpha)$ se pot considera chiar local integrabile și mărginite pentru $x>0$, $y>0$.

Relațiile

$$\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-\lambda x}|\,dx = \frac{2}{\lambda} = \text{finit},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|xe^{-\lambda x}|\,dx = \frac{2}{\lambda^2} = \text{finit}, \tag{27}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-\mu y}|\,dy = \frac{2}{\mu} = \text{finit},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|ye^{-\mu y}|\,dy = \frac{2}{\mu^2} = \text{finit} \tag{27'}$$

permit să se reprezinte funcţiile corespunzătoare cu ajutorul integralelor Fourier

$$\begin{aligned} e^{-\lambda x} &= \frac{1}{\pi}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x\,dx}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}, \\ xe^{-\lambda x} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}\cos\alpha x\,d\alpha, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} e^{-\mu y} &= \frac{1}{\pi}\mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\beta y\,d\beta}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}, \\ ye^{-\mu y} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}\cos\beta y\,d\beta. \end{aligned} \tag{28'}$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} (1-\lambda x)e^{-\lambda x} &= \frac{2}{\pi}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2\cos\alpha x\,d\alpha}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}, \\ (1+\lambda x)e^{-\lambda x} &= \frac{2}{\pi}\lambda^3\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x\,d\alpha}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} (1-\mu y)e^{-\mu y} &= \frac{2}{\pi}\mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta^2\cos\beta y\,d\beta}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}, \\ (1+\mu y)e^{-\mu y} &= \frac{2}{\pi}\mu^3\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\beta y\,d\beta}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}. \end{aligned} \tag{29'}$$

Ţinînd seama de (28), (28'), (29), (29'), relaţiile (26) ne dau

$$\begin{aligned} 4\sigma_x &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda A(\beta,\gamma)(1+\lambda x)e^{-\lambda x}\cos\beta y\cos\gamma z\,d\beta\,d\gamma + \\ &+ \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mu B(\gamma,\alpha)\left\{\mu\left[\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta^2\cos\beta y\,d\beta}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}+\right.\right. \\ &\left.\left.+\frac{1}{m}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\beta y\,d\beta}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right]\right\}\cos\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma\,d\alpha, \\ 4\sigma_y &= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda A(\beta,\gamma)\left\{\lambda\left[\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2\cos\alpha x\,d\alpha}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}+\right.\right. \\ &\left.\left.+\frac{1}{m}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x\,d\alpha}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right]\right\}\cos\beta y\cos\gamma z\,d\beta\,d\gamma + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mu B(\gamma,\alpha)(1+\mu y)e^{-\mu y}\cos\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma\,d\alpha, \end{aligned} \tag{30}$$

$$4\sigma_z = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda A(\beta,\gamma)\left\{\lambda\left[\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2\cos\alpha x\,d\alpha}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{m}\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x\,d\alpha}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right]\right\}\cos\beta y\cos\gamma z\,d\beta\,d\gamma+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mu B(\gamma,\alpha)\left\{\mu\left[\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta^2\cos\beta y\,d\beta}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{m}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\beta y\,d\beta}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right]\right\}\cos\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma\,d\alpha.$$

Inversînd ordinea de integrare (ceea ce se poate face, deoarece pentru $x>0$, $y>0$ există o majorantă integrabilă dacă $A(\beta,\gamma)$, $B(\gamma,\alpha)$ sînt numai funcții integrabile), se obține

$$4\sigma_x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\lambda A(\beta,\gamma)(1+\lambda x)\,e^{-\lambda x}+\varphi(\beta,\gamma;y,z)]\cos\beta y\cos\gamma z\,d\beta\,d\gamma,$$

$$4\sigma_y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\mu B(\gamma,\alpha)(1+\mu y)\,e^{-\mu y}+\psi(\gamma,\alpha;z,x)]\cos\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma\,d\alpha, \tag{31}$$

$$4\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\alpha,\beta;x,y)\cos\alpha x\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta,$$

unde s-au precizat transformatele Fourier

$$\varphi(\beta,\gamma;y,z) = \frac{2}{\pi}\left[\beta^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2\frac{\mu^2B(\gamma,\alpha)}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}\cos\alpha x\,d\alpha+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2\frac{\mu^2B(\gamma,\alpha)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cos\alpha x\,d\alpha\right],$$

$$\psi(\gamma,\alpha;z,x) = \frac{2}{\pi}\left[\alpha^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2\frac{\lambda^2A(\beta,\gamma)}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}\cos\beta y\,d\beta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2\frac{\lambda^2A(\beta,\gamma)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cos\beta y\,d\beta\right], \tag{32}$$

$$\chi(\alpha,\beta;x,y) = \frac{2}{\pi}\left[\alpha^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2\frac{\lambda^2A(\beta,\gamma)}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}\cos\gamma z\,d\gamma+\right.$$

$$+\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2\frac{\lambda^2A(\beta,\gamma)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cos\gamma z\,d\gamma+$$

$$+\beta^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^3\frac{\mu^2B(\gamma,\alpha)}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}\cos\gamma z\,d\gamma+$$

$$\left.+\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2\frac{\mu^2B(\gamma,\alpha)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cos\gamma z\,d\gamma\right]$$

și s-au considerat β, γ respectiv γ, α și α, β parametri ficși.

Fie un şir de funcţii integrabile $A_n(\beta, \gamma)$, respectiv $B_n(\gamma, \alpha)$, astfel că

$$\begin{aligned} |A_n(\beta, \gamma)| &< K, \\ |B_n(\gamma, \alpha)| &< K \end{aligned} \tag{33}$$

şi

$$\begin{aligned} A_n(\beta, \gamma) &\to A_0(\beta, \gamma), \\ B_n(\gamma, \alpha) &\to B_0(\gamma, \alpha). \end{aligned} \tag{33'}$$

Atunci este evident că

$$\begin{aligned} |A_0(\beta, \gamma)| &< K, \\ |B_0(\gamma, \alpha)| &< K, \end{aligned} \tag{33''}$$

deci funcţiile $A_0(\beta, \gamma)$ şi $B_0(\gamma, \alpha)$ sînt funcţii local integrabile.

Dacă $\varphi_n(\beta, \gamma; y, z)$, $\psi_n(\gamma, \alpha; z, x)$, $\chi_n(\alpha, \beta; x, y)$ sînt transformatele Fourier corespunzătoare lui (33) şi definite prin relaţiile (32), se obţine

$$\begin{aligned} |\varphi_n(\beta, \gamma; y, z)| &< K, \\ |\psi_n(\gamma, \alpha; z, x)| &< K, \\ |\chi_n(\alpha, \beta; x, y)| &< K, \end{aligned} \tag{34}$$

adică

$$\begin{aligned} \varphi_n(\beta, \gamma; y, z) &\to \varphi_0(\beta, \gamma; y, z), \\ \psi_n(\gamma, \alpha; z, x) &\to \psi_0(\gamma, \alpha; z, x), \\ \chi_n(\alpha, \beta; x, y) &\to \chi_0(\alpha, \beta; x, y); \end{aligned} \tag{34'}$$

convergenţa este deci uniformă în raport cu y, z, respectiv z, x şi x, y. Fie $\sigma_x^n(x, y, z)$ expresia (26), respectiv (31), corespunzînd la $A_n(\beta, \gamma)$, $B_n(\gamma, \alpha)$. Utilizînd relaţia (26), se observă că este vorba de convergenţa uniformă a funcţiei $\sigma_x^n(x, y, z)$ (în sensul normal) pentru $x > \theta > 0$, $y > \theta > 0$. Pentru $x = 0$, funcţia $\sigma_x^n(0, y, z)$ devine o funcţie generalizată (în sensul teoriei distribuţiilor) şi trebuie considerată convergenţa într-un sens corespunzător.

Aplicînd teoria transformatelor Fourier pentru funcţiile generalizate, se ajunge la concluzia că $\sigma_x^n(x, y, z)$, considerată ca funcţie generalizată de variabilele y şi z, converge către funcţia $\sigma_x^0(x, y, z)$ în sensul funcţiilor generalizate, această convergenţă fiind uniformă în raport cu x. Mai mult, $\sigma_x^n(x, y, z)$ este o funcţie pară în raport cu x, y şi z. De asemenea $\sigma_y^n(x, y, z)$ este o funcţie generalizată de variabilele z, x, convergenţa fiind uniformă în raport cu y.

În mod analog se demonstrează că funcţia $\tau_{yz}^n(x, y, z)$, considerată ca o funcţie generalizată de variabilele z, x, converge uniform în raport cu y către funcţia $\tau_{yz}^0(x, y, z)$ în sensul funcţiilor generalizate; de asemenea pentru funcţiile $\tau_{zx}^n(x, y, z)$, $\tau_{xy}^n(x, y, z)$, considerate ca funcţii generalizate. Mai mult, condiţiile la limită (17) corespunzătoare sînt verificate.

Trecînd la limită în expresiile (31) ale tensiunilor normale, se obține

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\lambda A(\beta,\gamma)+\frac{2}{\pi}\left[\beta^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2 B(\gamma,\alpha)}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}\,d\alpha+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma^2 B(\gamma,\alpha)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,d\alpha\right]\right\}\cos\beta y\cos\gamma z\,d\beta\,d\gamma=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}a(\beta,\gamma)\cos\beta y\cos\gamma z\,d\beta\,d\gamma,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\mu B(\gamma,\alpha)+\frac{2}{\pi}\left[\alpha^2\int_{\infty}^{-\infty}\frac{\beta^2 A(\beta,\gamma)}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}\,d\beta+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma^2 A(\beta,\gamma)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,d\beta\right]\right\}\cos\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma\,d\alpha=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}b(\gamma,\alpha)\cos\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma\,d\alpha. \tag{35}$$

Ținînd seama de izomorfismul spațiului funcțiilor generalizate și al transformatelor lor Fourier, se ajunge la ecuațiile

$$\lambda A(\beta,\gamma)+\frac{2}{\pi}\beta^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2 B(\gamma,\alpha)}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}\,d\alpha+$$

$$+\frac{2}{\pi m}\gamma^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B(\gamma,\alpha)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,d\alpha=a(\beta,\gamma),$$

$$\mu B(\gamma,\alpha)+\frac{2}{\pi}\alpha^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta^2 A(\beta,\gamma)}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}\,d\beta+ \tag{36}$$

$$+\frac{2}{\pi m}\gamma^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\beta,\gamma)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,d\beta=b(\gamma,\alpha).$$

Dacă există un sistem de funcții simetrice mărginite $A(\beta,\gamma)$, $B(\gamma,\alpha)$, care verifică sistemul de ecuații integrale (36), atunci starea de tensiune în interiorul sfertului de spațiu elastic va fi dată de formulele (26); după cum am considerat mai sus, condițiile la limită sînt verificate în sensul convergenței uniforme a funcțiilor generalizate.

Se observă că sistemul omogen (36) este independent de încărcarea sfertului de spațiu elastic, aceasta neintervenind decît în membrul al doilea.

În ceea ce va urma ne vom mărgini la clasa de funcții generalizate pare, mai precis la cazul în care $A(\beta,\gamma)$, $B(\gamma,\alpha)$ sînt funcții pare, mărginite, local integrabile. Ca și în cazul plan corespunzător [9], sistemul de ecuații (36) are o soluție unică în clasa funcțiilor generalizate.

Cazul antisimetric de încărcare în raport cu axele Ox și Oy, de forma

$$p_x(y,z) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\beta,\gamma)\cos\beta y \sin\gamma z \,d\beta\, d\gamma,$$
$$p_y(z,x) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} b(\gamma,\alpha)\sin\gamma z \cos\alpha x \,d\gamma\, d\alpha, \tag{37}$$

poate să fie studiat în mod analog.

5. *Sistemul de ecuații integrale.* Introducem nucleul

$$K(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\beta^2\gamma^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2} + \frac{1}{m}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} = K(\alpha,\gamma,\beta). \tag{38}$$

Sistemul de ecuații integrale (36) se poate scrie atunci sub forma

$$\lambda A(\beta,\gamma) + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\gamma,\alpha,\beta)\,B(\gamma,\alpha)\,d\alpha = a(\beta,\gamma),$$
$$\mu B(\gamma,\alpha) + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\gamma,\alpha,\beta)\,A(\beta,\gamma)\,d\beta = b(\gamma,\alpha), \tag{39}$$

și observăm că se bucură de anumite proprietăți de simetrie care ne sugerează o simplificare a calculului, bazată pe proprietăți de ordin fizic și matematic.

Fie întîi un caz de încărcare simetric în raport cu planul bisector $x = y$; această proprietate este caracterizată de relația

$$a(\beta,\gamma) = b(\gamma,\beta). \tag{40}$$

A doua ecuație (39) poate fi scrisă sub forma

$$\lambda B(\beta,\gamma) + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\beta,\gamma,\alpha)\,A(\alpha,\beta)\,d\alpha = b(\beta,\gamma). \tag{39'}$$

Prin scăderea ecuațiilor (39), (39') și ținînd seama de (40), după ce am schimbat variabilele în mod convenabil, putem scrie ecuația

$$\lambda[A(\beta,\gamma) - B(\gamma,\beta)] + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\gamma,\alpha,\beta)\,[B(\gamma,\alpha) - A(\alpha,\gamma)]\,d\alpha = 0, \tag{41}$$

care ne conduce la

$$A(\beta,\gamma) = B(\gamma,\beta). \tag{42}$$

Acest rezultat este consecința matematică a unui anumit rezultat de ordin mecanic; se observă astfel că pentru un element al planului bisector $x = y$ putem scrie

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \tau_{xy}, \tag{43}$$

$$\tau_{\parallel z} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\tau_{yz} - \tau_{zx}),$$
$$\tau_{\perp z} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y), \tag{43'}$$

unde am pus în evidență tensiunile tangențiale paralele cu axa Oz și tensiunile tangențiale normale la această axă. Aceste tensiuni tangențiale sînt de forma

$$\tau_{\parallel z} = -\frac{\sqrt{2}}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta\gamma}{\lambda}\left[\left(1-\lambda x-\frac{2}{m}\right)e^{-\lambda x}A(\beta,\gamma)\sin\beta y-\right.$$

$$\left.-\left(1-\lambda y-\frac{2}{m}\right)e^{-\lambda y}B(\gamma,\beta)\sin\beta x\right]\sin\gamma z\,d\beta\,d\gamma-$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma\left[\lambda x e^{-\lambda x}A(\beta,\gamma)\cos\beta y-\lambda y\,e^{-\lambda y}B(\gamma,\beta)\cos\beta x\right]\cdot$$

$$\cdot\sin\gamma z d\beta d\gamma, \tag{44}$$

$$\tau_{\perp z} = -\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\left\{\left[\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2\left(1+\lambda x-\frac{2}{m}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2\lambda x\right]e^{-\lambda x}A(\beta,\gamma)\cos\beta y-\left[\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2\left(1+\lambda y-\frac{2}{m}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+2\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2\lambda y\right]e^{-\lambda y}B(\gamma,\beta)\cos\beta x\right\}\cos\gamma z\,d\beta\,d\gamma.$$

Pentru o încărcare simetrică aceste tensiuni tangențiale trebuie să se anuleze ($x=y$), condiții care ne conduc numai la relația (42).

Pentru un caz de încărcare antisimetric în raport cu planul bisector $x=y$, avem relația

$$a(\beta,\gamma) = -b(\gamma,\beta). \tag{45}$$

Ținînd seama de (45), ecuațiile (39), (39′) ne permit să scriem ecuația

$$\lambda\left[A(\beta,\gamma)+B(\gamma,\beta)\right]+\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(\gamma,\alpha,\beta)\left[A(\alpha,\gamma)+B(\gamma,\alpha)\right]d\alpha=0, \tag{46}$$

care ne conduce la

$$A(\beta,\gamma) = -B(\gamma,\beta). \tag{47}$$

Tensiunea normală (43) pe planul bisector $x=y$ este de forma

$$\sigma=\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\left\{\left[\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2\left(1+\lambda x+\frac{2}{m}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2\right]e^{-\lambda x}A(\beta,\gamma)\cos\beta y+\left[\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2\left(1+\lambda y+\frac{2}{m}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+2\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2\right]e^{-\lambda y}B(\gamma,\beta)\cos\beta x\right\}\cos\gamma z\,d\gamma\,d\alpha- \tag{48}$$

$$-\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\beta\left[\lambda x\,e^{-\lambda y}A(\beta,\gamma)\sin\beta y+\right.$$

$$\left.+\lambda y\,e^{-\lambda y}B(\gamma,\beta)\sin\beta x\right]\cos\gamma z\,d\beta\,d\gamma.$$

Anulînd această tensiune pentru o sarcină antisimetrică ($x = y$), se obține numai relația (47).

Dacă funcțiile $a(\beta, \gamma)$, $b(\gamma, \alpha)$ sînt pare în raport cu variabilele β, γ, respectiv γ, α, sistemul (39) ne permite să observăm că funcțiile $A(\beta, \gamma)$, $B(\gamma, \alpha)$ se bucură de aceeași proprietate. În felul acesta, sistemul poate fi încă scris sub forma

$$\lambda A(\beta, \gamma) + \frac{4}{\pi}\int_0^\infty K(\gamma, \alpha, \beta)\, B(\gamma, \alpha)\, d\alpha = a(\beta, \gamma),$$
$$\mu B(\gamma, \alpha) + \frac{4}{\pi}\int_0^\infty K(\gamma, \alpha, \beta)\, A(\beta, \gamma)\, d\beta = b(\gamma, \alpha). \tag{49}$$

Folosind relațiile (42), (47) pe care le-am găsit și ținînd seama de proprietățile de simetrie sau de antisimetrie, se poate înlocui sistemul de ecuații (49) prin următoarele două ecuații integrale:

$$\lambda A(\beta, \gamma) \pm \frac{4}{\pi}\int_0^\infty K(\gamma, \alpha, \beta)\, A(\alpha, \gamma)\, d\alpha = a(\beta, \gamma). \tag{50}$$

Ecuația cu semnul superior corespunde cazului de încărcare simetric, iar cea cu semnul inferior corespunde cazului de încărcare antisimetric. Sistemul de două ecuații integrale a fost, în felul acesta, înlocuit prin două ecuații integrale, avînd fiecare cîte o singură funcție necunoscută, ceea ce este mai avantajos.

Ecuațiile (49) permit să se exprime $B(\gamma, \alpha)$ în raport cu $A(\beta, \gamma)$ sub forma

$$B(\gamma, \alpha) = \frac{1}{\mu} b(\gamma, \alpha) - \frac{4}{\pi}\int_0^\infty K(\gamma, \alpha, \beta)\, A(\beta, \gamma)\, d\beta]. \tag{51}$$

Eliminînd $B(\gamma, \alpha)$ dintre ecuațiile (49), se găsește o ecuație integrală de forma

$$A(\beta, \gamma) + \int_0^\infty K'(\beta, \gamma; \delta)\, A(\delta, \gamma)\, d\delta = \frac{a(\beta, \gamma)}{\lambda} + \mathcal{A}(\beta, \gamma), \tag{52}$$

unde s-a notat

$$K'(\beta, \gamma; \delta) = -\frac{16\gamma^2}{\pi^2 m \lambda}\left[\beta^2 \int_0^\infty \frac{\alpha^2 d\alpha}{(\alpha^2 + \lambda^2)^2(\delta^2 + \mu^2)\mu} + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma^2}{m}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{(\alpha^2 + \lambda^2)(\delta^2 + \mu^2)\mu}\right] - \frac{16\delta^2}{\pi^2\lambda}\left[\beta^2 \int_0^\infty \frac{\alpha^4 d\alpha}{(\alpha^2 + \lambda^2)^2(\delta^2 + \mu^2)^2\mu} + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma^2}{m}\int_0^\infty \frac{\alpha^2 d\alpha}{(\alpha^2 + \lambda^2)(\delta^2 + \mu^2)^2\mu}\right] = -\frac{8}{\pi^2\lambda}\left\{\frac{\beta^2(\beta^2 + \gamma^2) + \delta^2(\delta^2 + \gamma^2)}{(\beta^2 - \delta^2)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta^2\delta^2}{\gamma(\beta^2 - \delta^2)^3}\left[\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}\,(\beta^2 + 4\gamma^2 + 3\delta^2)\ln\frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} + \gamma}{\beta} - \right.\right. \tag{52'}$$

$$-\sqrt{\delta^2+\gamma^2}\,(3\beta^2+4\gamma^2+\delta^2)\ln\frac{\sqrt{\delta^2+\gamma^2}+\gamma}{\delta}\Bigg]+$$

$$+\frac{\gamma}{m^2(\beta^2-\delta^2)}\left[\frac{2(m-1)\gamma^2+m\beta^2}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}\ln\frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}+\gamma}{\beta}-\right.$$

$$\left.-\frac{2(m-1)\gamma^2+m\delta^2}{\sqrt{\delta^2+\gamma^2}}\ln\frac{\sqrt{\delta^2+\gamma^2}+\gamma}{\delta}\right]\Bigg\},$$

$$\mathcal{A}(\beta,\gamma)=-\frac{4}{\pi\lambda}\left[\beta^2\int_0^\infty\frac{\alpha^2 b(\gamma,\alpha)}{\mu(\alpha^2+\lambda^2)^2}\,d\alpha+\frac{\gamma^2}{m}\int_0^\infty\frac{b(\gamma,\alpha)}{\mu(\alpha^2+\lambda^2)}\,d\alpha\right].$$

În felul acesta se reduce problema la integrarea unei singure ecuații integrale, cu o singură funcție necunoscută. Șirul de funcții $A^{(i)}(\beta,\gamma)$ $(i=0,1,2,\ldots)$, cu

$$A^{(0)}(\beta,\gamma)=\frac{a(\beta,\gamma)}{\lambda}+\mathcal{A}(\beta,\gamma) \tag{53}$$

și

$$A^{(i+1)}(\beta,\gamma)=\frac{a(\beta,\gamma)}{\lambda}+\mathcal{A}(\beta,\gamma)-\int_0^\infty K'(\beta,\gamma;\delta)A^{(i)}(\delta,\gamma)\,d\delta, \tag{53'}$$

poate să aproximeze soluția ecuației (52), în mod analog cu cel corespunzător cazului plan [9].

6. *Starea de tensiune și starea de deformație.* Dacă $a(\beta,\gamma)$, $b(\gamma,\alpha)$ sînt funcții pare în raport cu variabilele β, γ, respectiv γ, α, sarcinile normale (16) se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned}p_x(y,z)&=\int_0^\infty\int_0^\infty a(\beta,\gamma)\cos\beta y\cos\gamma z\,d\beta\,d\gamma,\\ p_y(z,x)&=\int_0^\infty\int_0^\infty b(\gamma,\alpha)\cos\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma\,d\alpha.\end{aligned} \tag{54}$$

Introducem funcțiile

$$\begin{aligned}\Phi_1(\theta s)&=(2+\theta s)e^{-\theta s},\\ \Phi_2(\theta s)&=(1+\theta s)e^{-\theta s},\\ \Phi_3(\theta s)&=\theta s\,e^{-\theta s},\\ \Phi_4(\theta s)&=(1-\theta s)\,e^{-\theta s},\\ \Phi_5(\theta s)&=-(2-\theta s)e^{-\theta s},\\ \Phi_6(\theta s)&=2e^{-\theta s},\end{aligned} \tag{55}$$

unde

$$\theta=\lambda,\ \mu, \tag{55'}$$

$$s=x,\ y. \tag{55''}$$

Pentru a ușura calculul, observăm că între aceste funcții există următoarele relații diferențiale

$$\frac{d\Phi_1(\theta s)}{d(\theta s)} = -\Phi_2(\theta s), \quad \frac{d\Phi_2(\theta s)}{d(\theta s)} = -\Phi_3(\theta s),$$
$$\frac{d\Phi_3(\theta s)}{d(\theta s)} = \Phi_4(\theta s), \quad \frac{d\Phi_4(\theta s)}{d(\theta s)} = \Phi_5(\theta s). \tag{56}$$

Notăm de asemenea

$$\Phi_{p-q}(\theta s_p) = \Phi_p(\theta s) - \frac{1}{m}\Phi_q(\theta s) \quad (p, q = 1, 2, \ldots, 6). \tag{57}$$

Folosind notațiile introduse mai sus, putem scrie starea de tensiune (26), (26′) sub forma

$$\sigma_x = \int_0^\infty\int_0^\infty \lambda A(\beta, \gamma)\Phi_2(\lambda x)\cos\beta y\cos\gamma z\,d\beta\,d\gamma +$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \mu B(\gamma, \alpha)\left[\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2\Phi_4(\mu y) + \frac{1}{m}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2\Phi_6(\mu y)\right]\cos\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma\,d\alpha,$$
$$\sigma_y = \int_0^\infty\int_0^\infty \lambda A(\beta,\gamma)\left[\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2\Phi_4(\lambda x) + \frac{1}{m}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2\Phi_6(\lambda x)\right]\cos\beta y\cos\gamma z\,d\beta\,d\gamma +$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \mu B(\gamma, \alpha)\Phi_2(\mu y)\cos\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma\,d\alpha, \tag{58}$$
$$\sigma_z = \int_0^\infty\int_0^\infty \lambda A(\beta, \gamma)\left[\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2\Phi_4(\lambda x) + \frac{1}{m}\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2\Phi_6(\lambda x)\right]\cos\beta y\cos\gamma z\,d\beta d\gamma +$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \mu B(\gamma,\alpha)\left[\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2\Phi_4(\mu y) + \frac{1}{m}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2\Phi_6(\mu y)\right]\cos\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma d\alpha,$$

$$\tau_{yz} = -\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\beta\gamma}{\lambda}A(\beta,\gamma)\Phi_{4-6}(\lambda x)\sin\beta y\sin\gamma z d\beta d\gamma +$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \gamma B(\gamma,\alpha)\Phi_3(\mu y)\sin\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma d\alpha,$$
$$\tau_{zx} = \int_0^\infty\int_0^\infty \gamma A(\beta,\gamma)\Phi_3(\lambda x)\cos\beta y\sin\gamma z d\beta d\gamma -$$
$$-\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\gamma\alpha}{\mu}B(\gamma,\alpha)\Phi_{4-6}(\mu y)\sin\gamma z\sin\alpha x\,d\gamma d\alpha, \tag{58′}$$
$$\tau_{xy} = \int_0^\infty\int_0^\infty \beta A(\beta,\gamma)\Phi_3(\lambda x)\sin\beta y\cos\gamma z\,d\beta d\gamma +$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha B(\gamma,\alpha)\Phi_3(\mu y)\cos\gamma z\sin\alpha x\,d\gamma d\alpha.$$

Bazîndu-ne pe rezultatele date la punctul 2 și observînd că s-au folosit funcții armonice de forma (8), (8'), se poate scrie starea de deformație sub forma

$$\frac{mE}{1+m}[u-(-y\omega_z^\circ+z\omega_y^\circ+u_0)]=$$

$$=-\int_0^\infty\int_0^\infty A(\beta,\gamma)\Phi_{1-6}(\lambda x)\cos\beta y\cos\gamma z\,d\beta d\gamma+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\mu}{\alpha}B(\gamma,\alpha)\Phi_{4-6}(\mu y)\cos\gamma z\sin\alpha x\,d\gamma d\alpha,$$

$$\frac{mE}{1+m}[v-(-z\omega_x^\circ+x\omega_z^\circ+v_0)]=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\beta}{\lambda}A(\beta,\gamma)\Phi_{4-6}(\lambda x)\sin\beta y\cos\gamma z\,d\beta d\gamma-$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty B(\gamma,\alpha)\Phi_{1-6}(\mu y)\cos\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma d\alpha, \tag{59}$$

$$\frac{mE}{1+m}[w-(-x\omega_y^\circ+y\omega_x^\circ+w_0)]=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\gamma}{\lambda}A(\beta,\gamma)\Phi_{4-6}(\lambda x)\cos\beta y\sin\gamma z\,d\beta d\gamma+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\gamma}{\mu}B(\gamma,\alpha)\Phi_{4-6}(\mu y)\sin\gamma z\cos\alpha x d\gamma d\alpha,$$

unde mișcarea de corp rigid poate să fie precizată prin anumite condiții de fixitate în spațiu. De exemplu, dacă pentru punctul O se anulează deplasarea și rotația, adică dacă se pun condițiile

$$u=0,\qquad c=0,\qquad w=0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}=0,\quad\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0, \tag{60}$$

găsim că rotațiile sînt nule

$$\omega_x^\circ=\omega_y^\circ=\omega_z^\circ=0, \tag{61}$$

iar deplasările de corp rigid sînt date de

$$u_0=\frac{2(m^2-1)}{m^2E}\int_0^\infty\int_0^\infty A(\beta,\gamma)\cos\beta y\cos\gamma z\,d\beta\,d\gamma,$$

$$v_0=\frac{2(m^2-1)}{m^2E}\int_0^\infty\int_9^\infty B(\gamma,\alpha)\cos\gamma z\cos\alpha x\,d\gamma d\alpha, \tag{61'}$$

$$w_0=0.$$

În ceea ce privește tensiunile și deplasările pe planele de separație, se obțin rezultate remarcabile. Tensiunile normale pe planul $x = 0$ vor fi date de

$$\sigma_y(0, y, z) = p_x(y, z) -$$

$$-\left(1 - \frac{2}{m}\right)\int_0^\infty\int_0^\infty \lambda A(\beta, \gamma)\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 \cos \beta y \cos \gamma z \, d\beta \, d\gamma +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mu B(\gamma, \mu)\left[\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2\left(1 + \mu y - \frac{2}{m}\right) + 2\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2 \mu y\right] e^{-\mu y} \cos \gamma z \, d\gamma \, d\alpha,$$

$$\sigma_z(0, y, z) = p_x(y, z) - \tag{62}$$

$$-\left(1 - \frac{2}{m}\right)\int_0^\infty\int_0^\infty \lambda A(\beta, \gamma)\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2 \cos \beta y \cos \gamma z \, d\beta d\gamma +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \mu B(\gamma, \alpha)\left[1 - 2\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2\right]\left(1 - \mu y - \frac{2}{m}\right) e^{-\mu y} \cos \gamma z \, d\gamma \, d\alpha,$$

iar tensiunea tangențială de

$$\tau_{yz}(0, y, z) = -\left(1 - \frac{2}{m}\right)\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\beta\gamma}{\lambda} A(\beta, \gamma) \sin \beta y \sin \gamma z \, d\beta dy + \tag{62'}$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \gamma B(\gamma, \alpha) \, \mu y e^{-\mu y} \sin \gamma z \, d\gamma \, d\alpha.$$

În ceea ce privește starea de deformație, deplasările în planul $x = 0$ vor fi date de

$$\frac{mE}{1+m}[v(0, y, z) - v_0] =$$

$$= \left(1 - \frac{2}{m}\right)\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\beta}{\lambda} A(\beta, \gamma) \sin \beta y \cos \gamma z \, d\beta \, d\gamma -$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty B(\gamma, \alpha)\left[2\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \mu y\right] e^{-\mu y} \cos \gamma z \, d\gamma \, d\alpha,$$

$$\frac{mE}{1+m} w(0, y, z) = \tag{63}$$

$$= \left(1 - \frac{2}{m}\right)\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\gamma}{\lambda} A(\beta, \gamma) \cos \beta y \sin \gamma z \, d\beta \, d\gamma +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\gamma}{\mu} B(\gamma, \alpha)\left(1 - \mu y - \frac{2}{m}\right) e^{-\mu y} \sin \gamma z \, d\gamma \, d\alpha,$$

iar deplasarea normală la acest plan va fi dată de

$$u(0, y, z) = u_0 - \frac{2(m^2 - 1)}{m^2 E}\int_0^\infty\int_0^\infty A(\beta, \gamma) \cos \beta y \cos \gamma z \, d\beta \, d\gamma. \tag{63'}$$

Starea de tensiune și starea de deformație care corespund la încărcarea simetrică în raport cu axa Ox și în raport cu axa Oy sînt astfel în întregime precizate.

Cazul de încărcare antisimetric în raport cu axele Ox și Oy poate fi studiat în mod analog.

7. *Cazuri particulare.* Există un caz particular care a fost menționat la punctul 3 fără a fi studiat, caz care nu este cuprins în studiul general făcut mai sus; este cazul unei sarcini normale, uniform distribuită pe una dintre fețele sfertului de spațiu elastic.

Fie, de exemplu, sfertul de spațiu elastic acționat pe fața $x = 0$ de o sarcină normală de compresiune, uniform distribuită, de intensitate p. Starea de tensiune va fi dată de

$$\sigma_x = -p, \qquad \sigma_y = \sigma_z = 0, \tag{64}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0, \tag{64'}$$

iar starea de deformație se poate scrie sub forma

$$u = \frac{px}{E}, \qquad v = -\frac{py}{mE}, \qquad w = -\frac{pz}{mE}. \tag{65}$$

În mod analog se studiază cazul sfertului de spațiu elastic, acționat pe fața $x = 0$, de exemplu, de o sarcină tangențială, de intensitate t, paralelă cu axa Oz. Starea de tensiune se scrie sub forma

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tag{66}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{xy} = 0, \qquad \tau_{zx} = t, \tag{66'}$$

iar starea de deformație devine

$$u = \frac{1+m}{mE} tz, \qquad v = 0, \qquad w = \frac{1+m}{mE} tx. \tag{67}$$

8. *Sfertul de spațiu elastic acționat de o sarcină tangențială locală.* Fie sfertul de spațiu elastic acționat de sarcinile tangențiale

$$\begin{aligned} t_{xy}(y, z) &= \int_0^\infty \int_0^\infty a'(\beta, \gamma) \cos \beta y \sin \gamma z \, d\beta \, d\gamma, \\ t_{xz}(y, z) &= \int_0^\infty \int_0^\infty a''(\beta, \gamma) \sin \beta y \cos \gamma z \, d\beta \, d\gamma, \end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned} t_{yz}(z, x) &= \int_0^\infty \int_0^\infty b'(\gamma, \alpha) \cos \gamma z \sin \alpha x \, d\gamma \, d\alpha, \\ t_{yx}(z, x) &= \int_0^\infty \int_0^\infty b''(\gamma, \alpha) \sin \gamma z \cos \alpha x \, d\gamma \, d\alpha \end{aligned} \tag{68'}$$

pe fețele $x = 0$, $y = 0$; am admis o antisimetrie de încărcare în raport cu axele Ox și Oy. Integralele duble Fourier utilizate pot reprezenta de asemenea și funcții generalizate.

Condițiile la limită se pun sub forma

$$\begin{aligned} &x = 0 : \sigma_x = 0, \qquad \tau_{xy} = t_{xy}(y, z), \qquad \tau_{xz} = t_{xz}(y, z), \\ &y = 0 : \sigma_y = 0, \qquad \tau_{yz} = t_{yz}(z, x), \qquad \tau_{yx} = t_{yx}(z, x); \end{aligned} \tag{69}$$

mai mult, starea de tensiune trebuie să se anuleze pentru $x \to \infty, y \to \infty$, $z \to \infty$.

Vom alege funcții de tensiune de forma

$$\begin{aligned} F_x &= \int_0^\infty \int_0^\infty [A_1'(\beta, \gamma) + \lambda x A_2'(\beta, \gamma)] e^{-\lambda x} \sin \beta y \sin \gamma z \, d\beta \, d\gamma + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty [B_1'(\gamma, \alpha) + \mu y B_2'(\gamma, \alpha)] e^{-\mu y} \sin \gamma z \sin \alpha x \, d\gamma \, d\alpha, \\ F_y &= \int_0^\infty \int_0^\infty [A_1''(\beta, \gamma) + \lambda x A_2''(\beta, \gamma)] e^{-\lambda x} \sin \beta y \sin \gamma z \, d\beta \, d\gamma + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty [B_1''(\gamma, \alpha) + \mu y B_2''(\gamma, \alpha)] e^{-\mu y} \sin \gamma z \sin \alpha x \, d\gamma \, d\alpha, \\ F_z &= \int_0^\infty \int_0^\infty [A_1'''(\beta, \gamma) + \lambda x A_2'''(\beta, \gamma)] e^{-\lambda x} \sin \beta y \sin \gamma z \, d\beta \, d\gamma + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty [B_1'''(\gamma, \alpha) + \mu y B_2'''(\gamma, \alpha)] e^{-\mu y} \sin \gamma z \sin \alpha x \, d\gamma \, d\alpha, \end{aligned} \tag{70}$$

cu notațiile (19), considerînd aceste integrale în sensul utilizat în teoria regularizării transformatelor Fourier, în teoria distribuțiilor [2].

Luăm de asemenea

$$F_{yz} = F_{zx} = F_{xy} = 0. \tag{71}$$

Funcțiile integrabile $A_i'(\beta, \gamma)$, $B_i'(\gamma, \alpha)$, $A_i''(\beta, \gamma), \ldots, B_i'''(\gamma, \alpha)$ $(i = 1, 2)$, cu $(-\infty < \alpha, \beta, \gamma < \infty)$, trebuie să fie precizate prin condițiile la limită. Condițiile la infinit sînt verificate automat, metoda de calcul utilizată corespunzînd unei transformate Fourier.

Folosind același procedeu de calcul, se pot obține starea de tensiune și starea de deformație pentru cazul sarcinilor tangențiale. Problema se reduce la integrarea unui sistem de patru ecuații integrale, care poate fi înlocuit prin două sisteme, avînd fiecare cîte două ecuații. Studiul acestor sisteme se poate face în mod analog în clasa funcțiilor generalizate.

Folosind funcțiile (55), (55'), (55''), (57), se obțin tensiunile normale sub forma

$$\sigma_x = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\beta\gamma}{\lambda^2} A'(\beta,\ \gamma)\,\Phi_3(\lambda x)\ \sin\ \beta y\ \sin\ \gamma z\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma\ -$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\gamma\alpha}{\mu^2}\left[\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2 B'(\gamma,\ \alpha)\Phi_{5-6}(\mu y)+B''(\gamma,\ \alpha)\Phi_6(\mu y)\right]\sin\gamma z\sin\alpha x\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\alpha,$$

$$\sigma_y = -\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\beta\gamma}{\lambda^2}\left[\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2 A'(\beta,\gamma)\Phi_{5-6}(\lambda x)-A''(\beta,\gamma)\Phi_6(\lambda x)\right]\sin\beta y\sin\gamma z\,\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma + \tag{72}$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\gamma\alpha}{\mu^2} B'(\gamma,\ \alpha)\,\Phi_3(\mu y)\sin\gamma z\sin\ \alpha x\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\alpha,$$

$$\sigma_z = -\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\beta\gamma}{\lambda^2}\left[\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 A'(\beta,\gamma)\Phi_{5-6}(\lambda x)+A''(\beta,\gamma)\Phi_6(\lambda x)\right]\sin\beta y\sin\gamma z\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma-$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\gamma\alpha}{\mu^2}\left[\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2 B'(\gamma,\ \alpha)\,\Phi_{5-6}(\mu y)-B''(\gamma,\ \alpha)\Phi_6(\mu y)\right]\sin\gamma z\ \sin\alpha x\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\alpha.$$

Tensiunile tangențiale vor fi date de

$$\tau_{yz} = \int_0^\infty\int_0^\infty \left\{\left(\frac{\beta\gamma}{\lambda^2}\right)^2 A'(\beta,\gamma)\ \Phi_{5-6}(\lambda x)\ +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}A'(\beta,\gamma)+\frac{\beta^2-\gamma^2}{\lambda^2}A''(\beta,\gamma)\right]\Phi_6(\lambda x)\right\}\cos\ \beta y\ \cos\ \gamma z\ \mathrm{d}\beta\ \mathrm{d}\gamma\ +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\alpha}{\mu}\left\{\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2 B'(\gamma,\ \alpha)\ \Phi_4(\mu y)\ +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}\,\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\mu^2}\,B'(\gamma,\ \alpha)\ +\ B''(\gamma,\ \alpha)\right]\Phi_6(\mu y)\right\}\cos\gamma z\ \sin\ \alpha x\ \mathrm{d}\gamma\ \mathrm{d}\alpha,$$

$$\tau_{zx} = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\beta}{\lambda}\left\{\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 A'(\beta,\ \gamma)\ \Phi_4(\lambda x)\ -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}\,\frac{\beta^2-\gamma^2}{\lambda^2}\,A'(\beta,\ \gamma)\ +\ A''(\beta,\ \gamma)\right]\Phi_6\ (\lambda x)\right\}\sin\ \beta y\ \cos\ \gamma z\ \mathrm{d}\beta\ \mathrm{d}\gamma\ + \tag{72'}$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \left\{\left(\frac{\gamma\alpha}{\mu^2}\right)^2 B'(\gamma,\ \alpha)\ \Phi_{5-6}(\mu y)\ +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}\,B'(\gamma,\ \alpha)\ +\ \frac{\gamma^2-\alpha^2}{\mu^2}\,B''(\gamma,\ \alpha)\ \Phi_6(\mu y)\right\}\cos\ \gamma z\ \cos\ \alpha x\ \mathrm{d}\gamma\ \mathrm{d}\alpha,\right.$$

$$\tau_{xy} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\gamma}{\alpha} \left\{ \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2 A'(\beta, \gamma)\, \Phi_4(\lambda x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}\frac{\beta^2 - \gamma^2}{\lambda^2} A'(\beta, \gamma) + A''(\beta, \gamma)\right] \Phi_6(\lambda x) \right\} \cos \beta y \sin \gamma z \, d\beta \, d\gamma +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\gamma}{\mu} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2 B'(\gamma, \alpha)\, \Phi_4(\mu y) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}\frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\mu^2} B'(\gamma, \alpha) + B''(\gamma, \alpha)\right] \Phi_6(\mu y) \right\} \sin \gamma z \cos \alpha x \, d\gamma \, d\alpha.$$

Starea de deformaţie se va exprima sub forma

$$\frac{mE}{1+m}\left[u - (-y\omega_z^0 + z\omega_y^0 + u_0)\right] =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta\gamma}{\lambda^3} A'(\beta, \gamma)\, \Phi_{2-6}(\lambda x) \sin \beta y \sin \gamma z \, d\beta \, d\gamma +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\gamma}{\mu^2} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2 B'(\gamma, \alpha)\, \Phi_5(\mu y) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{m}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2 B'(\gamma, \alpha) + B''(\gamma, \alpha)\right] \Phi_6(\mu y) \right\} \sin \gamma z \cos \alpha x \, d\gamma \, d\alpha,$$

$$\frac{mE}{1+m}\left[v - (-z\omega_x^0 + x\omega_z^0 + v_0)\right] =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\gamma}{\lambda^2} \left\{ \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2 A'(\beta, \gamma)\, \Phi_5(\lambda x) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{m}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 A'(\beta, \gamma) - A''(\beta, \gamma)\right] \Phi_6(\lambda x) \right\} \cos \beta y \sin \gamma z \, d\beta \, d\gamma + \quad (73)$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\gamma\alpha}{\mu^3} B'(\gamma, \alpha)\, \Phi_{2-6}(\mu y) \sin \gamma z \sin \alpha x \, d\gamma \, d\alpha,$$

$$\frac{mE}{1+m}\left[w - (-x\omega_y^0 + y\omega_x^0 + w_0)\right] =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{\lambda^2} \left\{ \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 A'(\beta, \gamma)\, \Phi_5(\lambda x) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{m}\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2 A'(\beta, \gamma) + A''(\beta, \gamma)\right] \Phi_6(\lambda x) \right\} \sin \beta y \cos \gamma z \, d\beta \, d\gamma +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha}{\mu^2} \left\{ \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2 B'(\gamma, \alpha)\, \Phi_5(\mu y) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{m}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2 B'(\gamma, \alpha) - B''(\gamma, \alpha)\right] \Phi_6(\mu y) \right\} \cos \gamma z \sin \alpha x \, d\gamma \, d\alpha,$$

unde mișcarea de corp rigid se poate preciza prin unele condiții de fixitate în spațiu. De exemplu, dacă se anulează deplasarea și rotația pentru originea O, adică dacă se pun condițiile (60), găsim că deplasările sînt nule

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0, \tag{74}$$

iar rotirile de corp rigid sînt date de

$$\omega_x^0 = -\frac{1+m}{m^2E}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\beta^2-\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\,[A'(\beta,\gamma) - mA''(\beta,\gamma)]\,d\beta\,d\gamma,$$

$$\omega_y^0 = -\frac{1+m}{m^2E}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\gamma^2-\alpha^2}{\gamma^2+\alpha^2}\,[B'(\gamma,\alpha) - mB''(\gamma,\alpha)]\,d\gamma\,d\alpha, \tag{74'}$$

$$\omega_z^0 = 0.$$

Funcțiile $A'(\beta,\gamma)$, $A''(\beta,\gamma)$, $B'(\gamma,\alpha)$, $B''(\gamma,\alpha)$ vor fi precizate de sistemul de ecuații integrale

$$\frac{1}{\lambda}A'(\beta,\gamma) + \frac{4}{\pi}\int_0^\infty K_1(\alpha,\beta,\gamma)\,B'(\gamma,\alpha)\,d\alpha -$$

$$-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty K_3(\alpha,\beta,\gamma)\,B''(\gamma,\alpha)\,d\alpha = \frac{a'(\beta,\gamma)}{\gamma} + \frac{a''(\beta,\gamma)}{\beta},$$

$$\frac{1}{\mu}B'(\gamma,\alpha) + \frac{4}{\pi}\int_0^\infty K_1(\beta,\alpha,\gamma)\,A'(\beta,\gamma)\,d\beta + \tag{75}$$

$$+\frac{4}{\pi}\int_0^\infty K_3(\beta,\alpha,\gamma)\,A''(\beta,\gamma)\,d\beta = \frac{b'(\gamma,\alpha)}{\alpha} + \frac{b''(\gamma,\alpha)}{\gamma},$$

$$\frac{2+m}{m\lambda}\,\frac{\beta^2-\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}A'(\beta,\gamma) + \frac{2}{\lambda}A''(\beta,\gamma) + \frac{4}{\pi}\int_0^\infty K_2(\alpha,\beta,\gamma)\,B'(\gamma,\alpha)\,d\alpha -$$

$$-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty K_3(\gamma,\beta,\alpha)\,B''(\gamma,\alpha)\,d\alpha = \frac{a'(\beta,\gamma)}{\gamma} - \frac{a''(\beta,\gamma)}{\beta}, \tag{75'}$$

$$\frac{2+m}{m\mu}\,\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\gamma^2+\alpha^2}B'(\gamma,\alpha) + \frac{2}{\mu}B''(\gamma,\alpha) - \frac{4}{\pi}\int_0^\infty K_2(\beta,\alpha,\gamma)\,A'(\beta,\gamma)\,d\beta -$$

$$-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty K_3(\gamma,\alpha,\beta)\,A''(\beta,\gamma)\,d\beta = \frac{b'(\gamma,\alpha)}{\alpha} - \frac{b''(\gamma,\alpha)}{\gamma},$$

unde s-au introdus nucleele

$$K_1(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\alpha^4\beta^2}{(\gamma^2+\alpha^2)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2} + \frac{1}{m}\,\frac{\alpha^4}{(\gamma^2-\alpha^2)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}, \tag{76}$$

$$K_2(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\alpha^2\beta^2(\alpha^2+2\gamma^2)}{(\gamma^2+\alpha^2)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2} - \frac{1}{m}\,\frac{\gamma^4}{(\gamma^2+\alpha^2)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)},$$

$$K_3(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\alpha^2}{(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}. \tag{76'}$$

Starea de tensiune şi starea de deformaţie pot fi astfel precizate în întregime. Cazul de încărcare simetric în raport cu axele Ox şi Oy, de forma

$$t_{xy}(y, z) = \int_0^\infty \int_0^\infty a'(\beta, \gamma) \cos\beta y \cos\gamma z \, d\beta \, d\gamma,$$
$$t_{xz}(y, z) = \int_0^\infty \int_0^\infty a''(\beta, \gamma) \sin\beta y \sin\gamma z \, d\beta \, d\gamma, \tag{77}$$

$$t_{yz}(z, x) = \int_0^\infty \int_0^\infty b'(\gamma, \alpha) \sin\gamma z \sin\alpha x \, d\gamma \, d\alpha,$$
$$t_{yx}(z, x) = \int_0^\infty \int_0^\infty b''(\gamma, \alpha) \cos\gamma z \cos\alpha x \, d\gamma \, d\alpha, \tag{77'}$$

poate fi studiat în mod analog.

9. *Aplicaţie.* Vom considera o integrală a sistemului de ecuaţii (39), avînd forma

$$A(\beta, \gamma) = K_1,$$
$$B(\gamma, \alpha) = K_2. \tag{78}$$

Se obţin funcţiile de încărcare

$$a(\beta, \gamma) = (K_1 + K_2)\lambda - \left(1 - \frac{2}{m}\right) K_2 \frac{\gamma^2}{\lambda},$$
$$b(\gamma, \alpha) = (K_1 + K_2)\mu - \left(1 - \frac{2}{m}\right) K_1 \frac{\gamma^2}{\mu}, \tag{79}$$

care ne conduc la sarcinile normale

$$p_x(y, z) = -\frac{\pi}{2r_x^3}\left[K_1 + K_2 + \left(1 - \frac{2}{m}\right) K_2 \frac{y^2 - 2z^2}{r_x^2}\right],$$
$$p_y(z, x) = -\frac{\pi}{2r_y^3}\left[K_1 + K_2 + \left(1 - \frac{2}{m}\right) K_1 \frac{x^2 - 2z^2}{r_y^2}\right]; \tag{80}$$

aceste încărcări pot aproxima într-un anumit mod concentrări de sarcini înspre muchea sfertului de spaţiu elastic.

Este util să descompunem încărcările după proprietăţile de simetrie sau antisimetrie în raport cu planul bisector $x = y$, luînd

$$K_1 = \pm K_2. \tag{81}$$

Fie întîi cazul de încărcare de compresiune, simetric, de forma

$$p_x(y, z) = -\frac{p}{r_x^5}\left[\left(3 - \frac{2}{m}\right) y^2 + \frac{4}{m} z^2\right],$$
$$p_y(z, x) = -\frac{p}{r_y^5}\left[\left(3 - \frac{2}{m}\right) x^2 + \frac{4}{m} z^2\right], \tag{82}$$

acționînd pe cele două plane de separație. Avem

$$a(\beta, \gamma) = \frac{2p}{\pi\lambda}\left[2\beta^2 + \left(1 + \frac{2}{m}\right)\gamma^2\right],$$
$$b(\gamma, \alpha) = \frac{2p}{\pi\mu}\left[2\alpha^2 + \left(1 + \frac{2}{m}\right)\alpha^2\right]. \tag{83}$$

Sistemul (39) sau ecuația (50) cu semnul superior conduc la soluția

$$A(\beta, \gamma) = \frac{2}{\pi}p,$$
$$B(\gamma, \alpha) = \frac{2}{\pi}p. \tag{84}$$

După ce am efectuat integralele, obținem starea de tensiune

$$\sigma_x = -3\frac{p}{R^3}\left\{1 - \frac{2}{3m} - \left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(\frac{z}{R}\right)^2 - \left(\frac{x}{R}\right)^2\left[3 - 5\left(\frac{z}{R}\right)^2\right]\right\},$$
$$\sigma_y = -3\frac{p}{R^3}\left\{1 - \frac{2}{3m} - \left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(\frac{z}{R}\right)^2 - \left(\frac{y}{R}\right)^2\left[3 - 5\left(\frac{z}{R}\right)^2\right]\right\}, \tag{85}$$
$$\sigma_z = -\frac{p}{R^3}\left[1 + \frac{2}{m} - 6\left(2 + \frac{1}{m}\right)\left(\frac{z}{R}\right)^2 + 15\left(\frac{z}{R}\right)^4\right],$$
$$\tau_{yz} = 3p\frac{yz}{R^5}\left[3 + \frac{2}{m} - 5\left(\frac{z}{R}\right)^2\right],$$
$$\tau_{zx} = 3p\frac{zx}{R^5}\left[3 + \frac{2}{m} - 5\left(\frac{z}{R}\right)^2\right], \tag{85'}$$
$$\tau_{xy} = 3p\frac{xy}{R^5}\left[3 - 5\left(\frac{z}{R}\right)^2\right]$$

și starea de deformație

$$u = -3\frac{1+m}{mE}p\frac{x}{R^3}\left[1 - \left(\frac{z}{R}\right)^2\right],$$
$$v = -3\frac{1+m}{mE}p\frac{y}{R^3}\left[1 - \left(\frac{z}{R}\right)^2\right], \tag{86}$$
$$w = -\frac{1+m}{mE}p\frac{z}{R^3}\left[1 + \frac{4}{m} - 3\left(\frac{z}{R}\right)^2\right].$$

În cazul sarcinilor antisimetrice, de forma

$$p_x(y, z) = p\frac{y^2 - 2z^2}{r_x^5},$$
$$p_y(z, x) = -p\frac{x^2 - 2z^2}{r_y^5}, \tag{87}$$

acţionînd pe cele două plane de separaţie, avem

$$a(\beta, \gamma) = \frac{2p}{\pi\lambda}\gamma^2,$$
$$b(\gamma, \mu) = -\frac{2p}{\pi\mu}\gamma^2. \tag{88}$$

Sistemul (39) sau ecuaţia (50) cu semnul inferior ne conduc la soluţia

$$A(\beta, \gamma) = \frac{2m}{m-2}\frac{p}{\pi},$$
$$B(\gamma, \alpha) = -\frac{2m}{m-2}\frac{p}{\pi}. \tag{89}$$

Obţinem cu uşurinţă starea de tensiune

$$\sigma_x = \frac{p}{R^3}\left[1 - 3\left(\frac{z}{R}\right) - \frac{3m}{m-2}\left(\frac{x}{R}\right)^2\left(2 - 5\frac{x^2-y^2}{R^2}\right)\right],$$
$$\sigma_y = -\frac{p}{R^3}\left[1 - 3\left(\frac{z}{R}\right)^2 - \frac{3m}{m-2}\left(\frac{y}{R}\right)^2\left(2 + 5\frac{x^2-y^2}{R^2}\right)\right], \tag{90}$$
$$\sigma_z = -3p\frac{x^2-y^2}{R^2}\left[1 - \frac{5m}{m-2}\left(\frac{z}{R}\right)^2\right],$$
$$\tau_{yz} = \frac{3}{m-2}p\frac{yz}{R^5}\left(2 + 5m\frac{x^2-y^2}{R^2}\right),$$
$$\tau_{zx} = -\frac{3}{m-2}p\frac{zx}{R^5}\left(2 - 5m\frac{x^2-y^2}{R^2}\right), \tag{90'}$$
$$\tau_{xy} = \frac{15\ m}{m-2}p\frac{xy(x^2-y^2)}{R^7}$$

şi starea de deformaţie

$$u = -\frac{1+m}{mE}p\frac{x}{R^3}\left(2 + \frac{3m}{m-2}\frac{x^2-y^2}{R^2}\right),$$
$$v = \frac{1+m}{mE}p\frac{y}{R^3}\left(2 - \frac{3m}{m-2}\frac{x^2-y^2}{R^2}\right), \tag{91}$$
$$w = -3\frac{1+m}{(m-2)E}p\frac{z(x^2-y^2)}{R^5}.$$

S-a introdus raza

$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{92}$$

și razele

$$r_x = \sqrt{y^2 + z^2}, \qquad r_y = \sqrt{z^2 + x^2}. \tag{92'}$$

Am prezentat acest caz ca o aplicație a metodei de calcul propusă, dar el are o importanță în sine însuși. Într-adevăr, acesta este un caz de încărcare pentru care rezultatele finale pot fi obținute sub formă finită ; asemenea cazuri sînt destul de rare în elasticitatea tridimensională.

10. *Cazul forțelor masice oarecare.* Vom considera de asemenea cazul sfertului de spațiu elastic acționat de forțele masice oarecare $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$, $Z = Z(x, y, z)$. Putem reprezenta, în general, aceste forțe masice cu ajutorul integralelor triple Fourier

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\alpha, \beta, \gamma) \sin \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma, \\ Y &= \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} b(\alpha, \beta, \gamma) \cos \alpha x \sin \beta y \cos \gamma z \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma, \\ Z &= \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha, \beta, \gamma) \cos \alpha x \cos \beta y \sin \gamma z \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma, \end{aligned} \tag{93}$$

unde s-a admis o simetrie în raport cu cele trei plane de coordonate.

Pentru componentele tensorului tensiune se obține cu ușurință un sistem de integrale particulare de aceeași formă, care verifică ecuațiile de echilibru și ecuațiile de continuitate. Punînd condițiile la limită, integralele triple devin integrale duble Fourier și ajungem la rezolvarea unei probleme analoge cu cea studiată anterior.

Cazul forțelor masice periodice poate fi considerat în mod analog, folosind serii triple Fourier sau serii Fourier pe o direcție și integrale Fourier pe celelalte direcții. Se obțin astfel rezultate generalizînd rezultatele date de noi [5] anterior, în cazul problemei plane.

Cazul sarcinilor concentrate interioare poate fi studiat în mod analog, observînd că aceste sarcini pot fi reprezentate cu ajutorul forțelor masice, deci sub forma (93).

11. *Semispațiul elastic.* Este interesant de observat că dacă una dintre fețele sfertului de spațiu elastic este aruncată la infinit, se obține semispațiul elastic care poate fi studiat în mod analog.

Pentru semispațiul elastic $x \geqslant 0$, acționat de o sarcină normală locală, simetrică în raport cu axele Oy și Oz, de exemplu de forma

$$p_x(y, z) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} a(\beta, \gamma) \cos \beta y \cos \gamma z \, d\beta \, d\gamma, \tag{94}$$

se pot folosi rezultatele obținute mai sus, luînd

$$A(\beta, \gamma) = \frac{a(\beta, \gamma)}{\lambda}, \qquad B(\gamma, \alpha) = 0. \tag{95}$$

Observăm că sistemul de ecuații integrale (39) este satisfăcut (a doua ecuație nu intervine în problemă ; ea poate fi de altfel considerată ca verificată, deoarece $b(\gamma, \alpha)$ este o funcție arbitrară).

Formulele (58), (58'), (59) ne permit în acest caz să exprimăm starea de tensiune și starea de deformație. De exemplu, tensiunea normală σ_x, normală la planul de separație, va fi dată de

$$\sigma_x = \int_0^\infty \int_0^\infty a(\beta, \gamma)\, \Phi_2(\lambda x) \cos \beta y \cos \gamma z \, d\beta \, d\gamma, \tag{96}$$

iar deplasarea normală la acest plan se va putea scrie sub forma

$$u = u_0 - \frac{1+m}{mE} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{a(\beta, \gamma)}{\lambda} \Phi_{1-6}(\lambda x) \cos \beta y \cos \gamma z \, d\beta \, d\gamma. \tag{97}$$

De asemenea, în cazul unei sarcini tangențiale locale, antisimetrică în raport cu axele Ox și Oy, de forma

$$\begin{aligned} t_{xy}(y, z) &= \int_0^\infty \int_0^\infty a'(\beta, \gamma) \cos \beta y \sin \gamma z \, d\beta \, d\gamma, \\ t_{xz}(y, z) &= \int_0^\infty \int_0^\infty a''(\beta, \gamma) \sin \beta y \cos \gamma z \, d\beta \, d\gamma, \end{aligned} \tag{98}$$

se pot folosi rezultatele obținute mai sus, luînd

$$A'(\beta, \gamma) = \lambda \left[\frac{a'(\beta, \gamma)}{\gamma} + \frac{a''(\beta, \gamma)}{\beta} \right], \tag{99}$$

$$A''(\beta, \gamma) = \frac{1}{\lambda} \left\{ [(1+m)\gamma^2 - \beta^2] \frac{a'(\beta, \gamma)}{\gamma} + [\gamma^2 - (1+m)\beta^2] \frac{a''(\beta, \gamma)}{\beta} \right\},$$

$$B'(\gamma, \alpha) = B''(\gamma, \alpha) = 0. \tag{99'}$$

Se observă că sistemul de ecuații integrale (75), (75') este satisfăcut (numai primele două ecuații intervin în calcul ; celelalte ecuații pot fi considerate ca verificate, deoarece $b'(\gamma, \alpha)$, $b''(\gamma, \alpha)$ sînt funcții arbitrare).

Starea de tensiune și starea de deformație pot fi exprimate cu ajutorul formulelor (72), (72'), (73). De exemplu, tensiunea normală σ_x, normală la planul de separație, va fi dată de

$$\sigma_x = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} [\beta a'(\beta, \gamma) + \gamma a''(\beta, \gamma)] \Phi_3(\lambda x) \sin \beta y \sin \gamma z \, d\beta \, d\gamma, \tag{100}$$

iar deplasarea normală la acest plan va fi precizată prin

$$w = \frac{1+m}{mE} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2} [\beta a'(\beta, \gamma) + \gamma a''(\beta, \gamma)] \Phi_{2-6}(\lambda x) \sin \beta y \sin \gamma z \, d\beta \, d\gamma. \tag{101}$$

12. *Concluzii.* Am studiat mai sus problema stării de tensiune și a stării de deformație într-un sfert de spațiu elastic, acționat de sarcini normale, periodice sau locale, pe planele de separație. Cazul forțelor masice oarecare a fost de asemenea luat în considerare. Rezultatele obținute pot fi generalizate cu ușurință pentru un unghi solid oarecare, folosind coordonate carteziene oblice, și utilizate pentru studiul efectului de colț într-un corp elastic tridimensional.

Starea de tensiune și starea de deformație au fost reprezentate cu ajutorul unor anumite funcții introduse la punctul 6. Trebuie să observăm că aceste funcții sînt tabulate [10], astfel că din punct de vedere practic calculul se poate face cu ușurință.

Constatăm încă că rezultatele obținute pentru sfertul de spațiu elastic pot fi utilizate de asemenea cu ușurință pentru semispațiul elast ic

Primită la redacție la 15 martie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. E. Almansi, *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$, Ann. di Matem., ser. 3, **5**, *2*, 1 (1898).
2. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщение функции и действия над ними*, Физматгиз, Москва, 1959.
3. P. P. Teodorescu, *Sur une solution générale du problème en espace de la théorie de l'élasticité*, *IX*ème Congrès Intern. de Méc. Appl., Bruxelles, 1956, Actes, **V**, 155 (1957).
4. — *Asupra problemei plane a teoriei elasticității în cazul unor forțe masice oarecare*, Acad. R.P.R., Bul. științ., secț. de șt. mat. și fiz., **IX**, *2*, 481 (1957).
5. — *Asupra calculului semispațiului elastic sub acțiunea unor sarcini periodice*, St. cerc. mec. apl., **VIII**, *3*, 831 (1957).
6. — *Asupra unor probleme spațiale ale teoriei elasticității*, St. cerc. mec. apl., **VIII**, *4*, 1101 (1957).
7. — *Fonctions de tension dans le problème tridimensionnel de la théorie de l'élasticité*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., **3 (51)**, 3, 425 (1959).
8. — *Sur le problème du coin plan élastique*, C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., Paris, **250**, *21*, 3446 (1960).
9. — *Sur le problème du quart de plan élastique*, Aplikace Mathematiky, Praha, **6**, *5*, 359 (1961).
10. — *Probleme plane în teoria elasticității*, vol. I. București, Edit. Acad. R.P.R., 1961.
11. — *Sur le problème du demi-quart d'espace élastique*, Bull. de l'Acad. Pol. des Sc., série des Sc. Techn., **XII**, *12*, 599 [871] (1964).
12. — *Asupra calculului optimei de spațiu elastic supusă acțiunii unor sarcini tangențiale*, An. Univ. București, ser. șt. nat., mat.-mec., **XIII**, *1*, 41 (1964).
13. — *Sur l'effet de coin en élasticitè tridimensionelle*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, **17**, *2*, 249 (1965).
14. — *Sur le problème du quart d'espace élastique. I*, Charges normales, Bull. de l'Acad. Pol. des Sc., série des Sc. Techn., **XIV**, *8*, (1966).
15. — *Sur le problème du quart d'espace élastique. II.* Charges tangentielles, Bull. de l'Acad Pol. des Sc., serie des Sc. Techn., **XIV**, *8*, (1966).

RADIERE PE PILOȚI — DETERMINAREA EFORTURILOR ÎN DALĂ ȘI PILOȚI[1)]

de A. CERNĂTESCU, profesor emerit
și N. UNGUREANU
Institutul politehnic Iași

539.3

Se determină eforturile în piloți în ipoteza că dala este elastică și are suprafața mediană deformată de formă aproximativ cilindrică sau dimensiunile dalei sînt astfel încît se poate asimila comportarea sa cu o placă aproximativ rigidă pe o direcție.
Soluția problemei se prezintă și sub formă matriceală.

Radierul elastic deformabil rezemat pe piloți este întîlnit la fundațiile diferitelor construcții, și îndeosebi la construcțiile inginerești fundate pe soluri care cer cu necesitate un atare sistem.

Determinarea eforturilor care apar din sarcinile transmise de construcția de deasupra atît în dală, cît și în piloții pe care se reazemă dala nu se face totdeauna ușor. În articolul de față ne propunem să expunem o metodă pentru determinarea acestor eforturi.

Ipotezele principale care stau la baza acestei metode sînt :

a) dala și piloții sînt executați din materiale cărora li se pot aplica ipotezele rezistenței materialelor ;

b) lungimea dalei este mare în raport cu lățimea (dală lungă) sau forțele exterioare au intensitate constantă pe lățime, iar piloții sînt distribuiți uniform pe direcția ei sau în direcția lățimii dala poate fi considerată rigidă ;

c) piloții au rigidități mult mai mici decît dala și se pot considera articulați în dală (cercetările experimentale au confirmat justețea acestei ipoteze) ;

d) vîrful piloților se reazemă pe un strat rezistent, astfel încît ei pot fi considerați articulați la vîrf,

[1)] Comunicată la Conferința de mecanică din 27—30 septembrie 1965.

e) rezultanta forțelor exterioare care acționează pe o secțiune transversală oarecare a dalei se găsește în planul longitudinal de simetrie al acesteia ;

f) axele longitudinale ale piloților sînt situate în plane paralele cu planul forțelor (fig. 1) ;

g) grosimea dalei este constantă în direcția lățimii ;

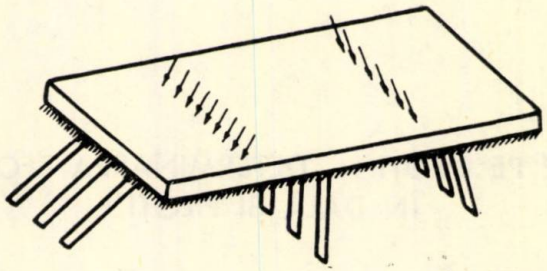


Fig. 1

h) se consideră că dala nu este în contact cu terenul.

În planul de încovoiere a dalei, direcțiile piloților și forțelor exterioare sînt oarecare. Materialul din care sînt confecționați piloții, lungimile și secțiunile lor pot fi diferite.

Datorită încărcărilor date de construcția de deasupra, atît piloții, cît și dala se vor deforma. Dala se deformează ca o placă așezată pe reazeme tasabile, iar piloții vor suferi scurtări sau lungiri date de forțele axiale ce se nasc în aceștia.

Deoarece lățimea dalei este mare, iar deformațiile ei în direcția lățimii sînt împiedecate, rigiditatea la încovoiere a dalei este

$$D = \frac{EI}{1 - \mu^2}. \tag{1}$$

Cînd grosimea dalei este constantă și se consideră o unitate de lățime, atunci rigiditatea la încovoiere este

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}, \tag{1'}$$

h = grosimea dalei, E și μ sînt constantele elastice ale dalei.

Dala poate fi privită ca o placă pe mai multe reazeme elastice de înclinări oarecare, solicitată la încovoiere cilindrică. Pentru rezolvarea problemei se folosește analogia cu grinda continuă pe reazeme înclinate ; forțele din legături vor fi în același timp forțele axiale din piloți.

Pentru o exprimare ușoară și intuitivă a ecuațiilor de echilibru elastic, se consideră o secțiune transversală a dalei ca fiind o încastrare care are deplasări de reazeme (tasări), de exemplu secțiunea din A cu deplasările u, v și θ (fig. 2).

În aceste condiții se adoptă ca sistem de bază grinda încastrată (fig. 3).

Ecuaţiile de echilibru elastic se scriu :

$$\begin{aligned}
&\delta^*_{11} Y_1 + \delta^*_{12} Y_2 + \ldots + \delta^*_{1n} Y_n + \delta^*_{1p} = v\cos\varphi_1 + u\sin\varphi_1 + a_1\theta\cos\varphi_1,\\
&\delta^*_{21} Y_1 + \delta^*_{22} Y_2 + \ldots + \delta^*_{2n} Y_n + \delta^*_{2p} = v\cos\varphi_2 + u\sin\varphi_2 + a_2\theta\cos\varphi_2,\\
&\ldots\ldots\ldots

CALCULUL COEFICIENȚILOR

Coeficienții de pe diagonala principală — δ^*_{ii} :

$$\delta^*_{ii} = \delta^*_{iid} + \delta^*_{iip},$$

unde

δ^*_{iid} este deplasarea dalei în punctul i pe direcția pilotului ii' pe sistemul de bază, cînd pe direcția pilotului acționează o forță unitară,

δ^*_{iip} — deplasarea axială a capului pilotului ii' sub acțiunea unei forțe axiale egală cu unitatea,

— coeficienții laterali — δ^*_{ik},

δ^*_{ik} — deplasarea dalei în punctul i pe direcția pilotului ii' pe sistemul de bază, cînd pe direcția pilotului kk' acționează o forță unitară,

δ^*_{ip} — termeni liberi care reprezintă deplasarea din i în direcția pilotului pe sistemul de bază sub acțiunea încărcărilor exterioare.

Pentru calculul coeficienților se face ipoteza că influența forțelor axiale și tăietoare din dală se neglijează, deci toți coeficienții se calculează luînd în considerație numai momentul încovoietor. Rezultă că toți coeficienții sînt dați de componentele verticale ale forțelor unitare de pe direcția piloților și, respectiv, componentele verticale ale forțelor exterioare :

$$\delta^*_{iid} = \int_0^{a_i} \frac{\overline{M}_i^{*2}}{D}\,dx = \int_0^{a_i} \frac{\overline{M}_i^2 \cos^2 \varphi_i}{D}\,dx = \delta_{iid} \cos^2 \varphi_i, \tag{3}$$

unde δ_{iid} este deplasarea pe direcția normală în i pe sistemul de bază, dată de o sarcină unitară perpendiculară pe axul dalei în i.

δ^*_{iip} depinde de legea de distribuție a forței axiale pe pilot. Dacă se consideră că întreaga sarcină se transmite vîrfului, atunci

$$\delta^*_{iip} = \frac{l_i}{E' A'_i}, \tag{4}$$

în care

E' reprezintă modulul de elasticitate al pilotului,

A'_i — secțiunea transversală a pilotului ii'.

$$\text{Deci } \delta^*_{ii} = \delta_{iid} \cos^2 \varphi_i + \frac{l_i}{E' A'_i}. \tag{5}$$

Analog se calculează

$$\delta^*_{ik} = \int_0^{a_i\,(a_k)} \frac{\overline{M}_i^* \overline{M}_k^*}{D}\,dx = \int_0^{a_i\,(a_k)} \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k}{D} \cos \varphi_i \cos \varphi_k\,dx = \delta_{ik} \cos \varphi_i \cos \varphi_k, \tag{6}$$

unde δ_{ik} este deplasarea în i pe direcția normală la axul dalei, dată de o forță unitară aplicată în k normală la axul dalei, și

$$\delta^*_{ip} = \int_0^{a_i} \frac{\overline{M}_i^* M_p}{D}\,dx = \int_0^{a_i} \frac{\overline{M}_i M_p}{D} \cos \varphi_i\,dx = \delta_{ip} \cos \varphi_i, \tag{7}$$

unde δ_{ip} este deplasarea în i pe direcţie normală la axul dalei, dată de forţele exterioare.

Termenii din dreapta ai ecuaţiilor (2) reprezintă deplasări ale sistemului de bază ca rigid în urma tasării încastrării din A.

Expresiile lor pentru un pilot ii' rezultă din figurile 4 a, b, c.

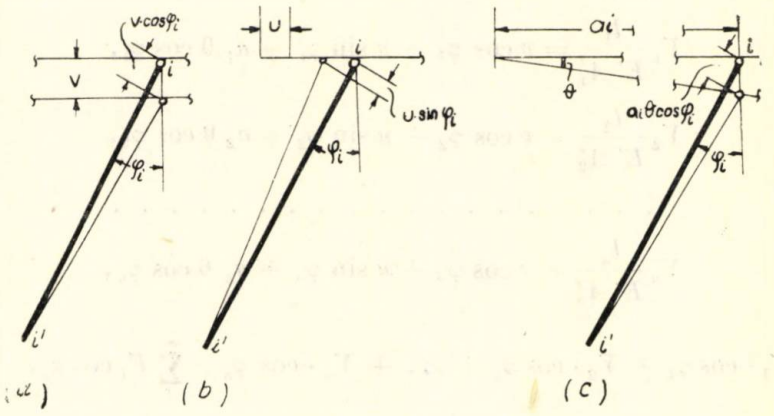


Fig. 4

Rezolvînd sistemul (2), se obţin forţele axiale Y_i dintr-o grupă de piloţi. Dacă la fiecare grupă corespunde un număr s de piloţi (distribuiţi uniform pe lăţime), atunci fiecare pilot se încarcă cu o forţă $\frac{Y_i}{s}$.

Pe sistemul de bază (fig. 3) acţionat de forţele Y_i şi forţele exterioare, se deduc eforturile din dală M, T şi N.

CAZURI PARTICULARE

1. Piloţi verticali şi sarcinile aplicate dalei verticale. Sistemul de ecuaţii (2) devine

$$\begin{aligned}
&\left(\delta_{11d} + \frac{l_1}{E' A_1'}\right) Y_1 + \delta_{12} Y_2 + \ldots + \delta_{1n} Y_n + \delta_{1p} = v + a_1 \theta,\\
&\delta_{21} Y_1 + \left(\delta_{22d} + \frac{l_2}{E' A_2'}\right) Y_2 + \ldots + \delta_{2n} Y_n + \delta_{2p} = v + a_2 \theta,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_{n1} Y_1 + \delta_{n2} Y_2 + \ldots + \left(\delta_{nnd} + \frac{l_n}{E' A_n'}\right) Y_n + \delta_{np} = v + a_n \theta,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = \sum_1^m F_j,\\
&a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \ldots + a_n Y_n = \sum_1^m F_j b_j.
\end{aligned} \tag{8'}$$

2. Radier de rigiditate mare (dală groasă). Rigiditatea dalei fiind foarte mare, se poate considera că $D \to \infty$ și în acest caz $\delta^*_{ik} \to 0$ și $\delta^*_{ip} \to 0$, iar $\delta^*_{ii} = \dfrac{l_i}{E' A'_1}$.

Sistemul (2) devine

$$\begin{aligned}
Y_1 \frac{l_1}{E' A'_1} &= v \cos \varphi_1 + u \sin \varphi_1 + a_1 \theta \cos \varphi_1, \\
Y_2 \frac{l_2}{E' A'_2} &= v \cos \varphi_2 + u \sin \varphi_2 + a_2 \theta \cos \varphi_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_n \frac{l_n}{E' A'_n} &= v \cos \varphi_n + u \sin \varphi_n + a_n \theta \cos \varphi_n,
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 \cdot \cos \varphi_1 + Y_2 \cdot \cos \varphi_2 + \ldots + Y_n \cdot \cos \varphi_n &= \sum_1^m F_j \cos \alpha_j, \\
Y_1 \cdot \sin \varphi_1 + Y_2 \cdot \sin \varphi_2 + \ldots + Y_n \cdot \sin \varphi_n &= \sum_1^m F_j \sin \alpha_j, \\
Y_1 \cdot a_1 \cdot \cos \varphi_1 + Y_2 \cdot a_2 \cdot \cos \varphi_2 + \ldots + Y_n \cdot a_n \cdot \cos \varphi_n &= \sum_1^m F_j \cdot b_j \cos \alpha_j.
\end{aligned} \tag{9'}$$

Întrucît Y_i depind numai de v, u și θ, sistemul se reduce la trei ecuații cu trei necunoscute. Avînd v, u și θ din (9), se deduc Y_i.

Dacă piloții au aceeași lungime și aceeași secțiune, ecuațiile (9) se scriu sub forma cunoscută

$$\begin{aligned}
u \, \Sigma \cos \varphi_i \sin \varphi_i + v \Sigma \cos^2 \varphi_i + \theta \Sigma a_i \cos^2 \varphi_i &= V, \\
u \, \Sigma \sin^2 \varphi_i + v \Sigma \cos \varphi_i \sin \varphi_i + \theta \, \Sigma a_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i &= H, \\
u \, \Sigma a_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i + v \Sigma a_i \cos^2 \varphi_i + \theta \Sigma a_i^2 \cos^2 \varphi_i &= M,
\end{aligned} \tag{10}$$

în care V și H reprezintă componentele rezultantei forțelor exterioare și M momentul forțelor exterioare în raport cu A. După rezolvarea sistemului (10), forțele din piloți se scriu

$$Y_i = v \cdot \cos \varphi_i + u \cdot \sin \varphi_i + a_i \cdot \theta \cdot \cos \varphi_i.$$

FORMA MATRICEALĂ DE DETERMINARE A EFORTURILOR DIN PILOȚI

Uneori numărul mare de necunoscute Y_i, egal cu numărul grupelor de piloți pe care reazemă o dală continuă, impune rezolvarea problemei cu ajutorul mașinilor electronice de calculat.

În acest caz se cere o prezentare matriceală a problemei.

Sistemul de ecuaţii (2) şi (2′) se scrie

$$\left(\delta_{11d}\cos\varphi_i + \frac{\delta_{11p}}{\cos\varphi_1}\right) Y_1 + \delta_{12}\cos\varphi_2 \cdot Y_2 + \ldots + \delta_{1n}\cos\varphi_n \cdot Y_n - v - \\ - \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot u - a_1\theta + \delta_{1p} = 0,$$

$$\delta_{21}\cdot\cos\varphi_1\cdot Y_1 + \left(\delta_{22d}\cos\varphi_2 + \frac{\delta_{22d}}{\cos\varphi_2}\right) Y_2 + \ldots + \delta_{2n}\cos\varphi_n \cdot Y_n - v - \\ - \operatorname{tg}\varphi_2 \cdot u - a_2\theta + \delta_{2p} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta_{n1}\cdot\cos\varphi_1\cdot Y_1 + \delta_{n2}\cdot\cos\varphi_2\cdot Y_2 + \ldots + \left(\delta_{nnp}\cos\varphi_n + \frac{\delta_{nnp}}{\cos\varphi_n}\right) Y_n - v - \\ - \operatorname{tg}\varphi_n \cdot u - a_n\theta + \delta_{np} = 0, \qquad (11)$$

$$\cos\varphi_1\cdot Y_1 + \cos\varphi_2\cdot Y_2 + \ldots + \cos\varphi_n\cdot Y_n - \sum_1^m F_j\cos\alpha_j = 0,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1\cdot\cos\varphi_i\, Y_1 + \operatorname{tg}\varphi_2\cdot\cos\varphi_2\cdot Y_2 + \ldots + \operatorname{tg}\varphi_n\cdot\cos\varphi_n\cdot Y_n - \\ - \sum_1^m F_j\cdot\sin\alpha_j = 0,$$

$$a_1\cdot\cos\varphi_1\cdot Y_1 + a_2\cdot\cos\varphi_2\cdot Y_2 + \ldots + a_n\cdot\cos\varphi_n\cdot Y_n - \\ - \sum_1^m F_j\cdot b_j\cos\alpha_j = 0,$$

iar sub formă matriceală

$$AY + B = 0, \qquad (12)$$

în care A este în cazul general o matrice pătrată de ordinul $n + 3$ nesingulară, iar Y şi B două matrice-coloană.

Matricea A se poate scrie ca o sumă de două matrice $A = C + D$ de acelaşi ordin, D fiind o matrice diagonală. Atît C cît şi D se pot substitui fiecare cu un produs de două matrice, astfel :

$$C = \triangle \cdot \oint =$$

$$= \begin{Vmatrix} \delta_{11d} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} & -1 & -\operatorname{tg}\varphi_1 & -a_1 \\ \delta_{21} & \delta_{22d} & \ldots & \delta_{2n} & -1 & -\operatorname{tg}\varphi_2 & -a_2 \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nnd} & -1 & -\operatorname{tg}\varphi_n & -a_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{tg}\varphi_1 & \operatorname{tg}\varphi_2 & \ldots & \operatorname{tg}\varphi_n & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\varphi_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \cos\varphi_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

iar

$$D=\triangle_1\cdot\oint_1=$$

$$=\begin{Vmatrix} \delta_{11p} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22p} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \delta_{nnp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{1}{\cos\varphi_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos\varphi_2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\cos\varphi_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Y este matricea-coloană a forţelor necunoscute din piloţi Y_i şi deplasărilor necunoscute v, u şi θ, iar B matricea-coloană a termenilor liberi :

$$Y=\begin{Vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \\ v \\ u \\ \theta \end{Vmatrix} \qquad B=\begin{Vmatrix} \delta_{1p} \\ \delta_{2p} \\ \vdots \\ \delta_{np} \\ \sum_1^m F_j\cos\alpha_j \\ \sum_1^m F_j\sin\alpha_j \\ \sum_1^m F_j b_j\cos\alpha_j \end{Vmatrix}$$

În consecinţă, ecuaţia (12) se scrie sub forma

$$\left(\triangle\cdot\oint+\triangle_1\cdot\oint_1\right)Y+B=0, \tag{13}$$

iar soluţia acestei ecuaţii matriceale este

$$Y=-\left(\triangle\cdot\oint+\triangle_1\cdot\oint_1\right)^1 B. \tag{14}$$

Soluţia ecuaţiei matriceale (12) pusă sub forma (14) poate fi uşor programată la o maşină electronică de calculat şi se obţin astfel forţele axiale din piloţi şi, prin urmare, eforturile din dală.

Primită la redacţie la 9 decembrie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. André Paduart. *Calcul des semelles de fondation de raideur finie reposant sur pieux verticaux et inclinés.* Annales des travaux publics de Belgique, août 1949.
2. Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицин, *Практические методы расчета фундаментальных балок и плит на упругом основании без гипотезы Винклера*, Москва, Стройиздат, 1947.

CONSIDERAȚII ASUPRA APARIȚIEI VARIAȚIILOR BRUȘTE DE VITEZĂ ÎN DIFERITE SCURGERI TRANZIȚIONALE[1)]

ȘT. N. SĂVULESCU
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

În această lucrare, autorul prezintă rezultatele obținute cu firul cald asupra variațiilor bruște de viteză (*spikes*) și în alte scurgeri tranziționale decît stratul-limită pe placa plană. Lucrînd în condiții speciale (viteze mici, perturbații ale curentului exterior), s-au obținut aceste variații bruște în stratul-limită cu gradient de presiune, în scurgerea de intrare într-un canal și în dîrele unor corpuri simetrice și nesimetrice. Interpretarea fizică și analiza teoretică duc la concluzia că mecanismul instabilității secundare a unui profil inflexibil variabil în timp, generat de transportul și de deformația nucleului de vîrtej, nu este unic pentru explicația acestor variații bruște.

1. INTRODUCERE

Scurgerile cu regim de tranziție de la mișcarea laminară la cea turbulentă formează actualmente obiectul multor cercetări aprofundate de mecanica și fizica fluidelor. Iată cîteva din cauzele principale ale acestui interes actual :

— mecanismul nașterii, evoluției și organizării medii a perturbațiilor din scurgerile laminare prezintă un interes științific direct de cunoaștere a unui fenomen fundamental al scurgerii fluidelor ;

— există numeroase cazuri de scurgere în care cunoștințele asupra mecanismului tranziției constituie o necesitate practică esențială : profile aviatice „laminare", filme de lubrifiant în lubrificația cu gaze la turații ridicate, pelicule subțiri de lichid în tehnica fotografică, elemente de pneumonică etc. ;

[1)] Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **11**, *5*, (1966) (în limba franceză)

ST. CERC. MEC. APL. TOM 23 NR. 5 P. 1325–1341 BUCUREȘTI 1966

— în sfîrșit, clarificarea acestui fenomen va permite caracterizarea riguroasă a unei scurgeri reale. Definițiile actuale de regim „laminar" și regim „turbulent", bazate în general pe caracteristici medii (profil de viteze, de temperaturi etc.), sînt insuficiente pentru a da o imagine asupra structurii scurgerii. Existența și natura fluctuațiilor de viteză, presiune, temperaturi din orice scurgere reală modifică sensibil aceste caracteristici medii în numeroase cazuri.

În fond, orice scurgere reală reprezintă o combinare în timp și spațiu a unei scurgeri laminare și a unei scurgeri turbulente, noțiunile de „laminar" și „turbulent" fiind concepte ideale legate de gradul de organizare statistică a fluctuațiilor prezente în scurgerea respectivă.

În mod deosebit atenția cercetărilor actuale se îndreaptă spre acel stagiu al tranziției în care apar variații bruște de viteză, evidente în înregistrările cu fir cald [1], [2], [3] și deduse din unele vizualizări [4]. Dacă pentru stagiile liniare și neliniare ale tranziției există numerose cercetări teoretice, pentru studiul acestui stagiu de apariție a salturilor bruște nu cunoaștem decît ideea instabilității secundare, care presupune existența unui profil inflexional, variabil în timp, dat de rezultate experimentale [5]. Explicația acestei lipse de cercetări teoretice constă, după părerea noastră, în faptul că descompunerea frecvent utilizată

$$\bar{V} = \bar{V}_{\text{med}} + \bar{v}', \qquad P = p_{\text{med}} + p',$$

cu condiția

$$v' \ll V_{\text{med}}, \qquad p' \ll p_{\text{med}},$$

este inadecvată pentru acest stadiu al tranziției. Astfel liniarizările sau introducerea termenilor neliniari în ecuațiile de mișcare nu pot depăși un stadiu de variații continue, relativ lente, ale vitezei sau presiunii. Bineînțeles, rămîne în picioare și acuzația mai gravă adusă ecuației Navier-Stokes de a fi inadecvată pentru reprezentarea mișcării în acest stagiu avansat al tranziției.

În schimb, există suficiente cercetări experimentale care au relevat extrem de numeroase detalii ale acestui stagiu cu ajutorul anemometriei [1], [2] sau printr-o tehnică specială de vizualizare [4]. Aici dificultatea esențială constă în interpretarea rezultatelor experimentale din cauza diferențelor existente între condițiile de experimentare, metoda experimentală și limbajul fizic utilizat pentru descrierea fenomenelor înregistrate. De exemplu, definiția vîrtejului discret în scurgere reală cu frecare este încă vagă. Întrucît cercetările experimentale de pînă acum s-au limitat la studiul stratului-limită pe placa plană, în lucrarea de față se prezintă unele rezultate experimentale obținute în Laboratorul de strat-limită și turbulență al Secției aeromecanică din Institutul de mecanica fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România, cu primul obiectiv de a constata generalitatea variațiunilor bruște de viteză în ultimul stadiu al tranziției diferitelor scurgeri. Sînt prezentate de asemenea unele interpretări bazate pe formularea integro-diferențială a ecuației stratului-limită.

2. REZULTATE EXPERIMENTALE

Rezultatele experimentale se referă la realizarea unor scurgeri tranziționale care să prezinte variații bruște de viteză, denumite în literatura de specialitate [1],[2] *spike*. Prezentăm mai jos, în figura 1, oscilogramele și vizualizările obținute în diferite cazuri.

Din examinarea critică a acestor rezultate se desprind următoarele observații :

1. Un prim punct de clarificat îl constituie *generalitatea fenomenului*. Într-adevăr, după cum se vede în figura 1, a fost cercetat *in extenso* cazul stratului-limită fără gradient de presiune [1], [2], [3], [4]. În schimb, nu există încă studii asupra altor cazuri și primul obiectiv al lucrării de față îl constituie obținerea unor variații bruște de viteză în diverse scurgeri : strat-limită cu gradient de presiune (fig. 1 *e*), scurgerea de intrare într-un canal bidimensional (fig. 1 *f*), scurgerea în dîra limitată a unor obstacole (fig. 1 *g* și 1 *h*). Se observă că rezultatele din urmă au fost obținute la viteze de scurgere foarte mici, aproximativ 1 m/s. Aceste rezultate sînt în contradicție cu datele cunoscute cu privire la tranziția în dîre și jeturi, unde n-au fost observate aceste variații bruște [1]. Explicația acestor neconcordanțe constă, după aprecierea noastră, în faptul că în experiențele pe care le-am efectuat am pus în evidență acest stagiu printr-o alegere potrivită a regimului de scurgere, în timp ce alte experiențe, efectuate la viteze mai mari, au diminuat sensibil extinderea acestui stagiu. În acest mod înregistrările n-au putut surprinde exact punctele cu variații bruște de viteză, după cum s-a întîmplat și cu primele cercetări asupra tranziției pe placa plană.

2. În legătură cu aceasta, o caracteristică importantă este *complexitatea de structură a fenomenului*. În figura 1 *a* se vede că s-au obținut patru aspecte diferite ale înregistrării pentru variații spațiale mult mai mici decît grosimea stratului-limită (δ). De asemenea, în figura 1 *e*, variații mici ale curentului exterior și ale punctului de înregistrare conduc la oscilograme complet deosebite. Extrema sensibilitate de producere a fenomenului față de mici variații în timp și spațiu se traduce fizic prin existența unui *sistem de cantități fizice* (de ex. vîrtejuri discrete), iar din punct de vedere matematic prin *contribuția a numeroși termeni* în ecuațiile ce descriu fenomenul.

3. În sfîrșit, în figurile 1 *a*, 1 *b*, 1 *c*, 1 *d*, 1 *j*, 1 *g* și 1 *h* se remarcă *determinismul fenomenului*. Este prezentă întotdeauna o fluctuație primară peste care se suprapune o fluctuație secundară, exact în aceleași condiții. Astfel, figura 1*a* prezintă stagii de tranziție cu un vîrf și cu două vîrfuri suprapuse oscilațiilor primare Tollmien-Schlichting. În figura 1 *e*, cum fluctuațiile primare n-au un caracter regulat, nici cele secundare nu oferă un aspect reproductibil. Ceea ce însă este izbitor e deosebirea netă dintre fluctuația primară și cea secundară, care apare în general acolo unde $\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$, u fiind fluctuația primară. De asemenea, o caracteristică

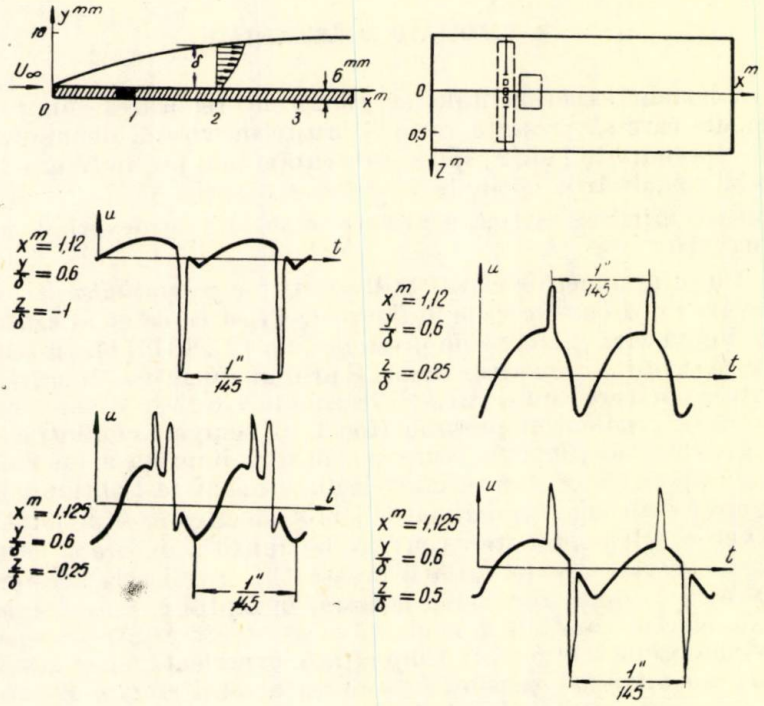


Fig. 1*a*

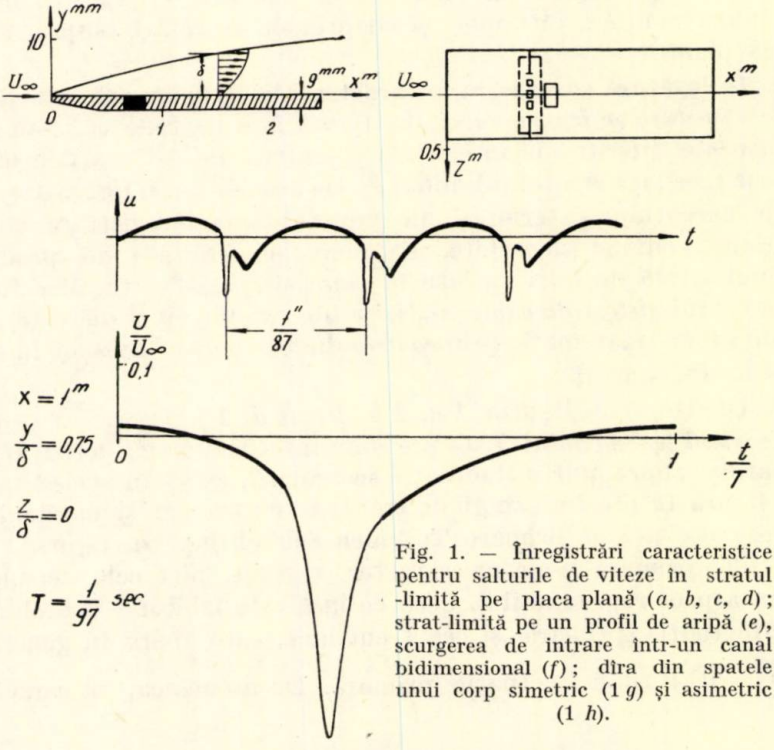


Fig. 1*b*

Fig. 1. — Înregistrări caracteristice pentru salturile de viteze în stratul -limită pe placa plană (*a*, *b*, *c*, *d*); strat-limită pe un profil de aripă (*e*), scurgerea de intrare într-un canal bidimensional (*f*); dîra din spatele unui corp simetric (1 *g*) și asimetric (1 *h*).

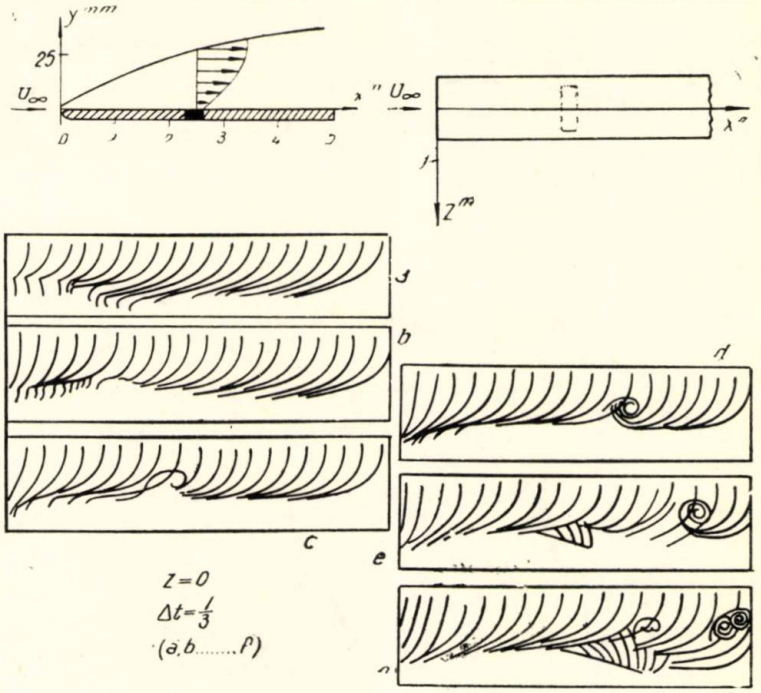

y mm
25
U_∞
0 1 2 3 4 5
x m
U_∞
1
z m
a
b
c
d
e
f
z = 0
Δt = 1/3
(a, b ..... f)

Fig. 1c

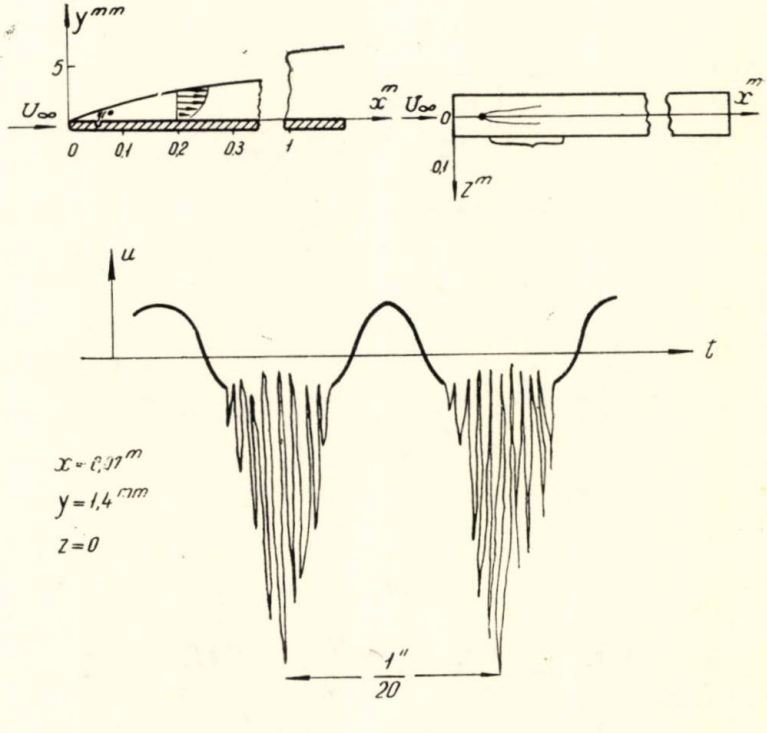

y mm
5
U_∞
0 0,1 0,2 0,3 1
x m
U_∞
0
0,1
z m
x m
u
t
x = 0,37 m
y = 1,4 mm
z = 0
1''
20

Fig. 1d

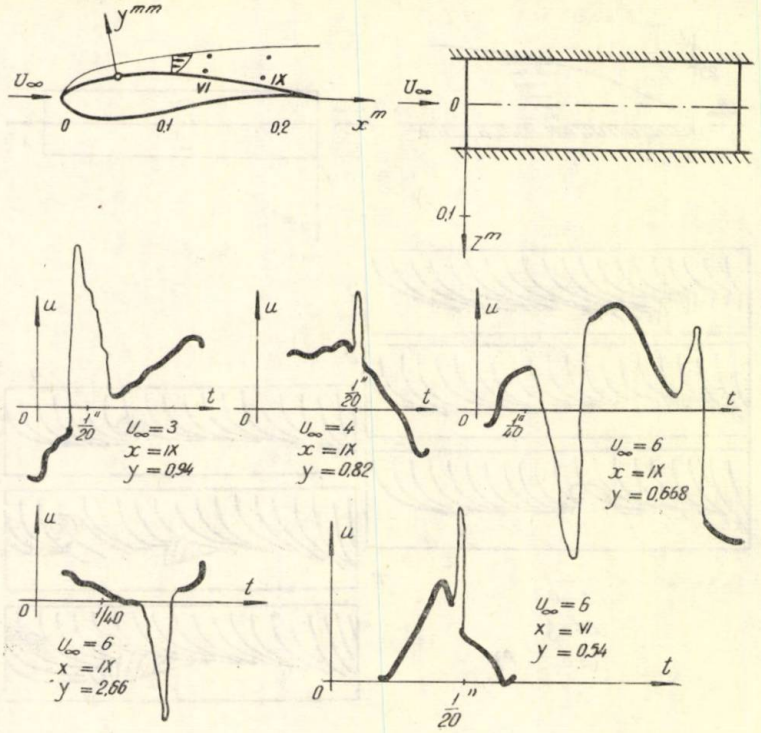
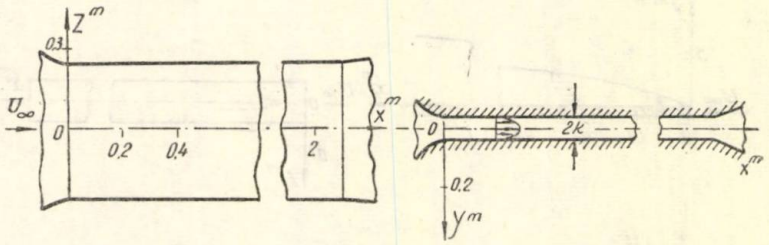
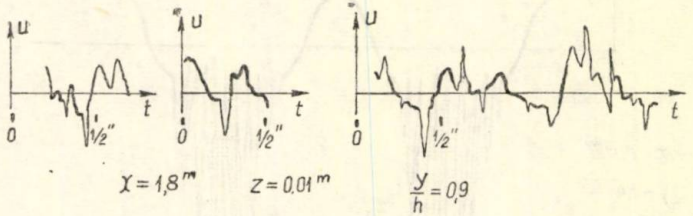

y m m
U∞
VI
IX
0
0,1
0,2
x m
U∞
0
0,1
Z m
u
t
0
1/20"
U∞ = 3
x = IX
y = 0,94
u
t
0
1/20"
U∞ = 4
x = IX
y = 0,82
u
t
0
1/20"
U∞ = 6
x = IX
y = 0,668
u
t
0
1/40
U∞ = 6
x = IX
y = 2,66
u
t
0
1/20"
U∞ = 6
x = VI
y = 0,54

Fig. 1e


Z m
0,3
U∞
0
0,2
0,4
2
x m
0
2k
0,2
y m
x m


u
t
0
1/2"
u
t
0
1/2"
u
t
0
1/2"
X = 1,8 m
Z = 0,01 m
y/h = 0,9

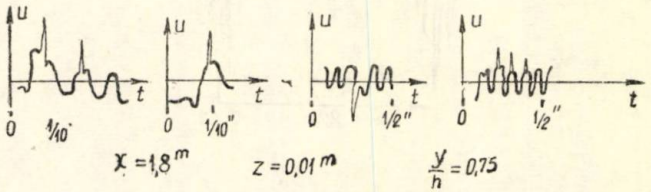

u
t
0
1/10
u
t
0
1/10"
u
t
0
1/2"
u
t
0
1/2"
X = 1,8 m
Z = 0,01 m
y/h = 0,75

Fig. 1f

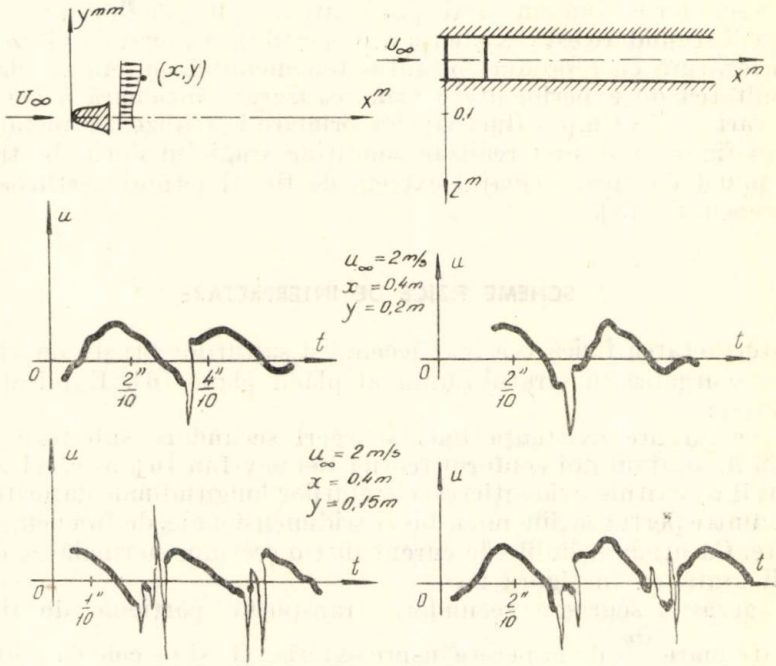

y mm
(x,y)
U∞
x m
U∞
x m
0,1
Z m
u
t
0
2"/10
4"/10
u∞ = 2 m/s
x = 0,4 m
y = 0,2 m
u
t
0
2"/10
u
t
0
1"/10
u∞ = 2 m/s
x = 0,4 m
y = 0,15 m
u
t
0
2"/10

Fig. 1*g*

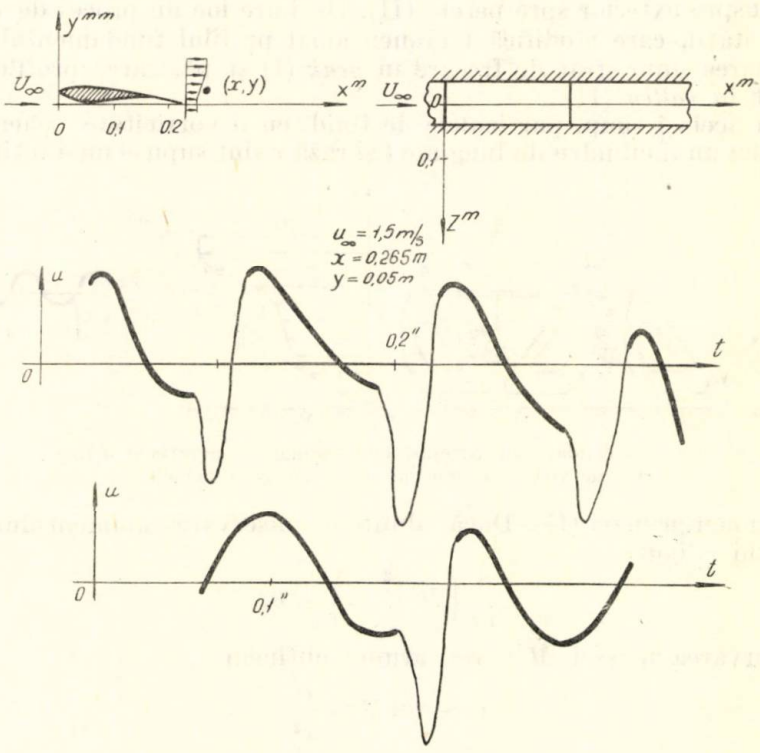

y mm
U∞
(x,y)
x m
0
0,1
0,2
U∞
x m
0
0,1
Z m
u∞ = 1,5 m/s
x = 0,265 m
y = 0,05 m
u
0,2"
t
0
u
t
0
0,1"

Fig. 1*h*

comună a scurgerilor fundamentale peste care se suprapun fluctuaţii primare şi fluctuaţii secundare este existenţa unui profil inflexional de viteze medii.

În legătură cu reproductibilitatea fenomenului, putem să observăm şi posibilitatea de experimentare prin realizarea staţionară a condiţiilor pe care variaţia în timp a fluctuaţiilor primare le realizează instantaneu. Astfel, în figura 1 *d* s-au realizat condiţiile stagiului dorit de tranziţie într-un punct dat prin reglajul extrem de fin al jetului perturbator de mică intensitate [3].

3. SCHEME FIZICE DE INTERPRETARE

Interpretarea fizică cea mai recentă a salturilor bruşte de viteză se referă la scurgerea în stratul-limită al plăcii plane [6]. Explicaţia este următoarea :

— se admite existenţa unei scurgeri secundare sub forma unor fluctuaţii de ordinul doi conform teoriei Benney-Lin [6], al cărei rezultat principal îl constituie evidenţierea vîrtejurilor longitudinale datorite interacţiunii dintre perturbaţiile mici, bi- şi tridimensionale, de frecvenţe foarte apropiate. Ca urmare, liniile de curent într-o secţiune normală pe direcţia scurgerii arată ca în figura 2 ;

— această scurgere secundară transportă particule de fluid cu vorticitate mare $\frac{\partial u}{\partial y}$ de la perete înspre exterior (I) şi pe cele cu vorticitate mică dinspre exterior spre perete (II). Deci are loc un proces de *convecţie* a vorticităţii, care modifică tridimensional profilul fundamental Blasius prin crearea unui strat de frecare în *peak* (I) şi păstrarea profilului neschimbat în *valley* (II).

În acelaşi timp, particulele de fluid cu o vorticitate schematizată sub forma unui cilindru de lungime l şi rază r sînt supuse unei întinderi (I)

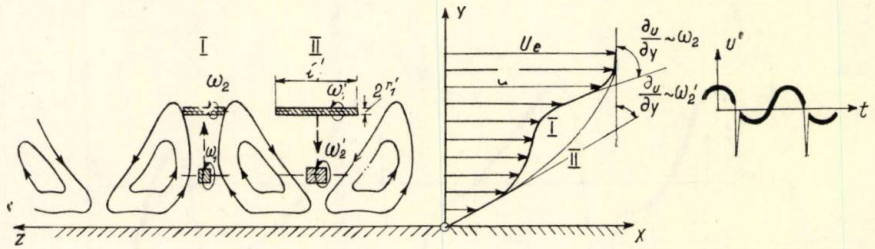


Fig. 2. — Scurgere secundară cu vîrtejuri longitudinale, convecţia şi deformarea nucleelor de vîrtej cu axa normală scurgerii principale.

sau unei comprimări (II). Dacă admitem conservarea momentului cinetic al acestui cilindru,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M\frac{r^2}{2}\,\overline{\omega}\right) = 0,$$

şi conservarea massei $M \simeq lr^2$, atunci obţinem

$$\overline{\omega} \sim \operatorname{rot}\overline{V} \simeq \frac{\overline{K}}{r^2},$$

adică vorticitatea crește o dată cu întinderea vîrtejului (I) și scade o dată cu comprimarea lui (II). Pe lîngă procesul de convecție are loc deci și un proces de modificare a vorticității prin *întindere* sau *contracție*. Acest proces alterează de asemenea profilul fundamental Blasius prin accentuarea stratului de frecare în (I) sau păstrarea profilului în (II).

Fenomenul descris mai sus variază periodic în timp cu frecvența oscilațiilor primare. În decursul unei perioade, o dată cu intensificarea

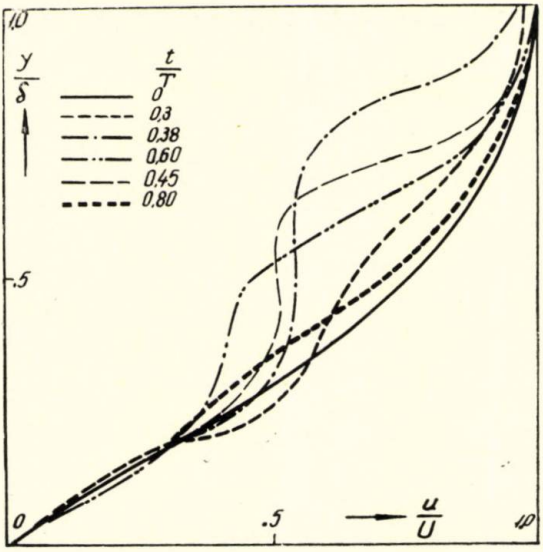


Fig. 3. — Profile de viteze instantanee în stratul-limită tranzițional al plăcii plane 2.

sau cu diminuarea scurgerii secundare, profilul fundamental Blasius se modifică în mod corespunzător. În figura 3 redăm după [2] profilele obținute în decursul unei perioade în stagiul final al tranziției din stratul-limită al plăcii plane, stagiu caracterizat prin apariția variațiilor bruște de viteză.

Aceste variații bruște de viteză reprezintă, după explicația dată [5], efecte ale instabilității unui profil inflexional *variabil în timp*. Din teoria liniară a stabilității [6] se știe că profilul inflexional are o gamă mai largă de frecvențe de stabilitate (β_i) și factori de amplificare ($e^{\beta_i t}$) mult mai mari decît profilul Blasius. Conform acestei evaluări intuitive și calculelor calitative [5], rezultă apariția unei fluctuații de mare frecvență și amplitudine într-un anumit moment $\frac{t}{T}$, cînd profilul inflexional prezintă un strat de frecare interior extrem de pronunțat.

Așadar, condiția apariției salturilor bruște de viteză o constituie existența unui profil inflexional variabil în timp. Problemele care se ridică în legătură cu această condiție sînt următoarele :

— dacă această condiție este necesară și suficientă pentru generarea variațiilor bruște de viteză ;

— dacă există diverse mecanisme de producere a profilului inflexional variabil.

Întrucît obiectul acestei lucrări îl constituie prezentarea stagiului tranziției cu variații bruște de viteză în diverse scurgeri cercetate, răspunsul complet la aceste două chestiuni depășește cadrul acestei lucrări. Totuși vom compara modelul fizic descris cu rezultatele experimentale:

a) În stratul-limită tranzițional cu gradient de presiune din figura 1 *e*, am realizat variații bruște ale vitezei în *vecinătatea pereților* la $\mathcal{R}e_{\delta^*} = 350$, prin perturbarea curentului exterior. Profilul inflexional variabil

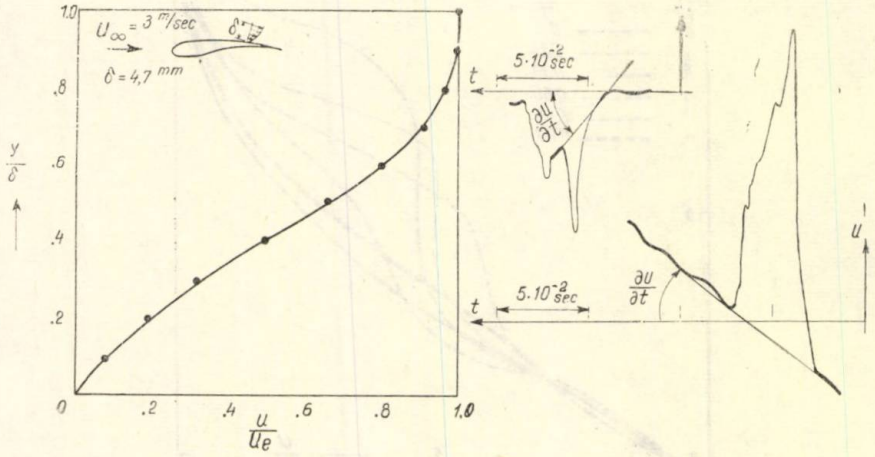


Fig. 4.— Profil de viteze medii cu punct de inflecțiune, fluctuații primare și secundare în stratul-limită cu gradient de presiune longitudinal.

în timp se găsește lîngă perete, deoarece se datorește dezvoltării stratului-limită spre desprindere și influenței vitezei curentului exterior, variabilă în timp. Însă aceste variații bruște de viteză suprapuse fluctuațiilor primare neregulate, dar „continue", au fost în mare majoritate *POZITIVE* și *MARI*. Înspre *exteriorul stratului*, într-adevăr, variațiile bruște de viteze *sînt negative, dar mai mici*. În figura 4 redăm această situație.

Ceea ce se remarcă în acest caz este apariția salturilor bruște de viteză la numere $\mathcal{R}e_{\delta^*}$ aproximativ subcritice. Cum mecanismul Benney-Lin este un mecanism de ordinul doi față de fluctuațiile primare, este posibil ca în acest caz el să nu joace un rol dominant în generarea unor astfel de fluctuații.

b) Scurgerile tranziționale în stratul-limită pe placa plană (fig. 1 *a*, 1 *b*, 1 *c*, 1 *d*) sau la intrarea într-un canal (fig. 1 *f*) se încadrează în mecanismul descris și nu prezintă deosebiri specifice. Remarcăm faptul că am întîlnit întotdeuna un profil inflexional înainte de apariția variațiilor bruște de viteză.

c) Scurgerile libere cercetate (fig. 1 *g*, 1 *h*), adică dîra din spatele unui corp simetric sau nesimetric, prezintă prin „definiție" profile inflexionale. Datorită limitării laterale (lățimea camerei de experiență 80 mm) și vitezei mici ($\approx$ 1 m/s), scurgerea este complexă, putînd exista o eventuală interacțiune cu stratul-limită al pereților, deși porțiunea centrală

(40 mm), normală pe pereți, are o viteză constantă. S-au obținut variații bruște de viteză *numai negative* într-un anumit punct al dîrei la numere $\mathcal{R}e = \frac{U_\infty h}{\nu} \simeq (1{,}5-7)10^3$. Această zonă mică, variabilă cu numărul Reynolds și cu turbulența curentului exterior, se găsește în general *în afara profilului inflexional propriu-zis*, adică în porțiunea în care $\frac{\partial u}{\partial y} \sim 0$. În figura 5 redăm această situație.

Eventuala variație în timp a profilului inflexional local se produce aici prin influența concentrării și transportului vorticității din care se vor naște mai departe vîrtejurile Bénard-Kármán. Ca efecte secundare sînt existența unui mecanism Benney-Lin și de asemenea întinderea locală a vîrtejului concentrat.

Examinarea sumară a rezultatelor obținute în alte scurgeri decît în stratul-limită pe placa plană arată următoarele :

— în scurgerile semimărginite (stratul-limită), mecanismul apariției salturilor bruște de viteză comportă un strat de fiecare (profil inflexional local) variabil în timp, care generază o instabilitate secundată manifestată în diverse stagii prin fluctuații de mare amplitudine și frecvență [5], printr-o deformare locală a liniilor de curent [2] sau prin formarea locală a unui vîrtej discret [4], [1]. Formarea acestui strat de frecare variabil în timp se datorește convecției prin scurgerea secundară tridimensională Benney-Lin plus întinderii și contracției nucleului de vorticitate, dar poate fi atribuită și influenței diverșilor termeni care apar în ecuația Navier-Stokes și care modifică profilul fundamental al scurgerii și caracterul fluctuațiilor primare [5]. În special gradientul de presiune longitudinal pozitiv diminuează importanța convecției prin scurgeri secundare. Variația în timp a profilului inflexional se poate produce și prin influența curentului exterior, însă *nu orice* perturbație a curentului exterior produce salturi bruște de viteză [3]. Aceleași observații sînt valabile și pentru scurgerile mărginite (canale, conducte) ;

— în scurgerile libere (dîre) s-au obținut variații bruște de viteză la frontiera dîrei $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \simeq 0\right)$ și este dificil de explicat existența convecției și deformării elastice a nucleului de vîrtej tridimensional. De asemenea inducția nucleelor de vîrtej Bénard-Kármán ar produce variații locale de viteză *de sens contrar* celor obținute experimental. Se remarcă că scurgerea secundară într-un strat cu frecare (profil inflexional), cum este dîra, dispare la frontieră $\frac{\partial u}{\partial y} \simeq 0$ [5]. Este posibil ca rolul de transport al vorticității să-l joace aici cîmpul de viteze datorit inducției nucleelor de vîrtej Bénard-Kármán, însă mecanismul formării vîrtejului, dacă există, rămîne încă neclarificat.

4. CONSIDERAȚII TEORETICE

Interpretarea fizică dată acestor variații bruște de viteză, ca și calculele analitice de stabilitate depinde fundamental de conceptul separării scurgerii în *scurgere principală* și *secundară*. Analiza structurii scurgerii

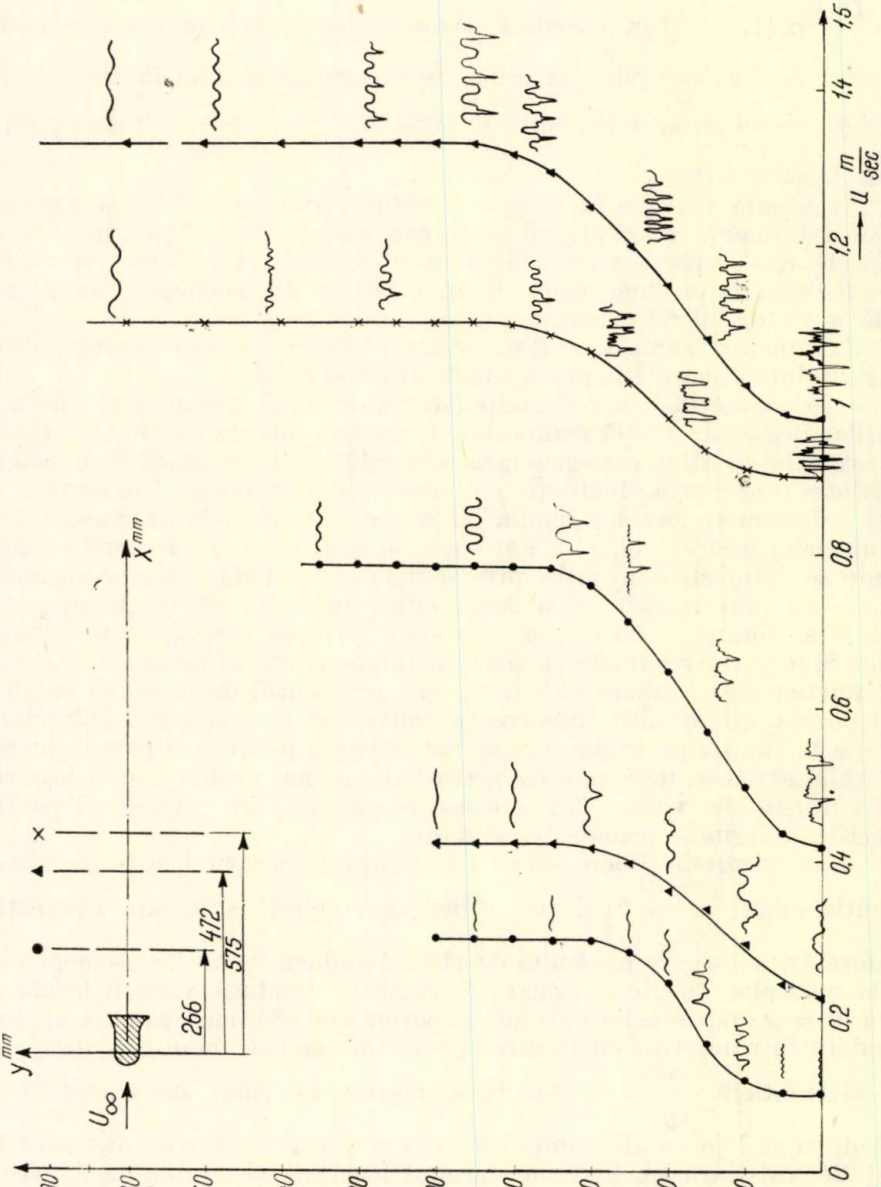


Fig. 5.— Profile de viteze cu punct de inflexiune și fluctuațiile corespunzătoare în dîra din spatele unui corp simetric la diferite distanțe de corp și pentru diferite viteze ale curentului în amonte.

arată existența unor formații cinematice, cum este vîrtejul, a cărui comportare e determinată de scurgerea secundară, iar calculele de stabilitate presupun cunoscută scurgerea principală. În fond însă, ecuațiile de mișcare trebuie să ofere o descripție de ansamblu, care să arate eventual existența fluctuațiilor ce dau naștere scurgerilor secundare. Iată un model matematic simplu construit pe baza lucrărilor anterioare [7].

Să considerăm ecuația energiei în scurgerea incompresibilă a unui strat vîscos (scurgere cu profil de viteze) sub forma

$$\nu\Delta E = \frac{\partial E}{\partial t} + u\frac{\partial E}{\partial x} + v\frac{\partial E}{\partial y} + w\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\left[u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z}\right] +$$

$$+\nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \right. \tag{1}$$

$$\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]; \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

unde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$E = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \text{ este energia cinetică,}$$

u, v, w sînt componentele vitezei după Ox, Oy, respectiv Oz,
p este presiunea,
ρ densitatea,
ν viscozitatea cinematică. Condițiile-limită pentru acest strat vîscos cu variație importantă a vitezei după Oy sînt

$$y = 0; \quad E = E_0, \tag{2}$$

$$y = \delta; \quad E = E_e; \frac{\partial E}{\partial y} = K_e.$$

Să efectuăm transformarea de variabilă

$$\eta(x, y, z, t) = \frac{\int_0^y E\,dy}{\int_0^\delta E\,dy} = \frac{\psi}{\psi_\delta}, \quad \xi = x. \tag{3}$$

Efectuînd calculele și grupînd convenabil termenii, obținem expresia

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(E^2) = \frac{2\psi_\delta^2}{\nu E}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{2\psi_\delta^2}{\nu}\frac{u}{E}\frac{\partial E}{\partial \xi} - \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}(\psi_\delta^2)\frac{\partial E}{\partial_\eta}\int_0^\eta \frac{u}{E}\,d\eta -$$

$$- \frac{2\psi_\delta}{\nu}\frac{\partial E}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial z}\int_0^y w\,dy - \frac{2\psi_\delta^2}{\nu}\left[\eta\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{u}{E}\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^\eta \eta\,d\left(\frac{u}{E}\right)\right]\frac{\partial E}{\partial \eta} +$$

$$+\frac{2\psi_\delta^2}{\nu}\frac{w}{E}\frac{\partial E}{\partial z}+\frac{2\psi_\delta^2}{\rho E\nu}\left[u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right]+$$

$$+E\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2\right]+ \tag{4}$$

$$+\frac{2\psi_\delta^2}{E}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{2\psi_\delta^2}{E}\left[\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right]+v_0\frac{2\psi_\delta}{\nu}\frac{\partial E}{\partial \eta},$$

cu condițiile la limită

$$\eta=0,\quad E=E_0,$$
$$\eta=1,\quad E=E_e,\quad \frac{\partial E}{\partial \eta}=\frac{\varphi_\delta}{E_e}K_e. \tag{5}$$

Să introducem notațiile

$$f_0=\frac{\partial E}{\partial \eta}\int_0^\eta\frac{u}{E}\,d\eta \qquad f_\xi=\frac{u}{E}\frac{\partial E}{\partial \xi}-\left[\eta\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{u}{E}\right)-\frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^\eta\eta d\left(\frac{u}{E}\right)\right]\frac{\partial E}{\partial \eta}$$

$$f_t=\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial t} \qquad f_D=E\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2\right]$$

$$f_w=\frac{\partial E}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial z}\int_0^y w\,dy \qquad f_d=\frac{1}{E}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$f_z=\frac{w}{E}\frac{\partial E}{\partial z} \qquad f_E=\frac{1}{E}\left[\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right]$$

$$f_v=\frac{1}{\rho E}\left[u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right] \qquad f_{v_0}=\frac{\partial E}{\partial \eta}$$

$$\mathcal{F}=\int_0^\eta\left[\int_0^\eta f\,d\eta\right]d\eta;\quad \mathcal{F}^1=\mathcal{F}(\eta=1);\quad f^*=\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}^1}. \tag{6}$$

Ecuația (4) devine

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(E^2)=\frac{2\psi_\delta^2}{\nu^2}[f_t+f_\xi+f_z+f_v-\nu f_E+\nu f_d]+\frac{2\psi_\delta}{\nu}[v_0 f_{v_0}-f_w]+$$
$$+f_D-\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}(\psi_\delta^2)f_0. \tag{7}$$

Integrînd de două ori și ținînd seama de condițiile la limită (5), de notațiile (6) și aranjînd convenabil termenii, obținem *expresia integro-diferențială* a ecuației energiei :

$$E^2 = E_e^2 f_0^* + \frac{2\psi_\delta^2}{\nu}\mathcal{F}_t^1(f_t^* - f_0^*) + \frac{2\psi_\delta^2}{\nu}\mathcal{F}_\xi'(f_\xi^* - f_0^*) +$$
$$+ \frac{2\psi_\delta^2}{\nu}\mathcal{F}_z^1(f_z^* - f_0^*) + \frac{2\psi_\delta^2}{\nu}\mathcal{F}_p^1(f_p^* - f_0^*) +$$
$$+ \frac{2\psi_\delta}{\nu} v_0 \mathcal{F}_{v_0}^1(f_{v_0}^* - f_0^*) - \frac{2\psi_\delta}{\nu}\mathcal{F}_w'(f_w^* - f_0^*) - \tag{8}$$
$$- 2\psi_\delta^2 \mathcal{F}_E^1(f_E^* + f_0^*) + 2\psi_\delta^2 \mathcal{F}_d^1(f_d^* - f_0^*) +$$
$$+ \mathcal{F}_D^1(f_D^* - f_0^*) + 2\psi_\delta K_e(\eta - f_0^*) + E_0^2(1 - f_0^*).$$

Deși această formulare integro-diferențială este mai complicată decît formularea diferențială dedusă din ecuația Navier-Stokes, totuși forma (8) sub care este exprimată arată următoarele :

— f_0^* este o expresie pozitivă care *variază foarte puțin* atunci cînd E *variază foarte mult* ;

— diferențele $f_i^* - f_0^* = \Delta_i$ au în general valori foarte mici, deoarece expresiile f^* *sînt tipice* ca alură pentru $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

Așadar, relația (8) arată că o mărime strict pozitivă (E^2) este egală cu altă mărime strict pozitivă (f_0^*) și puțin variabilă, plus o sumă de mulți termeni cu valori mici în comparație cu primele și al căror semn poate varia extrem de ușor, deoarece depinde în general de scurgerea secundară $\left(w, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial y} \text{ etc}\right)$. Se mai poate observa că acești termeni mulți și cu valori mici depind în general de numărul Reynolds și de influențe diverse asupra scurgerii : nestaționaritate $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$, vîrtejuri longitudinale $\left(w, \frac{\partial w}{\partial z}\right)$, gradienți de presiune $\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$, disipație $\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \ldots\right)$, perturbații ale curentului exterior (E_e, K_e), perturbații introduse (v_0). Se pune acum întrebarea : ecuațiile de mișcare corelează determinant acești termeni sau, din cauza neunicității soluției la $\mathcal{R}e$ mari, au o oarecare independență ? Adică, mai precis, micile variații $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}$, ... etc. pot fi independente între ele pînă la un anumit grad ?

În acest caz, formula (8) arată că energia într-un strat vîscos se compune dintr-o parte fundamentală (f_0^*), care joacă rol de medie, și o mulțime de fluctuații în jurul acestei mărimi, fluctuații provenite din diversele influențe exterioare și din diversele transformări de structură (vîrtejuri, proces de disipație etc.) ale scurgerii. Cînd aceste fluctuații ating valori mai ($\mathcal{R}e$ mare în general), se produc *incompatibilități locale*, datorite faptului că E^2 este strict pozitivă întotdeauna. Ca urmare intervin imediat alți termeni fluctuanți pentru îndepărtarea incompatibilității,

și acest fapt explică în general apariția variațiilor bruște de viteză, ca și permanența agitației turbulente.

Concepția fracțiunilor de energie fluctuante, reprezentate prin termenii fluctuanți ai expresiei (8), conduce intuitiv către un *principiu de minim*, caracteristic de altfel efectelor mecanice, și anume : cînd termenii fluctuanți sînt toți destul de mari pentru a crea această agitație turbulentă, este natural să admitem că suma acestor contribuții fluctuante de energie, integrată pe spațiul $0 \leqslant y \leqslant \delta$ al scurgerii, este *minimă*. Deci pentru cazul în care toți termenii sînt datorați unor efecte fluctuante, adică pentru cazul în care $\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} = 0$, $E_0 = 0$ (strat-limită pe placa plană netedă, fără succesiune), putem scrie

$$T_E = \left| \int_0^1 \left\{ E^2 - E_e^2 \frac{\int_0^\eta \left[\int_1^\eta \left[\int_0^\eta \frac{u}{E} \mathrm{d}\eta \right] \mathrm{d}E \right] \mathrm{d}\eta}{\int_0^1 \left[\int_1^\eta \left[\int_0^\eta \frac{u}{E} \mathrm{d}\eta \right] \mathrm{d}E \right] \mathrm{d}\eta} \right\} \mathrm{d}\eta \right| \to \text{minim.} \tag{9}$$

Să luăm un caz particular, simplificat :

$$u_a = \eta_0^n, \; E_a \approx \eta_0^{2n}, \; 0 \leqslant n \leqslant 1, \; \eta_0 = \frac{y}{\delta}, \; u_a = \frac{u}{U_e}, \; E_a = \frac{u^2}{U_e^2}. \tag{10}$$

Se obține ușor expresia

$$T_E = E_e^2 \frac{2 - 7n - 26n^2}{2(1+6n)(3+7n)}, \tag{11}$$

care are minimul $|T_E| = 0$ (pentru $n = 0{,}17365$), adică

$$u_a = \eta_0^{0{,}17365} \approx \eta_0^{\frac{1}{6}}, \tag{12}$$

profil extrem de apropiat de profilul experimental „turbulent". Fără a intra în detalii de calcule, formularea integro-diferențială (8) duce la concluzia că fluidul răspunde prin variații bruște de viteză la perturbații finite mari nu numai datorită instabilității secundare a stratului de frecare variabil în timp, generat prin convecția și deformarea nucleului de vîrtej, ci și prin tendința locală către un minim al energiei de fluctuație.

CONCLUZII

Din examinarea materialului prezentat rezultă următoarele concluzii :

— Variații bruște de viteză (*spike*) se întîlnesc și în alte scurgeri decît stratul-limită pe placa plană, ca stratul-limită cu gradient de presiune, scurgerea de intrare într-un canal, dîrele din spatele corpurilor simetrice și nesimetrice.

— Natura acestor variații bruște de viteză se explică în stratul-limită de pe placa plană prin instabilitatea secundară a stratului de fre-

care variabil în timp, generat de convecție și de deformarea nucleului de vîrtej ca urmare a scurgerilor secundare tridimensionale. Analiza rezultatelor obținute în dîre arată că această explicație nu este unică, oferind unele aspecte în contradicție cu experiența.

— Formularea integro-diferențială a ecuațiilor Navier-Stokes arată posibilitatea apariției unor incompatibilități locale ca urmare a fluctuațiilor de energie într-un punct, fluctuații care reprezintă influența multor factori exteriori și interiori scurgerii.

Experiențele prezentate trebuie continuate pentru a putea clarifica mai îndeaproape condițiile de apariție a salturilor bruște în alte scurgeri decît stratul-limită pe placa plană. În mod special se impune analiza precisă a influenței gradientului profilului mediu $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ și a perturbațiilor externe asupra condițiilor locale de apariție în cazul dîrelor a acestor *spikes*.

Primită la redacție la 24 mai 1966

BIBLIOGRAFIE

1. P. S. Klebanoff, K. D. Tidstrom, L. M. Sargent, *The three dimensional nature of boundary layer instability*, J.F.M. **12**, *1* (1962).
2. L.S.G. Kovasznay, H. Komoda, B. R. Vasudeva, *Detailed flow field in transition*, Proceedings of the 1962 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford Univ. Press. 1962.
3. Șt. N., Săvulescu, V. Toma, *Studiul experimental al tranziției provocate de interacțiunea unui jet de intensitate mică cu stratul-limită incompresibil al unei plăci plane*, St. cerc. mec. apl., *5* (1963).
4. F. R. Hama, J. Nutant, *Detailed flow-field observations in the transition process in a thick boundary-layer*, Proceedings of the 1963 Heat Cransfer and Fluid Mecanics Institute, Stanford Univ. Press. 1963.
5. H. P. Greenspan, D. J. Benney, *On shear-layer instability breakdown and transition*, I.F.M., *15* (1963).
6. J. T. Stuart, *Hydrodynamic Stability*, AMR, *7*, (1965).
7. Șt. N. Săvulescu, *L'influence des tourbillons longitudinaux instationnaires sur le profil Blasius dans la couche limite transitionnelle de la plaque plane*, Rev. roum. sci. techn. — Méc. appl., **10**, *5* (1965).

MIŞCAREA OSCILATORIE ARMONICĂ A SISTEMULUI ARIPĂ-FUZELAJ CONIC ÎN REGIM SUPERSONIC[1)]

de ELIE CARAFOLI şi DAN MATEESCU
Institutul de mecanica fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

533

În această lucrare este studiată scurgerea supersonică nepermanentă în jurul sistemului aripă-fuzelaj conic avînd o mişcare oscilatorie armonică de joasă frecvenţă.
Considerînd cazul oscilaţiilor armonice de rotaţie de tangaj şi de ruliu, precum şi de translaţie pe verticală, problema este redusă, prin analogie cu cazul aripii izolate, la studiul unor mişcări conice staţionare de ordin 1 şi 2 în jurul sistemului aripă-fuzelaj conic, pentru a căror determinare autorii utilizează rezultatele obţinute în lucrările lor anterioare.
În funcţie de expresiile vitezelor axiale de perturbaţie, din aceste mişcări staţionare astfel determinate în lucrare este dedusă expresia coeficientului de presiune în vederea stabilirii distribuţiei de presiuni pe sistemul considerat.

NOTAŢII ŞI FORMULE UZUALE

U_∞ — viteza curentului neperturbat;
a_∞ — viteza sunetului în condiţiile curentului neperturbat;

$M_\infty = \dfrac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach al curentului neperturbat;

B $= \sqrt{M_\infty^2 - 1}$;
$Ox_1 x_2 x_3$ — sistem triortogonal de coordonate, axa Ox_1 fiind paralelă cu viteza curentului neperturbat;

[1)] Publicată şi în „Rev. roum. sci. tech.-Mécanique Appliquée", **11**, *5*, (1966) (în limba franceză).

$y = \frac{x_2}{x_1}$, $z = \frac{x_3}{x_1}$ — coordonatele planului fizic oyz ($x_1 = 1$, fig. 1);

$x = \eta + i\zeta$ — plan complex obținut prin transformarea geometrică a planului fizic oyz în planul auxiliar $o\eta\zeta$;

$$\eta = \frac{y}{1 - B^2 z^2}, \quad \zeta = \frac{z\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2 z^2}. \tag{1}$$

În acest plan, axa oy din planul fizic se reproduce la scară, deoarece pentru $z = 0$ avem $x = \eta = y$, în timp ce urma fuzelajului din planul fizic se transformă aproximativ tot într-un cerc de rază c (fig. 2) dacă presupunem că $B^2 c^2 \ll 1$, ceea ce rezultă de altfel din ipoteza micilor perturbații;

$X = Y + iZ$ — plan complex auxiliar (fig. 3), obținut prin transformarea conformă

$$X = x + \frac{c^2}{x}, \quad \left(x = \frac{X + \sqrt{X^2 - 4c^2}}{2}\right); \tag{2}$$

$\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ — potențialul mișcării nepermanente în jurul sistemului aripă-fuzelaj;

$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$, $v = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$, $w = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$ — vitezele de perturbație după axele Ox_1, Ox_2, Ox_3.

1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

Într-o serie de lucrări anterioare [1] — [6] ne-am ocupat de studiul scurgerilor conice și conice de ordin superior în jurul aripilor simple sau cruciforme prevăzute cu fuzelaj. În această lucrare ne propunem să studiem, în scopul determinării distribuției de presiuni, scurgerea supersonică nepermanentă în jurul sistemului aripă-fuzelaj conic având o mișcare oscilatorie armonică de joasă frecvență, problemă care intervine într-o serie de evoluții ale avioanelor supersonice.

Să considerăm în acest scop sistemul aripă-fuzelaj conic din figura 1, având o mișcare oscilatorie armonică compusă din următoarele trei mișcări simple:

— o mișcare oscilatorie armonică de rotație de tangaj (în jurul axei Ox_2),

$$\alpha = \alpha_0 e^{i\omega t}; \tag{3}$$

— o mișcare oscilatorie armonică de translație în lungul axei Ox_3,

$$\zeta = \zeta_0 e^{i\omega t}; \tag{4}$$

— o mișcare oscilatorie armonică de rotație de ruliu (în jurul axei Ox_1),

$$\psi = \psi_0 e^{i\omega t}. \tag{5}$$

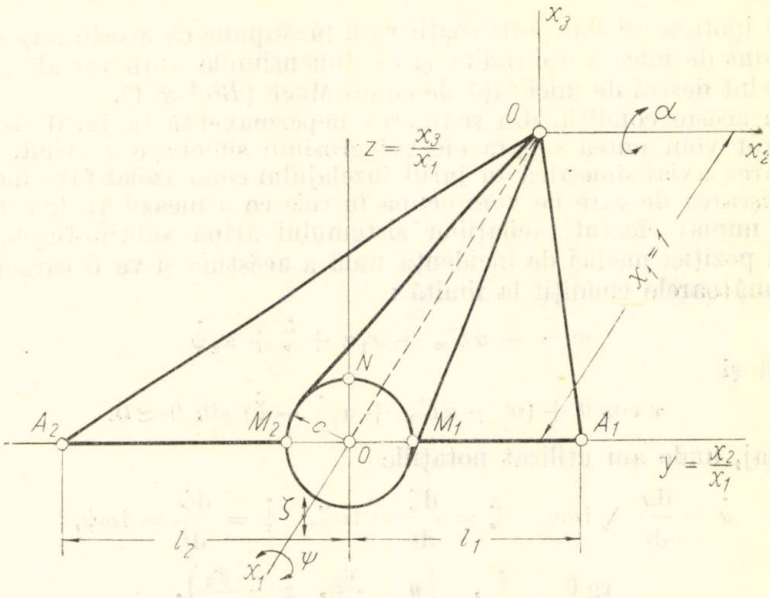


Fig. 1

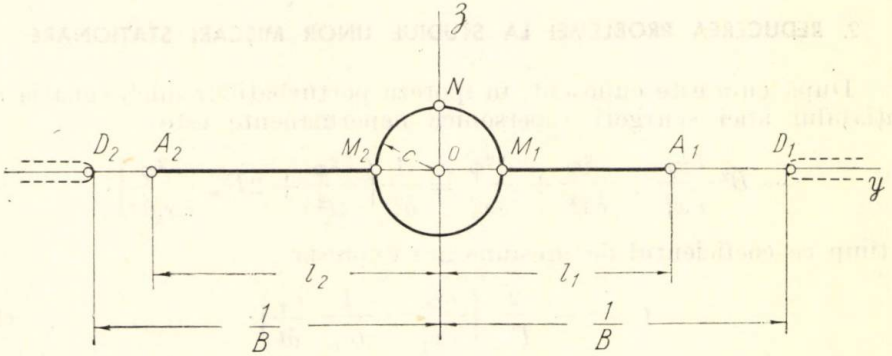


Fig. 2

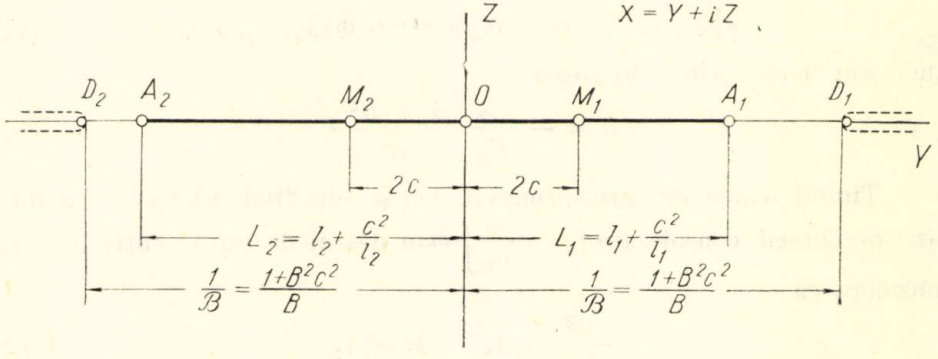


Fig. 3

În ipoteza micilor perturbații vom presupune că aceste mișcări oscilatorii sînt de mică amplitudine și că dimensiunile transversale ale fuzelajului sînt destul de mici față de conul Mach ($B^2c^2 \ll 1$).

În aceste condiții, din scurgerea nepermanentă în jurul sistemului considerat vom putea separa efectul grosimii simetrice a aripii, precum și mișcarea axial-simetrică în jurul fuzelajului conic izolat fără incidență.

Mișcarea de care ne vom ocupa în cele ce urmează va lua în considerație numai efectul oscilațiilor sistemului aripă subțire-fuzelaj conic în jurul poziției mediei de incidență nulă a acestuia și va fi caracterizată prin următoarele condiții la limită :

$$w = -\alpha U_\infty - x_1\dot{\alpha} + \dot{\zeta} + x_2\dot{\psi} \tag{6}$$

pe aripă și

$$v\cos\theta + (w + \alpha U_\infty + x_1\dot{\alpha} - \dot{\zeta})\sin\theta \approx 0. \tag{7}$$

pe fuzelaj, unde am utilizat notațiile

$$\dot{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\omega\alpha, \quad \dot{\zeta} = \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\omega\zeta, \quad \dot{\psi} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\omega\psi, \tag{8}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{z}, \quad \left(y = \frac{x_2}{x_1}, \ z = \frac{x_3}{x_1}\right). \tag{8'}$$

2. REDUCEREA PROBLEMEI LA STUDIUL UNOR MIȘCĂRI STAȚIONARE

După cum este cunoscut, în ipoteza perturbațiilor mici, ecuația potențialului unei scurgeri supersonice nepermanente este

$$-B^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = \frac{1}{a_\infty^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2U_\infty\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial t}\right), \tag{9}$$

în timp ce coeficientul de presiune are expresia

$$C_p = -\frac{2}{U_\infty}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{1}{U_\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \tag{10}$$

Deoarece sistemul considerat are o mișcare oscilatorie armonică, potențialul mișcării poate fi pus, ca și în cazul aripii izolate [7], sub forma

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = U_\infty\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + kx_1)}\,\Phi(x_1, x_2, x_3), \tag{11}$$

unde am notat prin k expresia

$$k = -\frac{\omega}{U_\infty}\,\frac{1 + B^2}{B^2}. \tag{12}$$

Ținînd seama de transformarea (11) și admițînd că frecvența mișcării oscilatorii considerate $\left(f = \frac{\omega}{2\pi}\right)$ este destul de mică pentru a putea considera că

$$\frac{\omega^2}{U_\infty^2} \ll 1, \qquad k^2 \ll 1, \tag{13}$$

ecuația potențialului (9) se simplifică considerabil

$$-B^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}=\frac{\omega^2}{U_\infty^2}\,\frac{1+B^2}{B^2}\,\Phi\approx 0, \tag{14}$$

căpătînd aceeași formă ca în cazul scurgerilor supersonice staționare.

Problema se reduce deci la studiul unei mișcări permanente în jurul sistemului considerat, caracterizată prin potențialul redus $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ și prin vitezele de perturbație reduse

$$q=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1},\quad \nu=\frac{\partial\Phi}{\partial x_2},\quad \beta=\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}. \tag{15}$$

În funcție de acestea, vitezele de perturbație din scurgerea nepermanentă în jurul aripă-fuzelaj pot fi exprimate sub forma

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=U_\infty e^{i(\omega t+kx_1)}[q+ik\Phi], \tag{16}$$

$$v=\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=U_\infty e^{i(\omega t+kx_1)}\nu, \tag{16'}$$

$$w=\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}=U_\infty e^{i(\omega t+kx_1)}\beta. \tag{16''}$$

Observînd că în cazul oscilațiilor de mică frecvență (13) putem scrie

$$e^{-ikx_1}\approx 1-ikx_1,\ (e^{ikx_1}\approx 1+ikx_1), \tag{17}$$

din condițiile (6) și (7) se vor putea deduce condițiile la limită din mișcarea permanentă redusă

$$\beta=-\alpha_0+i\frac{\omega}{U_\infty}\left(\zeta-x_1\frac{2B^2+1}{B^2}\alpha_0+x_2\psi_0\right) \tag{18}$$

pe aripă și

$$\nu\cos\theta+\left[\beta+\alpha_0-i\frac{\omega}{U_\infty}\left(\zeta_0-x_1\frac{2B^2+1}{B^2}\alpha_0\right)\right]\sin\theta=0 \tag{19}$$

pe fuzelaj.

Ținînd seama de forma acestor condiții la limită, potențialul redus total $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ poate fi descompus sub forma

$$\Phi=\Phi_1+i\frac{\omega}{U_\infty}(\Phi_1^*+\Phi_2^*), \tag{20}$$

în care potențialele reduse Φ_1, Φ_1^* și Φ_2^*, cărora le corespund vitezele reduse

$$q_0=\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1},\quad \nu_0=\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2},\quad \beta_0=\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}, \tag{21}$$

$$q_0^*=\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial x_1},\quad \nu_0^*=\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial x_2},\quad \beta_0^*=\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial x_3}, \tag{21'}$$

$$q_1^*=\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial x_1},\quad \nu_1^*=\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial x_2},\quad \beta_1^*=\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial x_3}, \tag{21''}$$

sînt definite prin următoarele condiţii la limită pe aripă şi, respectiv, pe fuzelaj :

$$\beta_0 = -\alpha_0, \quad \nu_0 \cos\theta + (\beta_0 + \alpha_0)\sin\theta = 0, \tag{22}$$

$$\beta_0^* = \zeta_0, \quad \nu_0^* \cos\theta + (\beta_0^* - \zeta_0)\sin\theta = 0, \tag{22'}$$

$$\beta_1^* = -x_1 \frac{2B^2+1}{B^2}\alpha_0 + x_2\psi_0, \quad \nu_1^* \cos\theta + \left(\beta_1^* + x_1\frac{2B^2+1}{B^2}\alpha_0\right)\sin\theta = 0. \tag{22''}$$

În acest mod, problema mişcării oscilatorii a sistemului aripă-fuzelaj conic în regim supersonic a fost redusă la studiul a trei mişcări staţionare, primele două fiind scurgeri conice în jurul sistemului considerat, aripa şi fuzelajul avînd aceeaşi incidenţă, iar cea de-a treia fiind o mişcare conică de ordin 2 în jurul aceluiaşi sistem. Soluţiile acestor mişcări vor putea fi determinate utilizînd în acest sens metoda prezentată în lucrările noastre anterioare [1], [2], [4], [5], aşa după cum vom arăta mai jos.

În ceea ce priveşte coeficientul de presiune, introducînd în (10) transformarea (11), vom obţine

$$C_p = -2e^{i(\omega t + kx_1)}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - i\frac{\omega}{U_\infty}\frac{1}{B^2}\Phi\right]. \tag{23}$$

Ţinînd seama acum de relaţia (20) şi admiţînd în continuare că frecvenţa mişcării este destul de mică (13), ceea ce ne va permite să neglijăm termenii în k^2 şi următorii (17), va rezulta în final pentru coeficientul de presiune expresia

$$C_p = -2e^{i\omega t}\left\{q_0 - i\frac{\omega}{U_\infty}\frac{1}{B^2}[\Phi_1 - B^2(q_0^* + q_1^*) + x_1 M_\infty^2 q_0]\right\}, \tag{24}$$

în care apar, după cum se vede, vitezele reduse q_0, q_0^*, q_1^* din mişcările staţionare definite mai sus, precum şi potenţialul Φ_1.

3. DETERMINAREA VITEZELOR AXIALE REDUSE ŞI A POTENŢIALULUI REDUS

Mişcarea corespunzătoare potenţialului redus Φ_1. După cum se vede cu uşurinţă din (23), condiţiile la limită ale acestei mişcări sînt acelea ale unei scurgeri conice în jurul sistemului considerat, atît aripa, cît şi fuzelajul avînd aceeaşi incidenţă $\frac{\alpha_0}{U_\infty}$. În lucrările noastre anterioare [1], [2] am stabilit o metodă generală de soluţionare a acestei probleme prin reducerea ei la studiul unei scurgeri conice în jurul unei aripi fictive avînd incidenţa variabilă şi am determinat expresiile vitezei axiale de perturbaţie pentru diferitele poziţii ale bordurilor aripii faţă de conul

Mach. Astfel, de exemplu, în cazul cînd bordurile aripii sînt subsonice $\left(l_1 < \frac{1}{B},\ l_2 < \frac{1}{B}\right)$, viteza axială redusă q_0 va avea expresia

$$q_0 = \operatorname{Re} \mathcal{U}_0 = \operatorname{Re} A \frac{1 + \frac{c^2}{l_1^2 l_2^2}(l_1^2 + l_2^2 + c^2) - 2\frac{c^2}{l_1 l_2}\left(1 + \frac{c^2}{x^2}\right) + \frac{l_1 - l_2}{2 l_1 l_2}\left(1 - \frac{c^2}{l_1 l_2}\right)\left(x + \frac{3c^2}{x}\right)}{\sqrt{l_1 - x)(l_2 + x)}\sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{l_1 x}\right)\left(1 + \frac{c^2}{l_2 x}\right)}}, \quad (25)$$

în care constanta A se determină, după cum s-a arătat în [1], din condiția

$$\operatorname{Re} \int_{\frac{1}{B}}^{y'} \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{ix} d\mathcal{U} = -\alpha_0, \quad (26)$$

unde y' este abscisa unui punct oarecare de pe aripă.

În mod asemănător, dacă considerăm că aripa este simetrică ($l_1 = l_2 = l$) și are bordurile supersonice $\left(l > \frac{1}{B}\right)$, viteza axială redusă are expresia

$$q_0 = \operatorname{Re} \mathcal{U}_0 = \operatorname{Re} \frac{2K}{\pi}\left[\left(l - \frac{c^2}{x}\right) \arccos \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}X)(1 + \mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L - X)}} + \right.$$

$$+ \left(l + \frac{c^2}{x}\right) \arccos \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B}X)(1 + \mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L + X)}} +$$

$$\left. + \frac{c^2}{x} \arccos \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}^2 X^2)(L^2 - 4c^2)}{(L^2 - X^2)(1 - 4\mathcal{B}^2 c^2)}}\right], \quad (27)$$

unde

$$K = -\frac{\alpha_0}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}, \quad L = l + \frac{c^2}{l}, \quad \frac{1}{\mathcal{B}} = \frac{1 + B^2 c^2}{B}, \quad (28)$$

și unde variabila complexă x a fost definită prin relația (2).

În ceea ce privește potențialul redus Φ_1, vom observa că, aplicînd teorema lui Euler pentru funcțiile omogene de ordin 1, acesta va putea fi exprimat sub forma

$$\Phi_1 = x_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} = x_1(q_0 + y\nu_0 + z\beta_0). \quad (29)$$

Exprimînd în planul x vitezele reduse de perturbație prin funcțiile de variabilă complexă $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{W}_0$,

$$q_0 = \operatorname{Re} \mathcal{U}_0, \quad \nu_0 = \operatorname{Re} \mathcal{V}_0, \quad \beta_0 = \operatorname{Re} \mathcal{W}_0, \quad (30)$$

între care există relațiile de compatibilitate (deduse din condiția de irotaționalitate)

$$\mathrm{d}\mathcal{U}_0 = -x\mathrm{d}\mathcal{V}_0 = \frac{\mathrm{i}x\,\mathrm{d}\mathcal{W}_0}{\sqrt{1-B^2x^2}}, \tag{31}$$

vom observa, așa cum am arătat în lucrările noastre anterioare [1], [2], că, în ipotezele admise la începutul acestui studiu, atît pe aripă, cît și pe fuzelaj avem

$$\beta_0 = -\alpha_0 - \operatorname{Im}\mathcal{V}_0 \tag{32}$$

și, respectiv,

$$z \approx \zeta = \operatorname{Im} x, \qquad y \approx \eta = \operatorname{Re} x. \tag{33}$$

Ținînd seama de aceste relații, vom putea deduce pentru Φ_1 expresia

$$\Phi_1 = x_1[q_0 + y\nu_0 - z(\alpha_0 + \operatorname{Im}\mathcal{V}_0)] = x_1 \operatorname{Re}[\mathcal{U}_0 + x\mathcal{V}_0 - z\alpha_0], \tag{34}$$

care mai poate fi scrisă utilizînd relațiile (32) sub forma

$$\frac{1}{x_1}\Phi_1 = \operatorname{Re} x\int \mathcal{U}_0\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) - x_3\alpha_0. \tag{35}$$

În acest mod, odată stabilită expresia vitezei reduse $q_0 = \operatorname{Re}\mathcal{U}_0$, se poate determina printr-o simplă integrare și expresia potențialului redus Φ_1.

Mișcarea corespunzătoare potențialului redus Φ_1^*. Observînd din (22′) că condițiile de limită ale acestei mișcări sînt întru totul asemănătoare cu cele ale mișcării precedente, viteza axială redusă q_0^* va avea aceleași expresii ca și q_0, cu singura observație că în expresiile constantelor care intervin în aceasta din urmă α_0 trebuie înlocuit prin $-\zeta_0$.

Mișcarea corespunzătoare potențialului Φ_2^*. Este ușor de remarcat că această mișcare, definită prin condițiile la limită (22″), reprezintă scurgerea conică de ordin 2 în jurul sistemului considerat, aripa avînd incidența

$$\alpha_a = \left(-x_1\frac{2B^2+1}{B^2}\alpha_0 + x_2\psi_0\right)\frac{1}{U_\infty}, \tag{36}$$

iar fuzelajul avînd incidența

$$\alpha_f = -x_1\frac{2B^2+1}{B^2}\frac{\alpha_0}{U_\infty}. \tag{37}$$

Această mișcare poate fi studiată utilizînd metoda indicată în lucrările noastre anterioare [4], [5], care reduce problema scurgerii conice de ordin n în jurul sistemului aripă-fuzelaj conic la studiul scurgerii conice de același ordin în jurul unei aripi fictive avînd incidența variabilă după o funcție omogenă. Astfel, de exemplu, urmînd calea indicată în [5], vom obține că viteza axială redusă q_1^* va fi dată, în cazul cînd bordurile aripii

sînt subsonice $\left(l_1 < \frac{1}{B},\ l_2 < \frac{1}{B}\right)$, de relaţia

$$q_1^* = \operatorname{Re}\left\{\frac{A_{20} + A_{21}X + A_{22}X^2}{\sqrt{(L_1 - X)(L_2 + X)}} + (C_{20} + C_{21}X)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L_1 - X)(L_2 + 2c)}{(L_1 + L_2)(2c - X)}} + \right.$$

$$+ (C_{20} - C_{21}X)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L_2 + X)(L_1 + 2c)}{(L_1 + L_2)(2c + X)}} -$$

$$- \frac{C_{21}}{2}\sqrt{(L_1 - X)(L_2 + X)}\left[\int_{2c}^{L_1}\frac{(X\eta - 4c^2)\,d\eta}{(\eta - X)\sqrt{\eta^2 - 4c^2}\sqrt{(L_1 - \eta)(L_2 + \eta)}} + \right.$$

$$\left.\left. + \int_{2c}^{L_2}\frac{(X\eta + 4c^2)\,d\eta}{(\eta + X)\sqrt{\eta^2 - 4c^2}\sqrt{(L_2 - \eta)(L_1 + \eta)}}\right]\right\}, \tag{38}$$

constantele care intervin în această expresie determinîndu-se în modul indicat în lucrarea citată.

4. APLICAŢII LA CAZUL SISTEMULUI ARIPĂ DELTA-FUZELAJ CONIC AVÎND O MIŞCARE OSCILATORIE ARMONICĂ DE TANGAJ

Ca exemplu de aplicaţie să considerăm cazul sistemului aripă delta-fuzelaj conic ($l_1 = l_2 = l$) avînd o mişcare oscilatorie armonică de tangaj, definită prin relaţia (3). Ţinînd seama de cele arătate mai sus, este uşor de văzut că în acest caz mişcarea corespunzătoare potenţialului Φ_1^* nu mai intervine şi deci coeficientul de presiune va fi dat de relaţia

$$C_p = -2e^{i\omega t}\left\{q_0 - i\frac{\omega}{U_\infty}\frac{1}{B^2}\left[\Phi_1 - B^2 q_1^* + M_\infty^2 x_1 q_0\right]\right\}, \tag{39}$$

în care vitezele reduse q_0, q_1^* şi potenţialul Φ_1 au expresiile pe care le vom deduce mai jos.

Cazul bordurilor subsonice $\left(l < \frac{1}{B}\right)$. Procedînd în modul indicat în § 3, va rezulta pentru q_0 expresia

$$q_0 = \operatorname{Re}\mathcal{U}_0 = \operatorname{Re} A_0 \frac{1 + \frac{c^4}{l^4} - 2\frac{c^4}{l^2 x^2}}{\sqrt{(l^2 - x^2)\left(1 - \frac{c^4}{l^2 x^2}\right)}}, \tag{40}$$

iar pentru Φ_1, după efectuarea integralei din (35), expresia

$$\frac{1}{x_1}\Phi_1 = \operatorname{Re}\frac{A_0}{l^2}\sqrt{(l^2 - x^2)\left(1 - \frac{c^4}{l^2 x^2}\right)} - z\alpha_0, \tag{41}$$

în care

$$A_0 = \frac{\alpha_0 l^2}{\left[1 - B^2 c^2 \frac{c^2}{l^2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mathbf{K}(k)}{\mathbf{E}(k)} - \frac{1}{24}\frac{c^4}{l^4}\right)\right]\mathbf{E}(k)}, \tag{42}$$

unde $\mathbf{K}(k)$ și $\mathbf{E}(k)$ sînt integralele eliptice complete de speța întîi și respectiv a doua, de modul k,

$$k = \sqrt{1 - B^2 l^2}. \tag{43}$$

Pentru determinarea vitezei axiale reduse q_1^* vom observa că în acest caz mișcarea corespunzătoare acesteia reprezintă scurgerea conică de ordin 2 în jurul sistemului aripă delta-fuzelaj, ambele avînd aceeași incidență,

$$\alpha_a = \alpha_f = -\, x_1 \frac{2B^2 + 1}{B^2} \frac{\alpha_0}{U_\infty}. \tag{44}$$

Utilizînd metoda indicată în [5], va rezulta pentru q_1^* expresia

$$q_1^* = \operatorname{Re} \mathcal{U}_1^* = \operatorname{Re} \frac{A_{20} + A_{22}\left(x + \dfrac{c^2}{x}\right)}{\sqrt{(l^2 - x^2)\left(1 - \dfrac{c^4}{l^2 x^2}\right)}}, \tag{45}$$

unde constantele A_{20} și A_{22} se determină din condițiile

$$\operatorname{Im} \int_{\frac{1}{B}}^{y'} \sqrt{1 - B^2 x^2}\, \frac{\mathrm{d}^2 \mathcal{U}_1^*}{\mathrm{d}x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{2B^2 + 1}{B^2}\, \alpha_0, \tag{46}$$

$$\operatorname{Im} \int_{\frac{1}{B}}^{y'} \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{x}\, \frac{\mathrm{d}^2 \mathcal{U}_1^*}{\mathrm{d}x^2}\, \mathrm{d}x = 0, \tag{46'}$$

în care y' reprezintă abscisa unui punct situat pe aripă în apropierea bordului de atac. Dacă considerăm că fuzelajul nu este prea mare în comparație cu aripa, pentru constantele A_{20} și A_{22} se vor obține valorile

$$A_{20} \simeq 2l^2 \frac{2B^2 + 1}{B^2}\, \alpha_0 \frac{1 - B^2 l^2}{(1 - 2B^2 l^2)\, E(k) + B^2 l^2\, K(k)} \tag{47}$$

$$A_{22} \simeq -\, \frac{2B^2 + 1}{B^2}\, \alpha_0 \frac{1 - B^2 l^2}{(1 - 2B^2 l^2)\, E(k) + B^2 l^2\, K(k)} \tag{47'}$$

Cazul bordurilor supersonice $\left(l > \dfrac{1}{B}\right)$. În acest caz, viteza axială redusă q_0 va avea, după cum s-a arătat mai sus, expresia (27), în timp ce pentru potențialul redus Φ_1 se va obține expresia

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} \Phi_1 = \operatorname{Re} \frac{K}{\pi} \Bigg[& (2l - X) \arccos \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B} X)(1 + \mathcal{B} L)}{2\mathcal{B}(L - X)}} + \\ & + (2l + X) \arccos \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B} X)(1 + \mathcal{B} L)}{2\mathcal{B}(L + X)}} - \\ & - \left(x - \frac{c^2}{x}\right) \arccos \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}^2 X^2)(L^2 - 4c^2)}{(L^2 - X^2)(1 - 4\mathcal{B}^2 c^2)}} \Bigg]. \end{aligned} \tag{48}$$

În ceea ce priveşte viteza axială redusă q_1^*, aceasta va fi dată de relaţia

$$q_1^* = \operatorname{Re} \mathcal{U}_1^* = \operatorname{Re}\left[(K_{20} + K_{21} X) \arccos \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B} L)(1 - \mathcal{B} X)}{2 \mathcal{B} (L - X)}} + \right.$$

$$+ (K_{20} - K_{21} X) \arccos \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B} L)(1 + \mathcal{B} X)}{2 \mathcal{B} (L + X)}} + \tag{49}$$

$$\left. + K_{21}\left(x - \frac{c^2}{x}\right) \arccos \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}^2 X^2)(L^2 - 4c^2)}{(L^2 - X^2)(1 - 4\mathcal{B}^2 c^2)}} + D_{20} \sqrt{1 - \mathcal{B}^2 X^2} \right],$$

în care

$$K_{20} = \frac{2l}{\pi} \frac{B^2 l^2 - 2}{(B^2 l^2 - 1)^{3/2}} \frac{2B^2 + 1}{B^2} \alpha_0, \; K_{21} = \frac{1}{\pi (B^2 l^2 - 1)^{3/2}} \frac{2B^2 + 1}{B^2} \alpha_0 ; \tag{50}$$

constanta D_{20} se determină din condiţia

$$\left[\sqrt{1 - B^2 x^2} \frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_1^*}{\mathrm{d}x}\right]_{x = \frac{1}{B}} = 0. \tag{51}$$

Primită la redacţie la 25 martie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, Dan Mateescu, *Ecoulement supersonique autour du système portant aile-fuselage conique*, Rev. Roum. Sci. Tech.—Mécanique Appliquée, *3* (1959).
2. — *A General Method for Determining the Wing-Conical Body Interference in Supersonic Flow*, Rev. Roum. Sci. Tech. — Mécanique Appliquée, *2* (1960).
3. — *Supersonic Flow around the Cruciform Wing-Conical Body System*, Rev. Roum. Sci. Tech.—Mécanique Appliquée, *3* (1960).
4. — *High Order Conical Flow around a Delta Wing Fitted with Conical Body*, Proceedings of the Seminar on Aeronautical Sciences—Bangalore, India (nov. 27—dec. 2/1961), p. 249—269.
5. — *The Wing-Conical Body Interference in High Order Conical Flows*, Rev. Roum. Sci. Tech.—Mécanique Appliquée, *3* (1962).
6. D. Mateescu, Сверхзвуковое обтекание трапецподального крыла с двумя коническими обтеканиями. Rev. Roum. Sci. Tech.—Mécanique Appliquée, *3* (1961).
7. E. Carakoli, *High Speed Aerodynamics*, Bucarest, Edit. tehnică, 1956.

RECENZII

M. GRUMĂZESCU, A. STAN, N. WEGENER şi V. MARINESCU, *Combaterea zgomotului şi vibraţiilor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1964, 334 p.

Problema combaterii zgomotului şi a vibraţiilor a căpătat în ultimul timp o importanţă din ce în ce mai mare, datorită înmulţirii surselor sonore şi creşterii puterii acestora ; pe de altă parte, există dovezi din ce în ce mai concludente că zgomotul şi vibraţiile au efecte dăunătoare asupra capacităţii de muncă a omului şi, în ultimă instanţă, asupra sănătăţii lui.

Aceste probleme se pun în cele mai variate locuri, ele făcînd obiectul a numeroase cercetări şi în ţara noastră. Lucrarea celor patru autori care se ocupă efectiv de asemenea probleme cuprinde nouă capitole urmate de o bibliografie.

Primul capitol are un caracter teoretic, tratînd problema sunetelor şi zgomotelor şi a propagării lor. Vibraţiile mecanice formează obiectul celui de-al doilea capitol ; aici sînt cuprinse vibraţiile cu un singur grad şi cu două grade de libertate.

Problema perceperii zgomotului şi vibraţiilor face obiectul capitolului al treilea ; se menţionează metodele de cercetare a stării auzului (audiometria) şi se pun în evidenţă efectele dăunătoare ale vibraţiilor. În următoarele două capitole se trec în revistă principiile şi soluţiile generale de combatere a zgomotului şi vibraţiilor : măsuri de protecţie activă şi de protecţie pasivă, probleme de insonorizare şi amortizare, carcase şi atenuatoare.

Capitolul al şaselea se ocupă de zgomotul industrial şi combaterea lui : probleme de amplasare raţională şi insonorizare. Următoarele două capitole tratează combaterea zgomotului şi a vibraţiilor la clădirile de locuit şi social-culturale, precum şi la mijloacele de transport.

Măsurarea zgomotului şi a vibraţiilor face obiectul ultimului capitol.

Această lucrare bine documentată are caracter atît teoretic, cît şi aplicativ. Ea poate fi folosită cu succes în practică şi în proiectare ; de asemenea este utilă pentru cercetarea ştiinţifică în această direcţie.

P. P. Teodorescu

W. BACHMANN, *Tabellen zur Manometrie. Technisches Handbuch für die Auswertung von Druckmessungen.* Tabele pentru manometrie. Manual tehnic pentru interpretarea măsurătorilor de presiune. B. G. Teubner Verlagsgesellshaft, Leipzig, 1965, 137 p.

Cartea cuprinde şapte capitole. Primul capitol prezintă date tehnice asupra manometrelor cu element elastic. Sînt descrise diferite tipuri constructive, modul de funcţionare şi de utilizare,

apoi încercarea şi etalonarea manometrelor. Se insistă asupra erorilor absolute şi se dă o tabelă a acestora. Este de remarcat în mod deosebit prezentarea în patru limbi a termenilor tehnici de măsurători de presiune şi a elementelor componente ale manometrelor.

Capitolul următor se ocupă cu unităţi de măsură prezentîndu-se şi 40 de tabele de conversiune a unităţilor internaţionale şi a unităţilor specifice naţionale (engleze, sovietice etc.) de presiune, masă, forţă, lungime etc.

În capitolul al treilea sînt date tabele privind măsurarea presiunilor de lichid (apă sau mercur), cuprinzînd densităţi şi volume specifice pentru corpuri solide, lichide şi gazoase, precum şi valorile acceleraţiei terestre în diferite puncte ale Pămîntului. Urmează apoi tabele cu variaţia presiunii aerului cu altitudinea şi curba acestei variaţii pînă la 11 000 m înălţime.

În capitolul al patrulea sînt prezentate diagrame pentru corecţia de temperatură la diferite tipuri de manometre în timp ce capitolul al cincilea cuprinde diferite tabele. Printre acestea sînt tabelele : de conversiune a gradelor Celsius şi Farenheit, de temperatură şi presiune a vaporilor de apă, de presiune de saturaţie şi umiditate a aerului. Apoi se dau culorile de marcare şi modul de reprezentare schematic al mijloacelor de măsură, a conductelor, armăturilor şi rezervoarelor. În continuare sînt date constructive dimensionale pentru flanşe de ţevi şi filete.

În capitolul al şaselea se dă o specificaţie materialelor folosite la arcurile pentru manometre.

În capitolul al şaptelea se află tabelul cu indicarea domeniilor de utilizare a diferitelor manometre şi explicarea notaţiilor utilizate.

Lucrarea este interesantă şi utilă, prezentînd un material destinat să scutească o parte din munca necesară la transformarea diferitelor mărimi specifice (americane, engleze) în unităţi de măsură uzuale, internaţionale.

Unele tabele permit determinarea rezultatelor corectate a măsurătorilor, fiind date erorile absolute pentru domeniile uzuale ale manometrelor cu element elastic. De asemenea se uşurează lucrările care intervin în manometrie prin utilizarea valorilor experimentale din tabele sau diagrame.

Manualul se adresează tuturor acelora care se ocupă cu tehnica măsurătorilor în practică.

V. Toma

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice în care se expune: stadiul actual al unei anumite probleme, subliniidu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române sau străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

● Astromecanică (optimizarea traiectorilor, calculul orbitelor sau al segmenţilor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, reintrarea în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamică (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

★

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

F2157

6

TOMUL 23
1 9 6 6

STUDII ȘI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

1967 JAN 3 1

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. **E. CARAFOLI** – *redactor responsabil,*
Acad. **D. DUMITRESCU** – *redactor responsabil adjunct,*
Prof. **I. ANTON,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CONSTANTIN AVRAM,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. **ȘT. BĂLAN,**
Prof. **GH. MANEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CR. MATEESCU,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. **N. PATRAULEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **N. TIPEI,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU VOINEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Conf. **RADU C. BOGDAN** – *secretar de redacție.*

Pentru a se asigura colecția completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pe anul 1967.

În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134–135, sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Redacția : **București,**

str. Const. Mille 15, tel. 14.89.07

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 23, nr. 6 1966

SUMAR

STUDII

Pag.

ŞTEFAN BĂLAN, MIHAIL IFRIM, CORNEL PACOSTE, Criteriul echivalentului dinamic în calculul structurilor antiseismice 1359

GHEORGHE MANEA, MIRCEA PASCOVICI, Particularităţi ale cuzineţilor din poliamide cu privire la efectul tehnologiei de fabricaţie şi la comportarea termică a lor sub aspectul cîmpului de temperatură în film 1395

I. BARBĂLAT, A. HALANAY, O problemă de vibraţii neliniare în studiul suspensiei automobilului. Cazul caracteristicilor degresive 1417

V. HOFFMANN, I. DRĂGHICI, N. VEŞTEMEANU şi M. EPUREANU, Cercetări privind starea termică a amortizoarelor hidraulice telescopice 1427

E. CARAFOLI şi ŞT. STAICU, Aripa delta subţire antisimetrică cu separaţia curentului la bordurile de atac 1441

E. CARAFOLI şi ADRIANA NĂSTASE, Forma optimă a aripii cruciforme de grosime simetrică în curent supersonic 1455

I. L. POPESCU, Asupra teoriei hidrodinamice a reţelelor de profile 1473

E. CARAFOLI, Aplicarea mişcărilor cvasiconice la teoria aripii delta cu bordurile de atac curbe 1483

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

OLIVIU RUSU, Al III-lea Congres internaţional asupra metodelor experimentale de analiză a tensiunilor mecanice. Berlin, 28—31 martie 1966 1491

RECENZII 1495

Index alfabetic 1966 1499

St. cerc. mec. apl., Tom. 23, Nr. 6, P. 1357—1502, Bucureşti 1966

CRITERIUL ECHIVALENTULUI DINAMIC ÎN CALCULUL STRUCTURILOR ANTISEISMICE*

de acad. ŞTEFAN BĂLAN, MIHAIL IFRIM
şi CORNEL PACOSTE
Institutul de construcţii Bucureşti

531.3 : 550.3

În lucrare se expun criteriile teoretice care stau la baza utilizării sistemelor dinamic echivalente în calculul antiseismic al structurilor. Se face o analiză asupra sistemului dinamic echivalent ca derivat din noţiunea mai generală de *sistem mecanic echivalent.* Rezultatele teoretice obţinute au fost confirmate de o serie de experimentări efectuate în laboratorul Catedrei de mecanică din Institutul de construcţii Bucureşti.

I. INTRODUCERE

În lucrările anterioare [1], [2] s-a analizat răspunsul dinamic al structurilor acţionate de perturbaţii de natură seismică, utilizîndu-se în acest scop un sistem dinamic echivalent ale cărui caracteristici reflectă comportarea structurii reale. Criteriile care stau la baza transformării unei structuri solicitate în regim dinamic într-un sistem convenţional, simplificat, denumit echivalent, derivă din noţiunea mai generală de *sistem mecanic echivalent.*

Din punct de vedere teoretic, sistemul echivalent poate substitui orice sistem real mult mai complex, a cărui rezolvare prezintă complicaţii de calcul. Obţinerea echivalentului mecanic în funcţie de caracteristicile fizice şi mecanice ale sistemului real analizat comportă unele criterii bine precizate şi care vor fi numite în continuare *criterii de echivalenţă.* Pentru stabilirea criteriilor de echivalenţă în studiul structurilor solicitate dinamic s-au folosit teoremele fundamentale ale mecanicii teoretice.

În această comunicare se va prezenta modul concret în care se aplică criteriile de echivalenţă în cazul structurilor etajate supuse

* Publicată şi în „Rev. roum. sci. teh. — Mécanique Appliquée", **11**, *6* (1966) (în limba engleză).

acţiunii seismice. Problema constă în a determina un sistem echivalent care să caracterizeze comportarea în ansamblu a unei structuri date.

În mod practic, sistemul dinamic echivalent reprezintă un sistem cu un singur grad de libertate care modelează structura reală schematizată printr-un sistem cu mai multe grade de libertate dinamice. Cunoscînd sistemul echivalent, răspunsul dinamic se poate determina direct utilizînd spectrul seismic fundamental.

Se menţionează că unele părţi din această comunicare au fost deja prezentate la a III-a Conferinţă mondială de seismologie inginerească din Noua Zeelandă (ianuarie 1965), precum şi la Sesiunea de comunicări a Institutului Politehnic din Iaşi (februarie 1965).

Între timp lucrarea s-a extins atît teoretic, cît şi experimental. Spaţiul restrîns pus la dispoziţie face ca unele aspecte să fie sumar tratate, iar altele neintroduse. De asemenea o serie de rezultate experimentale n-au fost menţionate. Toate experimentările au fost efectuate în cadrul laboratorului de vibraţii al Catedrei de mecanica construcţiilor I din Institutul de construcţii Bucureşti.

II. DETERMINAREA FORŢEI TĂIETOARE DE BAZĂ. SARCINI SEISMICE

Evaluarea forţei tăietoare de bază pentru un sistem cu mai multe grade de libertate dinamice supus acţiunii seismice se poate face prin intermediul sistemului monomasic echivalent, utilizînd în acest scop *coeficientul de echivalenţă a masei* $\mu\,(i)$, corespunzător modului normal de vibraţie i. Efectul intensităţii seismice se introduce prin *coeficientul*

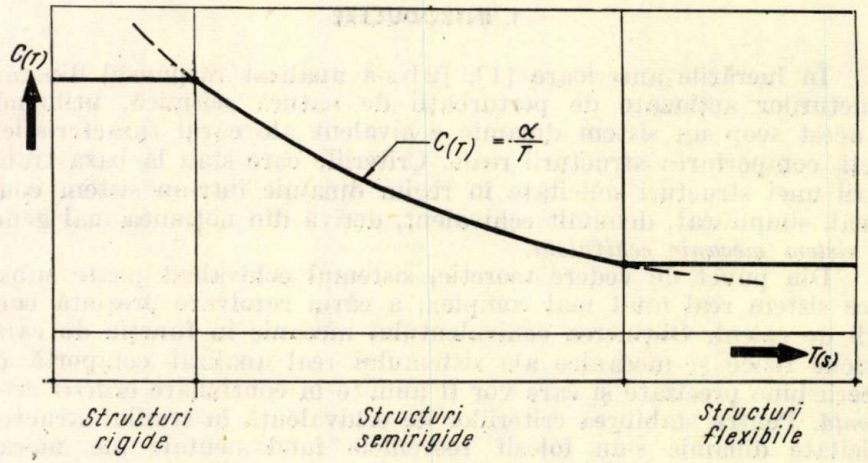


Fig. 1

seismic spectral $C\,(T_i)$, care depinde de perioada naturală de vibraţie T_i. El corespunde unui sistem oscilant cu un singur grad de libertate (monomasic). Variaţia coeficientului $C(T_i)$ în funcţie de perioada naturală T_i reprezintă *spectrul seismic fundamental* în sensul analizelor efectuate de M.A. Biot şi E. C. Robinson (fig. 1).

Prin distribuția forței tăietoare de bază pe înălțimea structurii se obțin sarcinile seismice care acționează în dreptul fiecărei mase. De fapt forța tăietoare de bază nu este altceva decît rezultanta forțelor seismice care acționează structura în dreptul fiecărui nivel.

Atît forța tăietoare de bază, cît și sarcinile seismice sînt de natura unor forțe de inerție, determinarea lor constituind o problemă de mecanică teoretică. În continuare se redau succint expresiile analitice ale acestora.

1. CAZUL STRUCTURILOR CU MASĂ DISTRIBUITĂ (fig. 2)

Forța tăietoare de bază corespunzătoare modului i de vibrație rezultă :

$$F(i) = C(T_i) \cdot Q_e(i), \tag{1}$$

unde $Q_e(i)$ reprezintă sarcina echivalentă ce se obține prin intermediul coeficientului de echivalență $\mu(i)$ astfel:

$$Q_e(i) = \mu(i) \cdot Q\,; \quad \mu(i) \leqslant 1. \tag{2}$$

S-a notat cu Q rezultanta sarcinilor gravitaționale ce acționează construcția :

$$Q = \int_0^H q_x \,\mathrm{d}x\,; \quad q_x = \overline{m}_x \cdot g.$$

Sarcinile seismice care acționează pe înălțimea structurii se obțin prin distribuția forței tăietoare de bază proporțional cu ordonatele curbei de variație a modului i de vibrație $y_x(i)$:

$$F_x(i) = \frac{q_x y_x(i)}{\int_0^H q_x y_x(i)\,\mathrm{d}x} \cdot F(i). \tag{3}$$

2. CAZUL STRUCTURILOR CU MASE CONCENTRATE (fig. 3)

Expresiile de calcul sînt analoge cu cele stabilite anterior. Astfel forța tăietoare de bază se determină tot cu formula (1), în care

$$Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k\,; \quad Q_k = m_k \cdot g,$$

iar sarcinile seismice prin adaptarea expresiei (3) :

$$F_k(i) = \frac{Q_k \cdot y_k(i)}{\sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot y_k(i)} \cdot F(i). \tag{4}$$

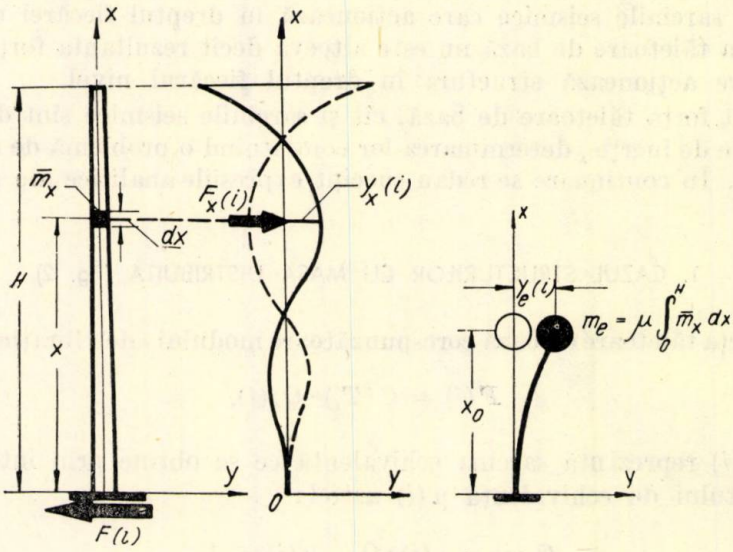


Fig. 2

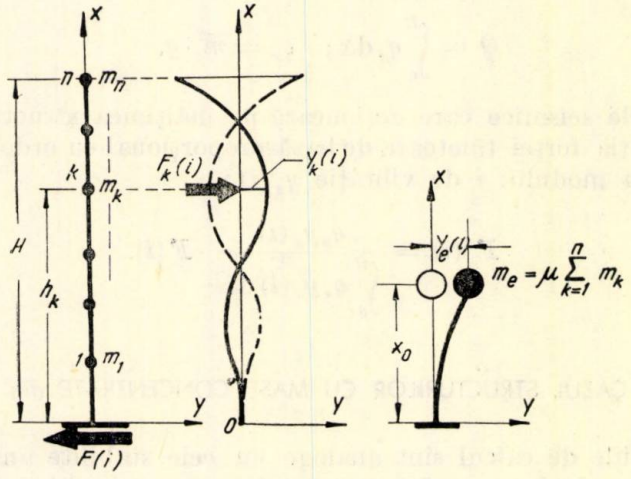


Fig. 3

III. RELAŢII GENERALE DE ECHIVALENŢĂ. MASA ECHIVALENTĂ ŞI COEFICIENŢI DE ECHIVALENŢĂ

În vederea stabilirii relaţiilor care caracterizează trecerea de la sistemul cu mai multe grade de libertate la sistemul echivalent, s-au folosit teoremele fundamentale ale mecanicii [1], [2], [3]. Astfel, între cele două sisteme, variaţia impulsurilor, pe de o parte, şi variaţia mo-

mentelor cinetice, pe de altă parte, vor fi egale. Rezolvarea acestei probleme este identică dacă se utilizează principiul conservării energiilor potențială și cinetică între cele două sisteme.

1. CAZUL SISTEMELOR CU O INFINITATE DE GRADE DE LIBERTATE DINAMICE (fig. 2)

Criteriul de echivalență, generalizat pentru modul i de vibrație, îl constituie :

— egalarea variației impulsurilor,

$$\dot{\vec{H}}_r(i) = \dot{\vec{H}}_e(i), \tag{5}$$

— egalarea variației momentelor cinetice,

$$\dot{\vec{K}}_r(i) = \dot{\vec{K}}_e(i). \tag{6}$$

Indicii r și e se referă la sistemul real și la sistemul echivalent.

Atît variația impulsului, cît și variația impulsului cinetic pot fi exprimate în funcție de variația vitezelor astfel :

$$\dot{\vec{H}}_r(i) = \int_0^H \overline{m}_x \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{x,t}(i)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x$$

$$\dot{\vec{H}}_e(i) = m_e(i) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{e,t}(i)}{\mathrm{d}t}$$

$$\dot{\vec{K}}_r(i) = \int_0^H y_x(i) \cdot \overline{m}_x \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{x,t}(i)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x$$

$$\dot{\vec{K}}_e(i) = y_e(i) \cdot m_e(i) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{e,t}(i)}{\mathrm{d}t}.$$

Pentru unda corespunzătoare modului i de vibrație, considerată staționară la un anumit moment t în cazul oscilațiilor libere, se poate admite următoarea soluție de tip Fourier, cu variabilele de timp și spațiu separate :

$$y_{x,t}(i) = y_x(i) \cdot \Phi_t(i)$$

și

$$y_{e,t}(i) = y_e(i) \cdot \Phi_t(i).$$

În baza acestor soluții rezultă

$$\frac{\mathrm{d}v_{x,t}(i)}{\mathrm{d}t} = y_x(i) \cdot \frac{\mathrm{d}^2\,\Phi_t(i)}{\mathrm{d}t^2}$$

și

$$\frac{\mathrm{d}v_{e,t}(i)}{\mathrm{d}t} = y_e(i) \cdot \frac{\mathrm{d}^2\,\Phi_t(i)}{\mathrm{d}t^2}.$$

Înlocuind în relaţiile generale de echivalenţă (5) şi (6) soluţiile de mai sus, se obţine

$$\int_0^H \overline{m}_x \cdot y_x(i) \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \Phi_t(i)}{\mathrm{d}t^2} \cdot \mathrm{d}x = m_e(i) \cdot y_e(i) \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \Phi_t(i)}{\mathrm{d}t^2},$$

$$\int_0^H \overline{m}_x \cdot y_x^2(i) \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \Phi_t(i)}{\mathrm{d}t^2} \cdot \mathrm{d}x = m_e(i) \cdot y_e^2(i) \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \Phi_t(i)}{\mathrm{d}t^2}$$

sau

$$\int_0^H \overline{m}_x \cdot y_x(i) \cdot \mathrm{d}x = m_e(i) \cdot y_e(i), \tag{7}$$

$$\int_0^H \overline{m}_x \cdot y_x^2(i) \cdot \mathrm{d}x = m_e(i) \cdot y_e^2(i). \tag{8}$$

Ecuaţiile (7) şi (8), care caracterizează trecerea de la sistemul real la cel monomasic, conţin necunoscutele sistemului echivalent: masa echivalentă $m_e(i)$ şi elongaţia $y_e(i)$. Prin eliminarea elongaţiei din aceste două ecuaţii rezultă expresia generală a *masei echivalente*, corespunzătoare modului i de oscilaţie

$$m_e(i) = \frac{\left[\int_0^H \overline{m}_x \cdot y_x(i) \cdot \mathrm{d}x\right]^2}{\int_0^H \overline{m}_x \cdot y_x^2(i) \cdot \mathrm{d}x}. \tag{9}$$

Raportul dintre masa echivalentă şi masa totală a sistemului real se va nota cu $\mu(i)$ şi va fi denumit *coeficient de echivalenţă*, adică

$$\mu(i) = \frac{m_e(i)}{m_{\text{total}}} = \frac{m_e(i)}{\int_0^H \overline{m}_x \, \mathrm{d}x}. \tag{10}$$

Expresia generală a coeficientului de echivalenţă, după ce se înlocuieşte (9) în (10), rezultă următoarea:

$$\mu(i) = \frac{\left[\int_0^H \overline{m}_x \cdot y_x(i) \, \mathrm{d}x\right]^2}{\left[\int_0^H \overline{m}_x \cdot \mathrm{d}x\right]\left[\int_0^H \overline{m}_x \cdot y_x^2(i) \mathrm{d}x\right]}. \tag{11}$$

Cînd masa sistemului real este uniform distribuită pe întreaga înălţime, deci

$$\overline{m}_x = \overline{m} = \text{const.},$$

formulele (9) şi (11) se transformă astfel

$$m_e(i) = \frac{\left[\int_0^H y_x(i)\,dx\right]^2}{\int_0^H y_x^2(i)\,dx}\,\overline{m}, \tag{12}$$

$$\mu(i) = \frac{\left[\int_0^H y_x(i)\,dx\right]^2}{H\int_0^H y_x^2(i)\,dx}. \tag{13}$$

2. CAZUL SISTEMELOR CU n GRADE DE LIBERTATE DINAMICE (fig. 3)

În mod analog cazului studiat anterior se tratează şi sistemele avînd mase discrete. De aceea formulele de calcul pot fi obţinute direct prin transformarea integralelor în sume, rezultînd :

— pentru masa echivalentă,

$$m_e(i) = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot y_k(i)\right]^2}{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot y_k^2(i)}; \tag{14}$$

— pentru coeficientul de echivalenţă,

$$\mu(i) = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot y_k(i)\right]^2}{\left[\sum_{k=1}^{n} m_k\right] \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot y_k^2(i)\right]}. \tag{15}$$

Dacă masele sistemului real sînt egale între ele, caz destul de frecvent la construcţiile civile,

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_k = \ldots = m_n = m,$$

formulele (14) şi (15) devin

$$m_e(i) = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k(i)}{\sum_{k=1}^{n} y_k^2(i)}\,m \tag{16}$$

şi

$$\mu(i) = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n} y_k(i)\right]^2}{n\sum_{k=1}^{n} y_k(i)}. \tag{17}$$

Observaţii

1. În cazul în care sistemul este încărcat cu masă distribuită şi mase concentrate, deducerea formulelor pentru masa echivalentă şi coeficientul de echivalenţă se face aplicînd aceleaşi relaţii generale de echivalenţă (5) şi (6). Aceste formule sînt analoge cu cele stabilite pentru cazurile analizate anterior [1], [2].

2. Totdeauna

$$\mu(i) \leqslant 1,$$

iar în general s-a putut demonstra teoretic că

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(i) = 1.$$

Demonstrarea acestei proprietăţi a coeficienţilor de echivalenţă corespunzătoare tuturor modurilor de vibraţie ale aceluiaşi sistem, fiind mai laborioasă, nu se expune datorită spaţiului restrîns.

3. Dacă în toate expresiile obţinute se înlocuieşte masa prin sarcinile gravitaţionale,

$$\overline{m} = q_x/g; \qquad m_k = Q_k/g,$$

se obţin formule corespunzătoare pentru sarcina echivalentă şi coeficientul de echivalenţă a sarcinilor.

4. Coeficienţii de echivalenţă $\mu(i)$ de ordin superior scad foarte rapid şi cu atît mai mult cu cît sistemul real este mai rigid. Se constată că numai coeficienţii de echivalenţă pentru primele trei moduri normale de vibraţie prezintă interes practic.

IV. COEFICIENŢI DE DISTRIBUŢIE A FORŢEI SEISMICE

Expresiile generale ale forţei seismice (3) sau (4) care acţionează la nivelul x, respectiv k, şi care corespund modului i de vibraţie mai pot fi puse sub următoarea formă :

$$\left.\begin{aligned} F_x(i) &= d_x(i) \cdot F(i), \\ F_k(i) &= d_k(i) \cdot F(i), \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

în care $d_x(i)$ şi $d_k(i)$ au semnificaţia unor coeficienţi de distribuţie a forţei tăietoare de bază $F(i)$ la nivelul x, respectiv k al structurii.

Coeficienţii de distribuţie $d(i)$ se calculează cu formulele

$$d_x(i) = \frac{q_x y_x(i)}{\int_0^H q_x y_x(i)\,\mathrm{d}x}, \tag{19}$$

în cazul structurilor cu masă distribuită, şi

$$d_k(i) = \frac{Q_k \cdot y_k(i)}{\sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot y_k(i)}, \tag{20}$$

în cazul structurilor cu mase concentrate.

Dacă masa este uniform distribuită pe întreaga înălțime, formula (19) devine

$$d_x(i) = \frac{y_x(i)}{\int_0^H y_x(i)\,dx},$$

iar dacă masele sînt egale, formula (20) se transformă astfel :

$$d_k(i) = \frac{y_k(i)}{\sum_{k=1}^{n} y_k(i)}.$$

După cum se poate constata, coeficienții de distribuție a forțelor seismice sînt direct proporționali cu ordonatele modurilor proprii de vibrație $y_x(i)$, respectiv $y_k(i)$. Întrucît la stabilirea coeficienților de echivalență sînt necesare ordonatele modurilor de vibrație, calculul coeficienților de distribuție de face direct, fără a mai fi necesare date suplimentare.

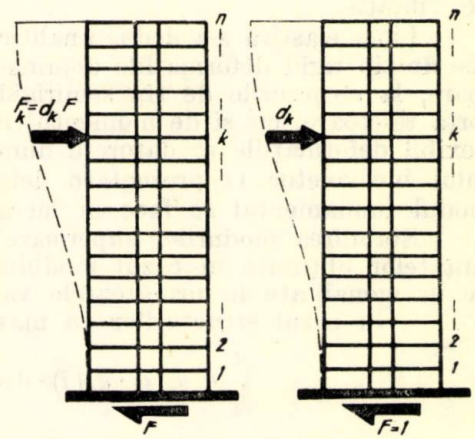


Fig. 4

În figura 4 se prezintă semnificația coeficientului de distribuție în funcție de forța seismică de nivel pentru modul fundamental de vibrație. Rezultă că coeficientul de distribuție $d_k(i)$ reprezintă sarcina seismică care acționează structura la nivelul k, cînd forța tăietoare de bază corespunzătoare modului i, are o valoare unitară. Deci

$$\sum_{k=1}^{n} d_k(i) = 1.$$

V. EVALUAREA NUMERICĂ A COEFICIENȚILOR DE ECHIVALENȚĂ ȘI DE DISTRIBUȚIE

În vederea utilizării în scopuri practice s-au efectuat operațiile necesare pentru obținerea directă a coeficienților numerici de echivalență a masei și de distribuție a forței tăietoare de bază.

Pentru a ține seama de comportarea structurilor în regim dinamic în funcție de perioada fundamentală de vibrație T_1, s-au diferențiat structurile în trei clase, și anume :

— structuri rigide, pentru care

$$T_1 \leqslant 0{,}3 \text{ s};$$

— structuri semirigide, pentru care

$$0{,}3 \text{ s} < T_1 \leqslant 1{,}2 \text{ s};$$

— structuri flexibile, pentru care

$$T_1 > 1{,}2 \text{ s}.$$

Ecuaţiile propuse pentru modul fundamental de vibraţie au rezultat dintr-un calcul static. Astfel s-a presupus că forma fundamentală corespunde cu linia elastică a unei bare încărcate cu o sarcină statică distribuită liniar, zero la bază şi maximă la vîrf. La determinarea liniei elastice s-a ţinut cont de clasificarea din punct de vedere dinamic a structurilor. Trebuie precizat că încărcarea propusă se apropie foarte mult de solicitarea reală a structurii care corespunde modului fundamental de vibraţie.

Linia elastică s-a dedus analitic avîndu-se în vedere că la structurile de tip rigid deformaţiile dominante sînt cele produse de forţa tăietoare, la structurile de tip semirigid deformaţiile sînt produse atît de forţa tăietoare, cît şi de momentul încovoietor, iar la structurile de tip flexibil deformaţiile se datoresc numai influenţei dominante a momentului încovoietor. O prezentare detaliată a ecuaţiilor propuse pentru modul fundamental se face în lucrarea [1].

Stabilirea modurilor superioare de vibraţie s-a făcut pe baza rezultatelor obţinute în cazul modului fundamental şi folosind condiţia de ortogonalitate în următoarele variante :

— în cazul structurilor cu masă distribuită

$$\int_0^H q_x y_x(i) \cdot y_x(j) \cdot \mathrm{d}x = 0 \qquad (i \neq j), \tag{21}$$

— în cazul structurilor cu mase concentrate

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot y_k(i) \cdot y_k(j) = 0 \qquad (i \neq j). \tag{22}$$

În aceste relaţii, $y_x(i)$, $y_k(i)$, precum şi $y_x(j)$, $y_k(j)$, reprezintă ordonatele modurilor de vibraţie i şi, respectiv, j.

O dezvoltare mai amănunţită a acestei probleme este dată într-o lucrare mai vastă în curs de pregătire.

În tabela 1 sînt date valorile numerice ale coeficienţilor de echivalenţă în funcţie de numărul etajelor şi care corespund modului fundamental de vibraţie. Se constată că aceşti coeficienţi au o pronunţată variaţie în funcţie de numărul etajelor şi de rigiditatea dinamică a structurii (fig. 5). Cu cît numărul etajelor creşte, coeficienţii μ scad în valoare mult mai lent, tinzînd către o plafonare pe anumite intervale şi de aceea pentru calculele de proiectare se propun coeficienţii din tabela 2. Valorile-limită ale acestor coeficienţi, care corespund structurilor cu un număr nelimitat de etaje, pun în evidenţă regimul oarecum staţionar a variaţiei acestor coeficienţi.

Coeficienţii de echivalenţă corespunzători modurilor superioare au o variaţie foarte puţin pronunţată. Calculul efectuat s-a referit la modurile 2 şi 3 şi numai pentru structurile flexibile, în care caz influenţa lor poate interveni.

S-au obţinut următoarele valori medii :

$$\mu(2) \simeq 0{,}250$$

şi

$$\mu(3) \simeq 0{,}070.$$

Coeficienţii de distribuţie a forţelor seismice au fost calculaţi tot în funcţie de numărul etajelor şi de tipul structurii din punctul de ve-

Tabela 1

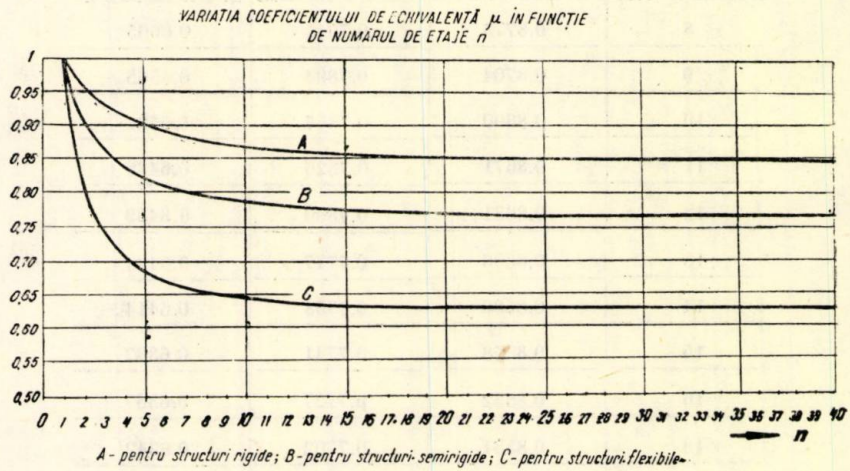
Numărul de niveluri n	Coeficienţii de echivalenţă $\mu = m_e/m$.		
	Construcţii de tip RIGID ($T \leqslant 0{,}3s$)	Construcţii de tip SEMIRIGID ($0{,}3s < T \leqslant 1{,}2s$)	Construcţii de tipul FLEXIBIL ($T > 1.2s$)
0	1	2	3
1	1.0000	1.0000	1.0000
2	0,9587	0.9000	0.8075
3	0.9324	0.8571	0.7387
4	0.9128	0.8333	0.7087
5	0.9007	0.8181	0.6874
6	0.8915	0.8076	0.6729
7	0.8831	0.8000	0.6666
8	0.8773	0.7941	0.6605
9	0.8704	0.7894	0.6565
10	0.8690	0.7857	0.6521
11	0.8671	0.7826	0.6486
12	0.8631	0.7800	0.6459
13	0.8606	0.7777	0.6434
14	0.8588	0.7758	0.6414
15	0.8568	0.7741	0.6387
16	0.8552	p.7727	0.6367
18	0.8531	0.7702	0.6342
20	0.8509	0.7682	0.6329
22	0.8487	0.7666	0.6312
24	0.8474	0.7653	0.6299
30	0.8454	0.7622	0.6276
40	0.8400	0.7592	0.6245
nelimitat	0.8043	0.7500	0.6159

dere al rigidităţii dinamice. Datorită spaţiului limitat, tabelele cu aceşti coeficienţi nu au mai fost redate în lucrarea de faţă.

Pentru cazul cînd se consideră influenţa simultană a primelor trei moduri de vibraţie, s-au efectuat precizări asupra determinării forţelor seismice probabile care pot solicita structura în timpul unui cutremur.

Tabela 2

Număr de nivele	Tipul construcţiei		
	rigid	semirigid	flexibil
0	1	2	3
1 la 10	Conform valorilor din tabela nr. 1		
11 la 15	0.861	0.778	0.647
16 la 20	0.853	0.771	0.635
peste 20	0.846	0.765	0.630
nelimitat	0.805	0.750	0.616



A - pentru structuri rigide; B - pentru structuri semirigide; C - pentru structuri flexibile.

Fig. 5

VI. DETERMINAREA POZIŢIEI MASEI ECHIVALENTE

Considerînd structura din figura 6 şi presupunînd că este de tip semirigid, iar oscilaţiile corespund modului fundamental, se poate aproxima că mişcarea la un moment dat este o consecinţă a rotirii întregului ansamblu, presupus corp solid, în jurul axei O_z. În consecinţă, structura analizată poate fi privită din punct de vedere mecanic ca un pendul fizic (compus), avînd în O centrul de suspensie, iar oscilaţiile producîndu-se în jurul axei de suspensie O_z.

Se aplică acestui ansamblu teorema momentului cinetic față de axa O_z, și anume [3]

$$K_z = M_z, \tag{23}$$

unde

K_z reprezintă proiecția momentului cinetic $\overline{K}$ în raport cu punctul O, pe axa O_z

M_z — proiecția momentului rezultant $\overline{M}$ al tuturor forțelor pe aceeași axă.

Pe de altă parte,

$$K_z = I_{zz} \cdot \omega, \tag{24}$$

I_{zz} fiind momentul de inerție al ansamblului față de axa O_z, constant ca mărime, iar ω viteza unghiulară de rotație care poate fi exprimată astfel:

$$\omega = \dot{\theta} \tag{25}$$

Prin înlocuire în ecuația (23) a relațiilor (24) și (25) rezultă:

$$I_{zz} \cdot \ddot{\theta} = M_z. \tag{26}$$

În cazul de față, M_z se va explicita în felul următor:

$$M_z = - m_t \cdot g \cdot x_G \cdot \sin \theta, \tag{27}$$

în care

$m_t = \sum_{k=1}^{n} m_k$ este masa totală care acționează asupra structurii

x_G — distanța de la centrul de suspensie O la centrul de greutate al ansamblului;

g — accelerația gravitațională.

Ecuația (26) devine

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{I_{zz}/m_t \cdot x_G} \cdot \sin \theta = 0. \tag{28}$$

Introducînd notația

$$x_0 = \frac{I_{zz}}{m_t \cdot x_G},$$

ecuația (28) mai poate fi scrisă

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{x_0} \cdot \sin \theta = 0. \tag{29}$$

Se observă că ecuația (29) corespunde oscilațiilor pendulului simplu care este de fapt *echivalentul dinamic* al pendulului compus caracterizat de ecuația generală (23).

Rezultă de aici că punctul O', situat față de O la distanța x_0 și numit centru de oscilație al pendulului fizic, are o mișcare identică cu cea a pendulului simplu, precum și cu cea a pendulului fizic (fig. 6).

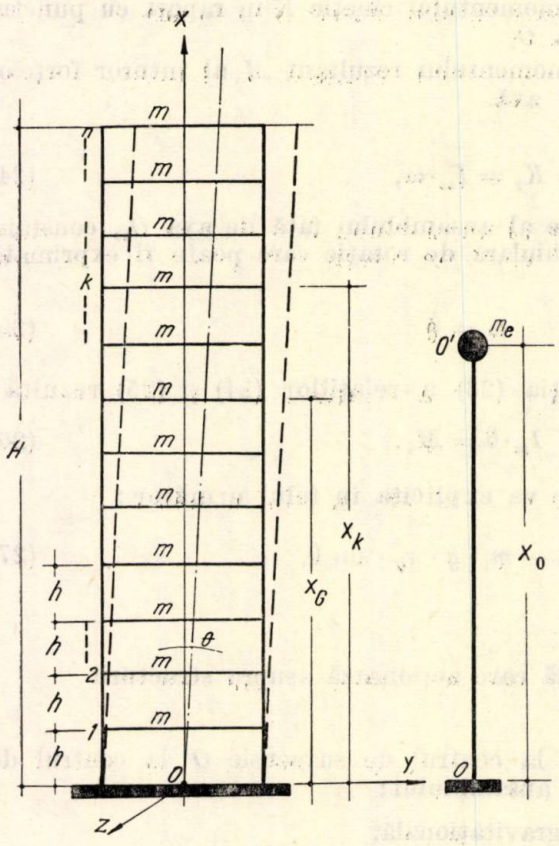


Fig. 6

Distanța x_0 este deci lungimea pendulului simplu sincron, echivalent din punct de vedere mecanic cu pendulul fizic. Așadar, x_0 precizează poziția masei echivalente a sistemului monomasic considerat.

Pentru explicitarea distanței x_0 se operează asupra formulei stabilite anterior:

$$x_0 = \frac{I_{zz}}{m_t} \cdot \frac{1}{x_G} = \frac{r_0^2}{x_G}. \qquad (30)$$

S-a notat cu $r_0^2 = I_{zz}/m_z$ raza de girație a ansamblului.

Presupunînd structura din figura 6 cu distanțele dintre etaje egale (h) și uniform încărcată, adică acționată de mase egale (m) la nivelul fiecărui etaj, rezultă

$$I_{zz} = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot x_k^2 = m \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

$$x_k = k \cdot h$$

și deci

$$I_{zz} = mh^2 \sum_{k=1}^{n} k^2 = mh^2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Masa totală va fi

$$m_t = \sum_{k=1}^{n} m_k = n \cdot m.$$

Raza de girație rezultă

$$r_0^2 = \frac{I_{zz}}{m_t} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} h^2.$$

Exprimată în funcţie de numărul etajelor, poziţia centrului de greutate al ansamblului rezultă

$$x_G = \frac{n+1}{2} h.$$

Aplicînd formula (30), se obţine poziţia masei echivalente

$$x_0 = \frac{r_0^2}{x_G} = \frac{\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} h^2}{\dfrac{(n+1)}{2} h} = \frac{2n+1}{3} h = \frac{2n+1}{3n} \cdot H. \qquad (31)$$

Utilizarea formulei (31) este valabilă numai pentru structurile de tip semirigid, în care caz rezultatele ce se obţin au o bună precizie. Aceeaşi formulă poate fi extinsă cu anumite aproximaţii şi celorlalte tipuri de structuri prin punerea în evidenţă a coeficientului de echivalenţă μ.

În baza ipotezelor admise referitoare la configuraţia geometrică a structurii şi asupra încărcărilor, pentru coeficientul de echivalenţă μ care corespunde modului fundamental de vibraţie se ajunge la expresia

$$\mu = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot y_k\right]^2}{\left[\sum_{k=1}^{n} Q_k\right]\left[\sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot y_k^2\right]} = \frac{3(n+1)}{2(2n+1)}. \qquad (32)$$

Revenind la formula (31), prin înmulţire cu raportul μ/μ se obţine

$$x_0 = \frac{2n+1}{3} h \frac{\mu}{\mu} = \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{h}{\mu} \cdot \frac{3(n+1)}{2(2n+1)},$$

iar în final

$$x_0 = \frac{n+1}{2\mu} \cdot h = \frac{n+1}{2n\mu} H. \qquad (33)$$

Cunoscînd valorile numerice ale coeficientului de echivalenţă μ, cu ajutorul formulei (33) se poate determina aproximativ poziţia masei echivalente pentru orice structură etajată, indiferent de rigiditatea dinamică.

Observaţii

1. Pentru structurile avînd un număr nelimitat de niveluri se pot obţine distanţele x_0 (limită), utilizînd în acest scop valorile coeficienţilor μ_{lim} din tabela 1.

Se va exprima mai întîi formula (33) în funcţie de înălţimea totală a structurii $H = nh$

$$x_0 = \frac{n+1}{2\mu} \cdot \frac{H}{n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2\mu} \cdot H,$$

trecînd la limită

$$\lim_{n\to\infty} x_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2\mu} \cdot H,$$

de unde rezultă

$$x_0\,(\text{lim}) = \frac{1}{2\mu} \cdot H. \tag{34}$$

Valorile x_0(lim) pentru cele trei categorii de structuri studiate vor fi :

— pentru structurile de tip rigid,

$$\mu_R\,(\text{lim}) = 0{,}8043\,; \qquad x_0\,(\text{lim}) = 0{,}6217\,H\,;$$

— pentru structurile de tip semirigid,

$$\mu_{SR}\,(\text{lim}) = 0{,}7500\,; \qquad x_0\,(\text{lim}) = \frac{2}{3}H\,;$$

— pentru structurile de tip flexibil,

$$\mu_F\,(\text{lim}) = 0{,}6159\,; \qquad x_0\,(\text{lim}) = 0{,}8118\,H.$$

Aşadar, în cazul celor trei categorii de structuri, x_0 variază în următoarele intervale :

$0{,}6217\,H \leqslant x_0 \leqslant H$ — la structurile de tip rigid,

$0{,}6667\,H \leqslant x_0 \leqslant H$ — la structurile de tip semirigid,

$0{,}8118\,H \leqslant x_0 \leqslant H$ — la structurile de tip flexibil.

2. Rezultatul obţinut pentru x_0(lim) în cazul structurilor de tip semirigid este identic cu cel care se obţine din studiul unui pendul fizic alcătuit dintr-o bară de lungime H şi avînd masa uniform distribuit $\overline{m}$ (fig. 7) :

$$x_0 = \frac{r_0^2}{x_G},$$

$$r_0^2 = \frac{I_{zz}}{m_t},$$

unde

$$I_{zz} = \int_0^H \overline{m}\, x^2\, \mathrm{d}x = \overline{m}\,\frac{H^3}{3},$$

$$m_t = \int_0^H \overline{m}\, \mathrm{d}x = \overline{m}\, H,$$

$$x_G = \frac{H}{2}$$

Prin înlocuire rezultă

$$r_0^2 = \frac{\overline{m}\cdot\dfrac{H^3}{3}}{\overline{m}\,H} = \frac{H^2}{3}$$

şi deci

$$x_0 = \frac{\dfrac{H^2}{3}}{\dfrac{H}{2}} = \frac{2}{3}H.$$

3. Întrucît s-au efectuat experimentări privind echivalentul dinamic pentru cazul încărcării cu masă uniform distribuită, s-a determinat poziţia masei echivalente utilizînd metoda energetică. În acest sens s-a aproximat modul fundamental de oscilaţie cu deformata statică a sistemului. S-a obţinut astfel

$$x_0 \simeq 0{,}735\ H.$$

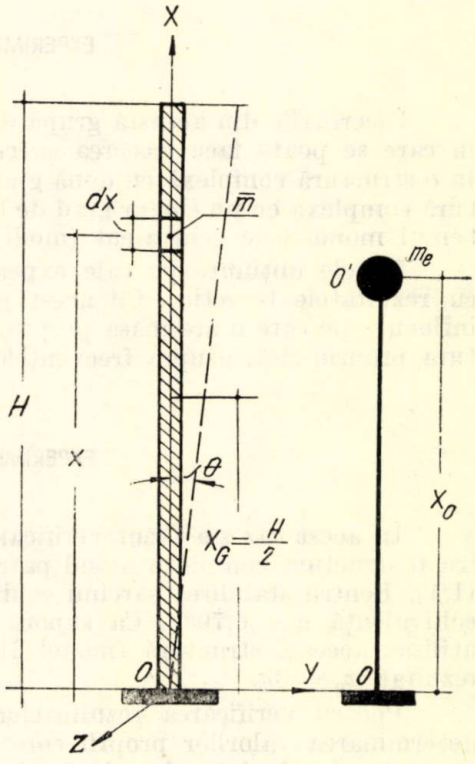


Fig. 7

Acest rezultat s-a considerat mai precis decît x_0(lim) dedus anterior, ceea ce a fost confirmat şi prin încercările efectuate, aşa cum reiese din partea a VII-a a lucrării de faţă.

4. Cunoaşterea poziţiei masei echivalente este de mare importanţă mai ales la efectuarea studiului experimental al problemei privind echivalentul dinamic al structurilor.

VII. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE

Prin experimentările efectuate s-a urmărit confirmarea posibilităţii utilizării echivalentului dinamic în calculul structurilor antiseismice, precum şi verificarea valorilor numerice ale coeficienţilor de echivalenţă obţinuţi pe cale teoretică.

Încercările s-au desfăşurat în condiţii de laborator, utilizînd în acest scop modele metalice. Solicitarea modelelor în regim dinamic s-a făcut cu ajutorul unei mese vibrante cu trei componente, avînd amplitudini şi frecvenţe variabile. Înregistrările s-au obţinut cu un oscilograf catodic cu un singur canal. Structurile analizate au avut pînă la 10 grade de libertate dinamice şi diferite configuraţii geometrice.

În funcţie de scopul urmărit, s-au efectuat trei grupe de experimentări, a căror descriere se va face succint în continuare.

EXPERIMENTUL 1

Încercările din această grupă de experimentări s-au referit la modul în care se poate face trecerea succesivă, prin echivalenţă dinamică, de la o structură complexă cu două grade de libertate (model I/3) la o structură complexă cu un singur grad de libertate (model I/2) şi, în final, la sistemul monomasic echivalent (model I/1).

Datele obţinute pe cale experimentală arată o bună concordanţă cu rezultatele teoretice. Cu acest prilej s-a putut pune în evidenţă şi influenţa pe care o are masa proprie a suportului elastic, format de structura propriu-zisă, asupra frecvenţelor naturale de vibraţie.

EXPERIMENTUL 2

În acest caz s-a făcut verificarea coeficientului de echivalenţă pentru o structură complexă avînd patru grade de libertate dinamice (model II/1). Pentru stabilirea sarcinii echivalente Q_e s-a folosit coeficientul de echivalenţă $\mu = 0{,}7087$. Ca suport elastic al sistemului monomasic s-a utilizat aceeaşi structură (model II/2), iar poziţia masei echivalente a rezultat $x_0 = 3h$.

Pentru verificarea rezultatelor experimentale cu datele teoretice, determinarea valorilor proprii corespunzătoare modelului II/1 s-a făcut cu ajutorul calculatorului electronic analogic de la Centrul de cercetări a Universităţii Bucureşti. La stabilirea sistemului general de ecuaţii diferenţiale şi la determinarea datelor necesare întocmirii programului s-a utilizat principiul lucrului mecanic virtual aplicat în calculul dinamic.

Rezultatele obţinute atît la experimentul 1, cît şi la experimentul 2 sînt sintetizate în tabelele 3 şi 4.

EXPERIMENTUL 3

Aceste experimentări s-au efectuat cu scopul de a verifica valorile numerice ale coeficientului de echivalenţă μ pentru o serie de sisteme de la două pînă la zece grade de libertate.

Tabela 3

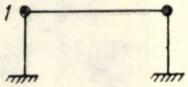
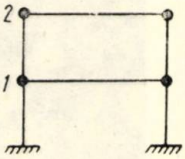
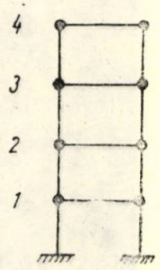
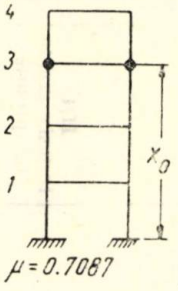
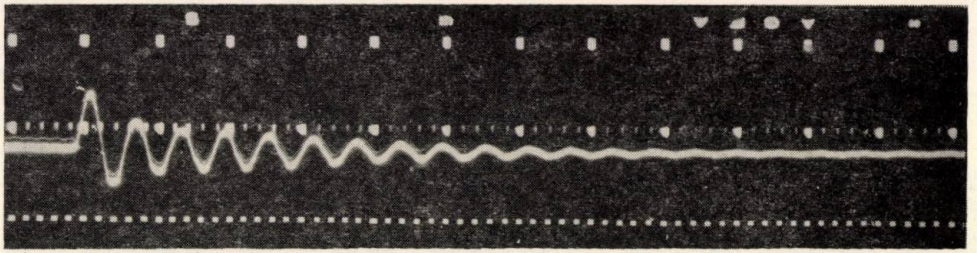
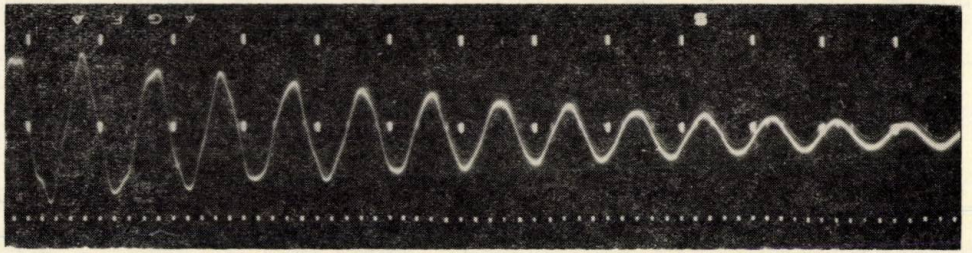
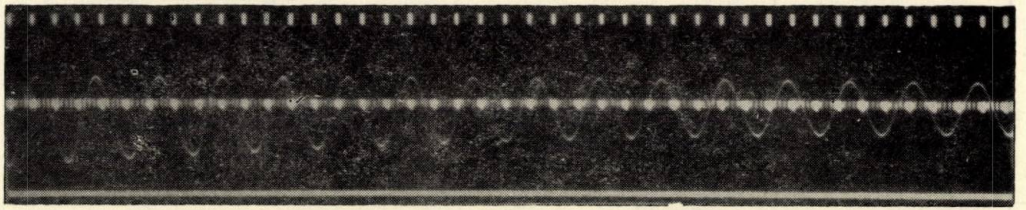
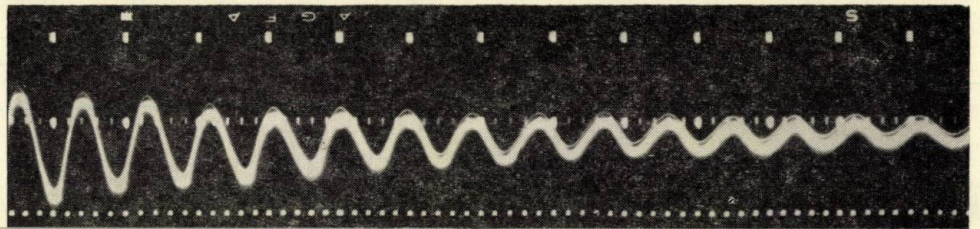
Nr. experienţei	Nr. model	Schema	Frecvenţa în H_z		Erori %
			Calculat	Măsurat	
I	1		15.9	16	< 1%
	2		15.9	15.8	< 1%
	3		15.9	16	< 1%
II	1		11.2	11.65	− 4.9%
	2		11.3	10.95	− 3.1%

Tabela 4

	Modelul	Oscilograme	Frecvența
I	I/3 Inclusiv greutatea proprie		16 Hz
	I/3 Exclusiv greutatea proprie		13,65 Hz
II	II/1 Inclusiv greutatea proprie		10,65 Hz
	II/2 Sistemul echivalent $\mu = 0.70.87$		10,95 Hz

Modelele încercate sînt prezentate în figura 8, iar principalele caracteristici şi rezultatele obţinute sînt cuprinse în tabela 5.

Ca suport elastic s-a folosit o bară de oţel, $H = 100$ cm, iar masele s-au dispus la distanţe egale.

Toate modelele studiate s-au încadrat în categoria structurilor de tip semirigid. Coeficienţii de echivalenţă sînt cuprinşi în tabela 1, coloana

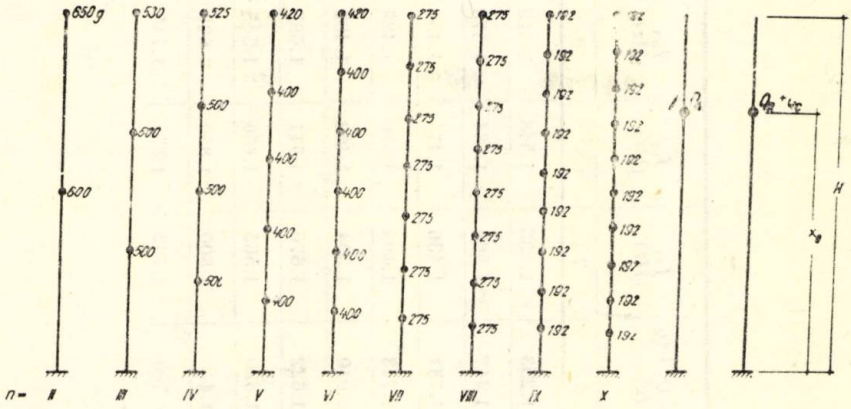
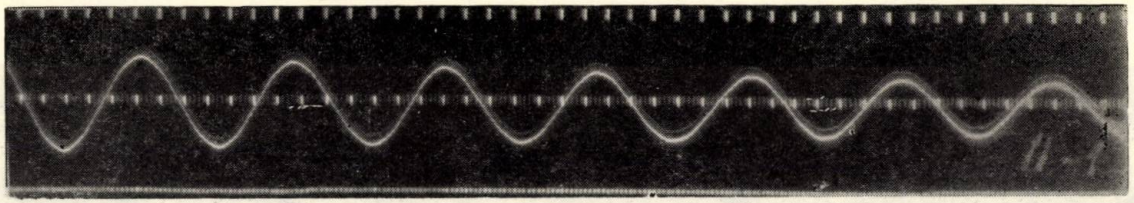
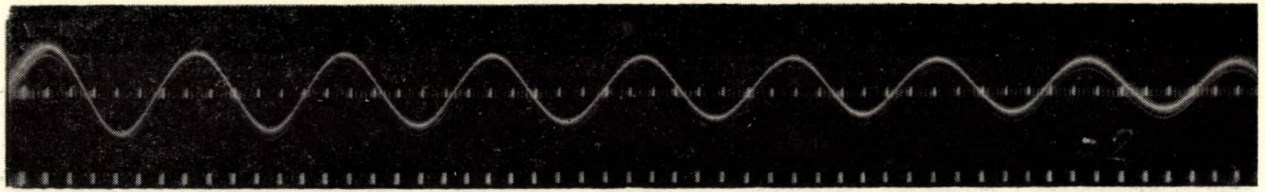

650 g
600
500
500
525
500
500
500
420
400
400
400
400
400
480
400
400
400
400
400
275
275
275

Tabela 5

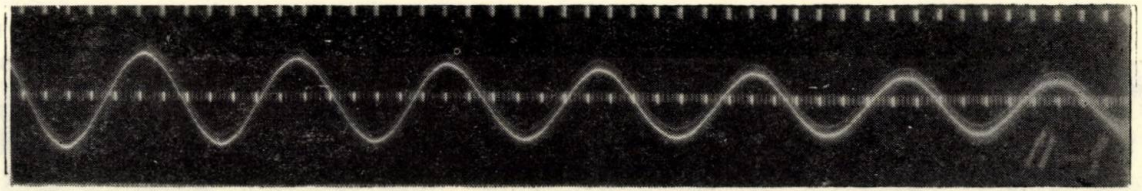
Model (n)	$Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k$ (g)	μ	$Q_e = \mu Q$ (g)	x_0 (cm)	Q_c (g)	$\overline{Q}_e = Q_e + Q_c$ (g)	f_{n1} (Hz)	f_{n2} (Hz)	f_{n3} (Hz)	$\Delta_{1.2}$ (%)	$\Delta_{1.3}$ (%)
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	1.250	0.9000	1.125	83.3	128	1.253	1.533	1.548	1.519	0.9	0.9
3	1.530	0.8571	1.311	77.7	106	1.417	1.566	1.584	1.573	1.1	0.4
4	2.020	0.8333	1.688	75.0	96	1.784	1.436	1.475	1.451	2.8	1.0
5	2.020	0.8181	1.653	73.3	90	1.743	1.493	1.560	1.486	4.5	0.5
6	2.420	0.8076	1.955	72.2	85	2.040	1.394	1.462	1.402	4.9	0.6
7	1.925	0.8000	1.540	71.4	82	1.622	1.670	1.711	1.667	2.5	0.3
8	2.200	0.7941	1.745	70.8	75	1.820	1.565	1.666	1.565	6.4	0.0
9	1.728	0.7894	1.365	70.4	75	1.440	1.800	1.850	1.820	2.8	1.1
10	1.920	0.7857	1.510	70.0	80	1,590	1.732	1.834	1.740	5.9	0.6



II–1 *a*



II–2 *b*



II–3 *c*

Fig. 9

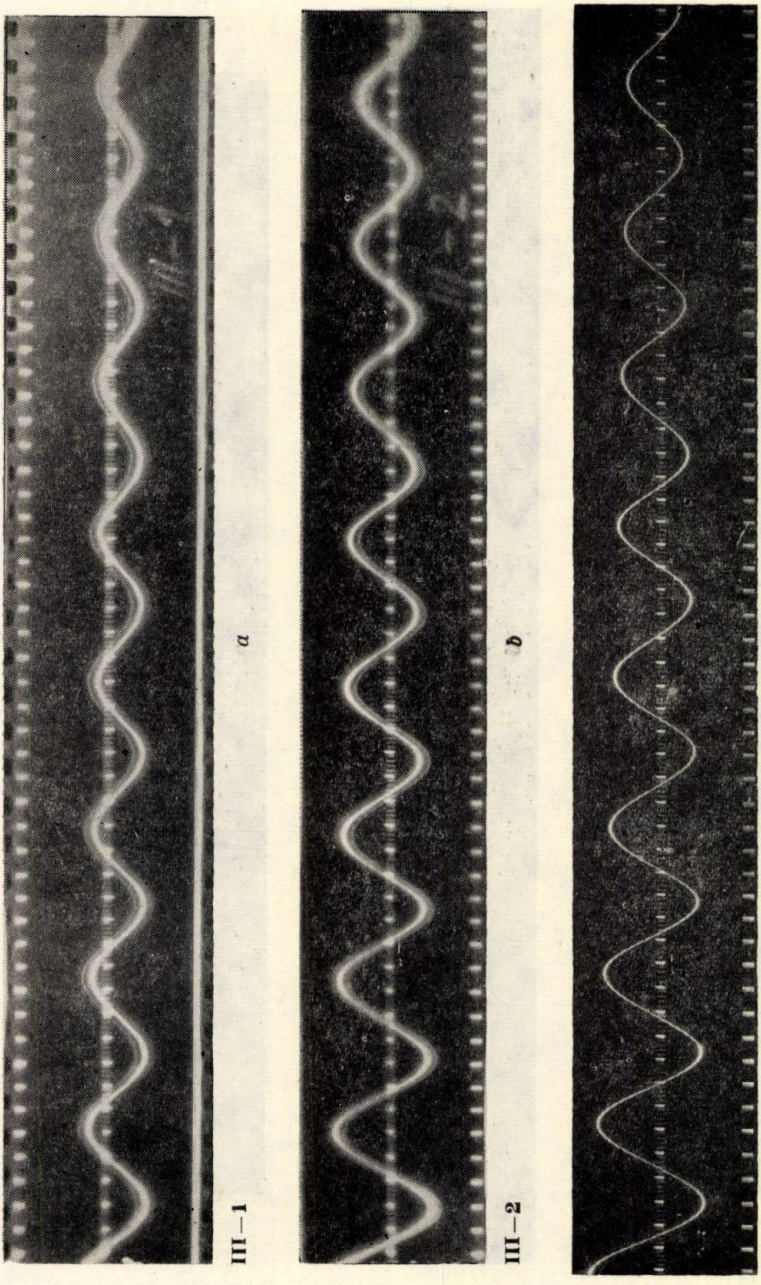
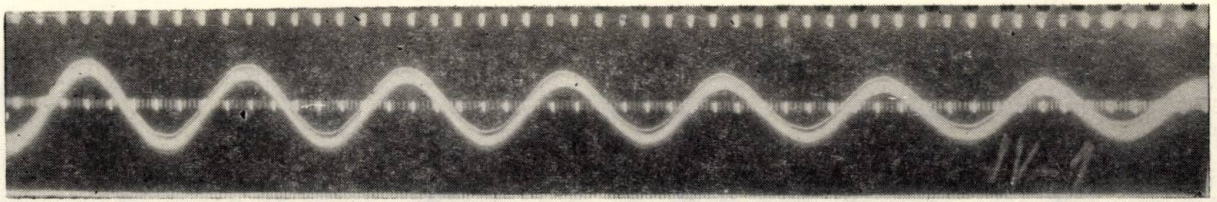
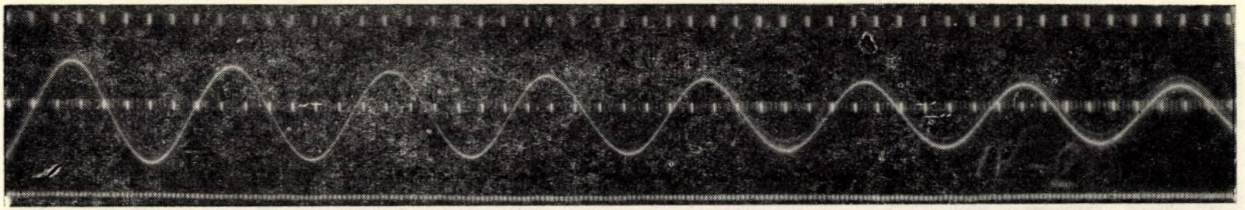


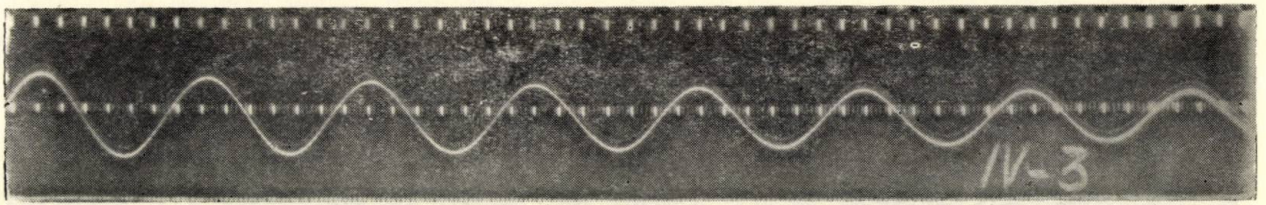
Fig. 10



IV—1 *a*

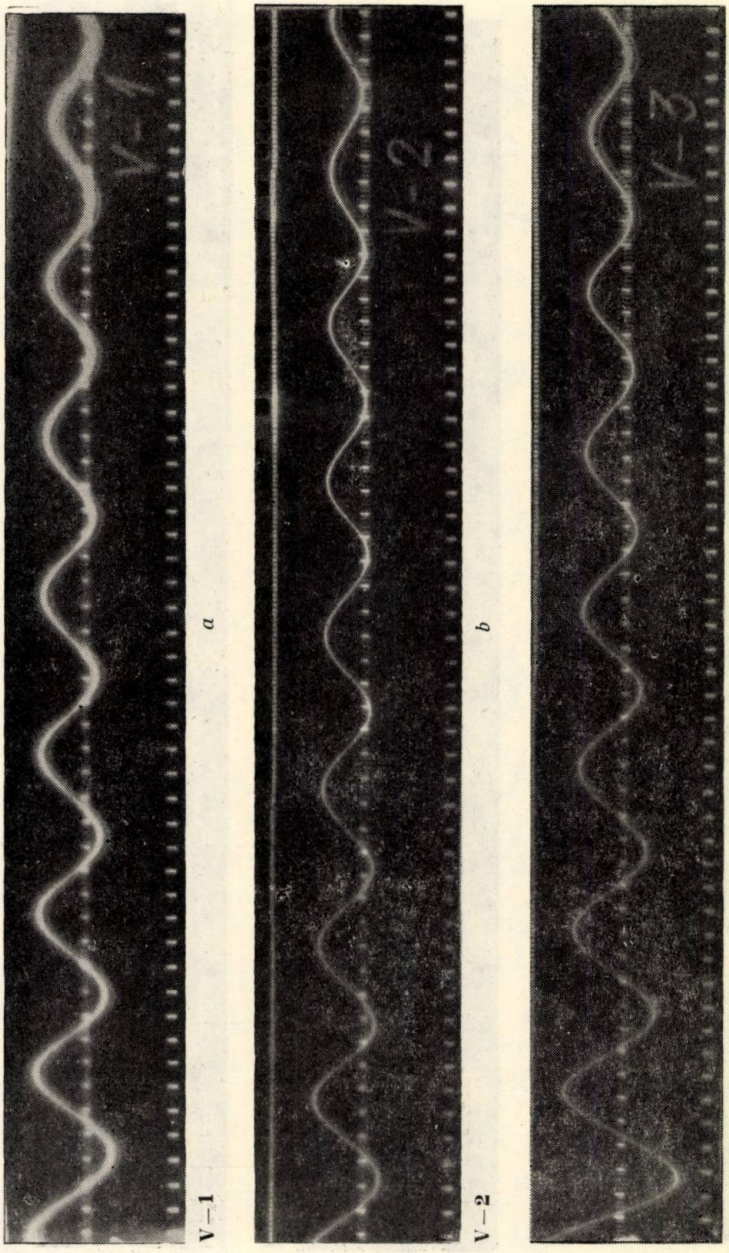


IV—2 *b*



IV—3 *c*

Fig. 11

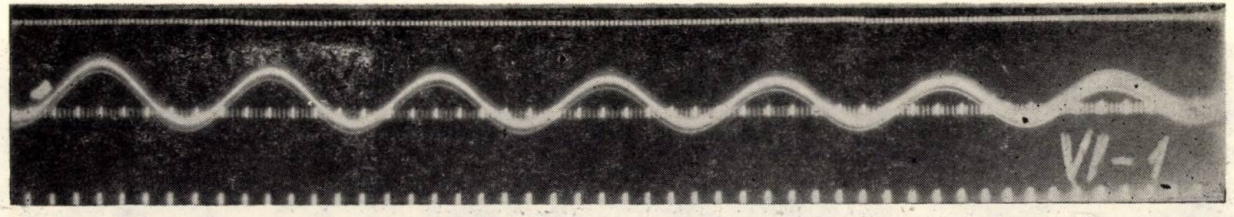


V—1 *a*

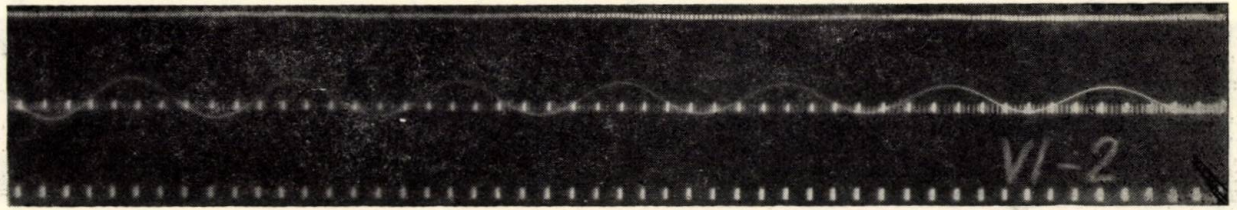
V—2 *b*

V—3

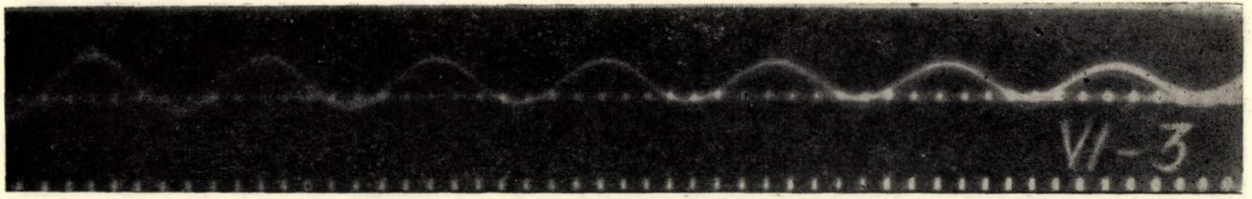
Fig. 12



VI—1 *a*

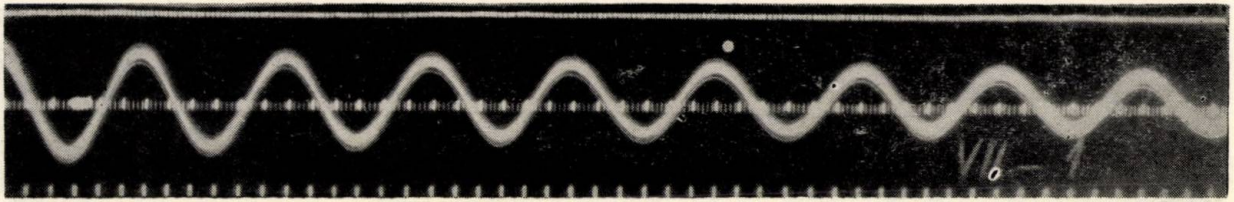


VI—2 *b*

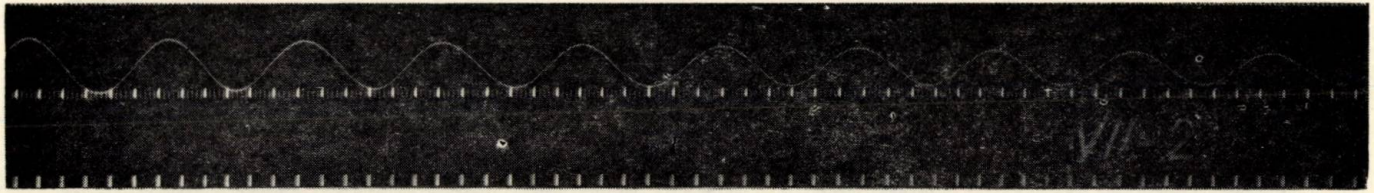


VI—3 *c*

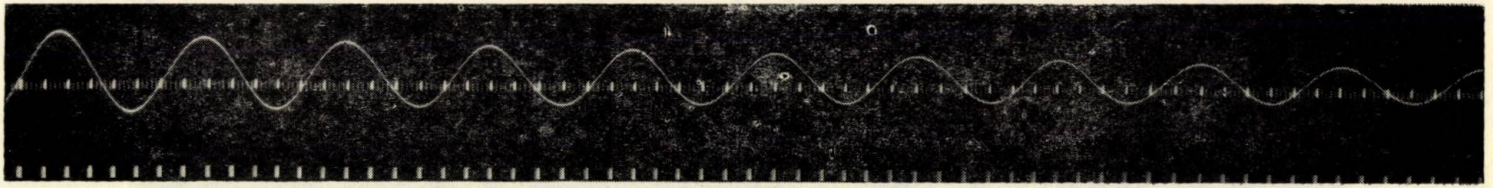
Fig. 13



VII—1 *a*

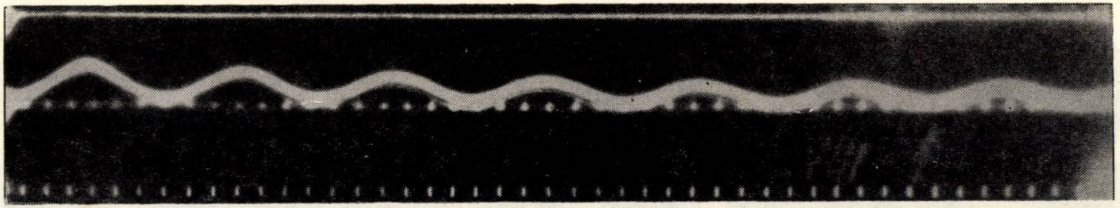


VII—2 *b*

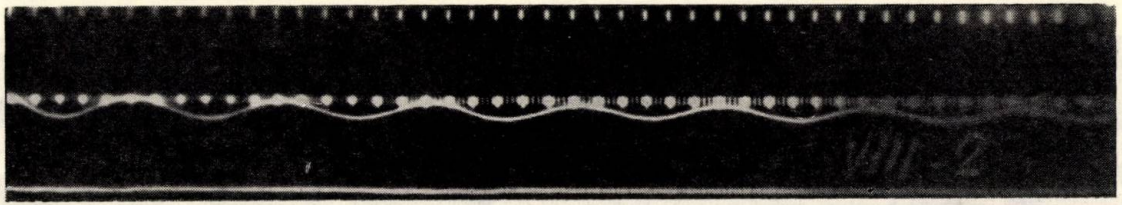


VII—3 *c*

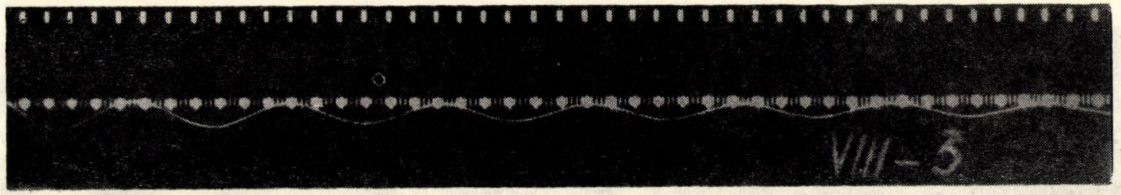
Fig. 14



VIII–1 *a*

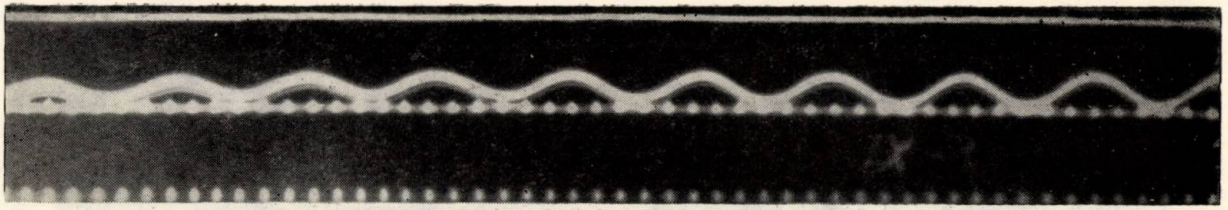


VIII–2 *b*

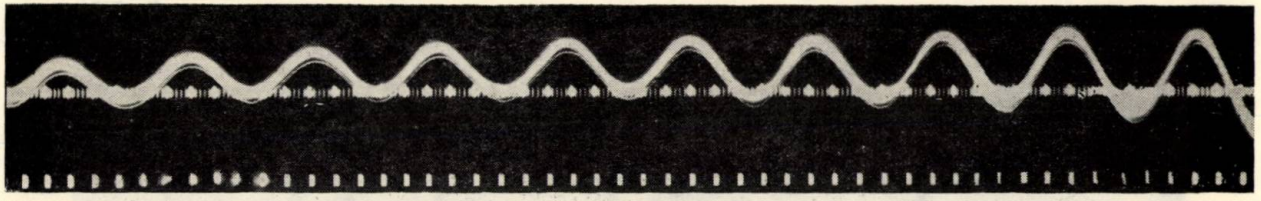


VIII–3 *c*

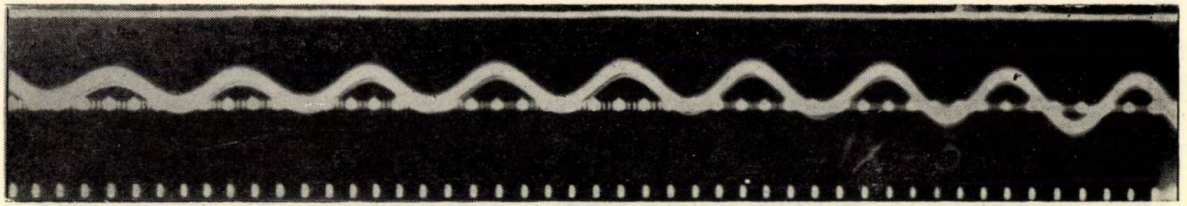
Fig. 15



IX–1 *a*



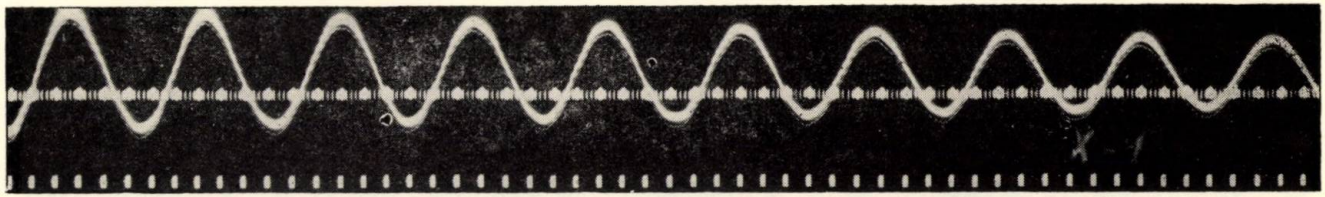
IX–2 *b*



IX–3 *c*

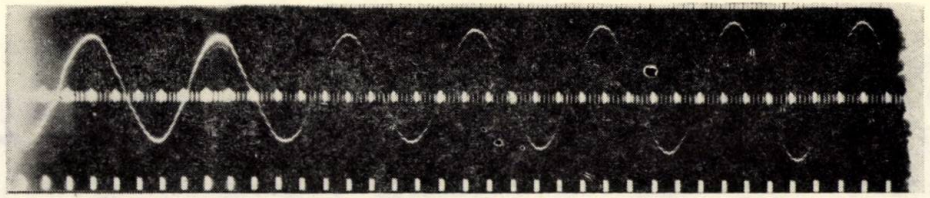
Fig. 16

x – 1



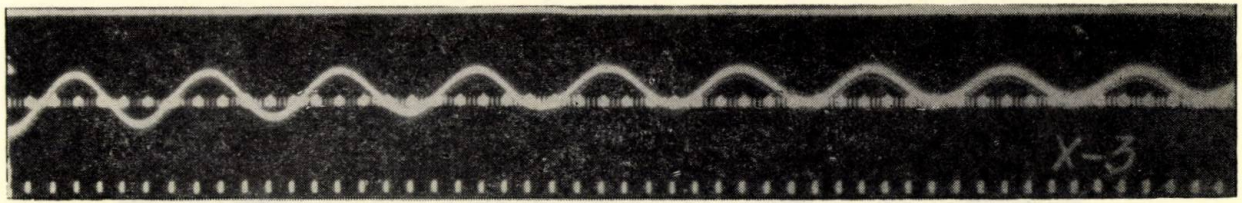
a

x – 2



b

x – 3



c

Fig. 17

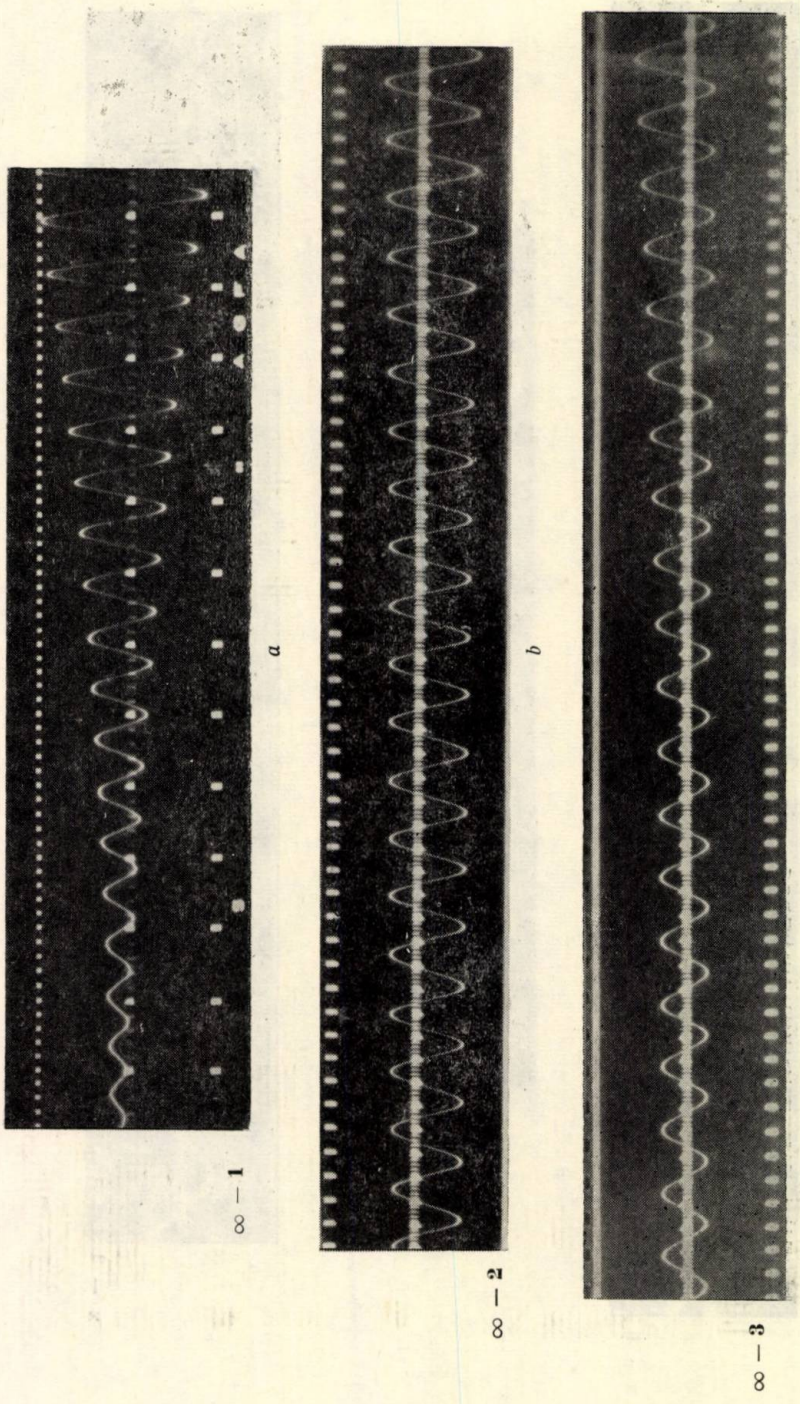


Fig. 18

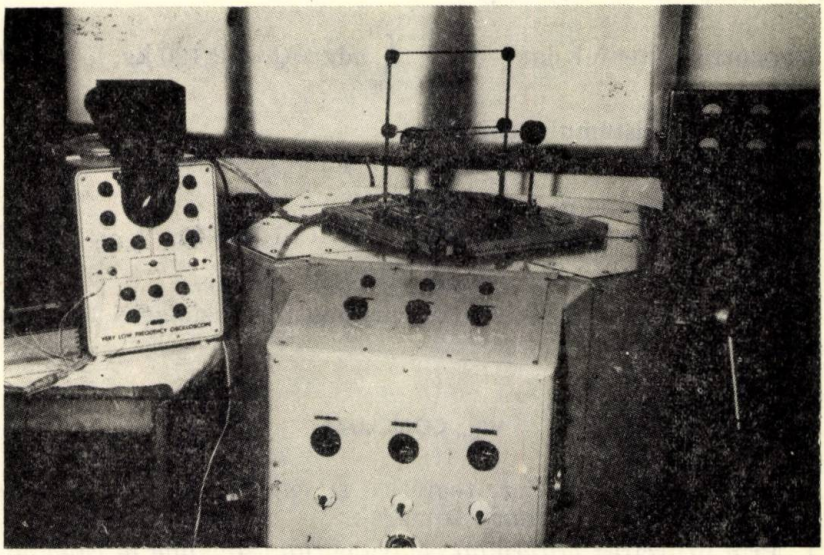


Fig. 19

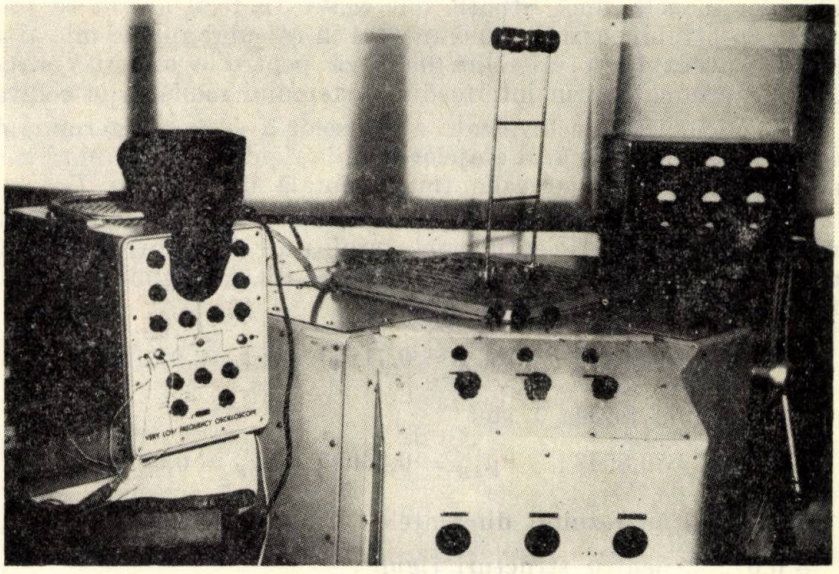


Fig. 20

S-a considerat $\mu = 0{,}6159$, iar $x_1 = 0{,}735$, $H = 45{,}6$ cm, obţinîndu-se următoarele frecvenţe :

— pentru sistemul dat $\int_0^H q\mathrm{d}x = Q = 2{,}120$ kg, $f_1 = 3{,}70$ Hz ;

— pentru sistemul echivalent neglijînd greutatea proprie $Q_e = 1{,}306$ kg, $f_2 = 4$ Hz ;

— pentru sistemul echivalent incluzînd greutatea proprie $\overline{Q}_e = 1{,}320$ kg, $f_3 = 3{,}75$ Hz.

În fig. 18 sînt reproduse înregistrările obţinute.

Aspecte din timpul încercărilor precum şi a instalaţiei utilizate sînt date în fig. 19 şi 20

VIII. CONCLUZII

Din analiza rezultatelor, teoretice şi experimentale, obţinute pot fi trase următoarele concluzii sumare :

1. Prin utilizarea criteriului echivalentului dinamic în calculul antiseismic al structurilor, se obţine un sistem monomasic echivalent a cărei pulsaţie de vibraţie (implicit perioadă naturală) este identică cu cea a structurii reale modelate.

2. Forţa de inerţie totală (denumită forţă tăietoare de bază) este aceeaşi în sistemul real şi echivalentul monomasic, deoarece variaţiile impulsurilor în cele două situaţii sînt egale. În felul acesta se justifică utilizarea spectrului seismic fundamental în calculul antiseismic al structurilor. De aceea forţa tăietoare de bază pentru o anumită structură poate fi determinată prin intermediul sistemului monomasic echivalent.

3. Coeficienţii de echivalenţă a maselor μ se pot determina direct numai în funcţie de numărul etajelor n şi de rigiditatea dinamică a structurii, caracterizată de perioada fundamentală de vibraţie T_1.

4. Există o bună concordanţă între valorile-limită ale coeficienţilor μ obţinuţi de noi şi coeficienţii *unici* stabiliţi de M. Ludwig [7] prin considerarea unei distribuţii uniforme a masei pe toată lungimea barei. Coeficienţii obţinuţi de M. Ludwig sînt

$$\mu_R = 0{,}810 ; \qquad \mu_{SR} = 0{,}712 ; \qquad \mu_F = 0{,}613,$$

iar cei stabiliţi în tabela 1 sînt

$$\mu_R = 0{,}8043 ; \qquad \mu_{SR} = 0{,}7500 ; \qquad \mu_F = 0{,}6159.$$

Procentual au rezultat diferenţele :

+ 0,072% pentru structuri rigide ;

— 5,07% pentru structuri semirigide ;

— 0,043% pentru structuri flexibile.

Dacă se ţine seama că μ_{SR} a fost determinat de M. Ludwig ca medie aritmetică între μ_R şi μ_F şi dacă se compară această valoare cu media dintre coeficienţii obţinuţi în această lucrare (0,7101), rezultă o diferenţă de 0,027%.

5. Coeficienţii de echivalenţă care stau la baza codului Californian [7] nu depind de numărul etajelor, fiind *unici*. Totuşi, pentru structurile cu un număr mai redus de etaje, cunoaşterea valorilor de calcul a coeficienţilor de echivalenţă este de mare importanţă practică, întrucît diferenţele faţă de valorile-limită sînt sensibile (vezi tabela 1).

6. Diferenţele mici dintre măsurători şi datele teoretice (vezi tabelele 3 şi 5) confirmă valabilitatea rezultatelor obţinute. Desigur, la unele modele au existat o serie de factori secundari care au influenţat precizia măsurătorilor, cum ar fi: eventuale inexactităţi la confecţionarea modelelor, variaţii de temperatură şi umiditate asupra captorilor utilizaţi etc.

Trebuie subliniat că însăşi ipotezele de calcul admise pot introduce erori de ordinul celor obţinute la experimentare. De asemenea nu s-a luat în considerare influenţa forţelor axiale şi a amortizării asupra frecvenţelor naturale de oscilaţie.

7. Experimentările au pus în evidenţă influenţa greutăţii proprii a suportului elastic, confirmînd astfel pentru structurile etajate, valabilitatea ipotezei concentrării maselor la nivelul fiecărui etaj.

8. Tabelele cu valorile numerice ale coeficienţilor de echivalenţă şi de distribuţie aduc un aport important calculelor practice de proiectare în privinţa determinării directe a forţei tăietoare de bază şi a sarcinilor seismice.

9. La rezolvarea numerică a unor părţi din acest studiu s-a folosit calculatorul electronic analogic de la Centrul de calcul al Universităţii Bucureşti.

10. Lucrarea de faţă face parte dintr-un program de cercetări de seismologie inginerească ce se desfăşoară la Catedra de mecanica construcţiilor I din Institutul de construcţii din Bucureşti. Ea urmează să fie extinsă şi prin considerarea comportării inelastice a structurilor.

11. Precizări suplimentare, detalii asupra unor probleme doar enunţate, tabele, exemple de calcul, experimentări pe alte tipuri de structuri etc. vor fi cuprinse într-o lucrare separată, care se află în curs de redactare.

Primită la 9 februarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. Bălan Ştefan, Ifrim Mihail, Pacoste Cornel, *Direct Determination of Equivalence Coefficients of Masses in the Antiseismic Computation of Structures*, Proceeding of the Third World Conference Earthquake Engineering, Auckland-Wellington, New Zealand, January-February 1965.

2. — *Utilizarea echivalentului dinamic în seismologia inginerească*, Lucrările sesiunii de comunicări a Institutului politehnic Iași, februarie 1965.
3. BĂLAN ȘTEFAN, *Mecanica teoretică*, Curs predat la Institutul de construcții din București.
4. V. VALCOVICI, ȘTEFAN BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanica teoretică*, București, Edit. tehnică, 1959.
5. BELEȘ AUREL, MIHAIL IFRIM, *Elemente de seismologie inginerească*, București, Edit. Tehnică, 1962.
6. W. CLOUGH RAY, *Dynamic Effects of Earthquake*, Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, april 1960, ST. 4.
7. — *Lateral Forces of Earthquake and Wind*, Proc. ASCE, **77**, *66* (1951).

PARTICULARITĂȚI ALE CUZINEȚILOR DIN POLIAMIDE CU PRIVIRE LA EFECTUL TEHNOLOGIEI DE FABRICAȚIE ȘI LA COMPORTAREA TERMICĂ A LOR SUB ASPECTUL CÎMPULUI DE TEMPERATURĂ ÎN FILM

de GHEORGHE MANEA,

membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România

MIRCEA PASCOVICI

nstitutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

Studiul experimental efectuat cu bucșe din poliamide obținute prin tehnologii diferite a scos în evidență diferențe apreciabile sub aspectul capacității portante.
Se analizează comparativ variația temperaturii în filmul de lubrifiant pentru cuzineții din bronz și pentru cei din poliamidă, cu considerarea influenței parametrilor geometrici și funcționali. Particularitățile constatate în cazul bucșelor din poliamide, datorite proprietăților specifice ale lor, duc la fixarea unor concluzii de ordin teoretic privind îndeosebi ipotezele uzuale în tratarea problemei pe cale analitică, precum și la recomandări de ordin aplicativ.

1. Particularitățile materialelor plastice privind comportarea mecanică a lor se reflectă în primul rînd în faptul că relațiile deduse din teoria elasticității, valabile pentru dimensionarea pieselor portante din metal, sînt utilizabile numai cu rezerve în cazul pieselor portante din materiale plastice. În plus, proprietățile materialelor plastice sînt influențate, în mult mai largă măsură decît cele ale metalelor, de variațiile de structură chimică și moleculară (greutatea moleculară medie, dispersia greutății moleculare, adaosuri etc.), de condițiile de mediu, ca și de procedeele tehnologice. Deosebit de importantă este influența temperaturii, de care depinde viscozitatea bazată pe procesele de schimbări de poziții ale moleculelor, mai ales în domeniul de relaxare.

La materialele plastice, domeniile de temperatură la care au loc schimbări structurale sînt mult mai apropiate de temperatura mediului ambiant decît la metale.

CERC. MEC. APL. TOM. 23 NR. 6 P. 1395–1416 BUCUREȘTI 1966

În aceeaşi importantă măsură sînt influenţate şi calităţile funcţionale ale cuzineţilor, cu atît mai mult cu cît sînt de luat în consideraţie conductivitatea şi dilataţia termică, efectul umflării prin absorbţie ş.a.

Prin prezentul studiu sînt scoase în evidenţă :

1) dependenţa performanţelor realizabile de condiţiile tehnologice de confecţionare a bucşelor;

2) unele concluzii cu privire la coeficientul de încălzire utilizat pentru verificarea termică;

3) variaţia temperaturii în filmul de lubrifiant în comparaţie cu cea din cazul cuzineţilor metalici;

4) influenţa unor parametri geometrici şi funcţionali asupra cîmpului de temperatură din film.

Cercetările noastre experimentale au fost efectuate cu bucşe din poliamidă indigenă în următoarele condiţii :

bucşe cu diametrul interior-exterior de 36/48 40/50 mm;

rapoarte $\frac{l}{d}\left(\frac{\text{lungime}}{\text{diametru}}\right) = 0{,}5\,;\ 0{,}6\,;\ 0{,}7\,;\ 0{,}9\,;\ 1{,}0\,;$

jocuri relative $= 3{,}5\,;\ 4{,}0\,;\ 4{,}75\,;\ 5{,}0\,;\ 7{,}5\,;\ 9{,}7\ ^0/_{00}\,;$

sarcină statică, verticală;

viteză variabilă în trepte;

ungere cu ulei şi funcţionare fără ungere;

arbore din oţel cu HB = 550;

bucşe centrifugate şi bucşe injectate, tratate în ulei timp de 10 ore la 120°C;

rodaj anticipat circa 8 ore fără sarcină.

Sînt redate aici numai unele dintre rezultate, în măsura necesară pentru fixarea concluziilor.

1.1. În literatură se găsesc pentru bucşele „groase" din poliamide, în cazul ungerii active cu ulei, valori referitoare la capacitatea de încărcare cu mare dispersie între 50 şi 200 kgf/cm², în funcţie de viteză. Încărcări superioare presiunii medii $p_m = 100$ kgf/cm² sînt însă nerecomandabile, spre a se evita apariţia unor deformaţii remanente.

Studiul bucşelor *centrifugate* cu raportul $\frac{l}{d} = 0{,}7$ s-a făcut la viteze periferice

$$v = 0{,}6 \qquad 1{,}32 \qquad 2{,}30 \qquad 3{,}48 \text{ m/s},$$

cu rezultatele redate în fig. 1—4 [1].

La viteza de 0,6 m/s s-a putut ajunge pînă la încărcarea $p = 170$ kgf/cm² fără defecţiuni.

Curbele reprezentînd variaţia temperaturii cu presiunea au alură asemănătoare pentru toate vitezele : un domeniu iniţial de creştere a temperaturii cu atît mai rapidă cu cît viteza este mai mare, urmat de o variaţie lentă pentru un cîmp de presiune cu atît mai extins, cu cît viteza este mai redusă; în final apare un domeniu „critic", determinant pentru limita de încărcare, în care este de aşteptat o nouă ridicare rapidă a temperaturii, datorită condiţiilor termice mai defavorabile. Curbele de temperatură se plasează cu atît mai sus, cu cît viteza este mai mare.

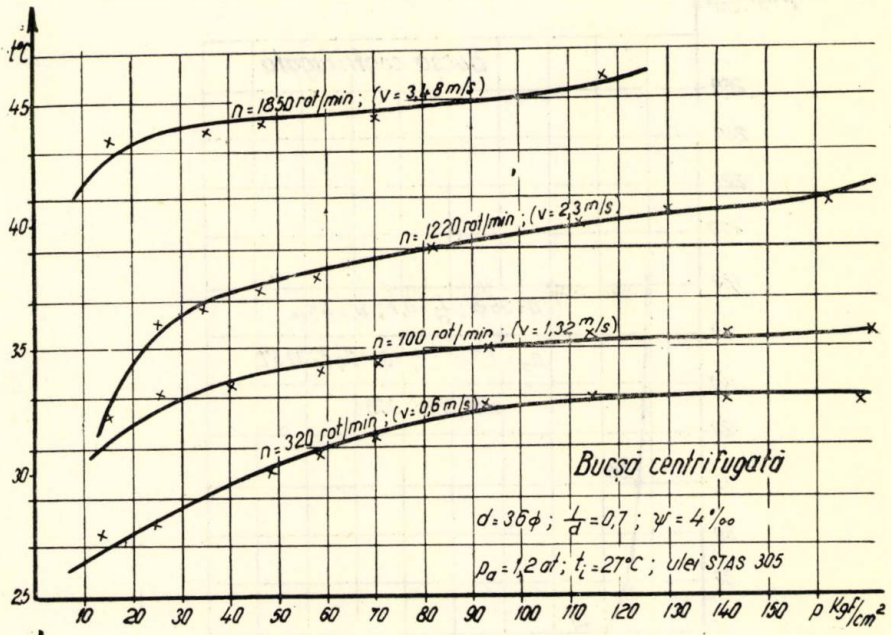

t°C
n = 1850 rot/min ; (v = 3,48 m/s)
n = 1220 rot/min ; (v = 2,3 m/s)
n = 700 rot/min ; (v = 1,32 m/s)
n = 320 rot/min ; (v = 0,6 m/s)
Bucșă centrifugată
d = 36 ϕ ; l/d = 0,7 ; ψ = 4 ‰
p_a = 1,2 at ; t_i = 27°C ; ulei STAS 305
p kgf/cm²

Fig. 1

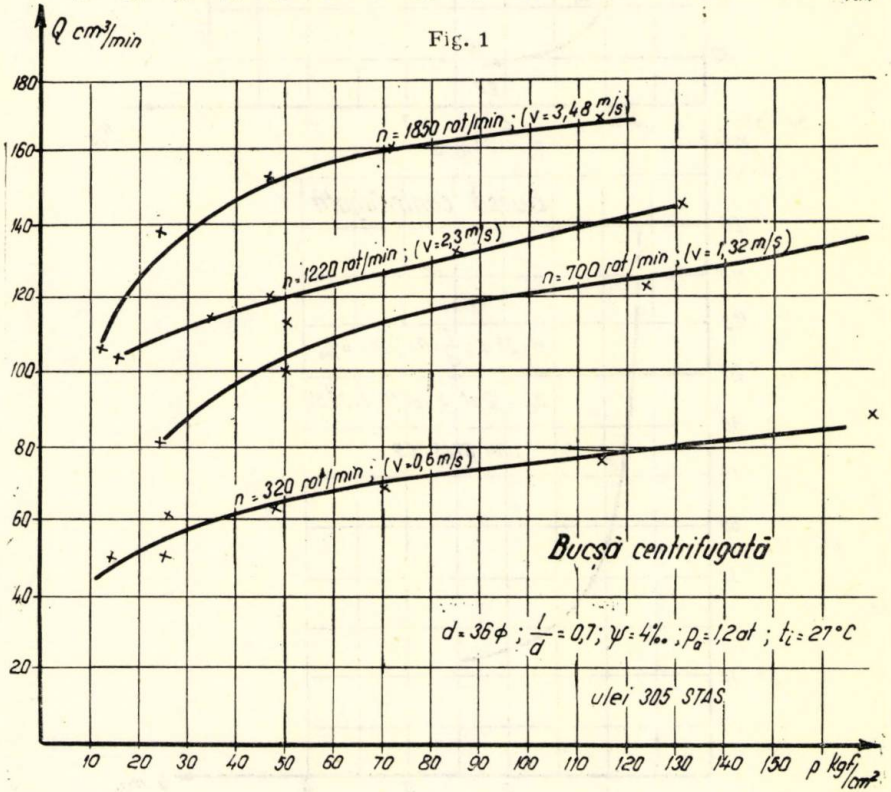

Q cm³/min
n = 1850 rot/min ; (v = 3,48 m/s)
n = 1220 rot/min ; (v = 2,3 m/s)
n = 700 rot/min ; (v = 1,32 m/s)
n = 320 rot/min ; (v = 0,6 m/s)
Bucșă centrifugată
d = 36 ϕ ; l/d = 0,7 ; ψ = 4‰ ; p_a = 1,2 at ; t_i = 27°C
ulei 305 STAS
p kgf/cm²

Fig. 2

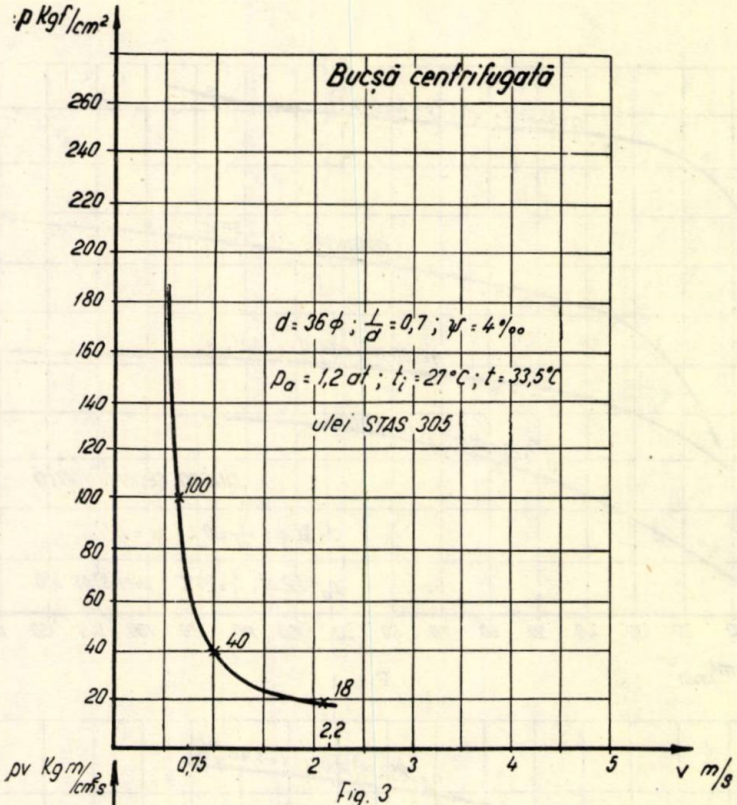

p Kgf/cm²
Bucșă centrifugată
d = 36 ϕ ; l/d = 0,7 ; ψ = 4‰
p_a = 1,2 at ; t_i = 27°C ; t = 33,5°C
ulei STAS 305
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
100
40
18
2,2
0,75
2
3
4
5
v m/s

Fig. 3

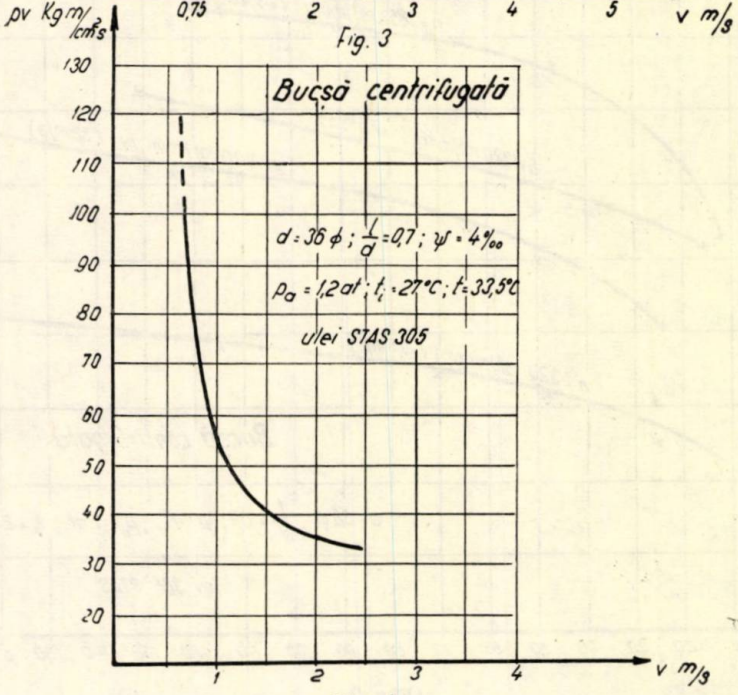

pv Kgm/cm²s
Bucșă centrifugată
d = 36 ϕ ; l/d = 0,7 ; ψ = 4‰
p_a = 1,2 at ; t_i = 27°C ; t = 33,5°C
ulei STAS 305
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
1
2
3
4
v m/s

Fig. 4

Curba $p = f(v)$ pentru temperatura constantă de regim arată valorile :

$v = 0{,}75$	1,0	1,5	2,2	m/s,
$p = 100$	40	23	18	kgf/cm².

1.2. La procesul de *injecție* a pieselor din poliamidă au influență importantă nivelul și variația temperaturii în timp, presiunea, viteza de curgere în timpul execuției, respectiv durata ciclului, care în final hotărăsc anizotropia calităților mecanice.

La același joc relativ de 4‰, cu bucșe injectate, unele cu defecte aparente (goluri), s-a putut realiza pentru

$v = 0{,}75$	1,0	2,20	m/s,
$p_m = 40$	25	7,5	kgf/cm²,

adică sub 50% din încărcările obținute anterior, la un regim termic foarte apropiat (fig. 5—7).

Îmbunătățirea ulterioară a regimului tehnologic de injecție a avut ca rezultat o ridicare sensibilă a performanțelor, obținîndu-se pentru

$v = 0{,}9$	1,64	2,51	3,15	4,40	m/s,
zona critică $p = 62$	40	30	12	8—9	kgf/cm².

Jocurile relative mari de 5,6; 7,5 și 9,7‰ la raportul $\frac{l}{d} = 0{,}7$, cu debite de ulei care au asigurat evacuarea eficace a căldurii, au permis la viteze de 0,75—1,5 m/s încărcări de 70—80 kgf/cm², temperatura rămînînd sub 40°C.

Se insistă în mod deosebit asupra necesității încărcării treptate. La fiecare treaptă de încărcare, dar în special la prima gamă ce urmează imediat după rodajul fără sarcină, apar creșteri bruște de temperatură în momentul aplicării unei noi sarcini, urmate de o scădere lentă pînă la noua valoare a temperaturii de regim [1].

Rezultatele obținute cu jocurile relative de 7,5 și 9‰ sînt sensibil apropiate. Considerînd că jocurile mari au ca efect o imprecizie sporită în funcționarea ansamblului, pentru gama de diametre de 35—50 mm apare de preferat jocul relativ de 7,5 ‰.

În aceleași condiții de încercare și la același joc relativ, curbele de temperatură valabile pentru rapoarte $\frac{l}{d} > 0{,}7$ se situează deasupra celor obținute pentru acest raport. Se confirmă prin aceasta importanța deosebită pe care o are evacuarea unei părți a căldurii produse în timpul funcționării lagărului prin fluxul de ulei, debitele scăzînd cu creșterea raportului $\frac{l}{d}$.

Interesantă apare poziția curbei valabile pentru același joc relativ, dar cu raportul $\frac{l}{d} = 0{,}5$ (fig. 5); la viteza de 0,86 m/s, această curbă este situată parțial deasupra, parțial sub acea valabilă pentru $\frac{l}{d} = 0{,}7$.

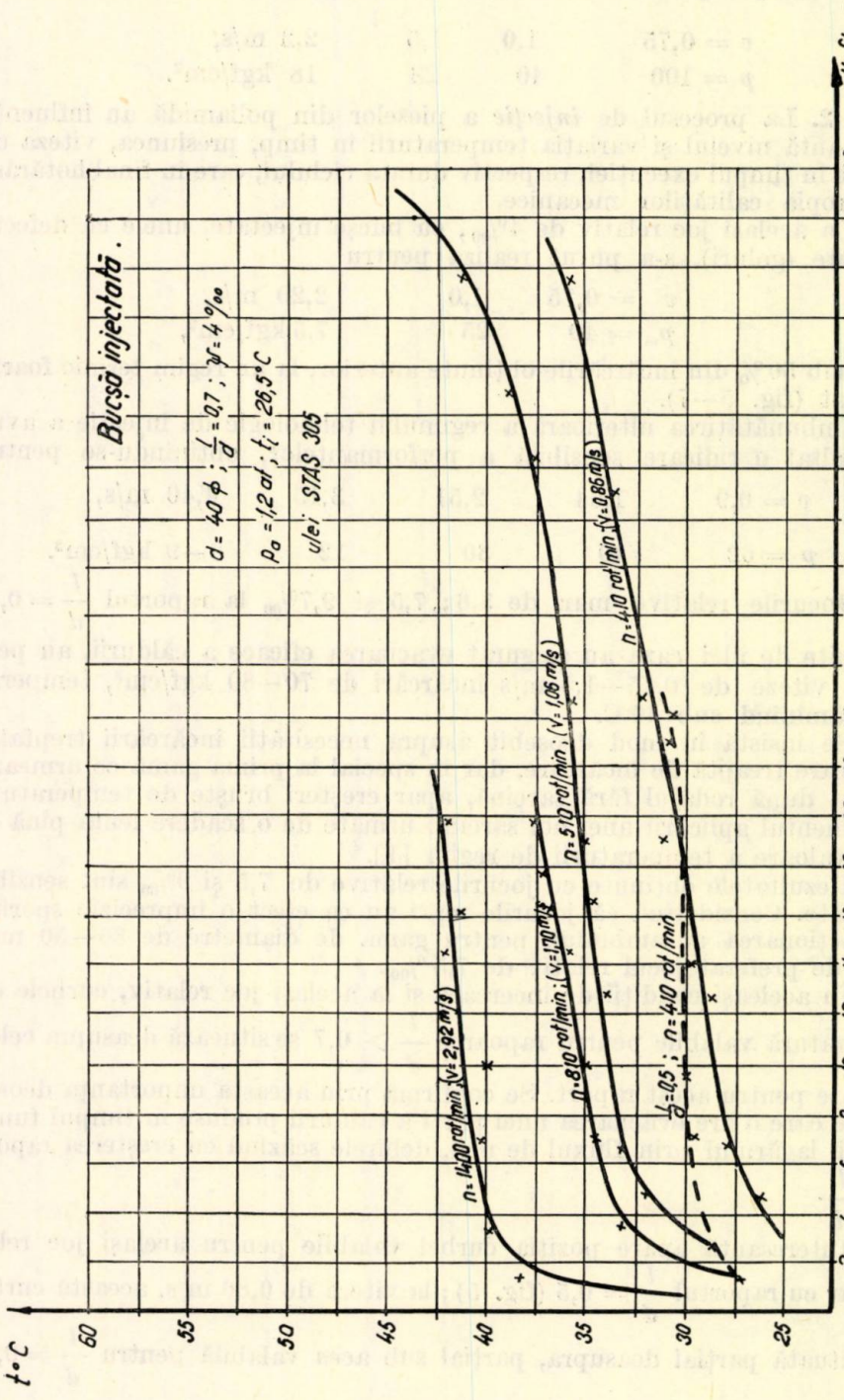

Bucşă injectată.
d = 40 φ ; l/d = 0,7 ; ψ = 4 ‰
p_a = 1,2 at ; t_i = 26,5°C
ulei STAS 305
n = 1400 rot/min (v = 2,92 m/s)
n = 810 rot/min (v = 1,70 m/s)
n = 510 rot/min (v = 1,06 m/s)
n = 410 rot/min (v = 0,86 m/s)
l/d = 0,5 ; n = 410 rot/min
t°C
p Kgf/cm²

Fig. 5

Calitativ, rezultatul coincide cu cel valabil pentru lagărele metalice, în sensul că la același diametru, micșorînd lungimea lagărului sub o anumită limită optimă, condițiile de temperatură se înrăutățesc.

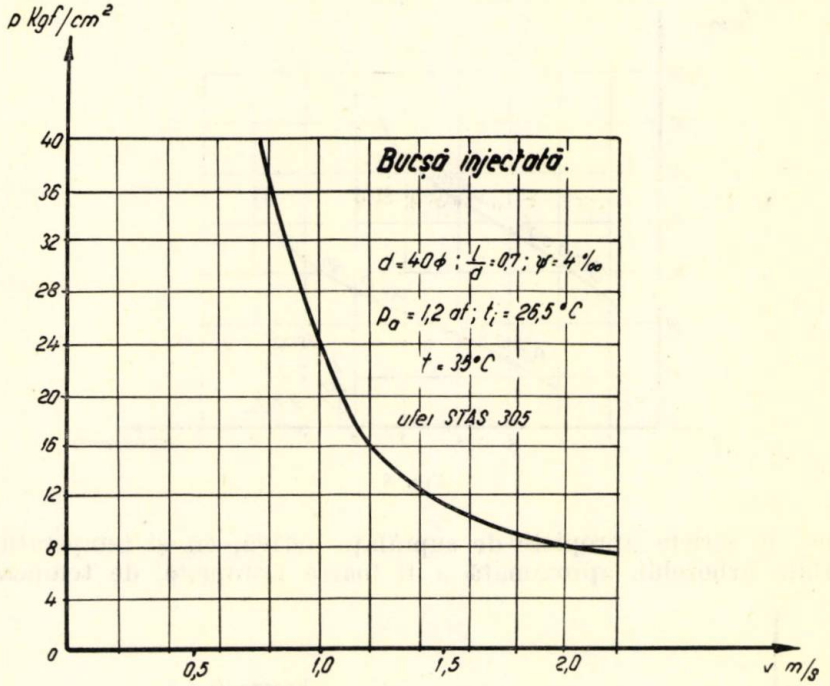


Fig. 6

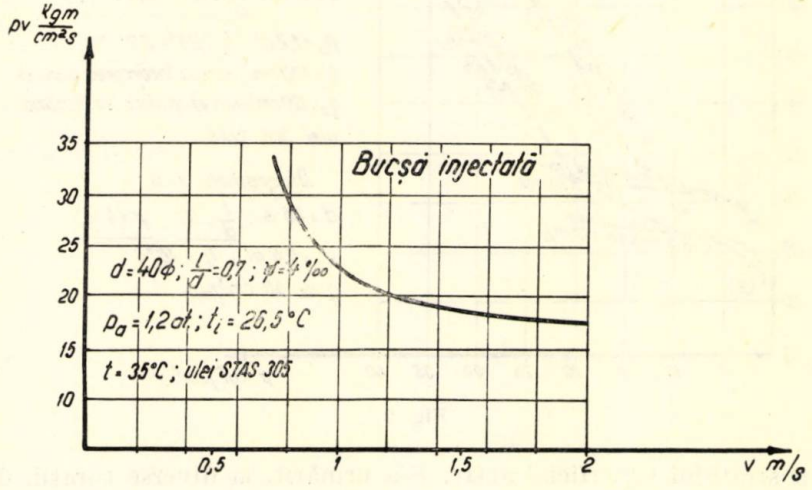


Fig. 7

1.3. În regim de funcționare fără lubrifiant a bucșelor din material indigen, chiar la jocul de 9,7 ‰, au rezultat curbe ca cele arătate în

figura 8. Bucşele au fost uşor unse, o singură dată la montaj, cu un strat subţire de unsoare consistentă şi apoi supuse probelor fără a mai fi alimentate cu lubrifiant. În timpul încercărilor s-a măsurat atît tamperatura în

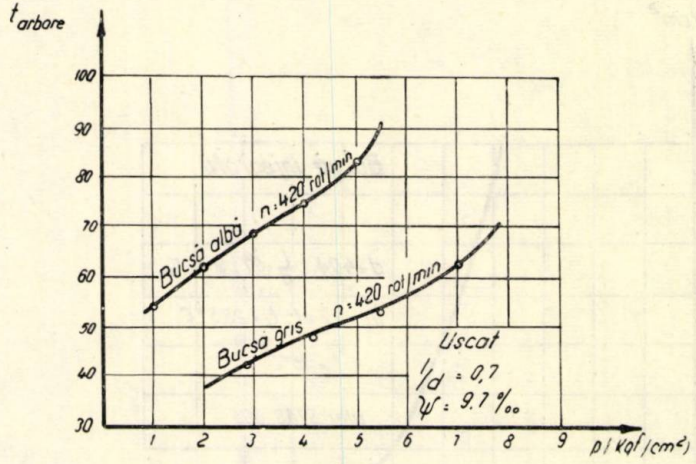


Fig. 8

cuzinet, în stricta apropiere de suprafaţă activă, cît şi temperatura la suprafaţa arborelui, aproximată a fi foarte apropiată de temperatura

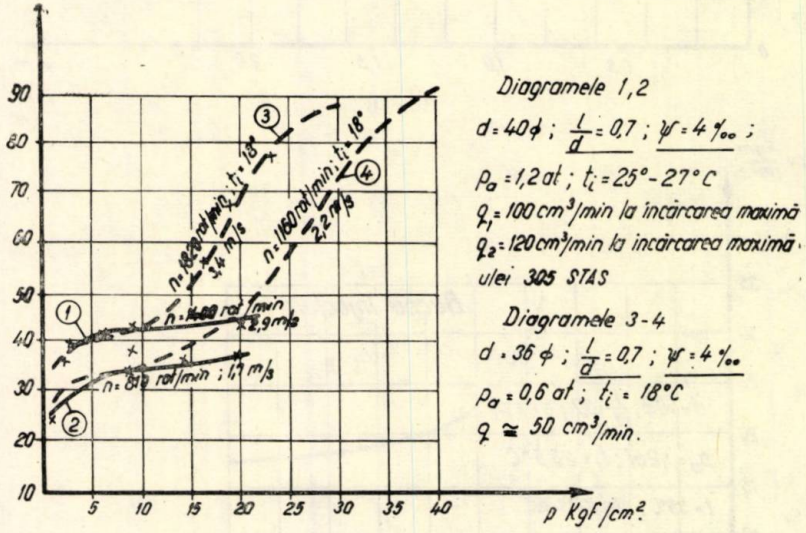


Fig. 9

medie a stratului superficial activ. S-a urmărit, la diverse turaţii, determinarea încărcării pentru care temperatura suprafeţei active se stabilizează la o valoare sub 80°C, considerînd această temperatură ca o limită pentru funcţionarea fără pericol de deteriorare a bucşei. Dezvoltarea puternică de căldură, dilatarea bucşei şi slaba conductivitate termică a ei

limitează încărcarea la valori reduse, de 2—4 kgf/cm², chiar la viteza sub 1 m/s. Caracteristică este lipsa domeniului larg de presiune, cu creștere lentă a temperaturii. Aceasta explică jocurile mari recomandate uzual.

Prezența bisulfurii de molibden sau a grafitului în materialul bucșei îmbunătățește comportarea ei, lărgind cîmpul de încărcare chiar la jocuri relative mai mici.

1.4. Aprecierea corectă a performanțelor poate fi făcută numai cu cunoașterea tuturor condițiilor de încercare, ele influențînd considerabil rezultatele.

În figura 9 se arată, de exemplu, că pentru bucșe din poliamidă, cu același raport $\frac{l}{d}$ și același joc relativ Ψ, la viteze periferice apropiate curbele sînt sensibil diferite, după condițiile de alimentare.

2. Cu privire la coeficientul θ caracteristic regimului de echilibru termic, sînt de relevat diferențe față de cuplurile fus din oțel — cuzinet metalic, rezultate din condițiile diferite de evacuare a căldurii, din modificările importante ale jocului relativ datorite coeficienților mari de dilatație termică și tendinței de umflare a materialelor plastice, din dependența diferită a coeficientului de frecare, de viteză și de presiune, precum și din natura însăși a proceselor care au loc în zonele-limită de trecere lubrifiant-material de cuzinet.

În mod cunoscut, familia de curbe $\theta = \frac{\mu v}{q_z^*} = \theta\left(\frac{l}{d}, \delta\right)$ se reprezintă cu parametrul variabil $\frac{l}{d}$ în abscisă.

S-a notat: μ coeficientul de frecare, v viteza periferică a fusului, $q_z^* = \frac{q}{d \cdot l}$ debitul specific de lubrifiant, $\delta = \frac{h_{min}}{\Delta r}$ grosimea minimă relativă a peliculei de lubrifiant, Δr jocul radial al fusului în cuzinet.

În cazul de față s-a dovedit mai potrivită trecerea parametrului δ în abscisă [1].

În figura 10 sînt reprezentate curbele θ pentru $\frac{l}{d} = 0{,}7$, și anume:

a) curba dedusă direct din familia de curbe valabilă pentru metale la $\frac{l}{d} = 0{,}7$;

b) curbele calculate cu relația generală a echilibrului termic

$$\theta = \frac{1}{p_m}\left[\frac{C_l'}{q_z^*}(t - t_0) + \frac{C_0 \gamma}{A}(t_e - t_i)\right],$$

introducînd valorile t, q_z, p_m din diagramele figurilor 1 și 2 pentru $n = 1\,220$ rot/min ($v = 2{,}3$ m/s) și $n = 1\,850$ rot/min ($v = 3{,}48$ m/s), valabile pentru bucșa de poliamidă încercată. În afara notațiilor de mai sus, în această relație C_0 kcal/kg, grd este căldura specifică a uleiului, $A = \frac{1}{427.10}$ kcal/cmkg echivalentul caloric, C_l' kgcm/cm²s grd, coeficient care include capacitatea lagărului de a evacua căldura raportată la 1 cm²

din proiecția fusului, t°C temperatura medie a filmului de lubrifiant, t_i°C temperatura de intrare a uleiului, t_0 °C temperatura mediului ambiant, γ greutatea specifică a uleiului. Curbele sînt corectate prin luarea în con-

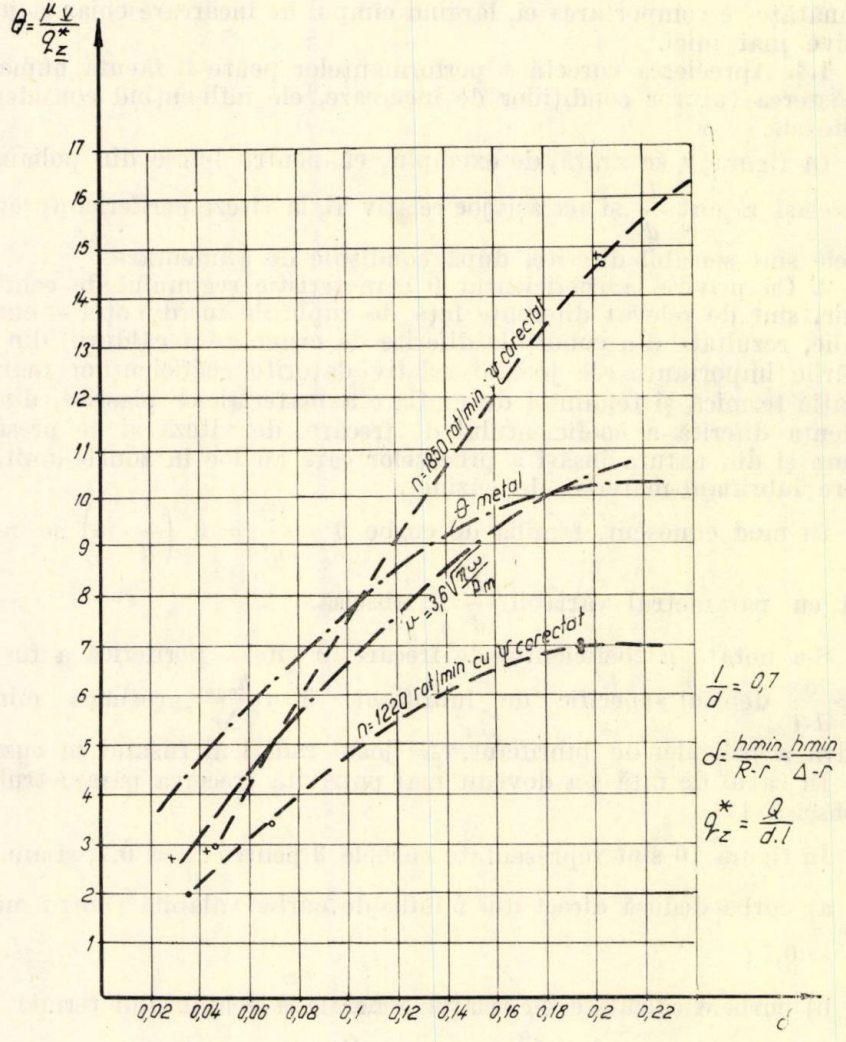


Fig. 10

sideraţie a modificării jocului relativ în timpul funcţionării. Ele sînt afectate de aproximaţia rezultată din faptul că δ a fost dedus folosind curba de portanţă valabilă pentru metale;

c) curba calculată cu valoarea aproximativă recomandată de literatura de specialitate [2] pentru coeficientul de frecare $\mu = 3{,}6\sqrt{\frac{\eta\omega}{p_m}}$, cu valorile η, ω, p_m corespunzătoare încercărilor făcute la n=1 220 rot/min.

Se observă :

a) Curbele θ pentru poliamidă au alură asemănătoare cu cele pentru metal, dar nu se suprapun.

b) Dependența poziției curbelor θ de turație, respectiv de viteză, datorită variației termenului $\frac{\Delta t}{p_m} = \frac{t - t_i}{p_m}$ și a debitului specific de

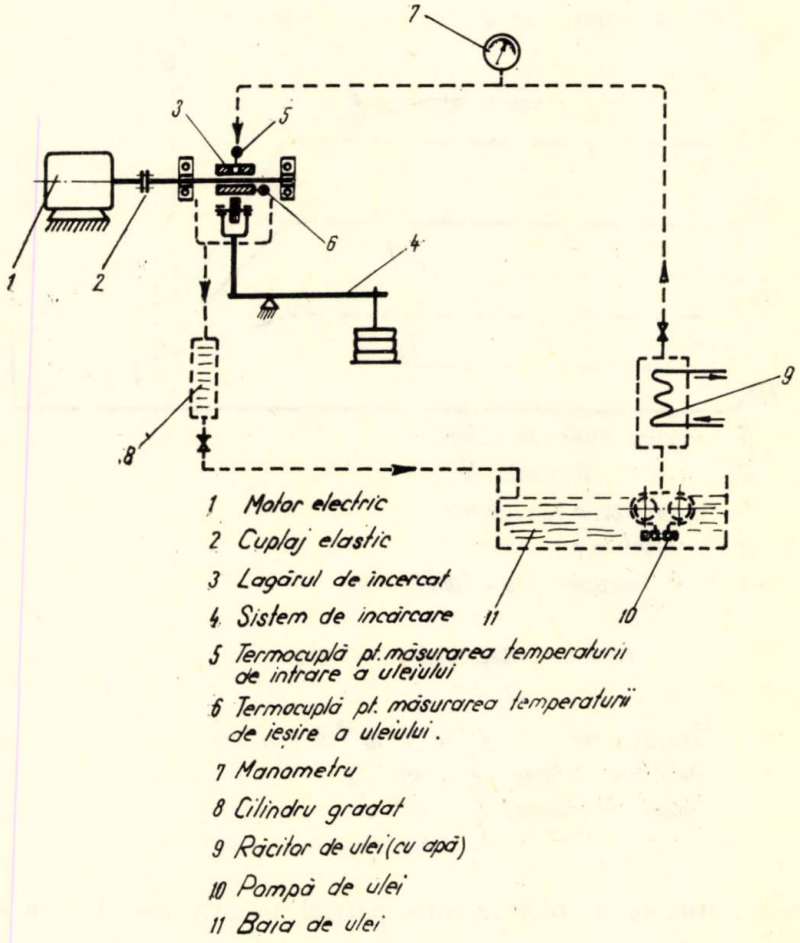


Fig. 11

lubrifiant q_z^*, deci a diferenței de regim termic, cu efect și asupra coeficientului de frecare.

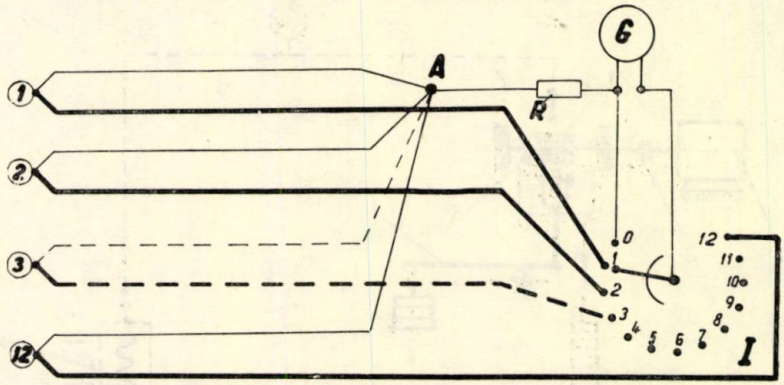
d) Curba θ calculată cu $\mu = 3{,}6\sqrt{\frac{\eta\omega}{p_m}}$, în care ω, p_m și η corespund valorilor experimentale (fig. 1 și 2), se plasează într-o poziție medie, deci poate da o apreciere satisfăcătoare.

3. Proprietățile izolante ale materialelor plastice, ca și procesele în zonele-limită lubrifiant-bucșă, influențează totodată repartiția tem-

peraturii în filmul de lubrifiant. Pentru studiul acestei repartiţii, comparativ pentru bucşe din poliamidă şi bucşe din bronz, a fost folosit acelaşi fus din oţel cu raportul $\frac{l}{d} = 1$, ungere cu ulei.

Măsurarea temperaturilor în film s-a efectuat cu instalaţia din figura 11, folosindu-se termocuple şi parţial un compensator-indicator

SCHEMA SISTEMULUI DE MĂSURAREA TEMPERATURILOR



G – galvanometru cu oglindă
R – rezistenţă adiţională
I – comutator 12×1 poziţii
A – punct rece
1÷12 – termocuple Cu - Constantan

CARACTERISTICELE GALVANOMETRULUI

Sensibilitatea : $C_i = 1{,}9 \cdot 10^{-3}$ A mm^{-1}m
Rezistenţa internă $R_i = 897\ \Omega$
Timpul de răspuns $T_0 = 3{,}7$ s

Fig. 12

electronic automat de temperatură, parţial un galvanometru cu oglindă (fig. 12).

Curbele din figurile 13 şi 14 reprezintă variaţia cîmpului de temperatură în film pentru bucşa din bronz, cu raportul $\frac{l}{d} = 1$ la jocurile relative $\Psi = 1{,}7$ şi $\Psi = 2{,}5^0/_{00}$, la vitezele periferice de 1,88 şi 2,82 m/s, sarcina aplicată vertical variind între 11,5 şi 46 kgf/cm^2.

Repartiţia temperaturii este mai apropiat simetrică la jocul relativ mai mic. Fluxul mai activ de lubrifiant, favorizat de creşterea jocului relativ Ψ, are ca efect o micşorare a vîrfului de temperatură. Totodată, scăderea diferenţei dintre temperaturile extreme şi aplatisarea curbei la valori mai mici ridică temperatura medie.

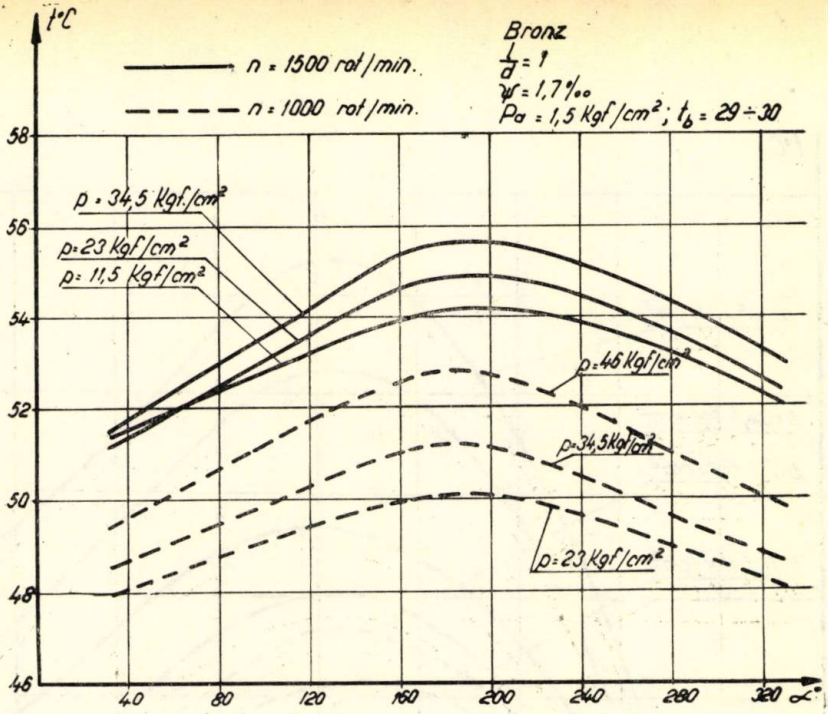

t°C
n = 1500 rot/min.
n = 1000 rot/min.
Bronz
L/d = 1
ψ = 1,7‰
Pa = 1,5 Kgf/cm²; tb = 29÷30
p = 34,5 Kgf/cm²
p = 23 Kgf/cm²
p = 11,5 Kgf/cm²
p = 46 Kgf/cm²
p = 34,5 Kgf/cm²
p = 23 Kgf/cm²
58
56
54
52
50
48
46
40
80
120
160
200
240
280
320
L°

Fig. 13

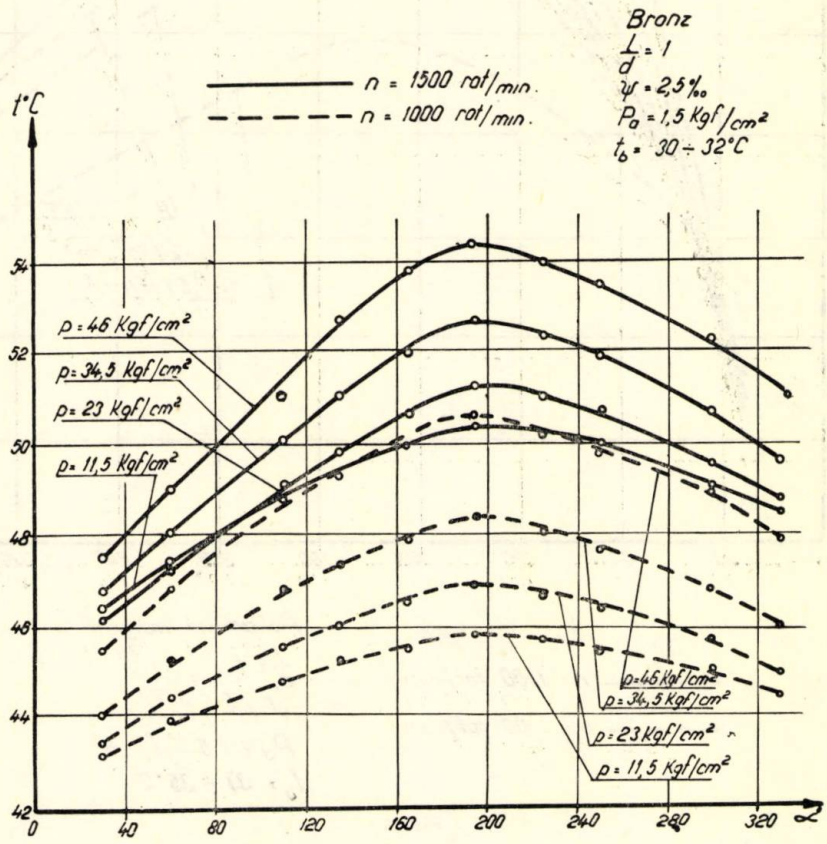

Bronz
L/d = 1
ψ = 2,5‰
Pa = 1,5 Kgf/cm²
tb = 30÷32°C
n = 1500 rot/min.
n = 1000 rot/min.
t°C
p = 46 Kgf/cm²
p = 34,5 Kgf/cm²
p = 23 Kgf/cm²
p = 11,5 Kgf/cm²
p = 46 Kgf/cm²
p = 34,5 Kgf/cm²
p = 23 Kgf/cm²
p = 11,5 Kgf/cm²
54
52
50
48
46
44
42
0
40
80
120
160
200
240
280
320
L°

Fig. 14

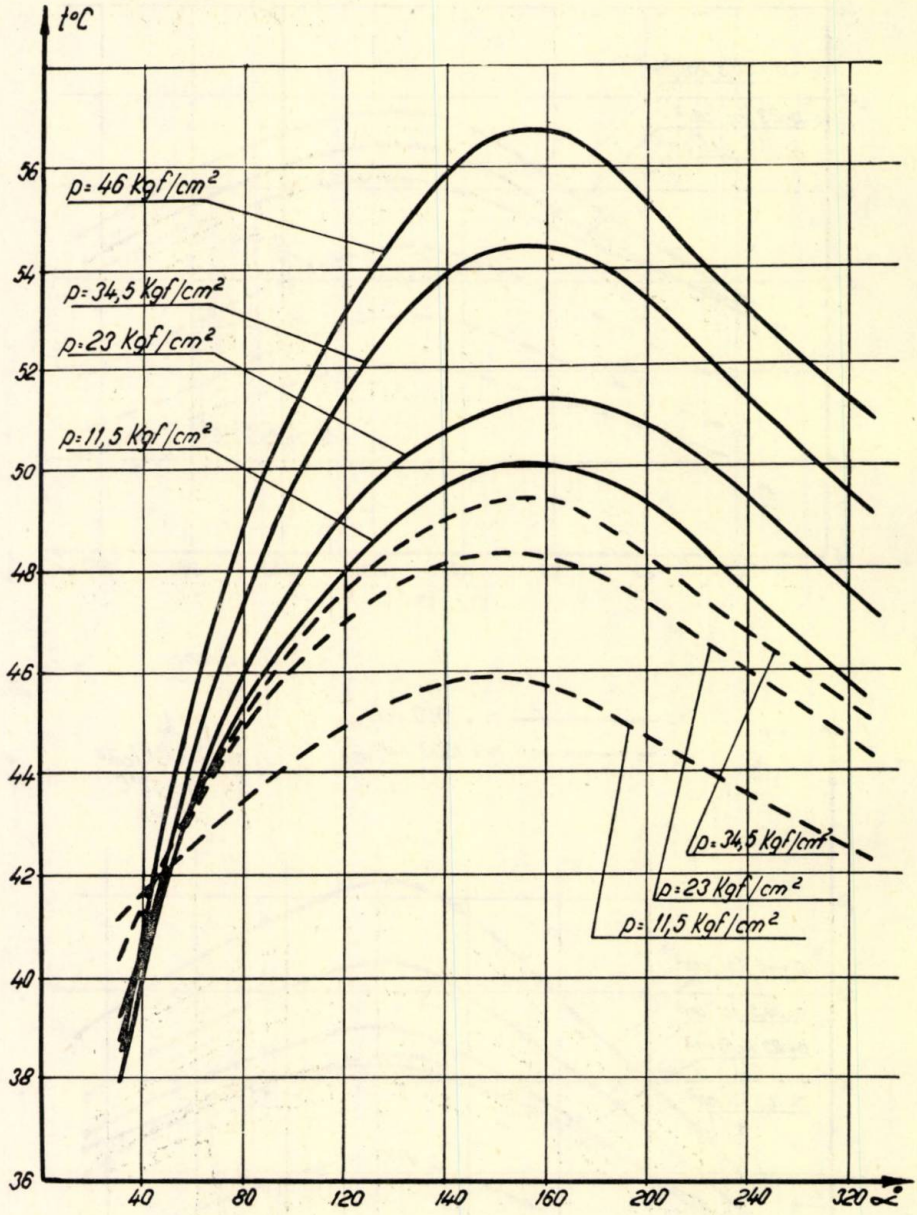

t°C
36
38
40
42
44
46
48
50
52
54
56
40
80
120
140
160
200
240
320
L/d
p = 46 kgf/cm²
p = 34,5 kgf/cm²
p = 23 kgf/cm²
p = 11,5 kgf/cm²
p = 34,5 kgf/cm²
p = 23 kgf/cm²
p = 11,5 kgf/cm²
n = 1500 rot/min
n = 1000 rot/min
Poliamidă indigenă
L/d = 1
ψ = 3,5 ‰
p_a = 1,5 kgf/cm²
t_b = 33 ÷ 35°C

Fig. 15

În figura 15 este redat cîmpul de temperatură pentru bucşa din poliamidă cu jocul relativ $\Psi = 3{,}5\ ^0/_{00}$ pe acelaşi stand, în aceleaşi condiţii de încărcare, de viteză şi de alimentare.

Este de menţionat că pentru bucşa de bronz cu $\Psi = 2{,}5\ ^0/_{00}$ şi pentru cea din poliamidă cu $\Psi = 3{,}5\ ^0/_{00}$, în timpul funcţionării, din cauza

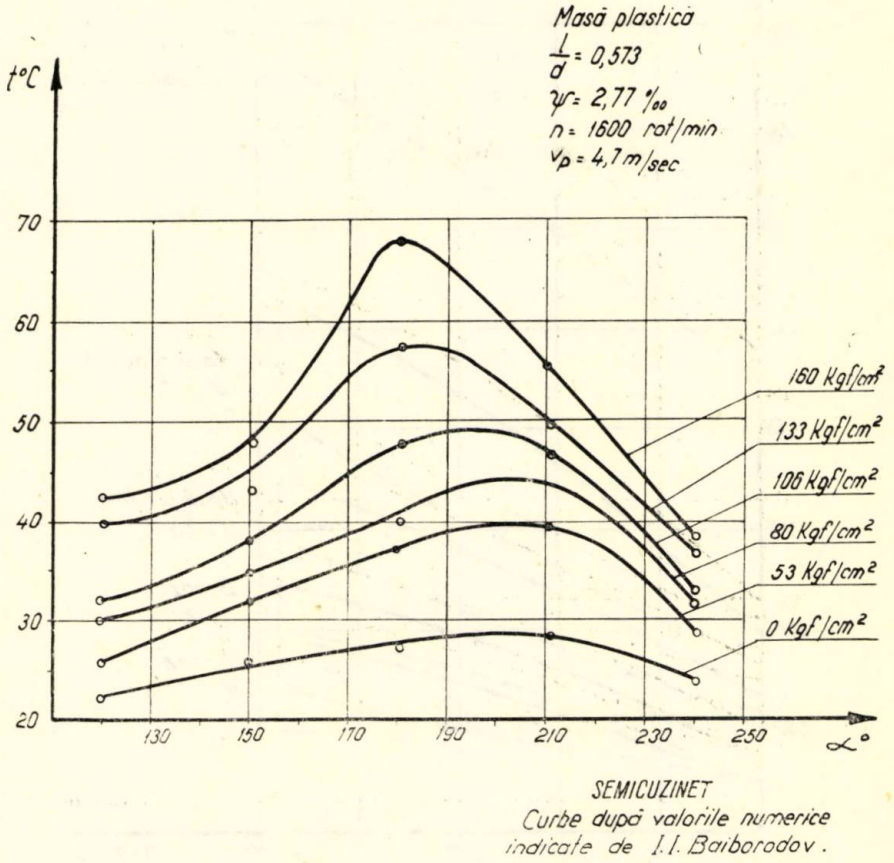


Fig. 16

diferenţei de dilataţie termică, jocurile relative s-au apropiat foarte mult, devenind, de exemplu pentru $n = 1\ 500$ rot/min, $2{,}17\ ^0/_{00}$, respectiv $2{,}25\ ^0/_{00}$, apropiere care s-a constatat şi la debitele specifice de ulei q_z^* la fiecare dintre cele două turaţii.

Se constată :

a) o diferenţă între alura curbelor valabile pentru metal şi cea valabilă pentru poliamidă, cu o deplasare a zonelor de temperatură maximă;

b) la jocuri relative apropiate, considerate mari pentru cuzineţi din bronz ($2{,}5\ ^0/_{00}$), dar mici pentru cuzineţi din poliamidă ($3{,}5\ ^0/_{00}$) şi la temperaturi apropiate în baia de ulei, ecartul dintre temperatura maximă şi cea minimă în cîmp este sensibil mai mare în cazul materialului plastic. Constatarea se acoperă calitativ cu rezultatele obţinute recent şi de Baiborodov pe baza măsurătorilor efectuate asupra unui semicuzinet (fig. 16);

c) în cazurile considerate, la cuzinetul metalic temperatura maximă a depăşit temperatura medie cu cel mult 5%; dimpotrivă, la cuzinetul din poliamidă, depăşirea a atins 11% (fig. 17).

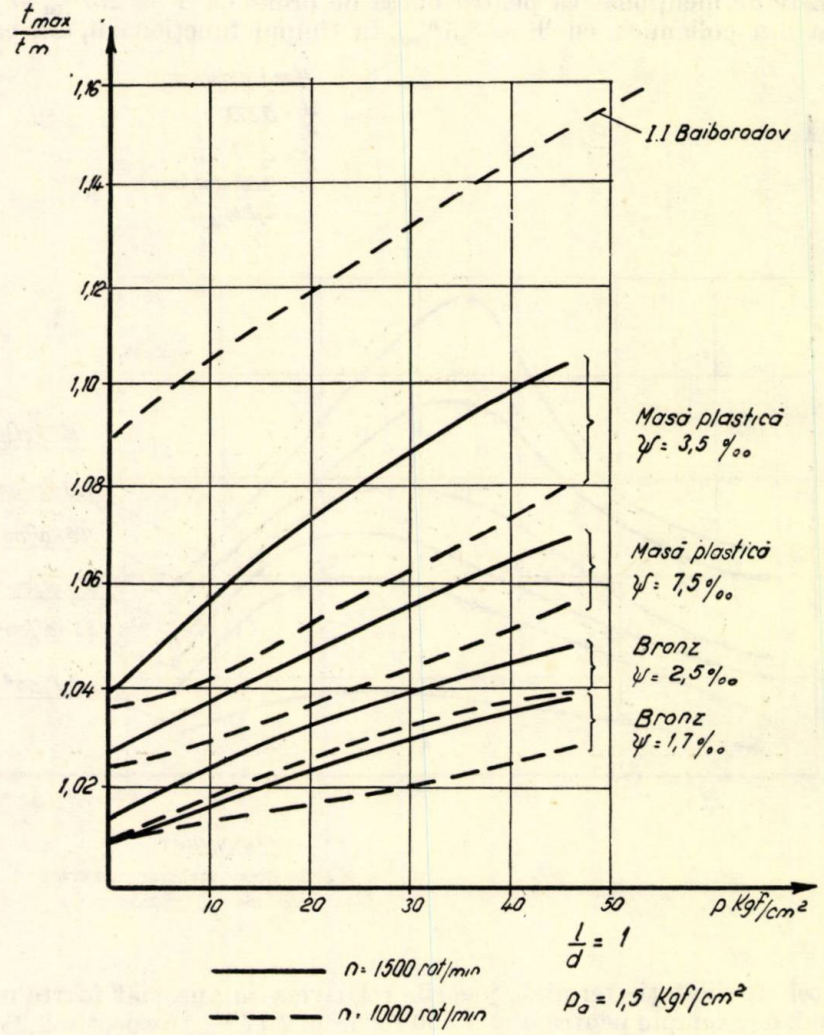


Fig. 17

4. Mărind jocul relativ la $\Psi = 9{,}7\,‰$, pentru $\frac{l}{d} = 1$, au rezultat curbele din figurile 18 şi 19, iar prin scurtarea bucşelor la $\frac{l}{d} = 0{,}6$ s-a obţinut repartiţia temperaturii dată de figurile 20 şi 21.

Se observă că ecartul dintre temperaturile extreme poate fi mult sporit în condiţii dificile de evacuare a căldurii, aşa cum arată curbele din figura 22 obţinute pe un stand la care, din cauza sistemului con-

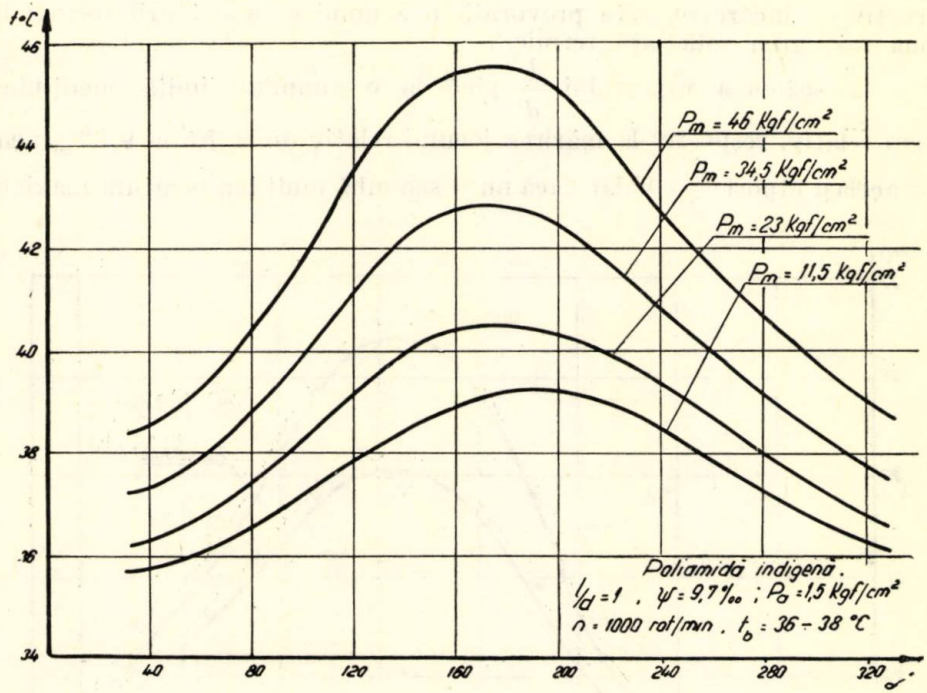

t°C
46
44
42
40
38
36
34
40
80
120
160
200
240
280
320
Pm = 46 Kgf/cm²
Pm = 34,5 Kgf/cm²
Pm = 23 Kgf/cm²
Pm = 11,5 kgf/cm²
Poliamidă indigenă.
1/d = 1 , ψ = 9,7‰ ; Pa = 1,5 Kgf/cm²
n = 1000 rot/min . tb = 36 ÷ 38 °C

Fig. 18

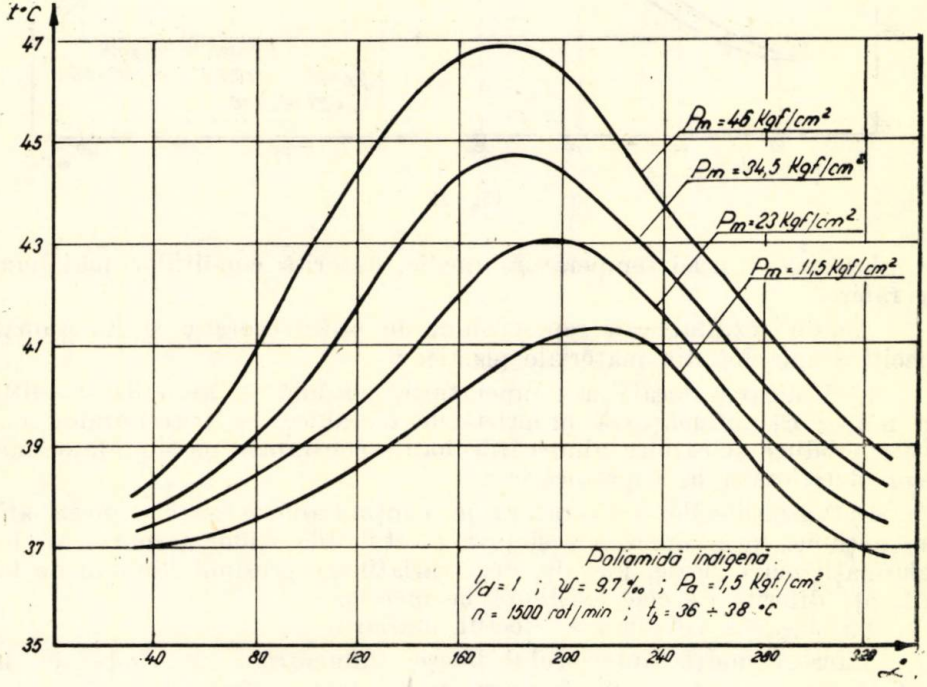

t°C
47
45
43
41
39
37
35
40
80
120
160
200
240
280
320
Pm = 46 Kgf/cm²
Pm = 34,5 Kgf/cm²
Pm = 23 Kgf/cm²
Pm = 11,5 Kgf/cm²
Poliamidă indigenă.
1/d = 1 ; ψ = 9,7‰ ; Pa = 1,5 Kgf/cm².
n = 1500 rot/min ; tb = 36 ÷ 38 °C

Fig. 19

structiv de încărcare, este provocată o acumulare a căldurii tocmai în zona mai greu solicitată termic.

La scăderea raportului $\frac{l}{d}$ pînă la o anumită limită, menţinînd jocul relativ, respectiv la mărirea jocului relativ de la 7,5 la 9,7 $^0/_{00}$ pentru acelaşi raport $\frac{l}{d}$, chiar dacă nu se schimbă mult temperatura maximă

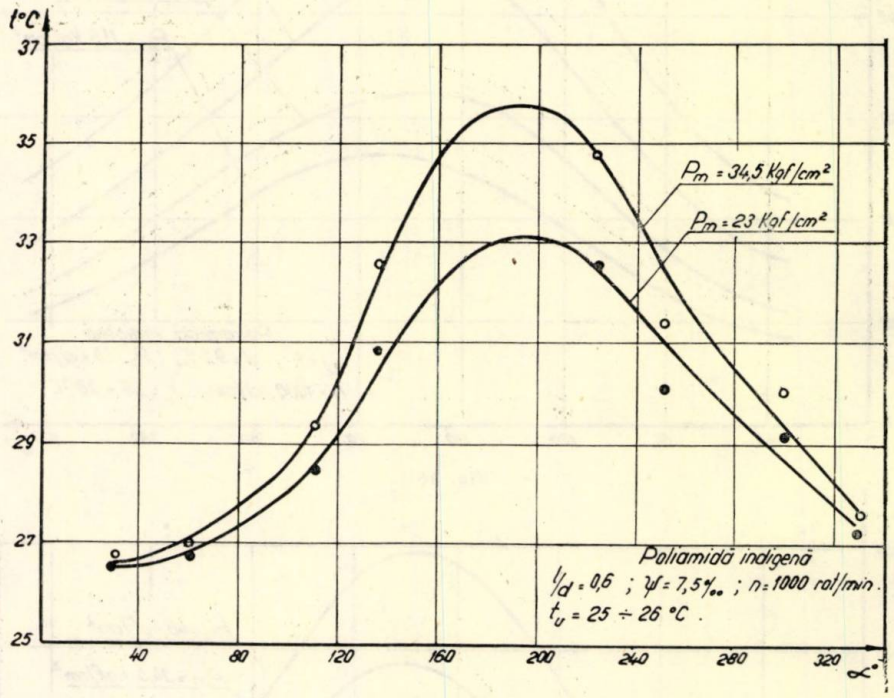


Fig. 20

se micşorează totuşi temperatura medie, datorită condiţiilor mai bune de răcire.

Aceste rezultate au repercusiuni de ordin teoretic şi funcţional, specifice bucşelor din materiale plastice :

a) Ridicarea locală a temperaturii, posibilă în anumite condiţii, nu numai că influenţează proprietăţile mecanice ale materialului, dar poate produce şi explica alunecările locale constatate pe suprafaţa bucşelor deteriorate la supraîncărcări.

b) Variaţiile de temperatură influenţînd diferit zonele bucşei atît sub acţiunea presiunilor, cît şi prin efectul dilataţiilor termice, au loc deformaţii mari locale, inegale, deci variaţii ale grosimii filmului de lubrifiant, diferite de cele existente la metale.

La aceasta se adaugă efectul umflării.

Macrogeometria interiorului bucşei influenţează, la rîndul ei, în mod deosebit procesul de formare a presiunii hidrodinamice.

c) Modul de variaţie a temperaturii determină totodată variaţia viscozităţii de-a lungul periferiei fusului. Folosind legea de variaţie [3]:

$$\eta = \eta_1 \left(\frac{h}{h_1}\right)^q,$$

în care

η reprezintă viscozitatea într-un punct oarecare cu grosimea h a filmului de ulei;
η_1 — viscozitatea în punctul cu grosimea maximă h a peliculei;
q — un coeficient care rezultă din variaţia curbei de temperatură.

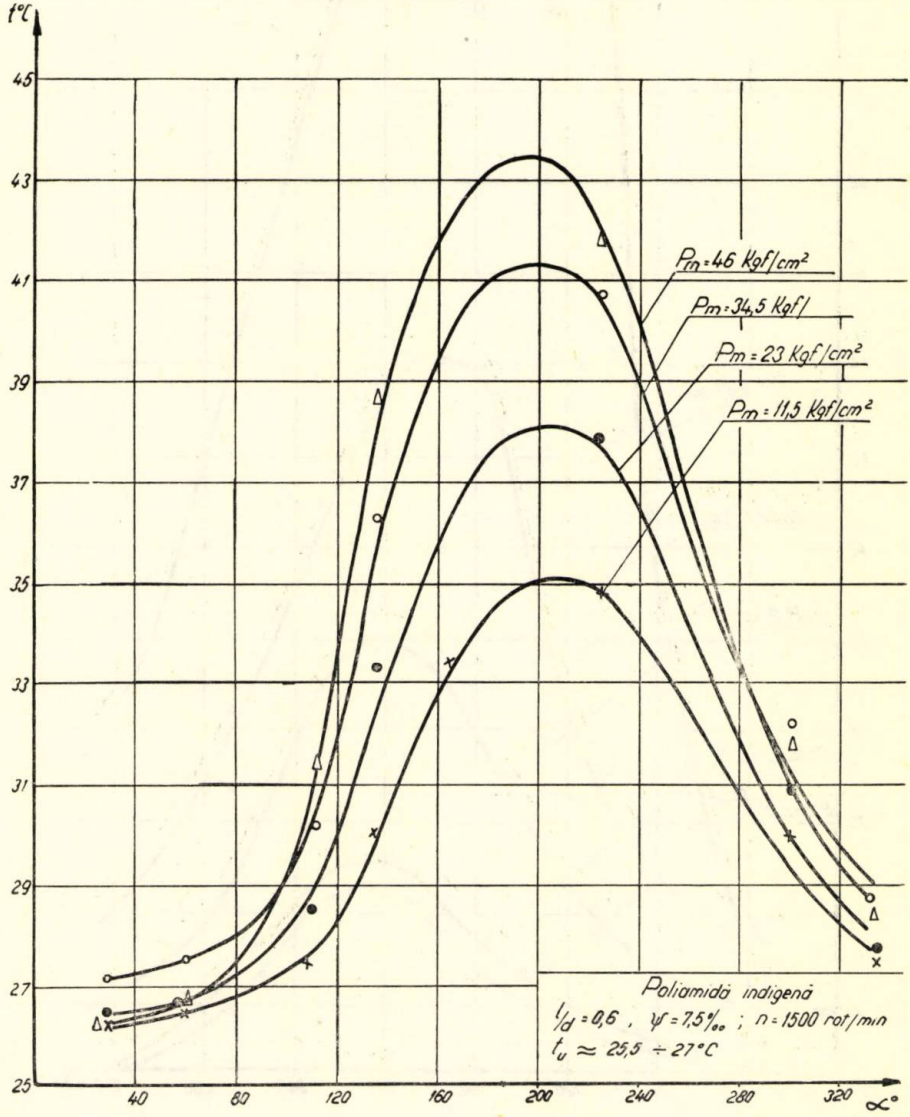


Fig. 21

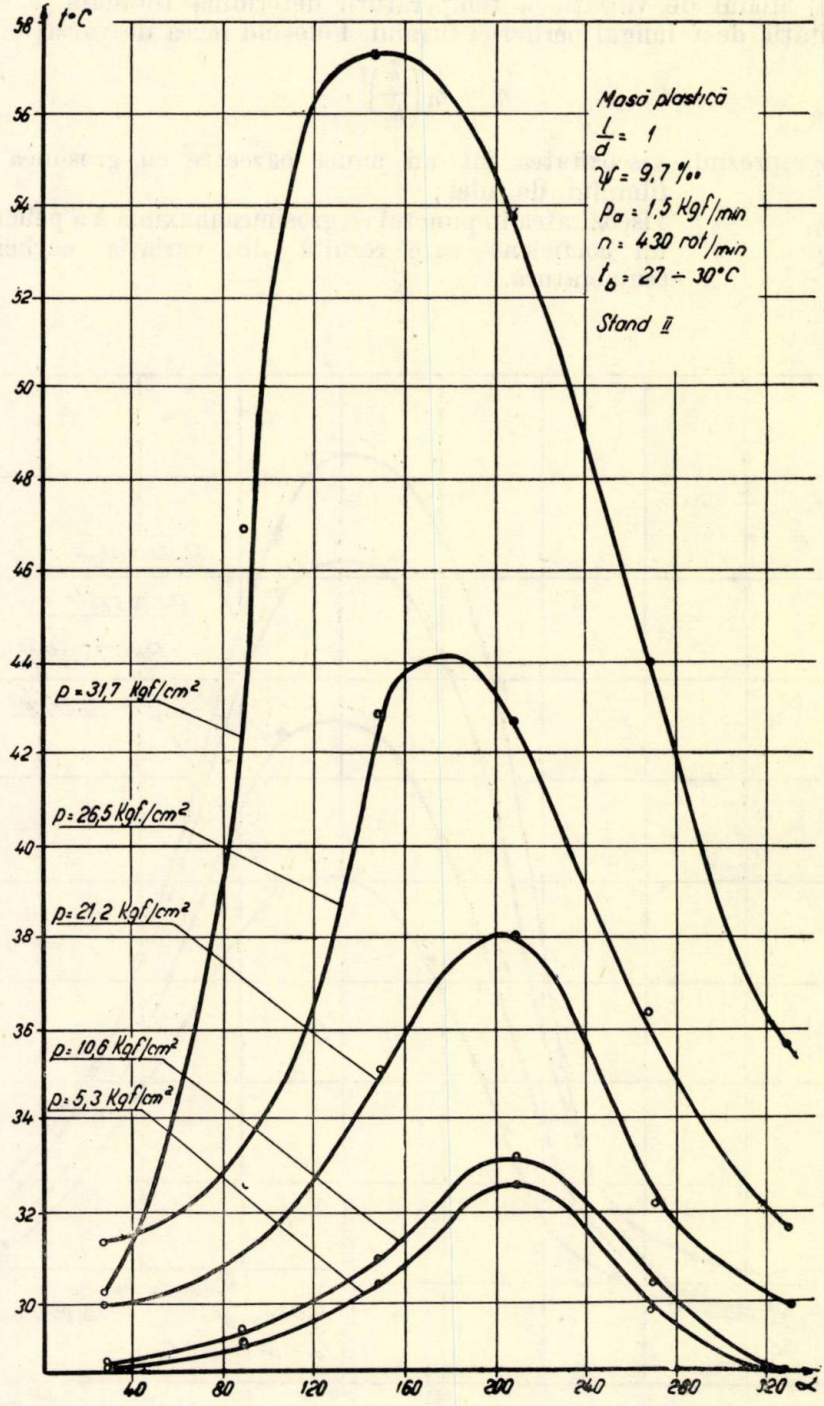

t°C
58
56
54
52
50
48
46
44
42
40
38
36
34
32
30
40
80
120
160
200
240
280
320
L
Masă plastică
l/d = 1
ψ = 9,7 ‰
p_a = 1,5 Kgf/min
n = 430 rot/min
t_b = 27 ÷ 30°C
Stand II
p = 31,7 Kgf/cm²
p = 26,5 Kgf/cm²
p = 21,2 Kgf/cm²
p = 10,6 Kgf/cm²
p = 5,3 Kgf/cm²

Fig. 22

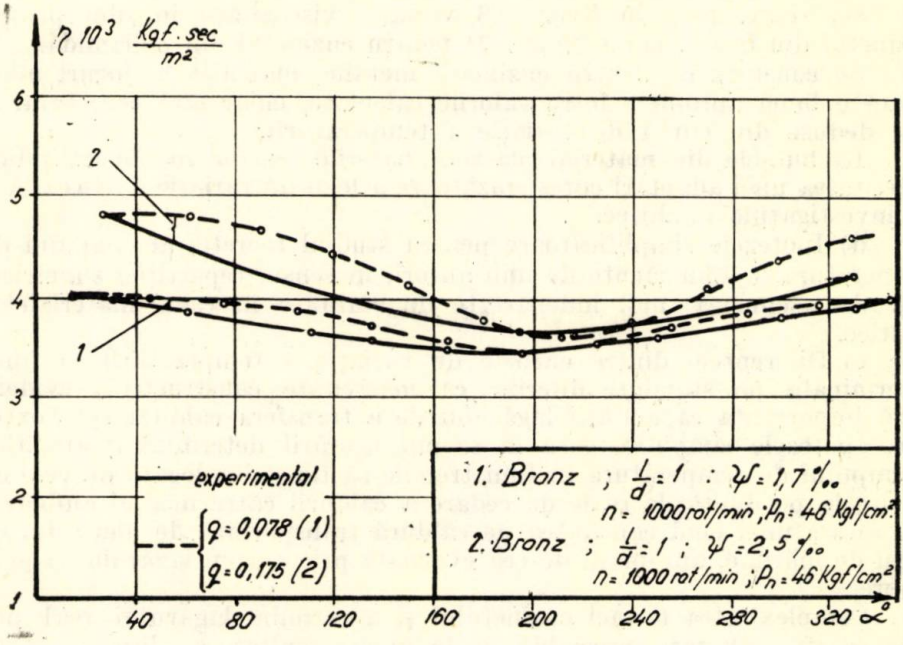

γ 10³ Kgf. sec / m²
6
5
4
3
2
1
2
1
experimental
γ = 0,078 (1)
γ = 0,175 (2)
1. Bronz ; l/d = 1 ; ψ = 1,7 ‰
n = 1000 rot/min ; Pn = 46 Kgf/cm²
2. Bronz ; l/d = 1 ; ψ = 2,5 ‰
n = 1000 rot/min ; Pn = 46 Kgf/cm²
40
80
120
160
200
240
280
320
α°

Fig. 23

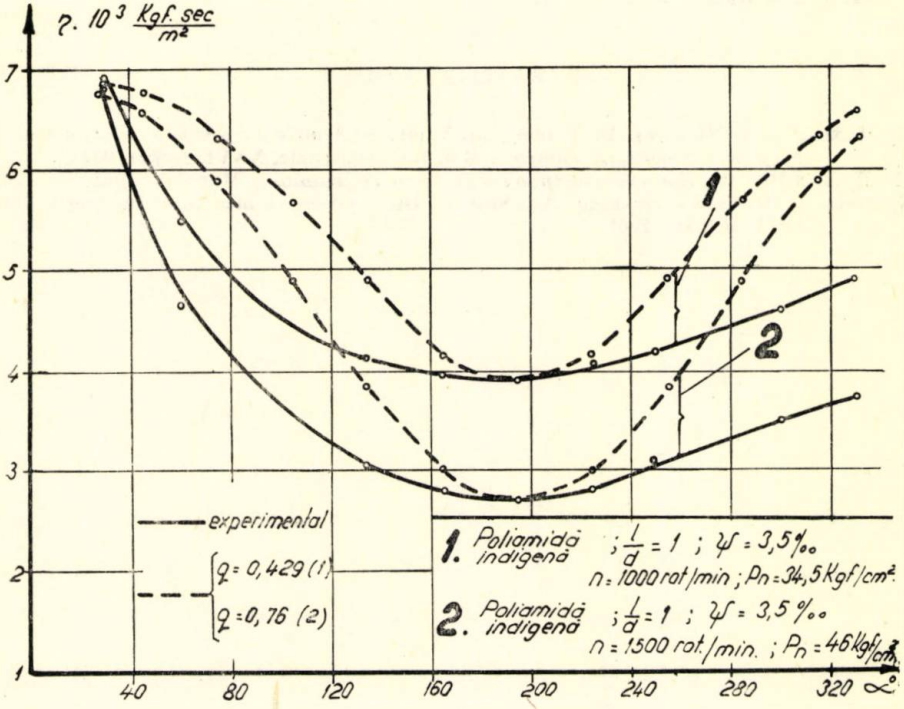

γ. 10³ Kgf. sec / m²
7
6
5
4
3
2
1
1
2
experimental
γ = 0,429 (1)
γ = 0,76 (2)
1. Poliamidă indigenă ; l/d = 1 ; ψ = 3,5 ‰
n = 1000 rot/min ; Pn = 34,5 Kgf/cm²
2. Poliamidă indigenă ; l/d = 1 ; ψ = 3,5 ‰
n = 1500 rot/min. ; Pn = 46 Kgf/cm²
40
80
120
160
200
240
280
320
α°

Fig. 24

s-a reprezentat în figura 23 variația viscozității în film pentru cuzinetul din bronz, iar în figura 24 pentru cuzinetul din poliamidă.

Se constată că pentru cuzinetul metalic, mai ales la jocuri mici, există o bună apropiere între valorile calculate, chiar fără corectură, și cele deduse din curba de variație a temperaturii.

La bucșele din material plastic, abaterile sensibil mai mari indică necesitatea unei adaptări corespunzătoare a legii de variație a viscozității în investigațiile analitice.

d) Ipotezele simplificatoare pentru studiul teoretic al cîmpului de temperatură în film făcute de unii autori, în sensul repartiției simetrice, sînt de asemenea mai îndepărtate de realitate în cazul materialelor plastice.

e) Diferențele dintre curbele de variație a temperaturii în film, determinate pe standuri diferite ca masivitate constructivă, evidențiază importanța capacității lagărului de a transfera căldura spre exterior. Ipotezele simplificatoare în scopul ușurării determinării analitice a cîmpului de temperatură în film trebuie să fie strîns legate de cele cu privire la posibilitățile reale de cedare a căldurii către mediul ambiant, mai ales atunci cînd cantitatea de căldură transportată de ulei este, ca ordin de mărime, apropiată de cea evacuată prin corpul lagărului și prin arbore.

Complexitatea formei cuzinetului și a corpului lagărului real pot avea ca efect abateri apreciabile de la unele rezultate analitice.

Primită la redacție la 4 mai 1966

BIBLIOGRAFIE

1. G. Manea, Rm. Mustafa, D. Tudor, Gh. Vasilica, *Aspecte ale comportării poliamidei ca bucșe pentru lagăre cu alunecare*, Bul. Inst. politehnic, **XXVI**, *1*, 79 (1964).
2. И. Л. Земляков, *Капрон-материал для деталей машины*, Машгиз, 1961.
3. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica, O. Bita, *Lagăre cu alunecare*, București, Edit Acad. R.P.R., 1961.

O PROBLEMĂ DE VIBRAȚII NELINIARE ÎN STUDIUL SUSPENSIEI AUTOMOBILULUI. CAZUL CARACTERISTICILOR DEGRESIVE

de I. BARBĂLAT și A. HALANAY

Institutul de construcții, București
Institutul de matematică, București

539. 4 : 534

Se obțin evaluări ale soluției mărginite pe toată axa, respectiv ale soluției periodice, pentru ecuația $\ddot{x} + F(\dot{x} - \dot{h}) + \nu^2(x - h) = 0$, în cazul caracteristicii „degresive": $F(z) = g(z) + \Phi(z)$, $g(-z) = -g(z)$, g strict crescătoare și concavă pentru $z \geqslant 0$, $\lim g(z) > 2K = 2 \sup |\ddot{h}|$; Φ continuă și crescătoare, $\Phi(0) = 0$. $z \to \infty$.

1. Oscilațiile verticale ale unui automobil în mișcare în cazul unui model simplificat cu un singur grad de libertate sînt descrise de ecuația diferențială neliniară $\ddot{x} + F(\dot{x} - \dot{h}) + \nu^2(x - h) = 0$, unde $F(z)$, caracteristica neliniară a suspensiei, este o funcție continuă strict crescătoare pentru orice z, $F(0) = 0$, iar $h(t)$ este o funcție de clasă C^2 cu $|\ddot{h}(t)| \leqslant K$. Notînd $x - h = y$, se obține ecuația $\ddot{y} + F(\dot{y}) + \nu^2 y = -\ddot{h}(t)$ și deci sistemul echivalent

$$\frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = -F(z) - \nu^2 y - \ddot{h}(t). \tag{1.1}$$

În [1] s-au considerat caracteristici pentru care $F(z) = 2pz + \Phi(z)$, unde $\Phi(z)$ este continuă și crescătoare, $\Phi(0) = 0$, $p > 0$. În aceste condiții, soluțiile sistemului sînt mărginite și se apropie asimptotic între ele pentru $t \to +\infty$ [2, p. 289—312]. Utilizînd această comportare

globală a soluțiilor sistemului (1.1), s-au găsit în [1] unele evaluări integrale, de exemplu

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \dot{y}^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2p}\,\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{h}^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.2}$$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{1+\frac{\nu^2}{2p^2}}\,\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{h}^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3}$$

De asemenea s-au găsit evaluări pentru $|y(t)|$ și $|\dot{y}(t)|$, valabile pentru toate soluțiile și orice t suficient de mare.

Caracteristicile considerate includ o mare varietate de caracteristici posibile, cu condiția ca panta tangentei într-un punct arbitrar sau pantele semitangentelor într-un punct unghiular să fie $\geqslant 2p > 0$.

În unele împrejurări este convenabil să se considere așa-numitele caracteristici „degresive", caracterizate prin faptul că funcția strict crescătoare F este concavă pentru $z \geqslant 0$ și convexă pentru $z \leqslant 0$. Pe astfel de caracteristici se poate întîmpla ca panta tangentei într-un punct sau pantele semitangentelor într-un punct unghiular să tindă la zero pentru $|z| \to \infty$. Rezultatele din [1] se pot aplica și la unele tipuri de caracteristici degresive, dar conduc în cazul acestora la evaluări mai puțin fine decît acelea care se pot obține printr-o examinare care ține seama de specificul situației. Obiectul lucrării de față constă în efectuarea unui studiu în cazul cînd F este obținută prin însumarea unei caracteristici degresive cu o funcție Φ continuă, crescătoare și cu $\Phi(0) = 0$.

2. TEOREMĂ. *Fie* $F(z) = g(z) + \Phi(z)$, $-g(-z) = g(z)$, *g strict crescătoare și concavă pentru* $z \geqslant 0$ *și* $\lim_{z\to\infty} g(z) > 2K$, *iar* Φ *continuă și crescătoare,* $\Phi(0) = 0$, *și fie a soluția unică a ecuației* $g(z) = 2K$. *Pentru orice soluție y a sistemului* (1.1), *există* T_y *astfel încît pentru* $t \geqslant T_y$ *au loc evaluările*

$$|y(t)| \leqslant \frac{1}{\nu}\sqrt{a^2+\frac{K^2}{\nu^2}}, \quad |\dot{y}(t)| \leqslant a \tag{2.1}$$

și toate soluțiile sistemului se apropie asimptotic pentru $t \to +\infty$.

Dacă pentru $z \geqslant 0$ *avem* $|\Phi(-z)| \leqslant \Phi(z)$, *atunci pentru* $t \geqslant T_y$ *avem și*

$$|\ddot{x}(t)| \leqslant 2K + \Phi(a) + K\sqrt{1+\frac{a^2\nu^2}{K^2}}. \tag{2.2}$$

Demonstrație. Avem

$$\frac{-F(z) - \nu^2 y - \ddot{h}(t)}{z} \leqslant \frac{-g(z) - \nu^2 y + K}{z}, \quad \text{pentru } z \geqslant 0$$

și

$$\frac{F(z) - \nu^2 y - \ddot{h}(t)}{z} \leqslant \frac{-g(z) - \nu^2 y - K}{z}, \quad \text{pentru } z \leqslant 0.$$

Să considerăm ecuațiile diferențiale de comparație

$$z\frac{dz}{dy} = -g(z) - \nu^2 y + K \qquad (z \geqslant 0), \tag{2.3}$$

$$z\frac{dz}{dy} = -g(z) - \nu^2 y - K \qquad (z \leqslant 0). \tag{2.4}$$

Vom construi o familie (γ) de curbe simple închise, formate din arce de curbe integrale ale ecuațiilor precedente și din paralele la Oz, curbe tăiate spre interior de traiectoriile sistemului (1.1). Această familie de curbe acoperă întreg planul Oyz. Din familia construită se va alege apoi o curbă simplă închisă care va conduce la evaluările din enunț. Existența unei asemenea familii implică faptul că toate soluțiile sistemului sînt mărginite, mai precis, existența unor constante A și B astfel încît pentru orice soluție $y(t)$ există T_y, astfel încît pentru $t \geqslant T_y$ să avem $|y(t)| \leqslant A$ și $|z(t)| \leqslant B$. În cazul cînd $\ddot{h}$ este periodică de perioadă Θ, existența familiei de curbe simple închise cu proprietatea de mai sus implică existența unei soluții periodice de perioadă Θ. Pentru detalii și bibliografie în această direcție a se vedea, de exemplu, [2].

Se consideră graficele Γ_1 și Γ_2:

$$y = \frac{1}{\nu^2}(K - g(z)),\ (z \geqslant 0) \text{ și } y = -\frac{1}{\nu^2}(K + g(z)),\ (z \leqslant 0),$$

simetrice față de origine, Γ_1 convexă și Γ_2 concavă, și pe care curbele integrale ale ecuațiilor de comparație (2.3), (2.4) prezintă maxime respectiv minime. Pentru proprietățile funcțiilor convexe (concave) vezi [3, p. 249—268 și 313—322]. Vom demonstra că în regiunea $z \geqslant 0$, $y \geqslant \frac{K}{\nu^2}$ curbele integrale $z = z(y)$ ale ecuației (2.3) sînt strict concave. Fie $K\nu^{-2} \leqslant y_1 < y_2$. Rezultă că pentru $y > y_1$ avem $y > [K - g(z)]\,\nu^{-2}$ și deci $\frac{dz}{dy} < 0$, deci $z(y)$ este strict descrescătoare și $z_1 = z(y_1) > z(y_2) = z_2 \geqslant 0$. Avem deci

$$\frac{\nu^2 y_1 - K}{z_1} < \frac{\nu^2 y_2 - K}{z_2}.$$

Pe de altă parte, g fiind concavă și $g(0) = 0$, funcția $\frac{g(z)}{z}$ este descrescătoare pentru $z \geqslant 0$, deci

$$\frac{g(z_1)}{z_1} \leqslant \frac{g(z_2)}{z_2}.$$

Adunînd inegalitățile obținute, rezultă că avem

$$\frac{g(z_1) + \nu^2 z_1 - K}{z_1} < \frac{g(z_2) + \nu^2 z_2 - K}{z_2} \text{ deci } \left(\frac{dz}{dy}\right)_{y_1} > \left(\frac{dz}{dy}\right)_{y_2},$$

adică $\frac{dz}{dy}$ este strict descrescătoare și deci în regiunea considerată curbele integrale $z = z(y)$ sînt *strict concave* și *strict descrescătoare*. Dacă $z_2 > 0$ tinde la zero, $\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y_2}$ tinde către $-\infty$.

Vom demonstra acum că în regiunea $z \leqslant 0$, $y \geqslant -\nu^{-2}(K + g(z))$ curbele integrale $z = z(y)$ ale ecuației (2.4) sînt *strict convexe* și *strict crescătoare*. Într-adevăr, în interiorul acestei regiuni avem

$$-K - g(z) - \nu^2 y < 0 \quad \text{și} \quad z < 0, \quad \text{deci} \quad \frac{dz}{dy} < 0.$$

Funcția $G(y) = g(z(y)) + \nu^2 y + K$ este strict crescătoare în regiunea considerată, deoarece este suma a două funcții strict crescătoare, deci pentru $-K\nu^{-2} \leqslant y_1 < y_2$ avem

$$G(y_1) = g(z(y_1)) + \nu^2 y_1 + K < g\,(z(y_2)) + \nu^2 y_2 + K = G(y_2).$$

Apoi $z_1 = z(y_1) < z_2 = z\,(y_2) \leqslant 0$ și deci $-\frac{G(y_1)}{z_1} < -\frac{G(y_2)}{z_2}$.

Rezultă că $\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y_1} < \left(\frac{dz}{dy}\right)_{y_2}$, deci $\frac{dz}{dy}$ este strict crescătoare și curbele integrale $z = z(y)$ sînt strict crescătoare și strict convexe în regiunea considerată. Dacă $z_2 < 0$ tinde la zero, $\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y_2}$ tinde către $+\infty$.

Vom începe construcția unei curbe din familia (γ) în punctul $A_1(y_1 = -\frac{K}{\nu^2}, z_1 > 0)$; curba integrală $z = z(y)$ a ecuației (2.3) care pleacă din A_1 este strict descrescătoare și strict concavă, deci va tăia axa Oy în A_2 $(y_2, 0)$. Integrînd ecuația (2.3) din punctul A_1 pînă în A_2, se obține

$$-z_1^2 = -\nu^2(y_2^2 - y_1^2) + 2K(y_2 - y_1) - 2\int_{y_1}^{y_2} g(z(y))\,dy, \qquad (2.5)$$

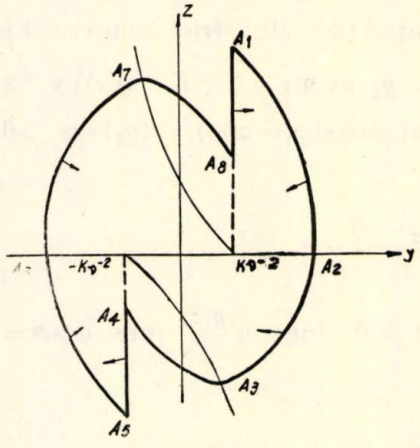


Fig. 1

de unde rezultă că $z_1 \to \infty$ implică $y_2 \to \infty$.

Din $A_2(y_2, 0)$ construcția continuă cu arcul de curbă integrală $z = z(y)$ al ecuației (2.4); acest arc este strict convex și $z(y)$ descrește strict cînd y descrește. Rezultă că arcul întîlnește neapărat curba Γ_2 (locul geometric al punctelor de minimum al curbelor integrale ale ecuației (2.4)) într-un punct $A_3(y_3, z_3)$, cu $g(z_3) + \nu^2 y_3 + K = 0$. Integrînd ecuația (2.4), din A_2 în A_3 se obține

$$z_3^2 = -\nu^2(y_3^2 - y_2^2) - 2K(y_3 - y_2) - 2\int_{y_2}^{y_3} g(z(y))\,dy. \qquad (2.6)$$

Cînd $y_2 > \frac{K}{\nu^2}$ crește, $z_3 < 0$ descrește. Să presupunem că pentru $y_2 \to \infty$ rezultă $z_3 \to \tilde{z} > -\infty$. Rezultă că și $y_3 \to \tilde{y}$ finit, iar relația (2.6) conduce la o contradicție. Deci $z_1 \to \infty$ implică $z_3 \to -\infty$.

Din $A_3(y_3, z_3)$ construcția continuă cu arcul de curbă integrală al ecuației (2.4) în regiunea în care $\frac{dz}{dy} < 0$, deci $z < 0$ crește cînd $y > -\frac{K}{\nu^2}$ descrește. Rezultă că curba integrală întîlnește dreapta $y = -\frac{K}{\nu^2}$ în $A_4(y_4, z_4)$ cu $y_4 = -\frac{K}{\nu^2}$ și $0 \geqslant z_4 > z_3$.

Vom demonstra acum că pentru orice $z_1 > a$ rezultă z_3 cu $|z_3| < |z_1|$ și deci $0 < |z_4| < |z_3| < z_1$.

Din $g(z_3) < 0$ și $g(z_3) + \nu^2 y_3 + K = 0$ rezultă $\nu^2 y_3 + K > 0$. Dacă am avea $y_3 \leqslant y_1$, atunci $0 < g(z_3) + \nu^2 y_1 + K = g(z_3) + 2K$ și deci $|g(z_3)| = g(|z_3|) < 2K$, adică $|z_3| < a$. Dacă $z_1 > a$, rezultă în acest caz că $|z_3| < a \leqslant z_1$.

Să presupunem acum că $y_3 > y_1$. Vom evalua integralele din (2.5) și (2.6) utilizînd următoarea proprietate : *dacă z este o funcție convexă (concavă) într-un interval $I \subset R$ și g o funcție convexă (concavă) și crescătoare (descrescătoare) într-un interval ce conține pe $z(I)$, atunci g o z este convexă (concavă) în I* [4, p. 55, ex. 18]. Cînd y crește de la y_1 la y_2, funcția $g(z(y))$ este concavă și scade de la $g(z_1)$ la 0, deci

$$\int_{y_1}^{y_2} g(z(y))\,dy > \frac{1}{2} g(z_1)\ (y_2 - y_1). \tag{2.7}$$

De asemenea, cînd y crește de la y_3 la y_2, funcția $g(z(y))$ este convexă și crește de la $g(z_3) < 0$ la 0, deci

$$\int_{y_3}^{y_2} g(z(y))\,dy < \frac{1}{2} g(z_3)(y_2 - y_3) \tag{2.8}$$

Adunînd (2.5), (2.6) și ținînd seama de (2.7) și (2.8), rezultă

$$(z_3^2 - z_1^2) < -\nu^2(y_3^2 - y_1^2) + (y_2 - y_1)[2K - g(z_1)] + \\ + (y_2 - y_3)[2K + g(z_3)].$$

Dacă $2K + g(z_3) \leqslant 0$, deci dacă $|g(z_3)| \geqslant 2K$, adică $|z_3| \geqslant a$, luînd $z_1 > a$, rezultă $|z_3| < z_1$. În concluzie, în toate situațiile, dacă $z_1 \geqslant a$, rezultă $|z_3| < z_1$.

Curba γ se completează cu arcul $A_5A_6A_7A_8$, simetricul arcului $A_1A_2A_3A_4$ față de origine și cu segmentele de dreaptă A_1A_8 și A_4A_5. Deoarece ecuația (2.4) se obține din (2.3) prin schimbarea cuplului (y, z) în $(-y, -z)$, rezultă că A_5A_6 este arc de curbă integrală pentru ecuația (2.4) și $A_6A_7A_8$ este arc de curbă integrală pentru ecuația (2.3).

Traiectoriile sistemului (1.1) taie curbele familiei (γ) spre interior și a doua dintre evaluările (2.1) este demonstrată. Dacă în (2.5) se înlocuiește $z_1 = a$ și se ține seama de (2.7) se obține și prima dintre evaluările (2.1).

Avem $\ddot{x} = \ddot{y} + \ddot{h} = -g(\dot{y}) - \Phi(\dot{y}) - \nu^2 y$, deci

$$|\ddot{x}(t)| \leqslant |g(\dot{y})| + |\Phi(\dot{y})| + \nu^2 |y| \leqslant g(|\dot{y}|) + \Phi(|\dot{y}|) + \nu^2 |y|,$$

de unde, utilizînd evaluările (2.1), rezultă (2.2).

Faptul că pentru $t \to +\infty$ soluţiile sistemului (1.1) se apropie asimptotic este cunoscut (vezi [2, p. 289]). Vom demonstra această proprietate utilizînd o lemă din [5]: *dacă $f(t)$ este o funcţie reală de variabilă reală t definită pe $(b, +\infty)$ şi dacă* $\lim_{t\to\infty} f(t) = \alpha < \infty$, *iar $f'(t)$ este uniform continuă pe $(b, +\infty)$, atunci* $\lim_{t\to\infty} f'(t) = 0$.

Fie $(\varphi, \dot{\varphi})$ o soluţie a sistemului (1.1). Notînd $y - \varphi = u$ $\dot{y} - \dot{\varphi} = v$, avem

$$\frac{du}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -F(v + \dot{\varphi}(t)) + F(\dot{\varphi}(t)) - \nu^2 u. \tag{2.9}$$

Considerăm funcţia lui Leapunov $W = \nu^2 u^2 + v^2$, a cărei derivată în virtutea sistemului precedent este $\dot{W} = -2v\,[F(v + \dot{\varphi}(t)) - F(\dot{\varphi}(t))]$, deci $\dot{W} \leqslant 0$, deci $W(t)$ descreşte şi tinde către $\alpha \geqslant 0$.

Din (1.1) rezultă că $\ddot{y}(t)$ este mărginită pentru $t \geqslant 0$, deci $y(t)$ şi $\dot{y}(t)$, care sînt mărginite pe $[0, \infty)$, sînt şi uniform continue. Rezultă că $\dot{W}(t)$ este uniform continuă pe acest interval şi deci $\lim_{t\to\infty} \dot{W}(t) = 0$. Dacă $v(t)$, care e mărginită, n-ar tinde la zero pentru $t \to \infty$, ar exista un şir $\{t_n\}$ din care s-ar putea extrage un subşir (pe care-l notăm la fel) astfel încît $\lim_{n\to\infty} v(t_n) = v_0 \neq 0$ şi $\lim_{n\to\infty} \dot{\varphi}(t_n) = \dot{\varphi}_0$. Rezultă că $\lim_{n\to\infty} W(t_n) = -2\, v_0\,[F(v_0 + \dot{\varphi}_0) - F(\dot{\varphi}_0)] < 0$, deoarece F este strict crescătoare, ceea ce este contradictoriu. Cum $\dot{v}(t)$ este uniform continuă, avem şi $\lim_{t\to\infty} \dot{v}(t) = 0$. Din a doua ecuaţie (2.9) rezultă că $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ şi teorema este complet demonstrată.

3. CONSECINŢE. a) *Există cel puţin o soluţie a sistemului* (1.1) *pentru care evaluările* (2.1) *sînt valabile pentru orice $t \in R$.*

Demonstraţie. Vom utiliza următoarea lemă din [6].

Fie $\dot{x} = f(t, x)$ un sistem de ecuaţii diferenţiale, f fiind continuă în G deschis, $G < R^{n+1}$ şi verificînd condiţii ce asigură unicitatea integralelor pentru toate punctele din G. Fie ω o mulţime deschisă din R^{n+1} cu $\bar{\omega} \subset G$ astfel încît proiecţia lui ω pe axa Ot să coincidă cu această axă şi intersecţia lui $\bar{\omega}$ cu stratul $-a \leqslant t \leqslant a$ să fie compactă pentru orice $a > 0$. Fie $\{t_p\}$ un şir descrescător spre $-\infty$ şi să notăm $\bar{\omega}_p = \bar{\omega} \cap (t = t_p)$. Să presupunem că mulţimea $\mathcal{F}_p \subset \bar{\omega}_p$ a punctelor din care pleacă semiintegrale care rămîn în $\bar{\omega}$ pentru $t \geqslant t_p$ nu este vidă oricare ar fi p.

În aceste condiţii există cel puţin o integrală care rămîne în ω pentru $-\infty < t < \infty$.

Dacă se ia drept ω tubul cilindric construit în jurul lui Ot şi care are drept secţiune domeniul limitat de curba simplă închisă γ construită în § 2 pentru a se găsi inegalităţile (2.1), rezultă că există cel puţin o soluţie care rămîne în $\bar{\omega}$ pentru orice t, deci verifică aceste inegalităţi pentru orice $t \in R$.

b) Dacă graficul funcției g pentru $z \geqslant 0$ este o linie poligonală:

$$g(z) = \begin{cases} 2p_0 z & 0 \leqslant z \leqslant z_0 \\ 2p_1 z + 2z_0(p_0 - p_1) & z_0 \leqslant z \leqslant z_1 \\ 2p_2 z + 2z_0(p_0 - p_1) + 2z_1(p_1 - p_2) & z_1 \leqslant z \leqslant z_2 \\ \dots\dots\dots\

Dacă

$$p_i z_i + \left(\frac{1}{2} c z_0^{\frac{1}{2}} - p_1 z_0\right) + \sum_{h=1}^{i-1} z_h(p_h - p_{h+1}) < K \leqslant p_{i+1} z_{i+1} + \\ + \left(\frac{1}{2} c z_0^{\frac{1}{2}} - p_1 z_0\right) + \sum_{h=1}^{i} z_h(p_h - p_{h+1}),$$

atunci

$$a = \frac{K - \left(\frac{1}{2} c z_0^{\frac{1}{2}} - p_1 z_0\right) - \sum_{h=1}^{i-1} z_h(p_h - p_{h+1})}{p_{i+1}},$$

şi dacă

$$K > p_n z_n + \frac{1}{2}\left(c z_0^{\frac{1}{2}} - p_1 z_0\right) - \sum_{h=1}^{n-1} z_h(p_h - p_{h+1}),$$

atunci

$$a = \frac{K - \left(\frac{1}{2} c z_0^{\frac{1}{2}} - p_1 z_0\right) - \sum_{h=1}^{n-1} z_h(p_h - p_{h+1})}{p_{n+1}}.$$

În condiţiile de mai sus g este strict crescătoare şi concavă pentru $z \geqslant 0$ şi, prin ipoteză, se prelungeşte pentru $z \leqslant 0$ prin simetrie faţă de origine. Condiţiile teoremei din § 2 sînt verificate şi calculul rădăcinii unice a ecuaţiei $g(z) = 2K$ este imediat.

Observaţie. Caracteristicile reale au proprietatea că pentru $z \geqslant 0$, $|F(-z)| \leqslant F(z)$. În cele ce precedă, $F(z) = g(z) + \Phi(z)$, cu g simetrică şi strict crescătoare. $\Phi(0) = 0$, Φ crescătoare şi pentru $z \geqslant 0$, $|\Phi(-z)| \leqslant \Phi(z)$.

4. O clasă specială de caracteristici $F(z) = g(z) + \Phi(z)$, cu g şi Φ ca mai sus, este descrisă de funcţii g de forma $g(z) = 2pz - f(z)$, unde f este continuă şi impară. Presupunem că pentru orice pereche de numere reale $z_1 < z_2$ avem

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} < 2p$$

pentru ca g să fie strict crescătoare. Dacă, în plus, f este *convexă* pentru $z \geqslant 0$, deci *concavă* pentru $z \leqslant 0$, rezultă că g este *degresivă*. Vom mai presupune că

$$\lim_{z \to \infty} [2pz - f(z)] > 2K$$

şi astfel g verifică toate condiţiile teoremei din § 2. Pentru astfel de caracteristici vom obţine evaluări în medie pătratică de tipul (1.2) şi (1.3).

Să considerăm din nou ecuaţia diferenţială

$$\ddot{y} + 2p\dot{y} - f(\dot{y}) + \Phi(\dot{y}) + \nu^2 y = -\ddot{h}(t). \qquad (4.1)$$

Înmulțim cu $\dot{y}$, integrăm de la 0 la T și împărțim cu T; ținînd seama că orice soluție este mărginită împreună cu derivata sa, rezultă

$$2p\frac{1}{T}\int_0^T \dot{y}^2 dt - \frac{1}{T}\int_0^T f(\dot{y})\,\dot{y}dt + \frac{1}{T}\int_0^T \Phi(\dot{y})\dot{y}\,dt = -\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{h}\,\dot{y}\,dt + \varepsilon(T), \quad (4.2)$$

unde $\varepsilon(T)$ tinde la zero cînd T tinde la infinit.

Fie, ca în §2, a rădăcina unică a ecuației $2pz - f(z) = 2K$. Există o integrală $y(t)$ a ecuației (4.1) pentru care avem $-a \leqslant \dot{y}(t) \leqslant a$, oricare ar fi t. Ținînd seama că $f(z)$ este convexă pentru $z \geqslant 0$, rezultă că $\frac{f(\dot{y})}{\dot{y}} \leqslant \frac{f(a)}{a}$ și, ținînd seama că $f(z)$ este concavă pentru $z \leqslant 0$, avem $\frac{f(\dot{y})}{\dot{y}} \leqslant \frac{f(-a)}{-a} = \frac{f(a)}{a}$ și, în consecință, pentru orice t

$$2p - \frac{f(\dot{y})}{\dot{y}} \geqslant 2p - \frac{f(a)}{a} = \frac{g(a)}{a} = b > 0.$$

Apoi

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left(2p - \frac{f(\dot{y})}{\dot{y}}\right)\dot{y}^2 dt \geqslant \frac{b}{T}\int_0^T \dot{y}^2\,dt.$$

Deoarece $\dot{y}\,\Phi(\dot{y}) \geqslant 0$, din (4.2) rezultă că

$$\frac{b}{T}\int_0^T \dot{y}^2 dt \leqslant \left(\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{h}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{T}\int_0^T \dot{y}^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon(T).$$

Dacă $T \to \infty$, se obține

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \dot{y}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{b}\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{h}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.3)$$

Cu ajutorul formulei precedente se obține imediat ca în [1]:

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{1 + \frac{2\nu^2}{b^2}}\,\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{h}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.4)$$

Observație. Este ușor de verificat, ținînd seama de faptul că toate soluțiile sînt mărginite și se apropie asimptotic, că evaluările obținute sînt valabile pentru orice soluție.

Exemplu. Să presupunem că $g(z) = 2\lambda[\sqrt{\lambda^2 + 2pz} - \lambda]$, ($\lambda$ și $p > 0$) pentru $z \geqslant 0$ și $g(z) = 2\lambda[\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 2pz}\,]$ pentru $z \leqslant 0$. Funcția g este impară, strict crescătoare, strict convexă pentru $z \leqslant 0$ și strict concavă pentru $z \geqslant 0$. Cînd $z \to \infty$, $g(z) \to \infty$, iar panta tangentei pe graficul lui g tinde la zero. Din $g(z) = 2K$ rezultă

$$a = \frac{K^2 + 2K\lambda^2}{2p\lambda^2} \text{ și apoi } \frac{g(a)}{a} = b = \frac{4p\lambda^2}{K + 2\lambda^2}.$$

Din evaluarea integrală (4.3) rezultă

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \dot{y}^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{K+2\lambda^2}{4p\lambda^2}\,\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{h}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{K^2+2K\lambda^2}{4p\lambda^2} = \frac{a}{2}.$$

Prin urmare, $\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \dot{y}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{a}{2}$, în timp ce putem afirma din (2.1) numai $|\dot{y}| \leqslant a$.

Primită la redacție la 26 martie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. I. Barbălat, I. Filotti, O. Gündisch, A. Halanay, *O problemă de vibrații neliniare în studiul suspensiei automobilului*, Conferința de Mecanică, București, sept., 1965. St. cerc. mec. apl., **22**, *4* (1966).
2. R. Reissig, G. Sansone, R. Conti, *Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen*, Edizioni Cremonese, Roma 1963.
3. Miron Nicolescu, *Analiză Matematică, vol. II*, București, Edit. Tehnică 1958.
4. N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique. Fonctions d'une variable réelle, livre IV*, Chapitres I, II, III, Hermann, Paris 1949.
5. I. Barbălat, *Systèmes d'équations différentielles d'oscillations non linéaires*, Revue de Mathematiques pures et appliquées, **IV**, *2* (1959), p. 267–270.
6. I. Barbălat, *Applications du principe topologique de T. Wazewski aux équations différentielles du second ordre*, Ann. Polon. Math., **V**, p. 303–317 (1958).

CERCETĂRI PRIVIND STAREA TERMICĂ A AMORTIZOARELOR HIDRAULICE TELESCOPICE

de V. HOFFMANN, I. DRĂGHICI,
N. VEŞTEMEANU şi M. EPUREANU
Institutul politehnic Braşov

621.81 : 536.5

În lucrare se studiază regimul termic al amortizoarelor hidraulice telescopice destinate să echipeze suspensiile de automobile, atît în condiţii de laborator, cît şi în condiţii de exploatare. Cu ajutorul aparaturii speciale, construită la Institutul politehnic Braşov, s-a măsurat temperatura şi s-a determinat repartiţia acesteia la unele amortizoare telescopice; s-a determinat influenţa temperaturii asupra caracteristicii de amortizare.
Lucrarea tratează şi influenţa factorilor constructivi şi de solicitare asupra timpului de stabilizare a temperaturii de regim la amortizoarele hidraulice telescopice.
În încheiere, pe baza datelor experimentale obţinute, s-a stabilit temperatura maximă a amortizorului în diferite condiţii de exploatare a automobilelor.

În ultimul timp, în construcţia de automobile s-a observat o tendinţă pronunţată de mărire a confortului de călătorie, datorită cerinţelor mereu crescînde impuse confortului şi siguranţei circulaţiei.

În afara altor parametri, asupra confortabilităţii automobilelor o influenţă deosebită o au tipul şi caracteristica amortizoarelor de oscilaţii, montate în suspensia automobilelor. Întrebuinţarea amortizoarelor fără efect micşorează confortul de călătorie şi siguranţa circulaţiei [5], [7], [9].

Unul dintre factorii importanţi care determină capacitatea de funcţionare şi durabilitatea amortizorului este starea lui termică în condiţii de exploatare.

În procesul de funcţionare amortizorul se încălzeşte, ceea ce influenţează foarte mult asupra parametrilor funcţionali ai acestuia. Încălzirea puternică a unui amortizor poate fi indicaţia atît a funcţionării intensive a acestuia, cît şi a unei subdimensionări (în privinţa diametrului exterior şi a lungimii), din care cauză amortizorul nu cedează destul de intens mediului ambiant căldura acumulată.

Forţele de rezistenţă din amortizor sînt create de forţele de frecare interioară din lichid. Viscozitatea lichidului de amortizor este factorul preponderent care determină la un moment dat şi pentru anumite condiţii valoarea forţelor de frecare. La rîndul ei, viscozitatea depinde foarte mult de temperatura de lucru a lichidului [1], [4], [8], [9].

Pe măsură ce creşte temperatura lichidului din amortizor, scade lucrul mecanic produs pe ciclul de funcţionare, ceea ce duce la micşorarea forţei de amortizare (fig. 1) şi deci la o înrăutăţire a confortului de călătorie.

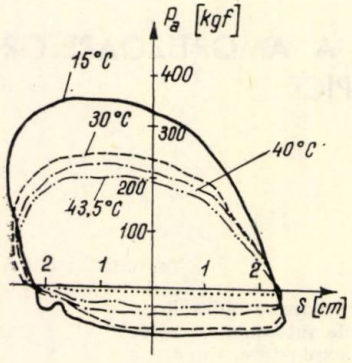


Fig. 1

Date fiind fenomenele deosebit de complexe care au loc la funcţionarea amortizorului, şi în special la încălzirea acestuia în timpul funcţionării, influenţa stării termice asupra eficacităţii de amortizare a oscilaţiilor din suspensie poate fi cercetată numai pe cale experimentală [8].

Cu toată importanţa pe care o prezintă problema stării termice a amortizoarelor hidraulice telescopice pentru constructorii de automobile, pînă în prezent nu s-au făcut decît cîteva cercetări sporadice în străinătate [1], [8], [9] şi [10], în ţara noastră neexistînd încă un studiu în această privinţă.

Cercetarea regimului termic al unui amortizor telescopic în condiţii de exploatare este îngreuiată de necesitatea unei aparaturi complexe şi de imposibilitatea determinării precise a lucrului mecanic, determinare absolut necesară pentru bilanţul termic al amortizorului. Din această cauză este de dorit ca cercetarea experimentală laborioasă să se efectueze în condiţii de laborator. De fapt, unele cercetări [2], [7] au arătat că un studiu destul de amplu al funcţionării amortizorului poate fi efectuat şi în condiţii de laborator, în acest caz trebuie să se reproducă pe cît posibil mai fidel condiţiile de funcţionare reale ale amortizorului hidraulic telescopic.

Cercetarea efectuată în condiţii de exploatare, pe parcurs, are drept scop de a stabili temperatura-limită a amortizoarelor pentru condiţiile de exploatare pe drumuri de diferite categorii şi cu diferite viteze de circulaţie, precum şi timpul de stabilizare al temperaturii de regim în aceste condiţii.

Cercetările experimentale ale căror rezultate le prezentăm în această lucrare au avut drept scop :

— măsurarea temperaturii şi determinarea repartiţiei acesteia la amortizoarele hidraulice telescopice ;

— determinarea influenţei temperaturii asupra caracteristicii de amortizare ;

— stabilirea temperaturii maxime a amortizorului în condiţii de exploatare şi a timpului de stabilizare a temperaturii de regim în aceste condiţii.

1. MĂSURAREA TEMPERATURII AMORTIZOARELOR

Cercetările de laborator privind starea termică a amortizoarelor hidraulice s-au efectuat pe un stand de tip dinamometric SPAT—162 (vezi schema principială în figura 2), care permite înregistrarea diagramei P—S (forţa de amortizare — cursa pistonului) la diferite viteze relative ale pistonului amortizorului.

Standul a fost echipat suplimentar cu o instalaţie de răcire (fig. 3) pentru a modela condiţiile reale de funcţionare ale amortizoarelor pe automobile; pentru aceasta, curentului de aer i s-au imprimat viteze corespunzătoare vitezelor de circulaţie ale automobilelor pe diferite categorii de drumuri.

Principiul de funcţionare al standului SPAT—162 (vezi şi „Revista transporturilor", 1964, nr. 2, p. 71—74) constă în faptul că elementelor corespunzătoare ale amortizorului li se imprimă o mişcare oscilatorie printr-un mecanism bielă-manivelă. Forţele de rezistenţă din amortizor sînt preluate de către elementul elastic (bara de torsiune), folosit ca element de măsurare.

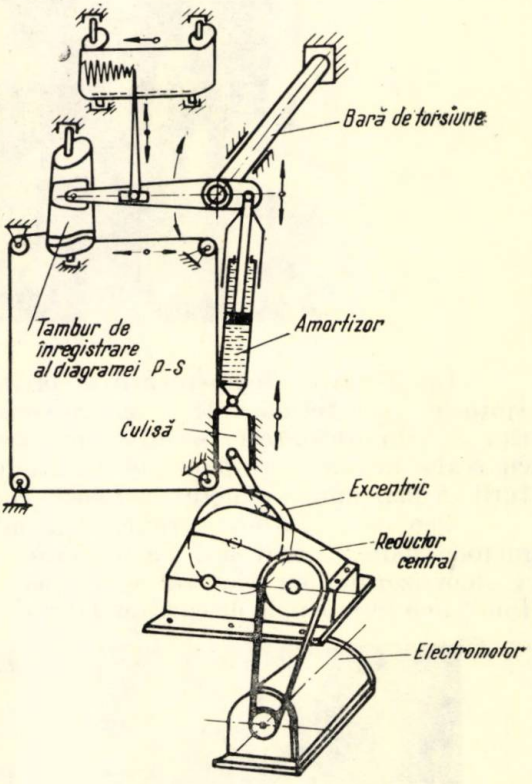


Fig. 2

Mişcarea se transmite de la un electromotor (fig. 2), printr-un reductor în două trepte la volantul cu excentric. Prin intermediul unei biele, mişcarea de rotaţie a volantului se transformă într-o mişcare oscilatorie, de translaţie a culisei. De culisă este prins cu capătul inferior amortizorul supus încercărilor. Tija amortizorului este fixată printr-o pîrghie de elementul elastic — bara de torsiune.

În timpul unei rotaţii complete a excentricului, amortizorul este supus consecutiv tracţiunii şi compresiunii. Forţele de rezistenţă care apar în acest caz acţionează asupra barei, torsionînd-o. Creionul indicatorului de la pîrghia barei de torsiune se deplasează în sus şi în jos, iar tamburul de înregistrare se roteşte la stînga şi la dreapta, în urma cărui fapt linia descrisă de creion devine o curbă închisă (fig. 1). Fără amortizor, creionul indicatorului trasează pe diagramă o linie orizontală, linia zero. Abaterea curbei în sus de la linia zero determină la scară forţa de

rezistență a amortizorului la cursa de tracțiune, iar abaterea în jos forța de rezistență la comprimare.

Cunoscînd curba de etalonare a elementului elastic, se pot determina cu ușurință forțele de rezistență corespunzătoare ale amortizorului.

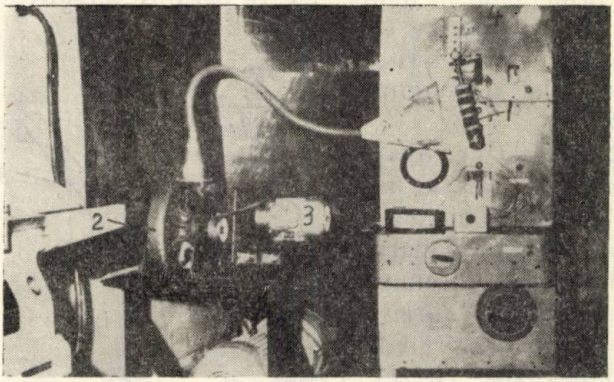


Fig. 3

Înregistrarea temperaturii amortizorului *1* (fig. 4) s-a efectuat cu ajutorul unor termocuple *2* (cupru-constantan), lipite pe peretele exterior al cilindrului-rezervor al amortizorului, și al unui milivoltmetru *3*, cu scala tarată corespunzător în grade. Pentru înregistrarea temperaturii în mai multe puncte s-a folosit comutatorul *4*, tip CRl—12.

Pentru a stabili veridicitatea măsurătorilor de temperatură cu metoda indicată mai sus, s-a măsurat temperatura suprafeței exterioare a amortizorului cu ajutorul unui aparat foarte sensibil de tip „Corection" *1* cu termocupla de contact 2 (Cr—Ni), care se poate vedea în figura 5.

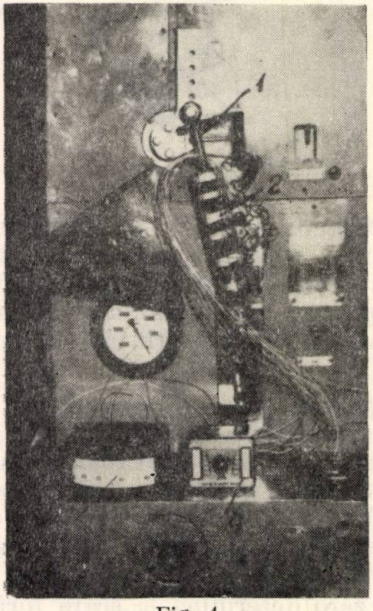


Fig. 4

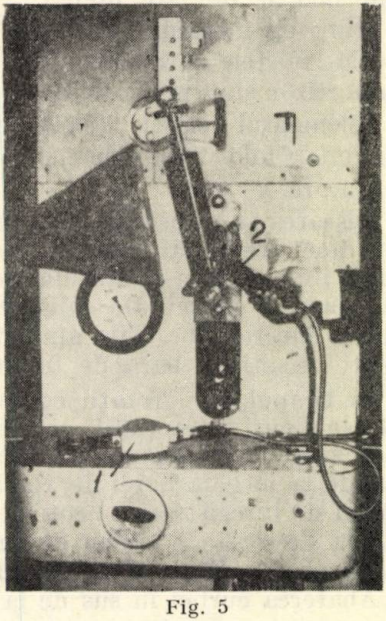


Fig. 5

Compararea rezultatelor obținute prin cele două metode a arătat corectitudinea înregistrării de temperatură cu prima metodă, fapt care a determinat folosirea și pe mai departe a termocuplelor cupru-constantan cuplate cu un milivoltmetru, metodă care s-a dovedit mult mai comodă în timpul încercărilor.

Măsurarea vitezei curentului de aer de răcire s-a făcut cu un anemometru cu cupe tip Rosenmüller nr. 6.

În timpul funcționării, amortizorul nu are aceeași temperatură în toate punctele. Din această cauză a fost necesară determinarea repartiției temperaturii în diferitele puncte ale amortizorului.

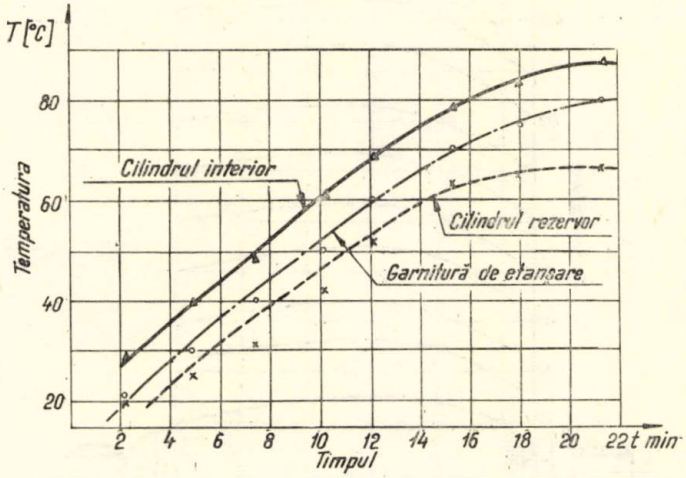


Fig. 6

Temperatura la suprafața exterioară a cilindrului-rezervor diferă de temperatura din interiorul cilindrului principal. Pentru a determina această diferență s-a introdus o termocuplă (prin tija pistonului) în cilindrul principal, în contact direct cu lichidul din amortizor. Măsurătorile au indicat o diferență de 8—9°C (fig. 6), spre deosebire de lucrarea [9], unde se indică o diferență de 10—15°C.

Buna funcționare a unui amortizor depinde în mare măsură de calitatea etanșării tijei pistonului, etanșare executată din cauciuc; asupra calității acesteia influențează în mod hotărîtor temperatura. Pentru a cunoaște temperatura garniturii de etanșare, s-a montat pe aceasta o termocuplă. Din figura 6 rezultă că temperatura garniturii de etanșare a tijei (pentru un amortizor tip TV—7 [1]) este mai mică cu 5—6°C față de temperatura cilindrului-rezervor (în lucrarea [9] se indică aproximativ aceeași temperatură la cilindrul rezervor și la garnitură).

Pentru a determina locul optim de lipire a termocuplei pe suprafața exterioară a cilindrului-rezervor s-au efectuat încercări de stabilire a variației de temperatură pe lungimea cilindrului-rezervor, termocuplele lipindu-se din 44 în 44 mm, începînd de la partea inferioară a cilindru-

[1]) Construcția amortizorului este indicată în figura 2 din lucrarea [6].

lui rezervor (fig. 4). Rezultatele măsurătorilor (fig. 7) ne indică o variație de 3—5°C a temperaturii maxime (pe lungimea amortizorului) față de temperatura punctului 0 unde s-au efectuat toate măsurătorile ulterioare.

Analizînd curbele din figura 7, se poate constata o repartizare aproape uniformă a temperaturii pe suprafața cilindrului-rezervor, excepție făcînd punctul *5*, care corespunde elementului de etanșare. Acest lucru se explică prin forma constructivă a elementului de etanșare, care nu e în contact direct cu lichidul de amortizor [6].

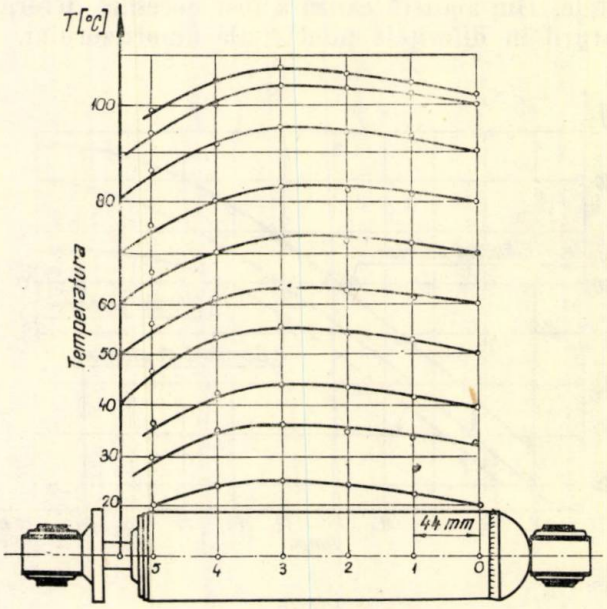


Fig. 7

Influența vitezei pistonului asupra stării termice a amortizorului s-a determinat încercînd amortizorul hidraulic pe standul SPAT—162 la diferite viteze, cu și fără răcire artificială a acestuia. Ca exemplu se indică în figurile 8 și 9 rezultatele încercărilor pentru un amortizor cu diametrul pistonului de 40 și, respectiv, 45 mm.

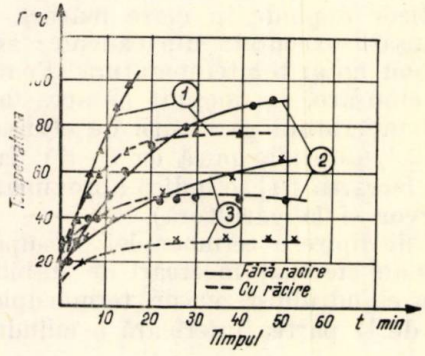


Fig. 8

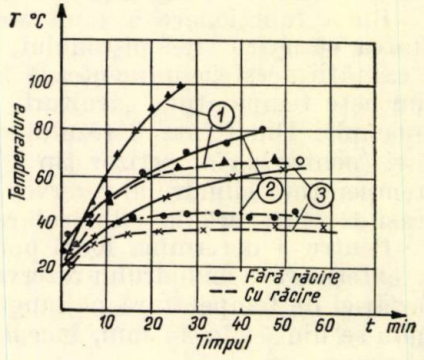


Fig. 9

În aceste figuri, curbele *1* sînt corespunzătoare vitezei $V_p = 0{,}39$ m/s, curbele *2* — $V_p = 0{,}278$ m/s, iar curbele *3* — $V_p = 0{,}222$ m/s.

Vitezele alese pentru încercare nu ating valorile maxime întîlnite în practică (vezi și [8]). În [8] se indică ca fiind foarte frecventă viteza de 3 m/s, însă aceste solicitări există numai pe perioade foarte scurte pe cînd pe stand solicitarea amortizorului este permanentă.

Din analiza comparativă a celor două figuri se constată că starea termică a amortizorului cu diametrul mai mare este mai corespunzătoare, în afară de cazul funcționării la $V_p = 0{,}222$ m/s (curbele 3 din figurile 8 și 9). Aceasta se poate explica prin faptul că la această viteză forța de rezistență dezvoltată de primul amortizor este mult mai mică decît a celui de-al doilea. De asemenea se observă că încălzirea amortizorului este cu atît mai accentuată, cu cît viteza relativă a pistonului în timpul funcționării este mai mare (adică cu cît cursa este mai mare).

Influența răcirii amortizorului se manifestă în faptul că regimul termic al acestuia se stabilizează la toate vitezele alese și la ambele amortizoare după aproximativ 30 min, fiind diferită doar valoarea temperaturii de stabilizare. Dacă temperatura de stabilizare la $V_p = 0{,}278$ m/s este cuprinsă între 40 și 50°C (în funcție de amortizor), în schimb la $V_p = 0{,}39$ m/s temperatura de stabilizare se ridică la aproximativ 65—80°C (fig. 8 și 9).

În lucrarea [8] se menționează că starea stabilă a fost realizată (fără răcire), la o viteză de 0,5 m/s, la aproximativ 250°C, adică la o temperatură care în practică nu se obține.

2. INFLUENȚA TEMPERATURII ASUPRA CARACTERISTICII DE AMORTIZARE

Influența temperaturii asupra caracteristicii de amortizare a unui amortizor hidraulic telescopic se manifestă prin intermediul viscozității lichidului, care influențează regimul de scurgere (vezi și [4]).

În figura 10 se indică variația forței de amortizare (în %) în funcție de temperatura amortizorului pentru amortizoare de diferite dimensiuni, cu și fără răcire artificială. Din această figură se poate trage concluzia că la un amortizor cu dimensiuni mai mici regimul termic este mai necorespunzător (încălzirea mai puternică) și deci forța de amortizare scade mai mult (curbele 3 din figura 10). Această diferență se micșorează mult în cazul existenței unui curent de aer de răcire în timpul funcționării (vezi curbele cu linie continuă din figura 10).

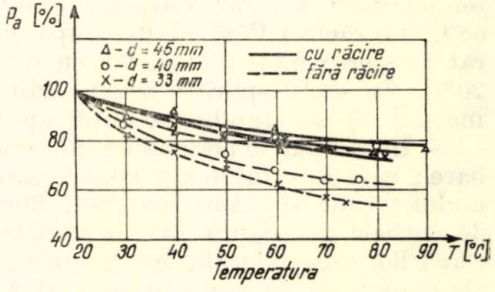


Fig. 10

Aceeași variație a forței de amortizare pentru trei amortizoare de fabricație străină [2]) este redată în figura 11 (*1* — Fichtel-Sachs

[2]) Datele au fost împrumutate din încercările efectuate de un colectiv condus de I. Drăghici.

T45 × 218 A ; *2* — Standard ; *3* — Fichtel-Sachs S 30 × 200). Forța de amortizare scade mai puțin în comparație cu amortizoarele românești, datorită calităților superioare ale lichidului de amortizor întrebuințat la amortizoarele străine.

În lucrarea [4] se arată (în urma studiilor teoretice efectuate) că mărirea temperaturii nu influențează practic asupra regimului pătratic de scurgere ; la temperaturi mici însă, forțele de rezistență care apar la viteze mici depășesc substanțial pe cele corespunzătoare regimului pătratic.

Rezultatele încercărilor efectuate de noi indică micșorarea forțelor de amortizare cu creșterea temperaturii și coincid cu cele obținute de P. Koessler și H. J. Beermann [8], din a căror lucrare reproducem graficul din figura 12, unde este reprezentată caracteristica unui amortizor de autocamion pentru diferite temperaturi.

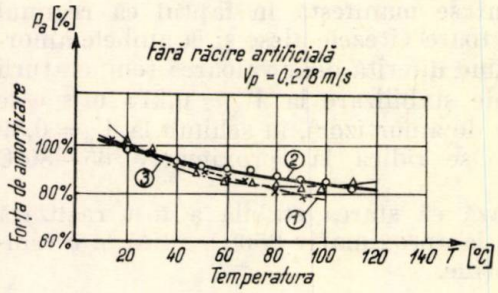


Fig. 11

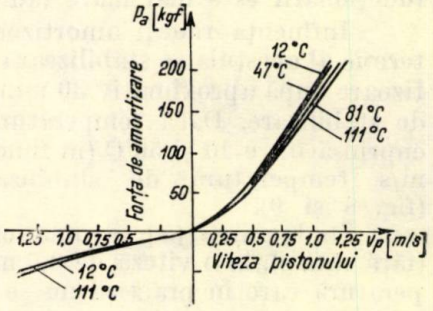


Fig. 12

O explicație posibilă a neconcordanței dintre rezultatele experimentale și cele teoretice în legătură cu această problemă ar putea să fie aceea că în toate studiile teoretice μ_0 se consideră constant.

În practica construcției de automobile, pentru aprecierea stabilității caracteristicii amortizoarelor se folosește graficul denumit „caracteristica termică", adică dependența dintre forța de amortizare și temperatura amortizorului de timpul de funcționare (fig. 13 și 14).

În figura 13 se poate vedea influența regimului de răcire asupra stării termice a unui amortizor telescopic și cea a regimului termic asupra eficacității de amortizare. Datorită aplicării unui curent de aer de răcire, temperatura maximă a amortizorului a scăzut de la 110°C (fără răcire) la 65°C (cu răcire). Fără răcire, după 40 min forța de amortizare s-a micșorat cu aproximativ 30%, iar cu răcire micșorarea a fost doar de circa 20%. În cazul aplicării răcirii artificiale, temperatura amortizorului a început să se stabilizeze după aproximativ 30 min.

În timpul experiențelor de laborator s-a pus și următoarea întrebare : care este influența vitezei curentului de aer de răcire asupra regimului termic al amortizoarelor ? Răspunsul la această întrebare este dat de curbele din figura 14. În această figură sînt cuprinse rezultatele încercărilor amortizorului cu diametrul pistonului de 45 mm la două viteze ale curentului de aer, și anume 43,2 km/h (curba *1*) și 60 km/h (curba *2*). Ca urmare a măririi vitezei curentului de aer, creșterea temperaturii a scăzut din intensitate, temperatura de stabilizare devenind cu aproximativ 3—5°C mai mică, iar micșorarea forței de amortizare a fost de circa 20%

la temperatura de stabilizare (curba *2*) în loc de 30%, cît era pentru viteza curentului de aer de 43,2 km/h (curba *1*).

Regimul termic al amortizorului cuprinde două perioade distincte în ceea ce privește variația temperaturii în funcție de timp.

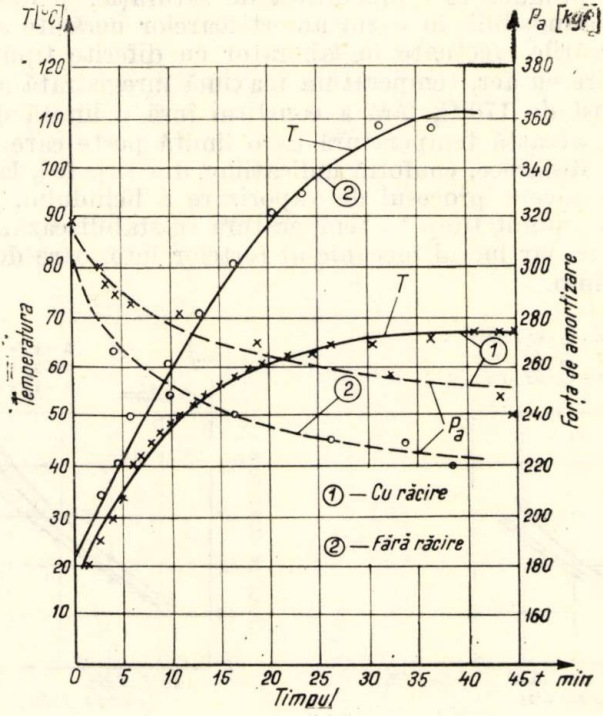


Fig. 13

Prima perioadă se situează în domeniul transmiterii fluxului de căldură în regim nestaționar și se referă la încălzirea lichidului de amortizor pînă la o temperatură de regim; după aceasta temperatura rămîne constantă și ne găsim în cea de-a doua perioadă a regimului termic.

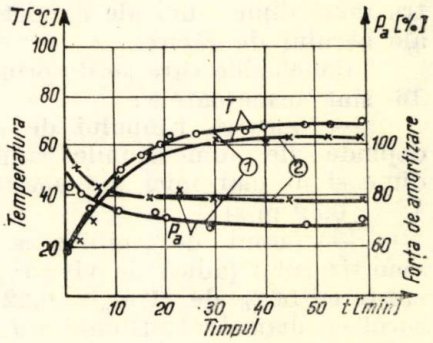


Fig. 14

Stabilizarea temperaturii are loc atunci cînd căldura produsă prin transformarea lucrului mecanic al forțelor interioare este egală cu căldura transmisă mediului exterior prin suprafața amortizorului.

Temperatura-limită la care se trece în regim staționar depinde de mai mulți factori. Astfel, stabilizarea temperaturii amortizorului depinde de faptul dacă acesta este sau nu răcit artificial, iar în cazul răcirii cu aer limita maximă a temperaturii constante depinde de viteza și de temperatura curentului de aer. Devine evident faptul că temperatura-

limită de tranziție din domeniul nestaționar în cel staționar este cu mult mai ridicată la un amortizor fără răcire în comparație cu unul răcit cu un curent de aer. De asemenea trebuie precizat faptul că temperatura de stabilizare este plafonată de apariția procesului de vaporizare a lichidului, care se produce la temperatura de saturație, și devine astfel limita maximă admisibilă în cazul amortizoarelor nerăcite artificial.

La încercările efectuate în laborator cu diferite tipuri de amortizoare fără răcire cu aer, temperatura maximă înregistrată a lichidului de amortizor a fost de 170°C, fără a constitui însă o limită de stabilizare. S-a considerat această temperatură ca o limită peste care nu s-au efectuat încercări, deoarece, conform indicațiilor din [2], [9], la temperatura de circa 130°C începe procesul de vaporizare a lichidului.

De la un anumit timp t_s, temperatura se stabilizează, fluxul termic devine staționar, iar lucrul mecanic al forțelor interioare devine invariabil față de timp.

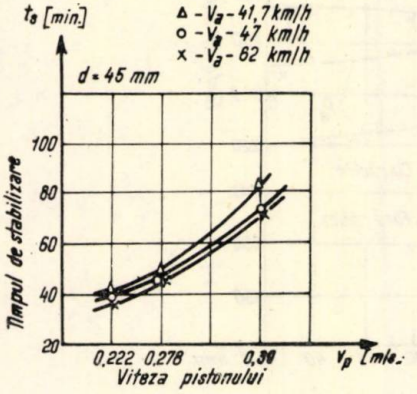


Fig. 15

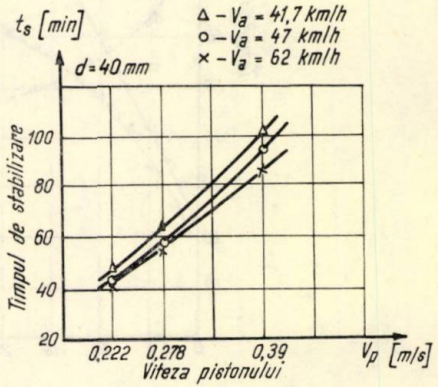


Fig. 16

Rezultatele încercărilor pentru determinarea timpului de stabilizare al temperaturii de regim sînt reprezentate în figurile 15 și 16 pentru două dimensiuni ale diametrului pistonului și pentru diferite viteze ale aerului de răcire.

Concluziile care se desprind din analiza curbelor din figurile 15 și 16 sînt următoarele:

— valoarea timpului de stabilizare al temperaturii de regim t_s depinde de dimensiunile amortizorului (diametrul pistonului), la dimensiuni mai mici ale acestuia fiind mai mare (cu circa 17% la $V_p = 0{,}39$ m/s);

— timpul de stabilizare depinde foarte mult de solicitarea amortizorului (adică de viteza pistonului); de exemplu, valoarea lui t_s crește cu 50% de la $V_p = 0{,}222$ m/s la $V_p = 0{,}39$ m/s pentru amortizorul cu diametrul pistonului $d = 40$ mm și cu 43% pentru amortizorul cu $d = 45$ mm;

— viteza curentului de aer de răcire nu influențează în mod hotărîtor asupra valorii timpului de stabilizare; se poate considera, cu aproximație de pînă la 5%, că timpul de stabilizare nu depinde de mărimea vitezei curentului de aer de răcire.

3. TEMPERATURA AMORTIZORULUI ÎN CONDIȚII DE EXPLOATARE

Determinarea regimului termic în condiții de exploatare (pe parcurs) s-a efectuat prin măsurarea temperaturii amortizoarelor suspensiei din față de la un microbuz, a cărui vedere generală este indicată în figura 17.

Temperatura s-a măsurat cu ajutorul termocuplelor cupru-constantan lipite pe peretele exterior al cilindrului-rezervor, înregistrarea făcîndu-se cu același milivoltmetru de la încercările de laborator. S-a controlat de asemenea veridicitatea înregistrărilor cu ajutorul termocu-

Fig. 17

plei de contact și a aparatului „Corection" (măsurarea cu aparatul „Corection" s-a efectuat în timpul staționării). În timpul probelor s-au măsurat și temperatura aerului, viteza și temperatura curentului de aer.

Încercările s-au efectuat pe diferite categorii de drumuri cu diferite viteze de circulație și pentru două dimensiuni ale diametrului pistonului ($d = 33$ și 40 mm).

Rezultatele încercărilor cu amortizorul cu $d = 40$ mm sînt indicate în figura 18, iar pentru amortizorul cu $d = 33$ mm în figura 19.

Analizînd curbele din figurile 18 și 19, se constată că temperatura amortizorului depinde foarte mult de condițiile de exploatare, adică de calitatea drumului pe care circulă automobilul, de viteza cu care acesta circulă și de asemenea de temperatura mediului ambiant.

Trebuie subliniat faptul că temperatura de circa 90°C obținută la încercările cu amortizorul cu $d = 33$ mm nu poate fi considerată tipică, deoarece condițiile de drum în care a fost obținută nu pot fi considerate normale, drumul pe care s-au obținut astfel de temperaturi fiind un drum forestier.

Temperatura de regim a amortizoarelor hidraulice telescopice pentru condiții normale de exploatare (fig. 18 și 19) se poate considera ca fiind de aproximativ 50—60°C [3]). Temperaturi de ordinul celor indicate în lucrările [9] și [10] (80—100°C) nu s-au obținut, chiar după o circulație relativ îndelungată (circa 3 ore) pe drumuri de categorie inferioară (fig. 18).

[3]) Aceleași date le-au obținut și cercetătorii germani [8].

Nu se pot obține concluzii precise asupra valorii timpului de stabilizare și a temperaturii de regim pentru cele două tipuri de amortizoare în condiții de exploatare, deoarece, în primul rînd, condițiile de încercare nu au fost identice și, în al doilea rînd, încercările pe diferite drumuri nu au continuat pînă la obținerea unei temperaturi constante a amortizorului.

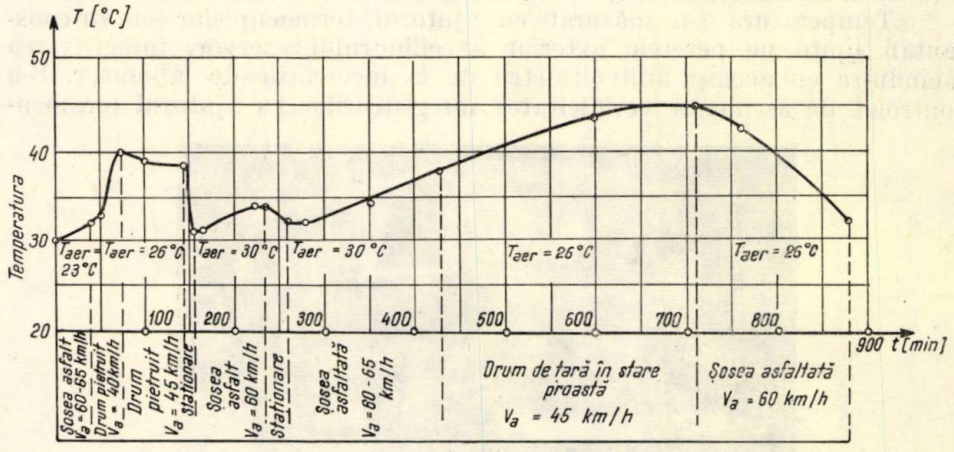


Fig. 18

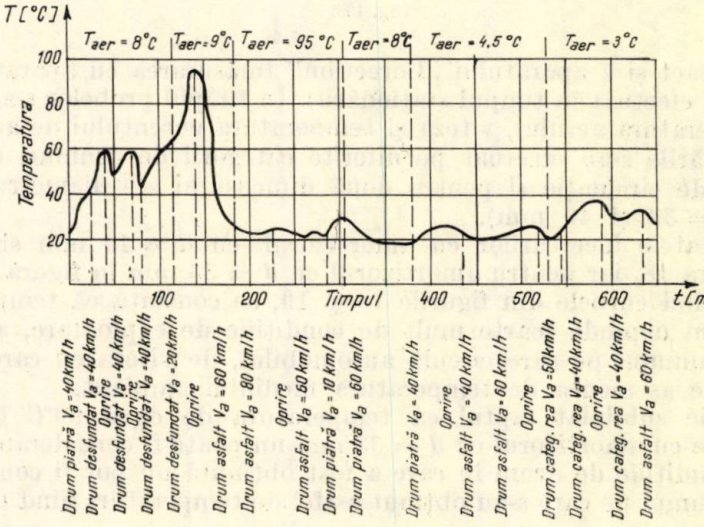


Fig. 19

Din încercările efectuate în condiții de exploatare rezultă că temperaturile maxime caracteristice ale amortizoarelor sînt :

— pe șosea asfaltată $T_{max} = 30 - 35°C$;
— pe drum pietruit $T_{max} = 40 - 45°C$;
— pe drum pietruit în stare proastă $T_{max} = 50 - 60°C$;

CONCLUZII

Din cele expuse pînă în prezent se desprind o serie de concluzii de o importanţă deosebită pentru constructorii de automobile :

— repartiţia temperaturii la suprafaţa exterioară a amortizorului este uniformă ;

— viteza curentului de aer de răcire nu influenţează în mod hotărîtor asupra timpului de stabilizare a temperaturii regimului termic staţionar al amortizorului ;

— în urma încălzirii, amortizorul îşi pierde din eficacitatea de amortizare iniţială, scăderea de eficacitate variind între 15 şi 35% la temperaturi de 80—100°C ;

— în condiţii de exploatare, pe drumuri de categorie inferioară, temperatura maximă a amortizorului variază în jur de 50—60°C ;

— regimul termic influenţează hotărîtor asupra funcţionării corecte a unui amortizor hidraulic telescopic, din care cauză este absolut necesară dimensionarea şi din punct de vedere termic a amortizoarelor telescopice ;

— este necesară continuarea cercetărilor experimentale (în special în condiţii de exploatare) pentru a se determina influenţa condiţiilor de exploatare asupra timpului de stabilizare a temperaturii de regim la amortizoarele hidraulice telescopice.

Autorii aduc mulţumiri şi pe această cale tov. Florea Dincă pentru observaţiile interesante făcute asupra manuscrisului.

Primită la redacţie la 24 ianuarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. А. Д. ДЕРБАРЕМДИКЕР, *Определение габаритных размеров телескопических амортизаторов*, Автомобильная промышленность, *8*, 19—22 (1958).
2. — *Испытание конструкции и изучение работы телескопических амортизаторов*, Труды ВНТС по подвескам автомобилей, НАМИ, 1959, сб. I, 154—176.
3. Fl. Dincă, C. Teodosiu, *Calculul amortizoarelor hidraulice telescopice*, St. cerc. mec. apl., **16**, *4*, 879—899 (1964).
4. Fl. Dincă şi Colectiv, *Oscilaţiile sistemelor viscoelastice. Studiul oscilaţiilor neliniare ale autovehiculelor cu aplicaţie la proiectarea amortizoarelor hidraulice*, Protocol IMA, 1965.
5. I. Drăghici, A. Jula, *Cu privire la calculul amortizoarelor hidraulice telescopice*, Lucrări ştiinţifice, Inst. politehnic Braşov, Fac. mecanică, vol. VI, 1964, 75—107.
6. I. Drăghici, *Determinarea stării tehnice şi reglarea amortizoarelor telescopice auto în exploatare*. Revista Transporturilor, 9, sept. 1964, 386—391.
7. H. J. Hoffmann, *Wirksamkeit von Stoßdämpfern am Fahrzeug*, VDI, Berichte, *35*, 73—81 (1959).
8. P. Koëssler, H. J. Beermann, *Untersuchungen über die Erwärmung von Stoßdämpfern im Betrieb und deren Auswirkung*, Z, VDI, Bd 96, *26* (1954).
9. Скиндер И. Б., Ю. А. Лиэпа, *Разработка типовой конструкции телескопических амортизаторов для отечественных автомобилей*, Труды В Н Т С по подвескам автомобилей, НАМИ, 1959, Сб. I, 131—154.
10. И. Б. Скиндер, *О тепловом состоянии телескопических амортизаторов в эксплуатационных условиях*, Автомобильная промышленность, *7*, 14—17 (1960).

ARIPA DELTA SUBȚIRE ANTISIMETRICĂ CU SEPARAȚIA CURENTULUI LA BORDURILE DE ATAC

de E. CARAFOLI și ȘT. STAICU
Institutul de mecanica fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

În prezenta lucrare se studiază scurgerea supersonică în jurul aripii delta subțiri avînd incidența α egală și de semn contrar pe cele două jumătăți ale sale, luînd în considerație separația curentului de la bordurile de atac subsonice. Prin separația curentului în jurul bordurilor se formează două nuclee concentrate de vîrtejuri de aceeași intensitate și același semn, avînd însă o poziție antisimetrică față de axa de simetrie a aripii. Formarea vîrtejurilor are drept efect producerea unui cîmp complex de viteze verticale, care vor modifica scurgerea în așa fel, încît presiunile vor fi finite la borduri. Distribuția vitezelor verticale conduce la un sistem de trei aripi fictive, prin a căror superpoziție se obține o aripă rezultantă fictivă, echivalentă din punct de vedere aerodinamic cu aripa reală. Astfel, scurgerea rămînînd în continuare conică, avem posibilitatea determinării presiunilor pe extradosul și intradosul aripii și a caracteristicilor aerodinamice.

1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

În lucrarea de față vom studia mișcarea supersonică în jurul aripii delta subțiri avînd incidențele antisimetrice (antisimetrie forțată) și luînd în considerație separația curentului la bordurile de atac subsonice.

În mod analog cu ceea ce se întîmplă pe o aripă delta subțire cu incidența constantă [1], în cazul aripii delta cu o distribuție antisimetrică de incidențe curentul se separă la borduri, dînd naștere unui sistem de

Publicată și în „Rev. roum. sci. teh.—Mécanique Appliquée" **11**, *6* (1966) (în limba engleză).

vîrtejuri care se situează deasupra și dedesubtul aripii în funcție de semnul incidenței α (fig. 1).

Stratul de vîrtejuri, desprinzîndu-se de la bordurile de atac, se înfășoară în formă de cornet, formîndu-se două nuclee concentrate de vîrtejuri de aceeași intensitate și *același semn*, situate *antisimetric* în raport cu axa de simetrie a aripii, la abscisa c și ordonata t.

Ar fi interesant de avut o imagine fotografică a acestor două pînze de vîrtejuri în cornete antisimetrice, așa cum au fost realizate pentru aripa delta cu incidență simetrică (M. Roy, Werlé, Squire).

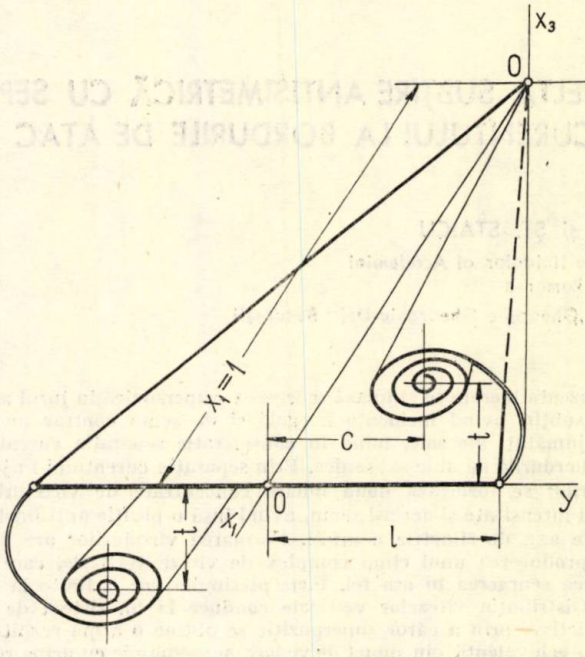


Fig. 1

Făcînd aceste considerații, scurgerea în jurul aripii rămîne în continuare *conică* și se poate trata utilizînd metodele din teoria mișcărilor conice [2].

Pentru tratarea problemei aripii cu incidență antisimetrică forțată vom urmări calea utilizată într-o lucrare anterioară [1]. Astfel se va admite că efectul acestor vîrtejuri este acela de a produce un cîmp complex de viteze verticale care vor aduce modificări asupra scurgerii și care se vor manifesta și prin evitarea vitezelor infinite la bordurile de atac, rezultate din teoria liniară clasică. Pentru aceasta vom considera o distribuție de viteze verticale, respectiv de incidențe, antisimetrică, așa ca să corespundă cazului real al aripii delta considerate cu vîrtejuri dorsale; avem de-a face astfel cu o aripă conică cu incidență variabilă oarecare, care face ca viteza la borduri să fie finită.

Punînd

$$w' = -\alpha' U_\infty \; (w_0 = -\alpha_0 U_\infty, \; w_1 = -\alpha_1 U_\infty) \tag{1}$$

viteza verticală variabilă, w'_u pe fața superioară, iar w'_l pe fața inferioară, vom putea scrie

$$\int_0^l w'_u \, dy + \int_0^l w'_l \, dy = 2wl, \tag{2}$$

unde $w = -\alpha U_\infty$ este viteza reală pe aripă.

Variația vitezelor verticale w' pe intervalul ($y = 0$, $y = l$) al unei jumătăți de aripă se obține cu ajutorul unei distribuții de surse de intensitate q', pe baza relației

$$q' = \frac{y}{\sqrt{1 - B^2 y^2}} \frac{dw'}{dy}, \tag{3}$$

dedusă din teoria mișcărilor conice [2] în cazul aripilor cu incidență variabilă, și care, introdusă în (2), ne va da prima relație între constantele variației vitezei verticale considerate w' și w sau incidențele corespunzătoare α' și α.

Aplicînd formula (3) vom putea găsi distribuția de surse convenabil aleasă care să corespundă distribuției de viteze verticale.

Ca și în [1], vom descompune aripa fictivă căreia îi corespunde viteza verticală de mai sus, în trei aripi componente :

a) O aripă subțire cu variația de incidență antisimetrică convenabil aleasă, care să respecte oarecum sensul fenomenului modificării presiunii pe suprafața aripii în jurul poziției nucleului de vîrtej.

b) O aripă avînd grosimea simetrică, iar panta egală și de semn contrar cu incidența primei aripi. Astfel de realizează ca distribuția de presiuni pe cele două fețe ale unei jumătăți de aripă să nu fie egală și de semn contrar, așa cum rezulta din considerarea aripii subțiri a).

c) Cea de a treia aripă va avea o grosime simetrică cu panta variabilă, dar în contrast cu cea de la b), ca în acest mod să se obțină prin superpoziția celor două aripi groase, o pantă medie nulă, adică o aripă subțire cu incidența egală cu zero.

Pornind de la examinarea fenomenului real al desprinderii și ținînd seama de indicațiile date de experiențe, vom reuși să alegem o distribuție antisimetrică adecvată de viteze verticale căreia îi va corespunde o distribuție de surse pe cît posibil de simplă.

2. DETERMINAREA VITEZELOR AXIALE DE PERTURBAȚIE

În cele ce urmează vom determina pentru cele trei aripi componente antisimetrice, vitezele axiale de perturbație, fiind necesare la calculul distribuției de presiuni și a caracteristicilor aerodinamice ale aripii delta subțiri reale, avînd incidența antisimetrică : $+\alpha$ pe partea dreaptă și $-\alpha$ pe partea din stînga.

a) *Aripa subțire antisimetrică.* Considerînd că viteza verticală este constantă și egală cu $w_0 = -\alpha_0 U_\infty$ pe intervalul ($y = 0$, $y = s$) și $-w_0$ între ($y = -s$, $y = 0$), iar de la s la l respectiv $-l$ la $-s$, variază după

o lege simplă care admite o distribuție liniară de surse, pe intervalele (s, l), respectiv $(-l, -s)$, vom scrie deci

$$q' = \pm q_0 \left(1 - \frac{y}{l}\right). \tag{4}$$

Ținînd seama de această repartiție a surselor și aplicînd formulele din teoria mișcărilor conice [2], viteza axială de perturbație pentru aripa componentă definită mai sus va fi dată de expresia

$$\mathcal{U}_l' = \frac{Ax}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi} q_0 \int_s^l \left(1 - \frac{\eta}{l}\right) \left[\cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l+\eta)(l-x)}{2l(\eta - x)}} - \right.$$
$$\left. - \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l+\eta)(l+x)}{2l(\eta + x)}}\right] d\eta, \tag{5}$$

care, după efecutarea calculelor, devine

$$\mathcal{U}_l' = \frac{Ax}{\sqrt{l^2 - x^2}} - \frac{q_0}{\pi} \left[(s - x)\left(1 - \frac{s+x}{2l}\right) \cosh^{-1} \frac{l^2 - sx}{l(s-x)} - \right.$$
$$\left. - (s + x)\left(1 - \frac{s-x}{2l}\right) \cosh^{-1} \frac{l^2 + sx}{l(s+x)} + x \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \cos^{-1} \frac{s}{l}\right]. \tag{6}$$

Pentru determinarea constantei A care apare în expresia (6), vom lua în considerație variația vitezei verticale de la un punct de pe aripă pînă la unul de pe conul Mach, așa cum se procedează în teoria mișcărilor conice. Ca și în [1], în scopul simplificării calculelor vom considera prin aproximație că sursa distribuită liniar de la s la l este concentrată în $y = s'$, cu intensitatea totală Q_0.

Vom avea în felul acesta

$$\operatorname{Re} i \int_{\text{aripă } (0,\ l)}^{\text{cercul Mach } (1/B,\ \infty)} \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{x} d\mathcal{U}_l' = - w_1, \tag{7}$$

unde $\mathcal{U}_l'$ reprezintă viteza axială de perturbație pentru cazul simplificat al sursei considerate concentrată în $y = s'$, avînd în acest caz expresia

$$\mathcal{U}_l' = \frac{Ax}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi} Q_0 \left[\cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l+s')(l-x)}{2l(s'-x)}} - \right.$$
$$\left. - \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l+s')(l+x)}{2l(s'+x)}}\right]. \tag{8}$$

În urma efectuării integralei pe axa absciselor ($\eta = 0$), între limitele l și $1/B$, rezultă

$$A = \frac{2l}{\pi} \left[w_1 + \frac{Q_0}{s'} \left(\sqrt{1 - B^2 s'^2} - \sqrt{1 - \frac{s'^2}{l^2}}\right)\right], \tag{9}$$

în care s' și Q_0 sînt dați de relațiile

$$s' = s + \frac{l-s}{3}, \quad Q_0 = \frac{q_0}{2l}(l-s)^2. \tag{10}$$

Datorită apariției pînzelor de vîrtejuri, impunînd condiția ca viteza să fie finită la bordurile subsonice, vom anula constanta A și vom obține prima relație dintre w_1 și q_0;

$$q_0 = \frac{\left(1+2\frac{s}{l}\right)w_1}{\left(1-\frac{s}{l}\right)^{5/2}\sqrt{2+\frac{s}{l}} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{l}\right)^2\sqrt{9-B^2(l+2s)^2}}, \tag{11}$$

unde w_1 reprezintă viteza verticală la bordul aripii.

Pornind de la relațiile (3) și (4), punem condițiile la limită, în punctele $y = 0$ și $y = l$, pentru viteza verticală w' și vom avea

$$w_1 - w_0 = q_0 \int_s^l \left(1-\frac{y}{l}\right)\frac{\sqrt{1-B^2y^2}}{y}\,dy, \tag{12}$$

de unde găsim o nouă relație între q_0, w_0 și w_1 :

$$2Bl(w_1-w_0) = q_0\left[Bl\left(\sqrt{1-B^2l^2}-\sqrt{1-B^2s^2}\right) - B(l-s)\sqrt{1-B^2s^2} + \right.$$
$$\left. + 2Bl\left(\cosh^{-1}\frac{1}{Bs} - \cosh^{-1}\frac{1}{Bl}\right) + \sin^{-1}Bs - \sin^{-1}Bl\right], \tag{13}$$

unde w_0 reprezintă viteza verticală în apropiere de mijlocul aripii.

Pe de altă parte însă, viteza verticală medie w sau incidența α pentru jumătatea din dreapta a aripii se obține aplicînd relația (2)

$$wl = w_0 s + \int_s^l w'\,dy = w_0 s + w'y\Big|_s^l - \int_s^l y\,dw'; \tag{14}$$

efectuînd calculele și ținînd seama de relația (3), se obține cea de-a treia relație dintre constantele q_0, w_0 și w_1

$$2Bl(w_1-w) = q_0\left[Bl\sqrt{1-B^2l^2} - Bs\sqrt{1-B^2s^2} + \sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3Bl}\left((1-B^2l^2)^{3/2} - (1-B^2s^2)^{3/2}\right)\right]. \tag{15}$$

Ecuațiile (11), (13) și (15) formează un sistem care va da constantele q_0, w_0 și w_1 în funcție de viteza verticală w pe aripă sau de incidența reală a aripii α, $(w = -\alpha U_\infty)$.

Anulînd constanta A corespunzătoare termenului singular $x(l^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, expresia vitezei axiale de perturbaţie pentru *aripa portantă* fictivă va fi

$$\mathcal{U}_l = -\frac{q_0}{\pi}\left[(s-x)\left(1-\frac{s+x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{l^2-sx}{l(s-x)} - \right.$$
$$\left. -(s+x)\left(1-\frac{s-x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{l^2+sx}{l(s+x)} + x\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}\cos^{-1}\frac{s}{l}\right], \tag{16}$$

în care constanta q_0 este funcţie de incidenţa reală a aripii, α.

b) *Aripa de grosime simetrică avînd panta egală cu incidenţa α a aripii fictive.* Introducerea celei de-a doua aripi este necesară pentru a înlătura vîrfurile accentuate de presiuni pe intrados, obţinîndu-se prin suprapunere cu aripa subţire de la a) o distribuţie de presiuni diferită pe cele două feţe ale aripii. Procedînd ca şi pentru aripa subţire, în cazul aripii de grosime simetrică cu panta definită de aceeaşi distribuţie de surse vom scrie pentru viteza axială de perturbaţie $\mathcal{U}_t$ următoarea expresie;

$$\mathcal{U}_t = \frac{2}{\pi}q_0\int_s^l\left(1-\frac{\eta}{l}\right)\left[\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B\eta)(1-Bx)}{2B(\eta-x)}} - \right.$$
$$\left. -\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B\eta)(1+Bx)}{2B(\eta+x)}}\right]d\eta \pm L, \tag{17}$$

care, în urma efectuării calculelor, devine

$$\mathcal{U}_t = \frac{q_0}{\pi}\left[(l-x)\left(1-\frac{l+x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{1-B^2lx}{B(l-x)} - \right.$$
$$-(l+x)\left(1-\frac{l-x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{1+B^2lx}{B(l+x)} -$$
$$-(s-x)\left(1-\frac{s+x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{1-B^2sx}{B(s-x)} + \tag{18}$$
$$+(s+x)\left(1-\frac{s-x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{1+B^2sx}{B(s+x)} -$$
$$\left. -\frac{1}{Bl}(\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs)\,x\sqrt{1-B^2x^2}\right] \pm L,$$

unde termenul L este datorit pantei bordului de atac $\gamma_1 = \alpha_1$.

c) *Aripa de grosime simetrică compensatoare de pantă.* Prin introducerea efectului aripii de la punctul b), aripa rezultantă a devenit de *grosime simetrică*. Pentru a compensa acest lucru şi a ne pune de acord cu realitatea, vom introduce o nouă distribuţie de surse de o formă oarecare, care va corespunde vitezei $-w_1$, respectiv pantei $\gamma_1 = -\alpha_1$, la extremitate.

Acestei variații de viteze verticale w'' îi va corespunde o *aripă compensatoare* de grosime simetrică, care va anula panta și efectul $\pm L$ al pantei $\gamma_1 = \alpha_1$ de la extremitatea aripii b). Distribuția de surse q'' va trebui să creeze pe intradosul părții din dreapta a aripii o distribuție de presiuni fără vîrfuri accentuate, aproximativ liniară, cu excepția regiunii din apropierea bordurilor de atac. Vom alege astfel următoarea expresie a distribuției de surse :

$$q'' = \pm k_0 y \left(1 + k_1 y\right), \tag{19}$$

care se consideră egală și de semn contrar pentru punctele aripii simetrice față de axa Ox_1.

Ținînd seama de rolul acestei aripi și luînd în considerație relația

$$q'' = \frac{y}{\sqrt{1 - B^2 y^2}} \frac{\mathrm{d}w''}{\mathrm{d}y}, \tag{20}$$

similară cu (3), vom putea scrie

$$-wl = \int_0^l w'' \,\mathrm{d}y = w'' y \Big|_0^l - \int_0^l y \,\mathrm{d}w'', \tag{21}$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} l(w - w_1) = k_0 \Bigg[& \frac{1}{3B^2} \left(1 - (1 - B^2 l^2)^{3/2}\right) + \\ & + \frac{k_1}{8B^3} \left(\sin^{-1} Bl + Bl \sqrt{1 - B^2 l^2} - 2Bl (1 - B^2 l^2)^{3/2}\right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{22}$$

Prin însumarea relațiilor (15) și (22) rezultă următoarea relație între q_0, k_0 și k_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} q_0 \left[Bl \sqrt{1 - B^2 l^2} - Bs \sqrt{1 - B^2 s^2} + \sin^{-1} Bl - \sin^{-1} Bs + \right. \\ & \left. + \frac{2}{3Bl} \left((1 - B^2 l^2)^{3/2} - (1 - B^2 s^2)^{3/2} \right) \right] + k_0 \left\{ \frac{1}{3B} \left[1 - (1 - B^2 l^2)^{3/2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{k_1}{8B^2} \left[Bl \sqrt{1 - B^2 l^2} + \sin^{-1} Bl - 2Bl (1 - B^2 l^2)^{3/2} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Pentru această *aripă compensatoare*, funcția vitezei axiale $\mathcal{U}_c$ va fi, analog cu (17), următoarea :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_c = \frac{2}{\pi} k_0 \int_0^l \eta \left(1 + k_1 \eta\right) \Bigg[& \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(1 + B\eta)(1 - Bx)}{2B(\eta - x)}} - \\ & - \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(1 + B\eta)(1 + Bx)}{2B(\eta + x)}} \Bigg] \mathrm{d}\eta \mp L. \end{aligned} \tag{24}$$

Efectuînd calculele, sîntem conduşi la expresia

$$\mathcal{U}_c = \frac{k_0}{2\pi B^2}\left[B^2(l^2-x^2)\left(\cosh^{-1}\frac{1-B^2lx}{B(l-x)} - \cosh^{-1}\frac{1+B^2lx}{B(l+x)}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\sin^{-1}Bl\,Bx\sqrt{1-B^2x^2}\right] + \tag{25}$$

$$+ \frac{k_0 k_1}{3\pi B^3}\left[B^3(l^3-x^2)\cosh^{-1}\frac{1-B^2lx}{B(l-x)} - B^3(l^3+x^3)\cosh^{-1}\frac{1+B^2lx}{B(l+x)} + \right.$$

$$\left. + 2B^3x^3\cosh^{-1}\frac{1}{Bx} + 2(1-\sqrt{1-B^2l^2})\,Bx\sqrt{1-B^2x^2}\right] \mp L.$$

Prin superpoziţia celor trei aripi componente vom obţine aripa reală, pentru care viteza axială de perturbaţie are expresia

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_l + \mathcal{U}_t + \mathcal{U}_c, \tag{26}$$

care va fi antisimetrică faţă de axa Ox_1 de simetrie şi continuă în origina O (fig. 1). Vom remarca şi de data aceasta că viteza $\mathcal{U}_l$ pe extrados este egală şi de semn contrar cu cea de pe intrados, consideraţiile fiind făcute separat pentru partea din dreapta, respectiv stînga, a aripii.

3. DETERMINAREA DISTRIBUŢIEI DE PRESIUNI ŞI A CARACTERISTICILOR AERODINAMICE

În expresiile vitezelor axiale $\mathcal{U}_l$, $\mathcal{U}_t$ şi $\mathcal{U}_c$ intră constantele q_0, k_0 şi k_1, care se vor deduce din ecuaţiile (11), (13), (15) şi (23). Astfel, în urma consideraţiilor de mai sus în ceea ce priveşte viteza axială $\mathcal{U}_c$, putem da lui k_1 valoarea

$$k_1 = -\frac{1}{2l} \tag{27}$$

şi vom obţine pentru q_0 şi k_0 expresiile

$$\frac{q_0}{\alpha U_\infty} = \left\{\frac{1}{1+2\dfrac{s}{l}}\left[\left(1-\frac{s}{l}\right)^{5/2}\sqrt{2+\frac{s}{l}} - \right.\right. \tag{28}$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{l}\right)^2\sqrt{9-B^2(l+2s)^2}\right] - \frac{1}{2Bl}\left[Bl\sqrt{1-B^2l^2} - Bs\sqrt{1-B^2s^2} + \right.$$

$$\left.\left. + \sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs + \frac{2}{3Bl}\left(\left(1-B^2l^2\right)^{3/2} - (1-B^2s^2)^{3/2}\right)\right]\right\}^{-1},$$

respectiv

$$k_0 = -24\,B^2 l\,q_0\left[Bl\sqrt{1-B^2l^2} - Bs\sqrt{1-B^2s^2} + \sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3Bl}\left((1-B^2l^2)^{3/2} - (1-B^2s^2)^{3/2}\right)\right]\left[2Bl\left(8 - 5\,(1-B^2l^2)^{3/2}\right) - \right.$$

$$\left. - 3\,(\sin^{-1}Bl + Bl\sqrt{1-B^2l^2})\right]^{-1}, \tag{29}$$

Trecînd mai departe la calculul coeficientului de portanță pentru jumătatea aripii, vom face observația că aripile de grosime simetrică nu dau portanță, încît vom considera coeficientul de portanță dat de *aripa portantă subțire.*

$$C_z = \frac{4}{lU_\infty}\int_0^l u_l\,\mathrm{d}y. \tag{30}$$

Punînd $u_l = \mathrm{Re}\,\mathcal{U}_l$ și ținînd seama de (16), vom obține următoarea expresie a coeficientului de portanță pentru jumătatea din dreapta a aripii

$$C_z = \frac{4q_0 l}{\pi U_\infty}\left[\left(1-\frac{1}{3}\frac{s}{l}\right)\left(1-\frac{s^2}{l^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{3}\cos^{-1}\frac{s}{l} - \frac{s^2}{l^2}\left(1-\frac{2}{3}\frac{s}{l}\right)\cosh^{-1}\frac{l}{s}\right]. \tag{31}$$

Coeficientul momentului de ruliu este

$$HC_m = \frac{8}{3lU_\infty}\int_0^l u_l\,y\mathrm{d}y = \frac{q_0 l^2}{6U_\infty}\left\{\left[\frac{8}{3}\left(1-\frac{s^2}{l^2}\right) - \frac{s}{l}\left(1-2\frac{s^2}{l^2}\right)\right]\left(1-\frac{s^2}{l^2}\right)^{1/2} - \right.$$

$$\left. - \cos^{-1}\frac{s}{l}\right\}, \tag{32}$$

în care H reprezintă lungimea de referință.

În privința distribuției de presiuni se va considera viteza axială totală (26) :

$$C_p = -2\frac{u}{U_\infty} = -2\,\mathrm{Re}\frac{\mathcal{U}}{U_\infty}. \tag{33}$$

Pentru definirea parametrului $\frac{s}{l}$ care apare în expresiile de mai sus și care determină limitele repartiției surselor, vom admite că poziția de maxim a distribuției de presiuni coincide cu abscisa $y = c$ a centrului nucleului de vîrtej.

Astfel vom considera relația dintre c și s sub forma

$$\frac{c}{l} = \frac{s}{l} + \frac{1}{6}\left(1-\frac{s}{l}\right), \quad \left(\frac{s}{l} = 1,2\,\frac{c}{l} - 0,2\right). \tag{34}$$

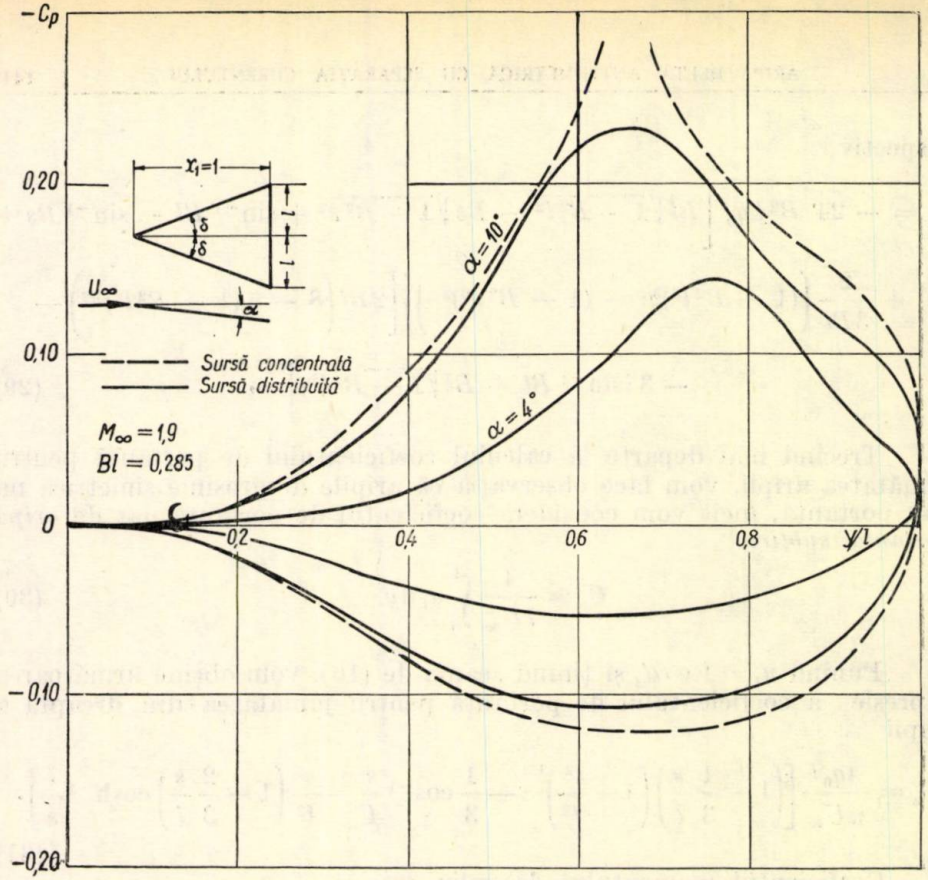

$-C_p$
0,20
0,10
0
−0,10
−0,20
$x_1=1$
δ
δ
1
1
U_∞
α
Sursă concentrată
Sursă distribuită
$M_\infty = 1,9$
$Bl = 0,285$
α = 10°
α = 4°
0,2
0,4
0,6
0,8
y/l

Fig. 2

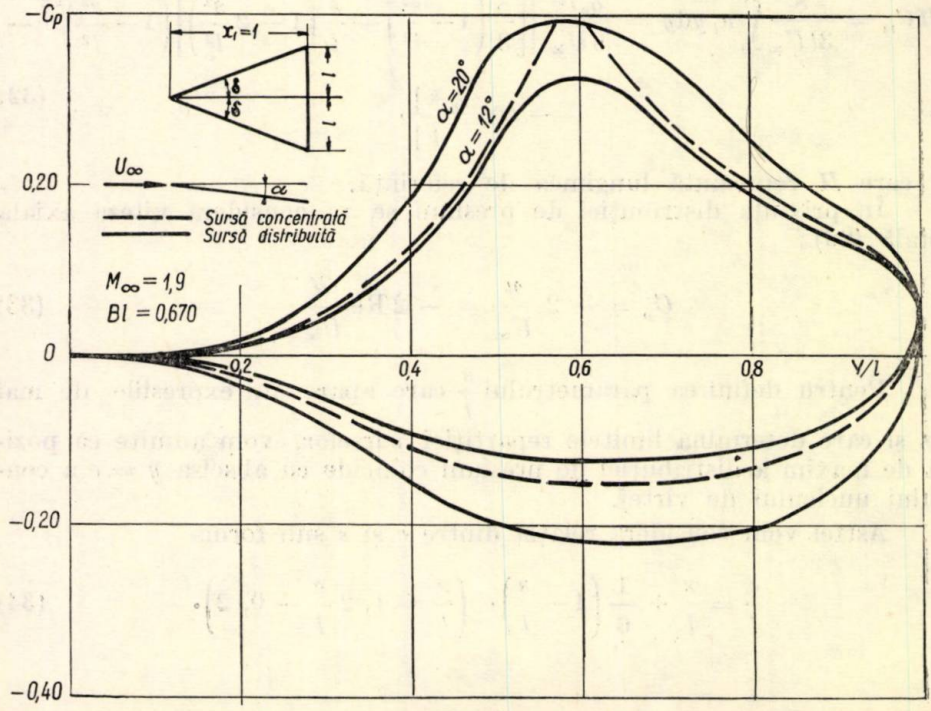

$-C_p$
0,20
0
−0,20
−0,40
$x_1=1$
δ
δ
1
1
U_∞
α
Sursă concentrată
Sursă distribuită
$M_\infty = 1,9$
$Bl = 0,670$
α = 20°
α = 12°
0,2
0,4
0,6
0,8
y/l

Fig. 3

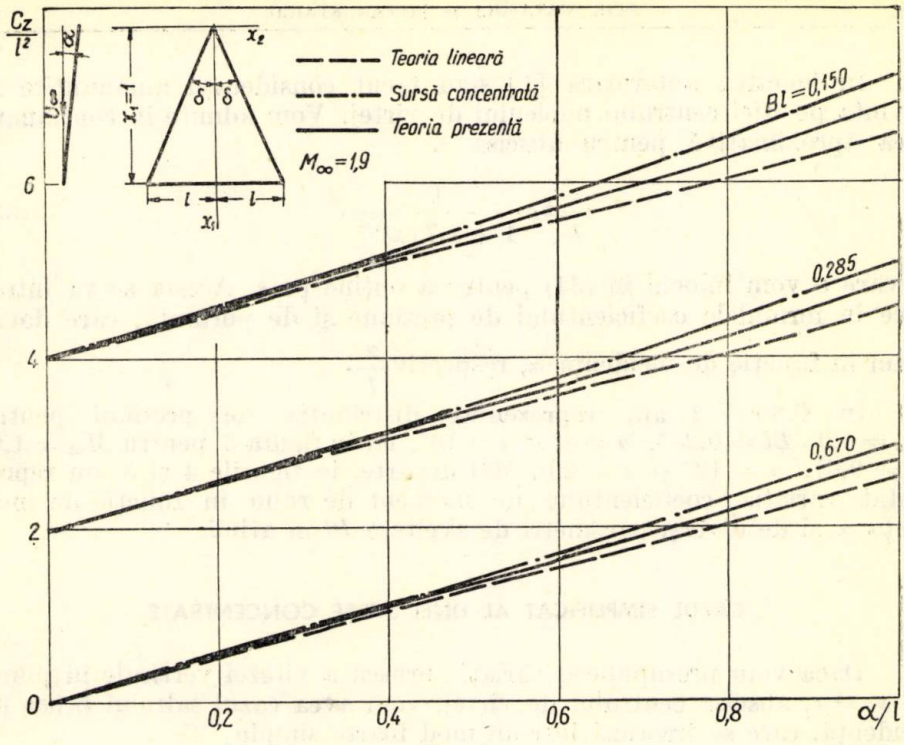

$\frac{C_z}{l^2}$
α
U_∞
x_2
$x_1=1$
δ
δ
l
l
x_1
Teoria lineară
Sursă concentrată
Teoria prezentă
$M_\infty=1,9$
$Bl=0,150$
0,285
0,670
6
4
2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
α/l

Fig. 4

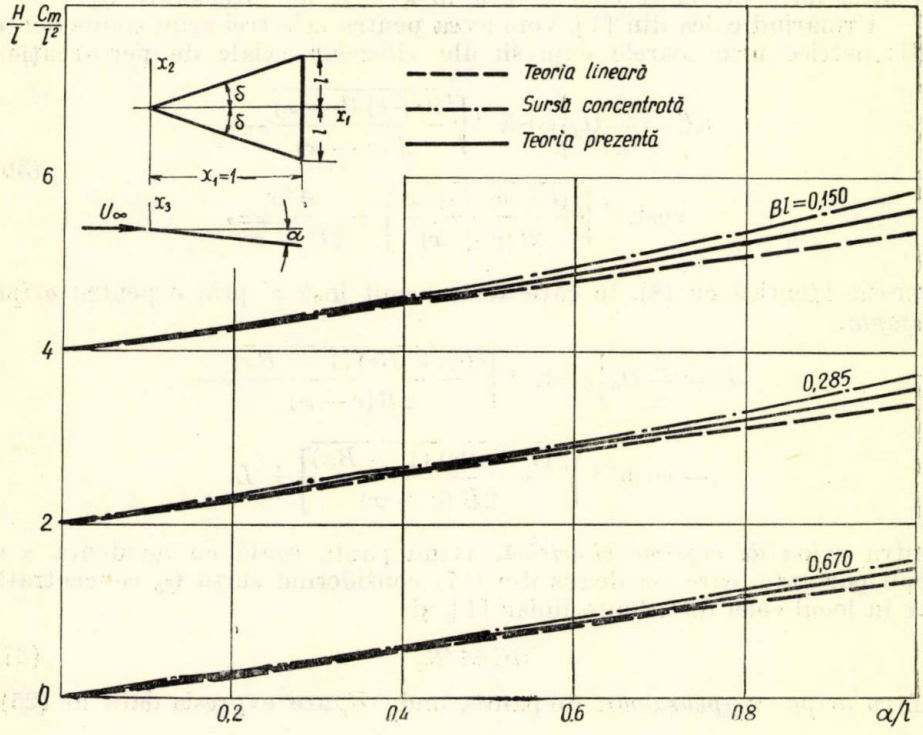

$\frac{H}{l}$ $\frac{C_m}{l^2}$
x_2
δ
δ
l
l
x_1
$x_1=1$
U_∞
x_3
α
Teoria lineară
Sursă concentrată
Teoria prezentă
$Bl=0,150$
0,285
0,670
6
4
2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
α/l

Fig. 5

În lucrarea anterioară [1] s-au făcut consideraţii amănunţite în privinţa poziţiei centrului nucleului de vîrtej. Vom admite în continuare legea aproximativă pentru abscisa c,

$$\frac{c}{l} \cong \frac{1}{1 + 1{,}7\,(\alpha)^{1/2}}, \tag{35}$$

pe care o vom înlocui în (34) pentru a obţine pe s. Acesta se va introduce în formulele coeficientului de presiune şi de portanţă, care devin acum în funcţie de incidenţa α, respectiv $\frac{\alpha}{l}$.

În figura 2 am reprezentat distribuţia de presiuni pentru $M_\infty = 1{,}9$, $Bl = 0{,}285$, $\alpha = 4°$ şi $\alpha = 10°$, iar în figura 3 pentru $M_\infty = 1{,}9$, $Bl = 0{,}67$, $\alpha = 12°$ şi $\alpha = 20°$. Mai departe, în figurile 4 şi 5 am reprezentat variaţia coeficientului de moment de ruliu în funcţie de incidenţa α şi de diverşi parametri de zvelteţe Bl ai aripii.

4. CAZUL SIMPLIFICAT AL UNEI SURSE CONCENTRATE

Dacă vom presupune o variaţie bruscă a vitezei verticale în punctul $s' = c$, abscisa centrului de vîrtej, vom avea cazul saltului brusc de incidenţă, care se tratează într-un mod foarte simplu [2].

Saltului brusc de incidenţă îi va corespunde o variaţie de viteză verticală dată de sursa concentrată în $s' = c$, de intensitate Q_0.

Urmărind calea din [1], vom avea pentru cele trei aripi componente antisimetrice următoarele expresii ale vitezelor axiale de perturbaţie:

$$\mathcal{U}_l' = \frac{2}{\pi} Q_0 \left[\cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l + c)\,(l - x)}{2l\,(c - x)}} - \right.$$
$$\left. - \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l + c)\,(l + x)}{2l\,(c + x)}} \right] + \frac{A' x}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \tag{36}$$

expresie identică cu (8), în care am înlocuit însă s' prin c pentru *aripa portantă*,

$$\mathcal{U}_l' = \frac{2}{\pi} Q_0 \left[\cosh^{-1} \sqrt{\frac{(1 + Bc)\,(1 - Bx)}{2B\,(c - x)}} - \right.$$
$$\left. - \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(1 + Bc)\,(1 + Bx)}{2B\,(c + x)}} \right] \pm L$$

pentru *aripa de grosime simetrică*, avînd panta egală cu incidenţa α a aripii portante, care s-a dedus din (17) considerînd sursa Q_0 concentrată în c în locul celei distribuite liniar [1], şi

$$\mathcal{U}_c' \equiv \mathcal{U}_c \tag{37}$$

pentru *aripa cumpensatoare* de pantă, unde $\mathcal{U}_c$ are expresia dată de (25).

Ținînd seama că semnul vitezei axiale $\mathcal{U}_l'$ pe extrados este diferit de cel de pe intrados, expresia vitezei axiale totale este

$$\mathcal{U}' = \mathcal{U}_l' + \mathcal{U}_t' + \mathcal{U}_c', \tag{38}$$

care ne va da distribuția de presiuni pe aripă (33).

Procedînd ca în [1] și [2], în cazul simplificat al unei surse concentrate vom găsi următoarele ecuații:

$$\frac{2l}{\pi}\left[w_1 + \frac{Q_0}{c}\left(\sqrt{1-B^2c^2} - \sqrt{1-\frac{c^2}{l^2}}\right)\right] = A' = 0, \tag{39}$$

$$w_0\, c + w_1\,(l - c) = w\, l, \tag{40}$$

$$\frac{(w_0 - w_1)\, c}{\sqrt{1 - B^2 c^2}} = Q_0, \tag{40'}$$

$$k_0\left[\frac{1}{3B^2}\left(1 - (1 - B^2 l^2)^{3/2}\right) + \frac{k_1}{8B^3}\left(\sin^{-1} Bl + Bl\sqrt{1-B^2 l^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2Bl\,(1 - B^2\, l^2)^{3/2}\right)\right] = (w - w_1)\, l. \tag{40''}$$

Considerînd și de data aceasta $k_1 = -\dfrac{1}{2l}$, rămîn ca necunoscute Q_0, k_0, w_0 și w_1, ale căror expresii vor fi respectiv

$$\frac{Q_0}{\alpha U_\infty} = \frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{c^2}{l^2}} - \left(1 - \dfrac{c}{l}\right)\sqrt{1-B^2c^2}} \tag{41}$$

$$\frac{w_0}{w} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{c^2}{l^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{c^2}{l^2}} - \left(1-\dfrac{c}{l}\right)\sqrt{1-B^2c^2}}, \tag{41'}$$

$$\frac{w_1}{w} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{c^2}{l^2}} - \sqrt{1-B^2c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{c^2}{l^2}} - \left(1-\dfrac{c}{l}\right)\sqrt{1-B^2c^2}}, \tag{41''}$$

$$k_0 = 48B^2 l Q_0 \sqrt{1-B^2c^2}\left[2Bl\left(8 - 5\,(1 - B^2 l^2)^{3/2}\right) - \right.$$

$$\left. - 3\left(\sin^{-1} Bl + Bl\sqrt{1-B^2 l^2}\right)\right]^{-1}. \tag{41'''}$$

Pentru determinarea coeficientului de portanță al jumătății de aripă, vom porni de la (30), în care vom introduce expresia lui $u_l' = \mathrm{Re}\,\mathcal{U}_l'$ din (36), și vom obține

$$C_z = \frac{4}{lU_\infty}\int_0^l u_l'\,\mathrm{d}y = \frac{8Q_0}{\pi U_\infty}\frac{c}{l}\,\cosh^{-1}\frac{l}{c}. \tag{42}$$

Coeficientul momentului de ruliu, pornind de la (32), va fi

$$HC_m = \frac{8}{3lU_\infty}\int_0^l u_l' y \, dy = \frac{4Q_0 c}{3U_\infty}\sqrt{1-\frac{c^2}{l^2}}. \tag{43}$$

În figurile 4 şi 5 am reprezentat prin linie-punct coeficienţii de portanţă ai unei jumătăţi de aripă şi cei ai momentului de ruliu pentru cazul simplificat al sursei concentrate.

Primită la redacţie la 29 iunie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, Şt. Staicu, *Asupra teoriei aripii delta subţiri cu separaţia curentului la bordurile de atac.* St. cerc. mec. apl. *4* (1966).
2. E. Carafoli, High-Speed, *Aerodynamics*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1956.
3. N. Roy, *Sur la théorie de l'aile delta*, Tourbillons d'apex et nappes en cornets. C.R. Ac. Sc., R.A., 56 (1957).
4. H. Werlé, C. Fiant, *Visualisation hydrodynamique des écoulements a basse vitesse autour d'une maquette d'avion du type „Concorde", ONERA*, La Recherche Aerospatiale, 102 (1964).
5. L. C. Squire, *The Estimation of the Non-Linear Lift of Delta Wings at Supersonic Sfeeds*, Journ. R.A.S. (1963).

FORMA OPTIMĂ A ARIPII CRUCIFORME DE GROSIME SIMETRICĂ ÎN CURENT SUPERSONIC *)

de ELIE CAROFOLI şi ADRIANA NĂSTASE

Institutul de mecanica fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

În prezenta lucrare se determină forma optimă a suprafeţei unei aripi cruciforme de grosime simetrică atunci cînd sînt date formele în plan ale celor două plăci componente, volumul aripii cruciforme şi o serie de condiţii geometrice de închidere a aripii cruciforme pe bordurile sale de atac şi de fugă.
Ca şi în lucrările noastre anterioare de rezistenţă minimă, se utilizează metoda variaţională. Problema se reduce la rezolvarea unui sistem finit de ecuaţii algebrice liniare care dau valorile optime ale coeficienţilor vitezelor de perturbaţie v şi w pe cele două plăci.

I. INTRODUCERE

Aripa cruciformă este utilizată în aviaţie la avioane şi la rachete. De aceea în prezenta lucrare ne-am propus să determinăm forma suprafeţei unei aripi cruciforme de grosime simetrică de rezistenţă minimă la înaintare (fig. 2), pentru care sînt date o serie de condiţii constructive, cum ar fi, de exemplu, proiecţiile celor două plăci componente respectiv pe două plane perpendiculare, volumul celor două plăci, închiderea aripii cruciforme pe bordurile sale de atac şi de fugă.

Ca şi în lucrările noastre anterioare de rezistenţă minimă [1]—[4] referitoare la aripa izolată, subţire sau de grosime simetrică sau la aripa cruciformă subţire [5], vom utiliza şi în prezenta lucrare tot metoda variaţională, care s-a dovedit mai adecvată pentru aplicaţiile practice.

În cadrul teoriei liniarizate, scurgerea în jurul aripii cruciforme de grosime simetrică care este în acelaşi timp simetrică în raport cu planele de coordonate Ox_1x_2 şi Ox_1x_3 poate fi obţinută prin superpoziţia scurgerilor în jurul aripilor P_1 şi P_2 luate separat.

*) Lucrare comunicată la Conferinţa de mecanică, Bucureşti, septembrie 1965. Publicată şi în „Rev. roum. sci. teh.-Mécanique Appliquée" **11**, 2 (1967) (în limba engleză).

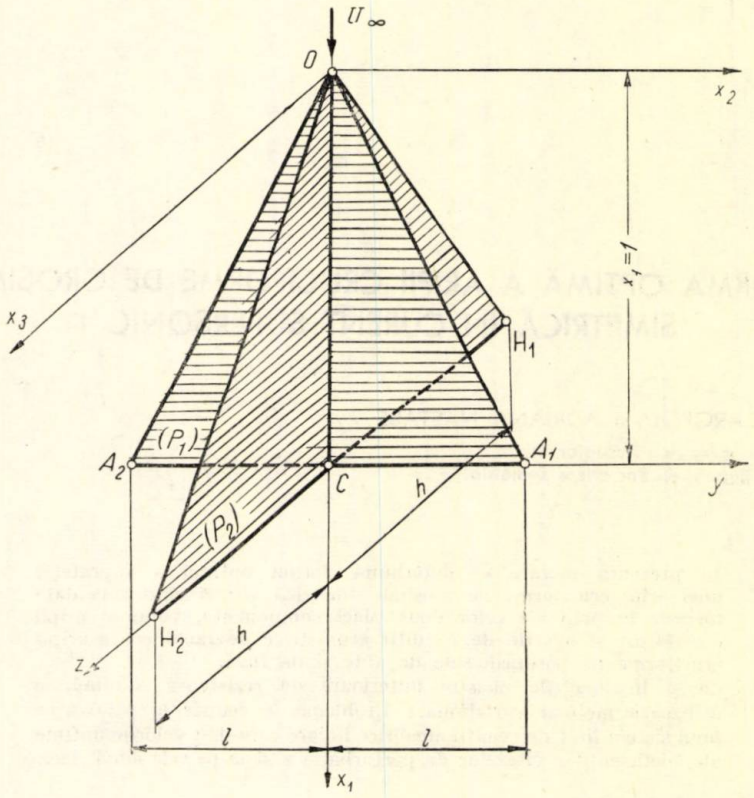


Fig. 1

II. EXPLICITAREA CONDIȚIILOR GEOMETRICE DE LEGĂTURĂ

În cele ce urmează vom considera aripa cruciformă raportată la un sistem de axe triectangulare $Ox_1x_2x_3$ avînd originea în vîrful O al aripii cruciforme și axa Ox_1 pe direcția curentului de la infinit U_∞.

Vom presupune că grosimile celor două plăci componente P_1 și P_2 sînt suficient de mici încît să putem admite că placa P_1 se găsește cuprinsă în planul Ox_1x_2 și placa P_2 se găsește cuprinsă în planul Ox_1x_3.

Vom considera că aripile cruciforme sînt simetrice față de planele Ox_1x_2 și Ox_1x_3. Componenta w a vitezei de perturbație pe placa P_1 o vom presupune obținută prin superpoziția unor polinoame omogene în raport cu x_1 și x_2 :

$$w = \sum_{m=1}^{N} x_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,k} \, |y|^k \qquad \left(y = \frac{x_2}{x_1}\right). \tag{1}$$

Similar, componenta v a vitezei de perturbație este exprimată pe placa P_2 sub forma unei superpoziții de polinoame omogene în x_1 și x_3, adică

$$v = \sum_{m=1}^{N} x_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} v_{m-k-1,k} \, |z|^k \qquad \left(z = \frac{x_3}{x_1}\right). \tag{2}$$

În aceste formule $w_{m-k-1,k}$ și $v_{m-k-1,k}$ sînt constante, iar $N-1$ este polinomul de cel mai mare ordin luat în considerație în expresiile lui w și, respectiv, v.

Cotele Z și Y ale suprafețelor celor două plăci P_1 și P_2 se obțin respectiv prin integrarea în raport cu x_1 a expresiilor (1) și (2) ale lui w și v:

$$Z(x_1, x_2) = \int w \, \mathrm{d}x_1 + f_1(x_2), \tag{3}$$

$$Y(x_2, x_3) = \int v \, \mathrm{d}x_1 + f_2(x_3). \tag{4}$$

În aceste formule, $f_1(x_2)$ și $f_2(x_3)$ sînt funcții arbitrare de x_2 și, respectiv, de x_3. Dacă determinăm acum aceste funcții din condițiile de închidere a aripii și plăcii pe bordurile lor de fugă ($x_1 = 1$; $Z = 0$, $Y = 0$), vom obține următoarele expresii pentru cotele Z și Y ale plăcilor P_1 și, respectiv, P_2:

$$Z(x_1, x_2) = \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{w_{m-k-1,k} \, |x_2|^k}{m-k} [x_1^{m-k} - 1], \tag{5}$$

$$Y(x_1, x_3) = \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{v_{m-k-1,k} \, |x_3|^k}{m-k} [x_1^{m-k} - 1], \tag{6}$$

iar condițiile de închidere ale celor două plăci pe bordurile lor de fugă nu vom mai interveni ca condiții de legătură în problema de extremum studiată.

Pornind de la expresiile (5) și (6) ale lui Z și Y, putem acum explicita ușor toate celelalte condiții geometrice de legătură, și anume:

a) condiția ca volumul aripii cruciforme să fie dat devine

$$V = 2\left[\int_{0A_1C} Z \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 + \int_{0H_1C} Y \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_3\right] =$$

$$= \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} (\tau_{mk} \, w_{m-k-1,k} + \bar{\tau}_{mk} \, v_{m-k-1,k}) = V_0, \tag{7}$$

unde am notat prin τ_{mk} și $\bar{\tau}_{mk}$ următoarele constante:

$$\tau_{mk} = -2 \frac{l^{k+1}}{U_\infty (k+1)(k+2)(m+2)}$$

$$\bar{\tau}_{mk} = -2 \frac{h^{k+1}}{U_\infty (k+1)(k+2)(m+2)}; \tag{8}$$

b) condiția de închidere a plăcii P_1 pe bordul său de atac OA_1 ($y = l$, $Z = 0$) conduce la următoarele relații de legătură:

$$E_t^{(1)} = \sum_{m=t+1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} d_{mk}^{(t)} \, w_{m-k-1,k} = 0 \quad (t = 0, 1, \ldots, N-1), \tag{9}$$

în care constantele $d_{mk}^{(t)}$ au următoarea expresie :

$$d_{mk}^{(t)} = \frac{l^k}{m-k}(\delta_m^t - \delta_k^t). \tag{10}$$

În această formulă s-a notat cu δ_i^j simbolul lui Kroenecker.

Condiția de închidere pe bordul de atac OA_2 ($y = -l$, $Z = 0$) este automat satisfăcută datorită faptului că placa este simetrică în raport cu planul Ox_1x_3 ;

c) analog, condiția de închidere, a plăcii P_2 pe bordul său de atac OH_1 ($Z = h$, $y = 0$) conduce la relațiile

$$E_t^{(2)} \equiv \sum_{m=t+1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \bar{d}_{mk}^{(t)} v_{m-k-1,k} = 0 \qquad (t = 0,1,\ldots, N-1), \tag{11}$$

unde constantele $\bar{d}_{mk}^{(t)}$ au expresiile

$$\bar{d}_{mk}^{(t)} = \frac{h^k}{m-k}(\delta_m^t - \delta_k^t), \tag{12}$$

iar condiția de închidere a plăcii P_2 pe bordul de atac OH_2 ($z = -h$, $Y = 0$) este automat satisfăcută din condiția de simetrie a plăcii P_2 în raport cu planul Ox_1x_2.

Pentru ca să putem explicita și expresia rezistenței de undă, avem nevoie de expresia vitezei axiale de perturbație u pe cele două plăci P_1 și P_2.

III. DETERMINAREA VITEZEI AXIALE DE PERTURBAȚIE PE CELE DOUĂ PLĂCI ALE ARIPEI CRUCIFORME

Înainte de a trece la scrierea explicită a vitezei axiale de perturbație u pe cele două plăci, vom defini transformările geometrice și notațiile pe care le vom utiliza în acest scop.

Astfel, viteza axială de perturbație u pe placa P_1 o vom scrie într-un plan $x = y + i\,\zeta$, care se obține pornind de la planul fizic yoz :

$$y = \frac{x_2}{x_1} \qquad z = \frac{x_3}{x_1} \tag{13}$$

și făcînd apoi următoarea transformare analogă cu cea dată de Busemann :

$$\eta = \frac{y}{1-B^2z^2}; \qquad \zeta = \frac{z\sqrt{1-B^2(y^2+z^2)}}{1-B^2z^2}, \tag{14}$$

așa cum s-a procedat și în lucrarea anterioară [6].

Acest plan are proprietatea de a păstra urma plăcii P_1 pe axa Oy în adevărată mărime ($\eta = y$ pentru $z = \zeta = 0$).

Viteza axială de perturbație u pe placa P_2 va fi scrisă în planul $x^* = \eta^* + i\,\zeta^*$, unde,

$$\eta^* = \frac{z}{1-B^2y^2}, \quad \zeta^* = \frac{y\sqrt{1-B^2(y^2+z^2)}}{1-B^2y^2}. \tag{15}$$

Planul x^* are proprietatea de a păstra urma plăcii P_2 pe axa Oy în adevărată mărime ($\eta^* = z$ pentru $y = \zeta^* = 0$).

În cadrul teoriei liniarizate, curentul în jurul aripii cruciforme cu condițiile la limită (1) și (2) pe plăcile P_1 și respectiv P_2, pot fi obținute prin superpoziția a două scurgeri:

a) o scurgere în jurul plăcii P_1, luată singură,

b) o scurgere în jurul plăcii P_2, luată singură.

În primul caz, viteza axială u este identică cu cea dată anterior [7], [8] pentru aripa de grosime simetrică izolată prevăzută cu o muchie centrală:

$$u^{(1)} = \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1}\left\{\sum_{q=0}^{n-1}\left[\mathcal{H}_{nq}\,x^q\left(\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1-Bx)}{2B\,(l-x)}} + (-1)^q \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1+Bx)}{2B(l+x)}}\right)\right] + \sum_{k=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{n,2k}\,x^{2k}\operatorname{arg\,ch}\frac{1}{\sqrt{B^2x^2}} + \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} D_{n,2k}\,x^{2k}\sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2}}\right\} = \tag{16}$$

$$= \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n}\left\{(1-\delta_q^n)\,\mathcal{H}_{nq}\,x^q\left(\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1-Bx)}{2B(l-x)}} + (-1)^q\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1+Bx)}{2B(l+x)}}\right) + \mathcal{C}_{nq}\,x^q\operatorname{arg\,ch}\frac{1}{\sqrt{B^2\,x^2}} + \frac{\mathcal{D}_{nq}\,x^q}{\sqrt{1-B^2x^2}}\right\},$$

în care $u^{(1)}$ apare în mod necesar sub prima formă, dar i s-a dat forma a doua, mai convenabilă, pentru a putea sistematiza mai bine calculul caracteristicilor aerodinamice. Din expresia (16) a lui $u^{(1)}$ se poate obține viteza axială $u_1^{(1)}$ pe placa P_1 dacă se face $x = \eta = y$, $\zeta = 0$. Viteza indusă $u_2^{(i)}$ pe placa P_2 se obține, pornind de la relațiile de compatibilitate, sub următoarea formă

$$u_2^{(i)} = \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{x^{2q}}{(1-B^2x^2)^q}\left\{\mathcal{H}'_{n,2q}\left(\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1-Bx)}{2B\,(l-x)}} + \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1+Bx)}{2B\,(l+x)}}\right) + (1-\delta_q^0)\,\mathcal{C}'_{n,2q}\operatorname{argch}\frac{1}{\sqrt{B^2x^2}} + \frac{\mathcal{D}'_{n,2q}}{\sqrt{1-B^2x^2}} + \mathcal{K}'_{n,2q}\frac{x}{\sqrt{1-B^2x^2}}\ln\frac{l+x}{l-x}\right\} \tag{17}$$

în care trebuie să facem $x = i\zeta$, $y = \eta = 0$, iar în planul $x = \eta + i\zeta$ placa P_2 se reduce la segmentul $[-iH, iH]$ de pe axa ζ, în care H are următoarea valoare:

$$H^2 = \frac{h^2}{1 - B^2h^2}. \tag{18}$$

Similar, dacă considerăm cea de-a doua scurgere în jurul plăcii P_2, viteza axială de perturbație, se obține din expresia (16) dată anterior, în care trebuie să înlocuim l prin h, x prin x^* și coeficienții $\mathcal{H}_{nq}$, $\mathcal{C}_{nq}$, $\mathcal{D}_{nq}$ prin corespondenții lor stelați. Vom avea astfel:

$$u^{(2)} = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \left\{ \sum_{q=0}^{n-1} \left[\mathcal{H}^*_{nq}\, x^{*q} \left(\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bh)(1-Bx^*)}{2B(h-x^*)}} + \right.\right.\right.$$

$$+ (-1)^q \operatorname{argch} \left.\left.\left. \sqrt{\frac{(1+Bh)(1+Bx^*)}{2B(h+x^*)}} \right) \right] + \sum_{k=1}^{E\left(\frac{n-1}{1}\right)} C^*_{n,2k}\, x^{*2k} \operatorname{argch} \frac{1}{\sqrt{B^2x^{*2}}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} D^*_{n,2k}\, x^{*2k} \sqrt{\frac{1 - B^2x^{*2}}{B^2}} \right\} =$$

$$= \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \left\{ (1 - \delta^0_q) \left[\mathcal{H}^*_{nq}\, x^{*q} \left(\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bh)(1-Bx^*)}{2B(h-x^*)}} + \right.\right.\right.$$

$$+ (-1)^q \operatorname{argch} \left.\left.\left. \sqrt{\frac{(1+Bh)(1+Bx^*)}{2B(h+x^*)}} \right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mathcal{C}^*_{nq}\, x^{*q} \operatorname{argch} \frac{1}{\sqrt{B^2x^{*2}}} \right] + \frac{\mathcal{D}^*_{nq}\, x^{*q}}{\sqrt{1 - B^2x^{*2}}} \right\}. \tag{19}$$

În mod analog, viteza axială pe placa P_2 se va obține făcînd în (19) $\zeta^* = 0$, $x^* = \eta^* = z$. Viteza indusă pe placa P_1, $u_1^{(i)}$ se va obține tot din relațiile de compatibilitate sub o formă similară cu (17):

$$u_1^{(i)} = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{x^{*2q}}{(1 - B^2x^{*2})^q} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \mathcal{H}^{**}_{n,2q} \left(\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bh)(1-Bx^*)}{2B(h-x^*)}} + \right.\right.$$

$$\left. + \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bh)(1+Bx^*)}{2B(h+x^*)}} \right) + (1 - \delta^0_q) \mathcal{C}^{**}_{n,2q} \operatorname{argch} \frac{1}{\sqrt{B^2x^{*2}}} + \frac{\mathcal{D}^{**}_{n,2q}}{\sqrt{1 - B^2x^{*2}}} +$$

$$\left. + \mathcal{K}^{**}_{n,2q} \frac{x^*}{\sqrt{1 - B^2x^{*2}}} \ln \frac{h + x^*}{h - x^*} \right\}, \tag{20}$$

în care trebuie să facem $\eta^* = z = 0$, $x^* = i\zeta^*$, iar [în planul $x^* = \eta^* + i\zeta^*$ placa P_1 se reduce la segmentul $[-iL, iL]$ de pe axa ζ^* în care

$$L = \frac{l}{\sqrt{1 - B^2 l^2}}, \tag{21}$$

constantele $\mathcal{H}_{nq}$, $\mathcal{H}^{*}_{nq}$, $\mathcal{H}'_{nq}$, $\mathcal{H}^{**}_{nq}$ $\mathcal{C}_{nq}$, $\mathcal{D}_{nq}$ etc. care intervin în expresiile vitezelor axiale de perturbaţie sînt legate de coeficienţii vitezelor de perturbaţie v şi w prin relaţii liniare şi omogene perfect determinate sub forma indicată în lucrările lor anterioare [7]—[10]. Deoarece constantele $\mathcal{H}_{nq}$ şi $\mathcal{H}^{*}_{nq}$ se calculează cu ajutorul reziduurilor în jurul punctelor $x = l$ şi respectiv $x^{*} = h$, constantele $\mathcal{H}_{nq}$ vor depinde numai de coeficienţii lui w iar constantele $\mathcal{H}^{*}_{nq}$ vor depinde numai de coeficienţii lui v. În schimb, ceilalţi coeficienţi ai vitezei axiale vor depinde de toţi coeficienţii lui w şi v. Vom putea deci scrie :

$$\mathcal{H}_{nq} = \sum_{j=0}^{n-1} h^{(n)}_{qj}\, w_{n-j-1,j}\,; \quad \mathcal{H}^{*}_{nq} = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{h}^{*(n)}_{qj}\, v_{n-j-1,j}\,, \tag{22a}$$

$$\mathcal{H}'_{nq} = \sum_{j=0}^{n-1} (h'^{(n)}_{qj}\, w_{n-j-1,j} + \overline{h}'^{(n)}_{qj}\, v_{n-j-1,j}) \quad \text{etc.} \tag{22b}$$

şi relaţii analoage pentru celelalte constante ale lui $u^{(1)}$ şi $u^{(2)}$; în care $h^{(n)}_{qj}$, $h^{*(n)}_{qj}$, $c^{(n)}_{qj}$, $\overline{c}^{(n)}_{qj}$, $c^{*(n)}_{qj}$ etc. sînt funcţii de formele în plan ale plăcilor P_1 şi P_2 (adică de l şi h) şi de numărul Mach. Deci pentru o anumită viteză de croazieră (adică pentru un număr Mach dat) şi pentru nişte forme în plan ale plăcilor date, aceşti coeficienţi au o valoare determinată independent de forma suprafeţii aripii. Cu aceste observaţii putem trece acum la calculul rezistenţii la înaintare a aripii cruciforme.

IV. *Calculul rezistenţei la înaintare a aripei cruciforme.*

Coeficientul de rezistenţă de undă pentru aripa cruciformă va avea următoarea formă [7] :

$$c_x = \frac{8}{U^2_{\infty}\,(l+h)} \left[\int_{OA_1C} w\, u\, x_1\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}y + \int_{OH_1C} v\, u\, x_1\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}z \right]. \tag{23}$$

Dacă ţinem seama de (1), (2), (16) şi (19), se observă că coeficientul de rezistenţă de undă este o formă cuadratică în raport cu coeficienţii lui v şi w. Vom putea deci scrie

$$c_x = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} [\, \Omega_{nmkj}\, w_{n-j-1,j}\, w_{m-k-1,k} +$$

$$+ \Omega^{(1)}_{nmkj}\, w_{n-j-1,j}\, v_{m-k-1,k} + \overline{\Omega}_{nmkj}\, v_{n-j-1,j}\, w_{m-k-1,k} +$$

$$+ \overline{\Omega}^{(1)}_{nmkj}\, v_{n-j-1,j}\, v_{m-k-1,k}]. \tag{24}$$

Coeficienţii Ω_{nmkj} etc. sînt daţi în anexă.

V. REZOLVAREA PROBLEMEI DE EXTREMUM PROPUSE

Problema găsirii formei optime a aripii cruciforme se reduce, în ultimă analiză, la determinarea coeficienţilor $w_{m-k-1,k}$ şi $v_{m-k-1,k}$ care intervin în expresiile lui w şi respectiv, v şi care realizează $c_x = \min.$ cu următoarele condiţii de legătură :

a) volum dat $V = V_0 = \text{const}$,

b) condițiile de închidere a aripii cruciforme pe bordurile sale de atac, adică $E_t^{(1)} = 0$, $E_t^{(2)} = 0$ $(t = 0,1, \ldots, N-1)$. Reamintim că condițiile de închidere a aripii cruciforme pe bordurile sale de fugă nu mai intervin printre condițiile de legătură ale problemei, deoarece ele au servit la determinarea funcțiilor arbitrare din expresiile (3) și (4).

Această problemă de extremum cu legături se reduce la calculul extremumului fără legături al expresiei

$$H = c_x + \lambda^{(0)} V_0 + \sum_{t=0}^{N-1} (\lambda_t^{(1)} E_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)} E_t^{(2)}), \tag{25}$$

unde $\lambda^{(0)}$ $\lambda_t^{(1)}$ și $\lambda_t^{(2)}$ sînt multiplicatorii lagrangenieni.

Extremumul funcției H poate fi obținut anulînd prima sa variație, adică făcînd $\delta H = 0$. Deoarece avem explicitați toți termenii care intervin în expresia (25) a lui H, vom putea calcula ușor prima sa variație. Anulînd această variație și ținînd seama că coeficienții $w_{m-k-1,k}$ și $v_{m-k-1,k}$ sînt independenți, vom obține

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} [(\Omega_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j} + \Omega_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma}) w_{n-j-1,j} + \tag{26}$$

$$+ (\overline{\Omega}_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j} + \Omega^{(1)}_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma}) v_{n-j-1,j}] + \sum_{t=0}^{N-1} \lambda_t^{(1)} \mathrm{d}^{(t)}_{\theta+\sigma+1,\sigma} + \lambda^{(0)} \tau_{\theta+\sigma+1,\sigma} = 0,$$

ecuație care provine din anularea coeficientului variației $\delta w_{\theta\sigma}$ și

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} [(\Omega^{(1)}_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j} + \overline{\Omega}_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma}) w_{n-j-1,j} +$$

$$+ (\overline{\Omega}^{(1)}_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j} + \overline{\Omega}^{(1)}_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma}) v_{n-j-1,j}] +$$

$$+ \sum_{t=0}^{N-1} \lambda_t^{(2)} \overline{\mathrm{d}}^{(t)}_{\theta+\sigma+1,\sigma} + \lambda^{(0)} \overline{\tau}_{\theta+\sigma+1,\sigma} = 0 \tag{27}$$

$$(\theta, \sigma = 0,1, \ldots, N-1),$$

ecuație care provine din anularea coeficientului variației $\delta v_{\theta\sigma}$.

Ecuațiile (26) și (27) împreună cu condițiile de legătură (7), (9) și (11), adică

$$V = V_0 = \text{const}, \quad E_t^{(1)} = 0, \quad E_t^{(2)} = 0, \quad (t = 0, 1, \ldots, N-1), \tag{28}$$

formează un sistem liniar care determină în mod univoc valorile coeficienților $w_{m-k-1,k}$ și $v_{m-k-1,k}$ și a multiplicatorilor $\lambda^{(0)}$, $\lambda_t^{(1)}$ și $\lambda_t^{(2)}$.

Problema poate fi socotită deci rezolvată.

Asupra sistemului (26), (27) și (28), care ne furnizează valorile coeficienților $w_{m-k-1,k}$ și $v_{m-k-1,k}$ ai aripii cruciforme, se pot face următoarele observații:

a) dacă în acest sistem anulăm contribuția uneia dintre plăci P_2, adică facem $v_{m-k-1,k} \to 0$ și $h \to 0$, vom obține exact sistemul stabilit anterior [3], care furnizează valorile coeficienților $w_{m-k-1,k}$ pentru aripa delta izolată de grosime simetrică prevăzută cu o muchie centrală, de rezistență minimă;

b) sistemul de ecuații (26), (27) și (28) amintit mai sus poate fi obținut automat, *din punct de vedere formal*, din sistemul obținut anterior [3] pentru valorile coeficienților $w_{m-k-1,k}$ și $\overline{w}_{m-k-1,k}$ și aripii triunghiulare izolate de grosime simetrică, de rezistență minimă, prevăzută cu o muchie de separație a distribuției de viteză, prin simpla înlocuire a coeficienților $\overline{w}_{m-k-1,k}$ cu coeficienții $v_{m-k-1,k}$.

Desigur că expresiile Ω_{nmkj} sînt însă diferite în cele două cazuri sus-amintite. Rezultă că în problema de optimizare cea de a doua placă a aripii cruciforme joacă, din punct de vedere formal, rolul unei muchii de separație a distribuției de viteze pe aripa triunghiulară izolată cu aceleași condiții de legătură.

ANEXA DE CALCUL

Coeficienții Ω_{nmkj} pentru aripa de grosime simetrică cu toate bordurile de atac subsonice sînt dați sub următoarea formă :

$$\Omega_{nmkj} = \frac{8}{U_\infty^2 (l+h)(m+n)} \left\{ \sum_{q=0}^{n} \left[\frac{(1-\delta_q^n)\, h_{qj}^{(n)}}{k+q+1} \left[\frac{\sqrt{1-B^2l^2}}{2} \sum_{t=0}^{k+q} \left(1 + \right.\right.\right.\right.$$

$$+ (-1)^{k-t} \left.\right) l^{k+q-t} \mathcal{J}_t(0,l) + \frac{1+(-1)^{k+1}}{2} l^{k+q+1} \operatorname{arg\,ch} \frac{1}{\sqrt{B^2l^2}} +$$

$$+ (-1)^q \left(1 + (-1)^{k+q} \right) l^{k+q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bl)^2}{4\,Bl}} \Bigg] +$$

$$+ \frac{(1-\delta_q^n)\, c_{qj}^{(n)}}{k+q+1} \left(\mathcal{J}_{k+q}(0,l) + l^{k+q+1} \operatorname{argch} \frac{1}{\sqrt{B^2l^2}} \right) + d_{qj}^{(n)} \mathcal{J}_{k+q}(0,l) \Bigg] +$$

$$+ \operatorname{Re}\,(-\mathrm{i})^{k+1} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[h_{2q,j}^{**(n)} \left[\frac{\sqrt{1-B^2h^2}}{2} \left(\mathcal{H}_{k+2q,\,k+2q+2}(0, \mathrm{i}L; h) + \right.\right.\right.$$

$$\left. + \mathcal{H}_{k+2q,\,k+2q+2}(0, \mathrm{i}L; -h) \right) + \qquad \text{(A-1)}$$

$$+ \mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+2}(\mathrm{i}L) \left(\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bh)(1+\mathrm{i}BL)}{2B(h+\mathrm{i}L)}} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bh)(1-\mathrm{i}BL)}{2B(h-\mathrm{i}L)}} \right) - \mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+2}(0) \operatorname{arg\,ch} \frac{1}{\sqrt{B^2h^2}} \Bigg] +$$

$$+ (1-\delta_q^0)\, c_{2q,j}^{**(n)} \left[\mathcal{H}_{k+2q,\,k+2q+2}(0, \mathrm{i}L; 0) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\mathrm{i}\pi}{2} - \operatorname{argsh} \frac{1}{\sqrt{B^2L^2}} \right) \mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+2}(\mathrm{i}L) \right] +$$

$$+ d^{**(n)}_{2q,j}\,\mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+3}(0, iL) + k^{**(n)}_{2q,j}\Big[\mathcal{H}'_{k+2q+1,\,k+2q+3}(0, iL;\ h) -$$

$$- \mathcal{H}'_{k+2q+1,\,k+2q+3}(0, iL;\ -h) + \mathcal{L}_{k+2q+1,\,k+2q+3}(iL)\ \ln\frac{h+iL}{h-iL}\Big]\Big)\Big\},$$

$$\Omega^{(1)}_{nmkj} = \frac{8}{U^2_\infty (m+n)(l+h)}\Big\{\sum_{q=0}^{n}\Big(\frac{(1-\delta^n_q)\,c^{*(n)}_{qj}}{k+q+1}\Big[\mathcal{I}_{k+q}(0, h) +$$

$$+ h^{k+q+1}\,\mathrm{argch}\ \frac{1}{\sqrt{B^2h^2}}\Big] + d^{*(n)}_{qj}\,\mathcal{I}_{k+q}(0,\ h)\Big) +$$

$$+ \mathrm{Re}\,(-i)^{k+1}\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Big(h'^{(n)}_{2q,j}\Big[\frac{\sqrt{1-B^2l^2}}{2}\Big(\mathcal{H}_{k+2q,\,k+2q+2}(0, iH;\ l) +$$

$$+ \mathcal{H}_{k+2q,\,k+2q+2}(0, iH;\ -l)\Big) +$$

$$+ \mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+2}(iH)\Big(\mathrm{argch}\ \sqrt{\frac{(1+Bl)(1+iBH)}{2B(l+iH)}} + \qquad \text{(A-2)}$$

$$+ \mathrm{argch}\ \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-iBH)}{2B(l-iH)}}\Big) - \mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+2}(0)\,\mathrm{argch}\ \frac{1}{\sqrt{B^2l^2}}\Big] +$$

$$+ (1-\delta^0_q)\,c'^{(n)}_{2q,j}\Big[\mathcal{H}_{k+2q,\,k+2q+2}(0, iH;\ 0) + \mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+2}(iH)\Big(\frac{i\pi}{2} -$$

$$- \mathrm{argsh}\ \frac{1}{\sqrt{B^2H^2}}\Big)\Big] + d'^{(n)}_{2q,j}\,\mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+2}(0, iH) +$$

$$+ k'^{(n)}_{2q,j}\Big[\mathcal{H}'_{k+2q+1,\,k+2q+3}(0, iH;\ l) - \mathcal{H}'_{k+2q+1,\,k+2q+3}(0, iH;\ -l) +$$

$$+ \mathcal{L}_{k+2q+1,\,k+2q+3}(iH)\ln\frac{l+iH}{l-iH}\Big]\Big)\Big\},$$

$$\overline{\Omega}_{nmkj} = \frac{8}{U^2_\infty (m+n)(l+h)}\Big\{\sum_{q=0}^{n}\Big[\frac{(1-\delta^n_q)\,\overline{c}^{(n)}_{qj}}{k+q+1}\Big(\mathcal{I}_{k+q}(0, l) +$$

$$+ l^{k+q+1}\,\mathrm{argch}\ \frac{1}{\sqrt{B^2l^2}}\Big) + \overline{d}^{(n)}_{qj}\,\mathcal{I}_{k+j}(0, l)\Big] +$$

$$+ \mathrm{Re}\,(-i)^{k+1}\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Big(\overline{h}^{**(n)}_{2q,j}\Big[\frac{\sqrt{1-B^2h^2}}{2}\Big(\mathcal{H}_{k+2q,\,k+2q+2}(0, iL;\ h) +$$

$$+ \mathcal{H}_{k+2q,\,k+2q+2}(0, iL;\ -h)\Big) +$$

$$+ \mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+2}(iL)\Big(\mathrm{argch}\ \sqrt{\frac{(1+Bh)(1-iBL)}{2B(h-iL)}} + \qquad \text{(A-3)}$$

$$+\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bh)(1+\mathrm{i}BL)}{2B(h+\mathrm{i}L)}}\Big)-\mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+2}(0)\operatorname{argch}\frac{1}{\sqrt{B^2h^2}}\Big]+$$

$$+(1-\delta_q^0)\,\overline{c}^{**(n)}_{2q,\,j}\Big[\mathcal{H}_{k+2q,\,k+2q+2}(0,\mathrm{i}L;0)+$$

$$+\Big(\frac{\mathrm{i}\pi}{2}-\operatorname{argsh}\frac{1}{\sqrt{B^2L^2}}\Big)\mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+2}(\mathrm{i}L)\Big]+$$

$$+\overline{d}^{**(n)}_{2q,\,j}\,\mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+3}(0,\mathrm{i}L)+\overline{k}^{**(n)}_{2q,\,j}\Big[\mathcal{H}'_{k+2q+1,\,k+2q+3}(0,\mathrm{i}L;h)-$$

$$-\mathcal{H}'_{k+2q+1,\,k+2q+3}(0,\mathrm{i}L;-h)+\mathcal{L}_{k+2q+1,\,k+2q+3}(\mathrm{i}L)\ln\frac{h+\mathrm{i}L}{h-\mathrm{i}L}\Big]\Big\}\Big\},$$

$$\overline{\Omega}^{(1)}_{nmkj}=\frac{8}{U_\infty^2(m+n)(l+h)}\Big\{\sum_{q=0}^{n}\Big\{\frac{(1-\delta_q^n)\,\overline{h}^{*(n)}_{qj}}{k+q+1}\Big[\frac{\sqrt{1-B^2h^2}}{2}\sum_{t=0}^{k+q}\Big(1+$$

$$+(-1)^{k+t}\Big)h^{k+q-t}\mathcal{J}_t(0,h)+\frac{1+(-1)^{k+1}}{2}h^{k+q+1}\operatorname{argch}\frac{1}{\sqrt{B^2h^2}}+$$

$$+(-1)^q\Big(1+(-1)^{k+q}\Big)h^{k+q+1}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bh)^2}{4Bh}}\Big]+$$

$$+\frac{(1-\delta_q^n)\,\overline{c}^{*(n)}_{qj}}{k+q+1}\Big[\mathcal{J}_{k+q}(0,h)+h^{k+q+1}\operatorname{argch}\frac{1}{\sqrt{B^2h^2}}\Big]+$$

$$+\overline{d}^{*(n)}_{qj}\,\mathcal{J}_{k+q}(0,h)\Big\}+$$

$$+\operatorname{Re}(-\mathrm{i})^{k+1}\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Big\{\overline{h}'^{(n)}_{2q,\,j}\Big[\frac{\sqrt{1-B^2l^2}}{2}\Big(\mathcal{H}_{k+2q,\,k+2q+2}(0,\mathrm{i}H;l)+$$

$$+\mathcal{H}_{k+2q,\,k+2q+2}(0,\mathrm{i}H;-l)\Big)+ \qquad \text{(A-4)}$$

$$+\mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+2}(\mathrm{i}H)\Big(\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+\mathrm{i}BH)}{2B(l+\mathrm{i}H)}}+$$

$$+\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-\mathrm{i}BH)}{2B(l-\mathrm{i}H)}}\Big)-\mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+2}(0)\operatorname{argch}\frac{1}{\sqrt{B^2l^2}}\Big]+$$

$$+(1-\delta_q^0)\,\overline{c}'^{(n)}_{2q,\,j}\Big[\mathcal{H}_{k+2q,\,k+2q+2}(0,\mathrm{i}H;0)+\mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+2}(\mathrm{i}H)\Big(\frac{\mathrm{i}\pi}{2}-$$

$$-\operatorname{argsh}\frac{1}{\sqrt{B^2H^2}}\Big)\Big]+\overline{d}'^{(n)}_{2q,\,j}\,\mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+2}(0,\mathrm{i}H)+$$

$$+ \bar{k}'^{(n)}_{2q,j}\left[\mathcal{H}'_{k+2q+1,\,k+2q+3}(0,\,iH\,;\,l) - \mathcal{H}'_{k+2q+1,\,k+2q+3}(0,\,iH\,;\,-l) + \right.$$

$$\left. + \mathcal{L}_{k+2q+1,\,k+2q+3}(iH)\,\ln\frac{l+iH}{l-iH}\right]\Bigg\}\Bigg\}.$$

Iar pentru aripa cruciformă care are una dintre plăci P_1 cu bordurile supersonice, iar cealaltă P_2 cu bordurile subsonice, coeficientul de rezistență are tot forma (24), în care însă expresiile Ω_{nmkj} se înlocuiesc cu corespondentele lor stelate, care au următoarele forme:

$$\Omega^*_{nmkj} = \frac{8}{U^2_\infty\,(l+h)(m+n)}\left\{\sum_{q=0}^{n}\left\{\frac{(1-\delta^n_q)\,h^{(n)}_{qj}}{2(k+q+1)}\left[\sqrt{B^2l^2-1}\sum_{t=0}^{k+q}\left(1+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. + (-1)^{k-t}\right)l^{k+q-t}\,\mathcal{J}_t\left(0,\frac{1}{B}\right) + l^{k+q+1}\arccos\frac{1}{\sqrt{B^2l^2}}\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(1-\delta^n_q)\,c^{(n)}_{qj}}{k+q+1}\,\mathcal{J}_{k+q}\left(0,\frac{1}{B}\right) + d^{(n)}_{qj}\,\mathcal{J}_{k+q}\left(0,\frac{1}{B}\right)\right\} + \right.$$

$$+ \mathrm{Re}\,(-i)^{k+1}\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left\{h^{**(n)}_{2q,j}\left[\left(\mathcal{H}_{k+2q,k+2q+2}(0,\,iL\,;\,h) + \right.\right.\right. \qquad \text{(A-5)}$$

$$\left.\left.\left. + \mathcal{H}_{k+2q,k+2q+2}(0,\,iL\,;\,-h)\right) + \mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(iL)\left(\mathrm{argch}\sqrt{\frac{(1+Bh)(1+iBL)}{2B(h+iL)}} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \mathrm{argch}\sqrt{\frac{(1+Bh)(1-iBL)}{2B(h-iL)}}\right) - \mathcal{L}_{k+2q,\,k+2q+2}(0)\,\mathrm{argch}\frac{1}{\sqrt{B^2h^2}}\right] + \right.$$

$$+ (1-\delta^0_q)\,c^{**(n)}_{2q,j}\left[\mathcal{H}_{k+2q,\,k+2q+2}(0,\,iL\,;\,0) + \left(\frac{i\pi}{2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \mathrm{argsh}\frac{1}{\sqrt{B^2L^2}}\right)\mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(iL)\right] + d^{**(n)}_{2q,j}\,\mathcal{L}_{k+2q,k+2q+3}(0,\,iL) + \right.$$

$$+ k^{**(n)}_{2q,j}\left[\mathcal{H}'_{k+2q+1,k+2q+3}(0,\,iL\,;\,h) - \mathcal{H}'_{k+2q+1,k+2q+3}(0,\,iL\,;\,-h) + \right.$$

$$\left.\left.\left. + \mathcal{L}_{k+2q+1,k+2q+3}(iL)\,\ln\frac{h+iL}{h-iL}\right]\right\}\right\},$$

$$\Omega^{*(1)}_{nmkj} = \frac{8}{U^2_\infty\,(m+n)(l+h)}\left\{\sum_{q=0}^{n}\left\{\frac{(1-\delta^n_q)\,c^{*(n)}_{qj}}{k+q+1}\left[\mathcal{J}_{k+q}(0,\,h) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + l^{k+q+1}\,\mathrm{argch}\frac{1}{\sqrt{B^2h^2}}\right] + d^{*(n)}_{qj}\,\mathcal{J}_{k+q}(0,\,h)\right\} + \right.$$

$$+ \mathrm{Re}\,(-i)^{k+1}\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left\{h'^{(n)}_{2q,j}\left[\frac{\sqrt{B^2l^2-1}}{2}\left(\mathcal{H}_{k+2q,k+2q+2}(0,\,iH\,;\,l) + \right.\right.\right.$$

$$+\mathcal{H}_{k+2q,k+2q+2}(0,\mathrm{i}H;-l)\Big)+\mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(\mathrm{i}H)\Big(\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+\mathrm{i}BH)}{2B(l+\mathrm{i}H)}}+$$

$$+\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-\mathrm{i}BH)}{2B(l-\mathrm{i}H)}}\Big)-\mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(0)\arccos\frac{1}{\sqrt{B^2l^2}}\Big]+ \tag{A-6}$$

$$+(1-\delta_q^0)\,c'^{(n)}_{2q,j}\Big[\mathcal{H}_{k+2q,k+2q+2}(0,\mathrm{i}H;0)+\mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(\mathrm{i}H)\Big(\frac{\mathrm{i}\pi}{2}-$$

$$-\operatorname{argsh}\frac{1}{\sqrt{B^2H^2}}\Big)\Big]+d'^{(n)}_{2q,j}\,\mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(0,\mathrm{i}H)+$$

$$+k'^{(n)}_{2q,j}\Big[\mathcal{H}'_{k+2q+1,k+2q+3}(0,\mathrm{i}H;l)-\mathcal{H}'_{k+2q+1,k+2q+3}(0,\mathrm{i}H;-l)+$$

$$+\mathcal{L}_{k+2q+1,k+2q+3}(\mathrm{i}H)\ln\frac{l+\mathrm{i}H}{l-\mathrm{i}H}\Big]\Big\},$$

$$\overline{\Omega}^{*}_{nmkj}=\frac{8}{U_\infty^2(m+n)(l+h)}\Big\{\sum_{q=0}^{n}\Big[\frac{(1-\delta_q^n)\,\overline{c}^{(n)}_{qj}}{k+q+1}\mathcal{J}_{k+q}\Big(0,\frac{1}{B}\Big)+ \tag{A-7}$$

$$+\overline{d}^{(n)}_{qj}\mathcal{J}_{k+q}\Big(0,\frac{1}{B}\Big)\Big]+\mathrm{Re}(-\mathrm{i})^{k+1}\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Big\{\overline{h}^{**(n)}_{2q,j}\Big[\frac{\sqrt{1-B^2h^2}}{2}\Big(\mathcal{H}_{k+2q,k+2q+2}(0,\mathrm{i}L;h)+$$

$$+\mathcal{H}_{k+2q,k+2q+2}(0,\mathrm{i}L;-h)\Big)+\mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(\mathrm{i}L)\Big(\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bh)(1-\mathrm{i}BL)}{2B(h-\mathrm{i}L)}}+$$

$$+\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bh)(1+\mathrm{i}BL)}{2B(h+\mathrm{i}L)}}\Big)-\mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(0)\operatorname{argch}\frac{1}{\sqrt{B^2h^2}}\Big]+$$

$$+(1-\delta_q^0)\,\overline{c}^{**(n)}_{2q,j}\Big[\mathcal{H}_{k+2q,k+2q+2}(0,\mathrm{i}L;0)+\Big(\frac{\mathrm{i}\pi}{2}-\operatorname{argsh}\frac{1}{\sqrt{B^2L^2}}\Big)\mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(\mathrm{i}L)\Big]+$$

$$+\overline{d}^{**(n)}_{2q,j}\,\mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(0,\mathrm{i}L)+\overline{k}^{**(n)}_{2q,j}\Big[\mathcal{H}'_{k+2q+1,k+2q+3}(0,\mathrm{i}L;h)-$$

$$-\mathcal{H}'_{k+2q+1,k+2q+3}(0,\mathrm{i}L;-h)+\mathcal{L}_{k+2q+1,k+2q+3}(\mathrm{i}L)\ln\frac{h+\mathrm{i}L}{h-\mathrm{i}L}\Big]\Big\},$$

$$\overline{\Omega}^{*(1)}_{nmkj}=\overline{\Omega}^{(1)}_{nmkj}\,. \tag{A-8}$$

Dacă aripa cruciformă are toate cele patru borduri de atac supersonice, atunci coeficientul de rezistență se obține înlocuind în formula (24) coeficienții Ω_{nmkj} prin corespondenții lor dublu stelați, care au următoarele expresii

$$\Omega^{**}_{nmkj}=\Omega^{*}_{nmkj} \tag{A-9}$$

$$\Omega^{**(1)}_{nmkj}=\frac{8}{U_\infty^2(m+n)(l+h)}\Big\{\sum_{q=0}^{n}\Big[\frac{(1-\delta_q^n)\,c^{*(n)}_{qj}}{k+q+1}\mathcal{J}_{k+q}\Big(0,\frac{1}{B}\Big)+$$

$$+ d_{qj}^{*(n)} \mathcal{I}_{k+q}\left(0, \frac{1}{B}\right)\Big] + \mathrm{Re}(-\mathrm{i})^{k+1} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \Big\{ h_{2q,j}^{\prime(n)} \Big[\frac{\sqrt{B^2l^2-1}}{2} \Big(\mathcal{H}_{k+2q,k+2q+2}(0,\mathrm{i}H;l) +$$

$$+ \mathcal{H}_{k+2q,k+2q+2}(0, \mathrm{i}H; -l) \Big) + \mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(\mathrm{i}H) \Big(\arccos \sqrt{\frac{(1+Bl)(1+\mathrm{i}BH)}{2B(l+\mathrm{i}H)}} +$$

$$+ \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-\mathrm{i}BH)}{2B(l-\mathrm{i}H)}} \Big) - \mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(0) \arccos \frac{1}{\sqrt{B^2l^2}} \Big] +$$

$$+ (1-\delta_q^0)\, c_{2q,j}^{\prime(n)} \Big[\mathcal{H}_{k+2q,k+2q+2}(0, \mathrm{i}H; 0) + \mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(\mathrm{i}H) \Big(\frac{\mathrm{i}\pi}{2} -$$

$$- \operatorname{argsh} \frac{1}{\sqrt{B^2l^2}} \Big) + d_{2q,j}^{\prime(n)} \mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(0, \mathrm{i}H) +$$

$$+ k_{2q,j}^{\prime(n)} \Big[\mathcal{H}_{k+2q+1,k+2q+3}^{\prime}(0, \mathrm{i}H; l) - \mathcal{H}_{k+2q+1,k+2q+3}^{\prime}(0, \mathrm{i}H; -l) +$$

$$+ \mathcal{L}_{k+2q+1,k+2q+3}(\mathrm{i}H) \ln \frac{l+\mathrm{i}H}{l-\mathrm{i}H} \Big] \Big\} \Big\}, \tag{A-10}$$

$$\bar{\Omega}_{nmkj}^{**} = \frac{8}{U_\infty^2 (m+n)(l+h)} \Big\{ \sum_{q=0}^{n} \Big[\frac{(1-\delta_q^n)\, \bar{c}_{qj}^{(n)}}{k+q+1} \mathcal{I}_{k+q}\left(0, \frac{1}{B}\right) +$$

$$+ \bar{d}_{qj}^{(n)} \mathcal{I}_{k+q}\left(0, \frac{1}{B}\right) \Big] + \mathrm{Re}(-\mathrm{i})^{k+1} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \Big\{ \bar{h}_{2q,j}^{**(n)} \Big[\frac{\sqrt{B^2h^2-1}}{2} \Big(\mathcal{H}_{k+2q,k+2q+2}(0,\mathrm{i}L;h) +$$

$$+ \mathcal{H}_{k+2q,k+2q+2}(0, \mathrm{i}L; -h) \Big) + \mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(\mathrm{i}L) \Big(\arccos \sqrt{\frac{(1+Bh)(1-\mathrm{i}BL)}{2B(h-iL)}} +$$

$$+ \arccos \sqrt{\frac{(1+Bh)(1+\mathrm{i}BL)}{2B(h+\mathrm{i}L)}} \Big) - \mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(0) \arccos \frac{1}{\sqrt{B^2h^2}} \Big] +$$

$$+ (1-\delta_q^0)\, \bar{c}_{2q,j}^{**(n)} \Big[\mathcal{H}_{k+2q,k+2q+2}(0, \mathrm{i}L; 0) + \Big(\frac{\mathrm{i}\pi}{2} - \tag{A-11}$$

$$- \operatorname{argsh} \frac{1}{\sqrt{B^2L^2}} \Big) \mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(\mathrm{i}L) \Big] + \bar{d}_{2q,j}^{**(n)} \mathcal{L}_{k+2q,k+2q+3}(0, \mathrm{i}L) +$$

$$+ \bar{k}_{2q,j}^{**(n)} \Big[\mathcal{H}_{k+2q+1,k+2q+3}^{\prime}(0, \mathrm{i}L; h) - \mathcal{H}_{k+2q+1,k+2q+3}^{\prime}(0, \mathrm{i}L; -h) +$$

$$+ \mathcal{L}_{k+2q+1,k+2q+3}(\mathrm{i}L) \ln \frac{h+\mathrm{i}L}{h-\mathrm{i}L} \Big] \Big\} \Big\},$$

$$\overline{\Omega}^{**(1)}_{nmkj} = \frac{8}{U_\infty^2 (l+h)(m+n)} \left\{ \sum_{q=0}^{n} \left\langle \frac{(1-\delta_q^n)\, h^{*(n)}_{qj}}{k+q+1} \left[\frac{\sqrt{B^2h^2-1}}{2} \sum_{t=0}^{k+q} \left(1 + \right.\right.\right.\right.$$

$$\left. + (-1)^{k-t} \right) h^{k+q-t}\, \mathcal{J}_t\left(0, \frac{1}{B}\right) + h^{k+q+1} \arccos \frac{1}{\sqrt{B^2h^2}} \Bigg] + \tag{A-12}$$

$$+ \frac{(1-\delta_q^n)\, \overline{c}^{*(n)}_{qj}}{k+q+1} \mathcal{J}_{k+q}\left(0, \frac{1}{B}\right) + \overline{d}^{*(n)}_{qj}\, \mathcal{J}_{k+q}\left(0, \frac{1}{B}\right) \Bigg\rangle \Bigg] +$$

$$+ \operatorname{Re}(-i)^{k+1} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left\langle \overline{h}^{\prime(n)}_{2q,j} \left[\frac{\sqrt{B^2l^2-1}}{2} \left(\mathcal{H}_{k+2q,k+2q+2}(0, iH;\, l) + \right.\right.\right.$$

$$+ \mathcal{H}_{k+2q,k+2q+2}(0, iH;\, -l) \Big) + \mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(iH) \left(\arccos \sqrt{\frac{(1+Bl)(1+iBH)}{2B\,(l+iH)}} + \right.$$

$$+ \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-iBH)}{2B\,(l-iH)}} \Big) - \mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(0) \arccos \frac{1}{\sqrt{B^2l^2}} \Bigg] +$$

$$+ (1-\delta_q^0)\, \overline{c}^{\prime(n)}_{2q,j} \Big[\mathcal{H}'_{k+2q,k+2q+2}(0, iH;\, 0) + \mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(iH) \left(\frac{i\pi}{2} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{argsh} \frac{1}{\sqrt{B^2H^2}} \right) \Big] + \overline{d}^{\prime(n)}_{2q,j}\, \mathcal{L}_{k+2q,k+2q+2}(0, iH) + \overline{k}^{\prime(n)}_{2q,j} \Big[\mathcal{H}'_{k+2q+1,k+2q+3}(0, iH;\, l) - \Big.$$

$$\left. \left. - \mathcal{H}'_{k+2q+1,k+2q+3}(0, iH;\, -l) + \mathcal{L}_{k+2q+1,k+2q+3}(iH) \ln \frac{l+iH}{l-iH} \Big] \right\rangle \right\}.$$

În aceste formule am notat cu $\mathcal{J}_k$ $\mathcal{L}_{km}$, $\mathcal{H}_{k,m}$ următoarele integrale

$$\mathcal{J}_k = \int \frac{\tau^k d\tau}{\sqrt{1-B^2\tau^2}} \tag{A-13}$$

$$\mathcal{J}_k(0,\ s) = \int_0^s \frac{\tau^k d\tau}{\sqrt{1-B^2\tau^2}} = \mathcal{J}_k(s) - \mathcal{J}_k(0)$$

și care are valorile

$$\mathcal{J}_{2r} = \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2 B^{2r+1}} \left[\arcsin B\tau - \sqrt{1-B^2\tau^2} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{2^{2\nu}(\nu!)^2 (B\tau)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \right] \tag{A-14a}$$

pentru $k = 2r$,

$$\mathcal{J}_{2r+1} = -\frac{2^{2r}(r!)^2 \sqrt{1-B^2\tau^2}}{B^{2(r+1)}(2r+1)!} \sum_{\nu=0}^{r} \frac{(2\nu)!\,(B\tau)^{2\nu}}{2^{2\nu}(\nu!)^2} \tag{A-14b}$$

pentru $k = 2r+1$,

$$\mathcal{L}_{k.\,m} = \int \frac{\tau^k \, \mathrm{d}\tau}{(1 - B^2\tau^2)^{\frac{m+1}{2}}} \tag{A-15}$$

$$\left(\mathcal{L}_{k,m}(0, \alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\tau^k \, \mathrm{d}\tau}{(1 - B^2\tau^2)^{\frac{m+1}{2}}} = \mathcal{L}_{k,m}(\alpha) - \mathcal{L}_{k,m}(0) \right),$$

$$\mathcal{L}_{2r,\,2p} = \mathrm{A}_{rp} \sin^{-1} B\tau + \sum_{\nu=0}^{n-p-1} \mathrm{B}_{rp}^{(\nu)} \, \tau^{2\nu+1} + \sum_{\nu=0}^{p-1} \mathrm{C}_{rp}^{(\nu)} \frac{\tau^{2r-2\nu-1}}{(1 - B^2\tau^2)^{p-\nu-\frac{1}{2}}}, \tag{A-16a}$$

$$\mathcal{L}_{2r+1,\,2p} = \sum_{\nu=0}^{r-p} \mathrm{D}_{rp}^{(\nu)} \, \tau^{2\nu} \sqrt{1 - B^2\tau^2} + \sum_{\nu=0}^{p-1} \mathrm{E}_{rp}^{(\nu)} \frac{\tau^{2r-2\nu}}{(1 - B^2\tau^2)^{p-\nu-\frac{1}{2}}}, \tag{A-16b}$$

$$\mathcal{L}_{2r,\,2p+1} = \sum_{\nu=1}^{p} \mathrm{F}_{rp}^{(\nu)} \frac{\tau^{2r+1}}{(1 - B^2\tau^2)^{p-\nu+1}} + \sum_{\nu=0}^{r-1} \mathrm{G}_{rp}^{(\nu)} \, \tau^{2r-2\nu-1} + \mathrm{H}_{rp} \ln \frac{1 + B\tau}{1 - B\tau}, \tag{A-16c}$$

$$\mathcal{L}_{2r+1,\,2p+1} = \sum_{\nu=1}^{p} \mathrm{J}_{rp}^{(\nu)} \frac{\tau^{2r+2}}{(1 - B^2\tau^2)^{p-\nu+1}} + \sum_{\nu=0}^{r-1} \mathrm{K}_{rp}^{(\nu)} \, \tau^{2r-2\nu} + \mathrm{M}_{rp} \ln (1 - B^2\tau^2), \tag{A-16d}$$

în care

$$\mathrm{A}_{rp} = \frac{(-1)^p \, p! \, (2r)!}{2^{2(r-p)} \, r! \, (2p)! \, (r-p)! \, B^{2r+1}}; \quad \mathrm{B}_{rp}^{(\nu)} = -\frac{2^{2\nu}(\nu!)^2}{(2\nu+1)!} \mathrm{A}_{rp},$$

$$\mathrm{C}_{rp}^{(\nu)} = 2 \frac{(-1)^\nu (2p-2\nu-2)! \, (r-\nu)! \, p! \, (2r)!}{(p-\nu-1)! \, (2r-2\nu)! \, r! \, (2p)!},$$

$$\mathrm{D}_{rp}^{(\nu)} = \frac{(-1)^p \, 2^{2(r-\nu)} \, r! \, p! \, (2\nu)! \, (r-p)!}{(2p)! \, (p-\nu-1)! \, (r-\nu)! \, B^{2(\nu+1)}},$$

$$\mathrm{F}_{rp}^{(\nu)} = \frac{(-1)^{\nu+1} (r-p)! \, (2r-2p+2\nu-2)!}{2^{2\nu-1} (2r-2p)! \, p! \, (r-p+\nu-1)!},$$

$$\mathrm{G}_{rp}^{(\nu)} = \frac{(-1)^{p+1} (r-p)! \, (2r)!}{2^{2p} \, (2r-2\nu-1) \, r! \, (2r-2p)! \, B^{2(\nu+1)}},$$

$$\mathrm{H}_{rp} = \frac{(-1)^p \, (r-p)! \, (2r)!}{2^{2p+1} \, r! \, (2r-2p)! \, B^{2r+1}},$$

$$\mathrm{I}_{rp}^{(\nu)} = \frac{(-1)^{\nu+1} (p-\nu)! \, (r-p+\nu-2)!}{2 \cdot p! \, (r-p-1)!},$$

$$K_{rp}^{(\nu)} = \frac{(-1)^{p+1}\, r\,!}{2\,(2r-2\nu)\;p\,!\,(r-p)\,!\;B^{2r+1}}\;;\quad M_{rp} = \frac{(-1)^{p+1}\, r\,!}{4\cdot p\,!\;B^{2(r+1)}},$$

$$\mathcal{H}_{k,m}(s) = \int \frac{\mathcal{L}_{km}\,d\tau}{(\tau-s)\sqrt{1-B^2\tau^2}} \qquad \left(\mathcal{H}_{k,m}(0,\alpha;s) = \int_0^{\alpha} \frac{\mathcal{L}_{km}\,d\tau}{(\tau-s)\sqrt{(1-B^2\tau^2)}}\right),$$

$$\mathcal{H}'_{km}(s) = \int \frac{\mathcal{L}_{km}\,d\tau}{\tau - s}. \qquad \text{(A-17)}$$

$\mathcal{H}_{k,m}(0, \alpha; 0)$ se ia totdeauna în valoare principală.

Se poate vedea că această integrală se reduce la calculul integralelor

$$\mathcal{L}_{km},\ \mathcal{J}_k,\ \text{si}\,x = \int \frac{\sin x}{x}\,dx \text{ și } \text{li}\,x = \int \frac{dx}{\ln x}.$$

Pentru mai multe detalii vezi volumul *Integraltafel*, Erster Teil, *Unbestimmte Integrale* de W. Gröbner și N. Hofreiter, Viena, Springer Verlag, 1949—1950, precum și referința [3].

Primită la redacție la 20 iunie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. Elie Carafoli, Adriana Năstase, *Minimum Drag Thin Triangular Wing in Supersonic Flow*, Revue de Mécanique Appliquée, **II**, *5*, (1957).
2. — *Трапециевидные крылья с минимальным лобовым сопротивлением в сверхзвуковом потоке*, Механика, I (1961), Москва.
3. — *On the Minimum Drag Problem of the Wing of Sy mmetrical Thickness in Supersonic Flow*, Revue de Mécanique Appliquée, **VII**, *2* (1962).
4. — *L'utilisation de la methode des residus dans le probleme de resistance minimum de l'aile trapezoidale en courant supersonique*, Archivum Mechaniki Stosowanej, Warszawa **16**, *3*, (1964).
5. Năstase Adriana, *Der Dünne Kreuzflügel mit minimal widerstand bei Uberschallströmung*, Dresden, November 1964. Va fi publicată în Revue de Mécanique Appliquée, 1966.
6. Elie Carafoli, *Extension of conical motions to quasiconical 'motions*, Revue de Mécanique Appliquée **X**, *3* (1965).
7. — *High Speed Aerodynamics*, București, Edit. tehnică, 1956.
8. Elie Carafoli, Mircea Ionescu, *Ecoulements coniques d'ordre superieur autour des ailes triangulaires minces ou à épaisseur symétrique*, Revue de Mécanique Appliquée, **II**, *1* (1957).
9. Paul Germain, *La théorie des mouvements homogenes et son application au calcul des certaines ailes delta en regime superisonique*, La Recherche Aeronautique *7* (1949).
10. Elie Carafoli, Beatrice Horovitz, *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour d'une aile triangulaire à plaque normale*, Revue de Mécanique Appliquée, **II**, *2* (1957).

ASUPRA TEORIEI HIDRODINAMICE A REȚELELOR DE PROFILE[1]

de I. L. POPESCU
Universitatea București

532

În lucrare se consideră problema determinării mișcării fluide în jurul unei rețele de profile de o formă oarecare plasate într-un curent de fluid perfect și incompresibil de viteză dată la infinit amonte. Folosind dezvoltarea în serie uniform convergentă a funcției cotangentă care intervine în problemă și neglijînd puterile inversului pasului τ mai mari decît un anumit număr finit, se găsesc formule efective prin care se exprimă elementele hidrodinamice. Se tratează de asemenea cazul particular al rețelelor formate din plăci plane și se compară rezultatele cu cele riguroase.

Se studiază mișcarea unui fluid perfect incompresibil în jurul rețelelor de profile avînd o formă oarecare.

Se demonstrează că problema la limită care se pune (determinarea mișcării fluide cînd se dă viteza sa la infinit amonte, conturuile profilelor fiind linii de curent) se reduce la rezolvarea unei probleme la limită pentru profilul izolat situat într-un curent fluid a cărui mișcare are un potențial complex dat și care substituie în mod aproximativ perturbațiile produse de prezența celorlalte profile din rețea.

Se determină elementele mișcării fluide în aproximația admisă.

Metoda de aproximare propusă se aplică la rețeaua de plăci plane pentru care există soluție exactă și se compară rezultatele. Se conchide că aproximația făcută convine pentru profilele a căror coardă este mai mică decît pasul ($l < \tau$), și anume, dacă $\frac{2l}{\tau} < 0{,}6$, eroarea este mai mică decît 0,07.

Procedeul folosit poate fi pus în legătură cu rezultatele lui G. I. Taylor (1), S. Goldstein (2), R. M. Morris (3), E.E. Jones (4), care se referă la profilul izolat situat într-un curent fluid neuniform.

[1]) Prezentată la conferința de mecanică, București, septembrie 1965.

ST. CERC. MEC. APL. TOM 23 NR. 6 P. 1473–1481 BUCUREȘTI 1966

Un alt procedeu a folosit S. G. Samoilovici (5) pentru cazul rețelei de cercuri.

1. PUNEREA PROBLEMEI

Considerăm o rețea de profile de o formă oarecare plasată într-un curent fluid perfect, incompresibil de viteză complexă

$$w_1 = u_1 - iv_1 = V_1 e^{-i\alpha_1} \tag{1}$$

la infinit amonte.

Presupunem mișcarea fluidă plană, permanentă și irotațională. Se știe că, la trecerea sa prin rețeau de profile, curentul fluid suferă o deviație și viteza sa complexă la infinit aval devine

$$w_2 = u_2 - iv_2 = V_2 e^{-i\alpha_2}. \tag{2}$$

Configurația geometrică a rețelei de profile este determinată dacă se dau forma unui profil și perioada $\omega = \tau e^{i\beta}$ a rețelei, unde τ este pasul, iar β unghiul de înclinare al rețelei față de o direcție paralelă la corzile profilelor din rețea.

Problema care se pune este de a determina mișcarea fluidă cînd se dă viteza la infinit amonte (1) și cînd contururile profilelor sînt linii de curent.

Notăm prin $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ potențialul complex al mișcării fluide și prin $w(z) = \dfrac{df}{dz} = u(x, y) - iv(x, y)$ viteza sa complexă, unde $z = (x + iy)$ este afixa unui punct din domeniul ocupat de fluid. Aceste funcții trebuie să fie funcții periodice de perioadă ω.

Se găsește [6] pentru $w(z)$ următoarea expresie :

$$w(z) = w_m + \frac{1}{2\omega i}\int_C w(\zeta) \operatorname{ctg}\frac{\pi}{\omega}(z - \zeta)\, d\zeta, \tag{3}$$

unde C este conturul unui profil oarecare din rețea, iar w_m o constantă pe care o vom determina.

Pentru a determina pe w_m vom ține seama că avem

$$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{\omega}(z - \zeta) = \pm i, \tag{4}$$

cînd y rămîne cuprins într-o bandă de periodicitate.

Trecînd la limită în (3) pentru $x \to \pm\infty$ și ținînd seama de (1), (2) și (4), avem

$$w_1 = w_m - \frac{1}{2\omega}\int_C w(\zeta)\, d\zeta, \quad w_2 = w_m + \frac{1}{2\omega}\int_C w(\zeta)\, d\zeta$$

sau

$$w_1 = w_m - \frac{\Gamma}{2\omega}, w_2 = w_m + \frac{\Gamma}{2\omega},$$

unde

$$\Gamma = \int_C w(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$$

este circulația vitezei pe conturul C.

Avem deci

$$w_m = \frac{w_1 + w_2}{2}. \tag{5}$$

Observație. Se vede că, dacă $\Gamma = 0$, deflexiunea curentului fluid este nulă ($w_1 = w_2$). Lucrul acesta este în acord cu o teoremă demonstrată în disertația noastră, unde se arată că și reciproca este adevărată

2. METODĂ DE APROXIMARE PENTRU DETERMINAREA FUNCȚIEI w (z)

Ne folosim de faptul că pentru $|z - \zeta| < \tau$ avem următoarea dezvoltare în serie:

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\omega}(z-\zeta) = \frac{\omega}{\pi(z-\zeta)} - \left[\frac{\pi}{3\omega}(z-\zeta) + \frac{\pi^3}{45\omega^3}(z-\zeta)^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{2\pi^5}{945\omega^5}(z-\zeta)^5 + \ldots + \frac{2^{2n} B_n\, \pi^{2n-1}}{2(2n)!\, \mathrm{i}\omega^{2n-1}}(z-\zeta)^{2n-1} + \ldots\right], \tag{6}$$

unde B_n sînt numerele lui Bernoulli.

Seria din paranteza dreaptă, fiind uniform convergentă în domeniul considerat, poate fi integrată termen cu termen și (3) se va scrie

$$w(z) = w_m + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{w(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta - \left[\frac{\pi}{6\mathrm{i}\omega^2}\int_C w(\zeta)(z-\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi^3}{90\mathrm{i}\omega^4}\int_C w(\zeta)(z-\zeta)^3\mathrm{d}\zeta + \ldots + \frac{2^{2n} B_n\, \pi^{2n-1}}{2(2n)!\, \mathrm{i}\omega^{2n}}\int_C w(\zeta)(z-\zeta)^{2n-1}\mathrm{d}\zeta + \ldots\right], \tag{7}$$

care este de forma

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + w_p(z), \tag{7'}$$

unde a_n sînt cantități complexe ce nu depind de z, iar $w_p(z)$ este viteza complexă pentru profilul izolat.

Dacă notăm

$$w^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{8}$$

(7′) se scrie

$$w(z) = w^*(z) + w_p(z). \tag{7''}$$

Formula (7″) arată că determinarea elementelor mișcării fluide în jurul rețelelor de profile se reduce la determinarea scurgerii fluide în

jurul unui singur profil situat într-un curent fluid de viteză complexă $w^*(z)$, dată de (8). Interpretarea hidrodinamică a funcției $w^*(z)$ este imediată : dacă ne fixăm atenția asupra unui profil oarecare din rețea, funcția $w^*(z)$ poate fi considerată că reprezintă viteza complexă datorită prezenței în masa fluidă a celorlalte profile din rețea.

Notăm prin $\psi = \psi^* + \Psi$ funcția de curent a mișcării fluide, unde ψ^* este funcția de curent a curentului fluid neperturbat și Ψ funcția de curent a mișcării fluide datorite prezenței profilului. Conturul (C) fiind linie de curent, va trebui ca pe el să avem

$$\psi = 0. \tag{9}$$

Reluăm metoda folosită pentru cazul profilului izolat care constă în reprezentarea conformă [2]) a exteriorului conturului C pe exteriorul cercului K de rază r, prin funcția normată la infinit

$$z = Z + \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{Z} + \frac{\lambda_2}{Z^2} + \ldots, \tag{10}$$

unde $z = x + iy$ este planul fizic, iar $Z = X + iY$ este planul transformat.

Dacă profilul (C) este plasat într-un curent fluid de viteză complexă $w_\infty = V_\infty e^{-i\alpha}$ la infinit, atunci se știe că potențialul complex al mișcării în jurul cercului K este dat de funcția

$$F(Z) = w_\infty Z + \overline{w}_\infty \frac{r^2}{Z} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \log Z, \tag{11}$$

unde constanta Γ_0 se determină din condiția

$$\left(\frac{dF}{d\tau}\right)_{Z_0 = re^{i\alpha_0}} = 0$$ (Z_0 este afixa punctului de pe cerc corespunzătoare vîrfului profilului).

Rezultă :

$$\Gamma_0 = 4\pi r \, V_\infty \sin(\alpha_0 - \alpha). \tag{12}$$

În cazul nostru avem de determinat o funcție $F(z) = f - f^*$, olomorfă în fiecare punct la distanța finită, cînd se cunoaște partea sa imaginară pe contur.

Într-adevăr, potențialul complex al mișcării fluide se poate scrie sub forma

$$f(z) = f^*(z) + F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n + F(z), \tag{13}$$

unde $f^*(z)$ este potențialul complex al mișcării curentului fluid neperturbat.

Condiția la limită se scrie

$$\operatorname{Im}\{f(z)\}_C = 0. \tag{14}$$

[2]) Dacă profilul are un vîrf ascuțit, transformarea considerată nu mai este conformă în acest punct, ceea ce conduce în general la o viteză infinită a fluidului, lucru ce se poate evita prin condiția lui Jukovski.

Observînd că pe cercul K de ecuație $|Z| = r$ avem

$$\operatorname{Im}\left\{A_m Z^m + \overline{A}_m \frac{r^{2m}}{Z^m}\right\} = 0, \quad (m\text{-număr natural}), \tag{15}$$

se verifică imediat că funcția

$$f(Z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n Z^n + \overline{c}_n \frac{r^{2n}}{Z^n}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\log Z \tag{16}$$

satisface condițiile puse. Aici s-a notat prin Γ circulația în jurul profilului (C) plasat în curentul neperturbat de forma seriei din (13).

Forțele care acționează asupra unui profil din rețea se determină din teorema generalizată a lui Jukowski, care se scrie

$$R = \rho V_m \Gamma, \tag{17}$$

unde ρ este masa specifică, iar V_m este modul vitezei medii asimptotice w_m.

Metoda de aproximare pe care o propunem constă în a lua din seria (13) primii doi termeni, ceea ce revine la a neglija puterile lui $|\omega|$ de la a patra în sus.

După (7), luînd același grad de aproximație, circulația Γ se poate pune sub forma

$$\Gamma = \Gamma_0 + \frac{\Gamma_1}{\tau^2} + 0(\tau^{-4}), \tag{18}$$

unde Γ_0 este circulația în jurul profilului izolat ($\tau = \infty$).

De asemenea avem

$$w(z) = w_m + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{\pi}{6i\omega^2}\int_C w(\zeta)\,(z-\zeta)\,d\zeta + 0(\tau^{-4}) \tag{19}$$

$$w^*(z) = w_m + \frac{\pi q_1}{6i\omega^2} - \frac{\pi\Gamma}{6i\omega^2}\,z, \tag{20}$$

unde, cu același grad de aproximare și ținînd seama de (10) și (11),

$$\begin{aligned} q_1 = \int_C \zeta w(\zeta)\,d\zeta \sim \int_C \zeta\, w_p(\zeta)\,d\zeta = \int_K \left(Z + \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{Z} + \right. \\ \left. + \dots\right)\left(w_\infty - \overline{w}_\infty \frac{r^2}{Z^2} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i}\frac{1}{Z}\right) dZ = \\ = 2\pi i\left(\lambda_1 w_\infty - r^2\,\overline{w}_\infty + \frac{\lambda_0\Gamma_0}{2\pi i}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Din (20), prin integrare în raport cu z, obținem

$$f^*(z) = \left(w_m + \frac{\pi q_1}{6i\omega^2}\right) z - \frac{\pi\Gamma_0}{12i\omega^2}\,z^2 = b_1 z + b_2 z^2, \tag{22}$$

unde

$$b_1 = w_m + \frac{\pi q_1}{6i\omega^2}, \quad b_2 = -\frac{\pi\Gamma_0}{12i\omega^2} \tag{22'}$$

(Γ a fost înlocuit prin Γ_0, deoarece păstrăm același grad de aproximație.)

Ținînd seama de (10), (22) devine

$$f^*(Z) = b_1\left(Z + \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{Z} + \dots\right) + b_2\left(Z + \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{Z} + \dots\right)^2 + \dots \tag{23}$$
$$= b_2 Z^2 + (2\lambda_0 b_2 + b_1)Z + \dots$$

În aproximația admisă, coeficienții c_n din (16) au următoarele valori:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= 2\lambda_0 b_2 + b_1 \\ c_2 &= b_2 \\ c_n &= 0 \quad (n = 3, 4, \dots). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Avem

$$f(Z) = b_2 Z^2 + (2\lambda_0 b_2 + b_1)Z + \tag{25}$$
$$+ \overline{b}_2 \frac{r^4}{Z^2} + \overline{(2\lambda_0 b_2 + b_1)} \frac{r^2}{Z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log Z.$$

Constanta Γ o vom determina din condiția

$$\left(Z \frac{df}{dZ}\right)_{Z = re^{i\alpha_0}} = 0,$$

de unde

$$\Gamma = 4\pi \ \mathrm{Im}\ \{2\ b_2 r^2 e^{2i\alpha_0} + (2\lambda_0 b_2 + b_1) r\, e^{i\alpha_0}\}. \tag{26}$$

Coeficienții care intră în expresia lui Γ sînt calculați prin (22') și expresia (17) ne va da forțele care acționează asupra profilului, cu aproximația admisă.

După cum am spus în introducerea acestei lucrări, o metodă pentru determinarea potențialului complex corespunzător mișcării unui cilindru într-un curent dat a fost elaborată de R. M. Morris [3.II], care a presupus că scurgerea fluidă căutată rezultă din suprapunerea:

a) scurgerii fluide datorite mișcării corpului solid într-un fluid care se află în repaus la mari distanțe;

b) mișcării fluide provenite din prezența corpului solid care se află în repaus într-un curent fluid dat.

E. E. Jones [4] s-a ocupat de aceeași chestiune studiind mișcarea unui cilindru într-un curent fluid definit de un potențial complex neperturbat Ω_0 de forma $\Omega_0 = \sum_{n=1}^{4} A_n z^n$, pentru care a determinat elementele mișcării fluide. De altfel metoda este aplicabilă și pentru cazul cînd Ω_0 este un polinom în z de un grad oarecare (finit). Observînd că viteza este nemărginită la mari distanțe, autorul afirmă că dacă rezultatele

sale și-ar putea găsi o utilitate practică, ele trebuie considerate că reprezintă mișcarea fluidă numai în vecinătatea conturului profilului.

În cazul nostru, rezultatele sînt valabile în domeniul în care are loc dezvoltarea (6).

3. CAZ PARTICULAR. SCURGEREA FLUIDĂ ÎN JURUL REȚELELOR FORMATE DIN PLĂCI PLANE

Această problemă are soluție exactă [7]. Pentru a determina eroarea făcută prin aproximația admisă, vom compara rezultatele obținute cu cele riguroase.

Reprezentarea conformă a plăcii AB pe exteriorul cercului K de rază r din planul Z este dată de

$$z = Z + \frac{r^2}{Z}, \tag{27}$$

deci

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = r^2,\ \lambda_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots), \dfrac{l}{2} = r,\ \alpha_0 = 0, \\ Z_0 = r = \dfrac{l}{2}. \end{cases} \tag{28}$$

Fie $w_\infty = V_\infty e^{-i\alpha}$ viteza complexă a curentului neperturbat.

Se notează prin K raportul

$$K = \frac{\Gamma_r}{\Gamma_0} = \begin{cases} \dfrac{\tau}{\pi l} \operatorname{th} \dfrac{\pi l}{\tau}, & \text{pentru } \beta = \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\tau}{\pi l} \operatorname{tg} \dfrac{\pi l}{\tau}, & \text{pentru } \beta = 0, \end{cases}$$

unde Γ_r este circulația în jurul unui profil din rețea, iar Γ_0 circulația în jurul profilului izolat.

Să notăm prin K^* raportul $K^* = \dfrac{\Gamma}{\Gamma_0}$, unde Γ este dat de (26) și Γ_0 de (12), și să luăm mai întîi $\beta = \dfrac{\pi}{2}$; avem deci $\omega = i\tau$ și

$$q_1 = 2\pi i (r^2 V_\infty e^{-i\alpha} - r^2 V_\infty e^{i\alpha}) = 4\pi V_\infty r^2 \sin \alpha,$$

$$b_1 = V_\infty e^{-i\alpha} + \frac{\pi^2 i V_\infty l^2 \sin \alpha}{6\tau^2},$$

$$b_2 = -\frac{\pi^2 l V_\infty \sin \alpha}{6i\tau^2},$$

$$Z_0 = \frac{l}{2};$$

(26) va deveni

$$\Gamma = 2\pi\, l\, \mathrm{Im}\, \{b_2\, l + b_1\} = \frac{2\pi l\, (\pi^2 l^2 - 3\tau^2)}{3\tau^2}\, V_\infty \sin\alpha. \qquad (26')$$

Deci

$$K^* = 1 - \frac{\pi^2 l^2}{3\tau^2},$$

sau

$$K^* = 1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{2l}{\tau}\right)^2,$$

ceea ce reprezintă primii doi termeni din dezvoltarea

$$K = \frac{\tau}{\pi l}\,\mathrm{th}\,\frac{\pi l}{\tau} = 1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{2l}{\tau}\right)^2 + \frac{\pi^4}{120}\left(\frac{2l}{\tau}\right)^4 - \dots$$

și eroarea comisă este mai mică decît primul termen neglijat.

Pentru a compara valorile aproximative K^* ale raportului $\frac{\Gamma}{\Gamma_0}$ cu valorile riguroase K ale raportului $\frac{\Gamma_\tau}{\Gamma_0}$, formăm următorul tabel:

$\frac{2l}{\tau}$	K	K^*	Eroarea
0,1	0,992	0,992	0
0,2	0,968	0,968	0
0,3	0,932	0,928	0,004
0,4	0,886	0,872	0,014
0,5	0,835	0,800	0,035
0,6	0,781	0,712	0,069
0,7	0,728	0,608	0,120
0,8	0,677	0,488	0,189
0,9	0,628	0,352	0,276
1,0	0,584	0,178	0,457

Din acest tabel se deduce că aproximația făcută convine pentru profilele a căror coardă este mai mică decît pasul ($l < \tau$), și anume, dacă $\frac{2l}{\tau} \leqslant 0{,}6$, eroarea este mai mică decît 0,07. Se obișnuiește să se spună că în acest caz se are de-a face cu profile de densitate mică.

Cazul $\beta = 0$ se tratează analog.

Primită la redacție la 15 octombrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. G. I. Taylor, *The forces on a body placed in a curved converging stream of fluid*, Proc. Roy. Soc. A. 120 (1928), 260.
2. S. Goldstein, *Steady flight two-dimensional flow past a solid Cylinder in a non-uniform stream, and two-dimensional wind-tunel interference*, ARC R. and M. nr. 1092 (1942).

3. R. M. Morris, *The two-dimensional hydrodynamical theory of moving aerofoils*, I. Proc. Roy. Soc. A. 161 (1937), 406; Idem II, 164 (1938), 346; Idem III, 172 (1939), 213; Idem, IV, 188 (1947), 439.
4. E. E. Jones, *The effect of the non-uniformity of the stream on the aerodynamic characteristics of a moving aerofoil*, The Quarterly Journal Mech. a. Appl. Math., vol. IV, 1 (1951) p. 64—77.
5. С. Г. Самойлович, *Расчет гидродинамических решеток*, R.M.M., *t. XIV*, fasc. 2, 1950, p. 121.
6. Л. И. Седов, *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики*, Москва, 1950, p. 140.
7. С. А. Чаплыгин, *Собрание сочинений*, 1948, т. 11, p. 344.

APLICAREA MIŞCĂRILOR CVASICONICE LA TEORIA ARIPII DELTA CU BORDURILE DE ATAC CURBE [1)]

de E. CARAFOLI

Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

533

Se tratează problema aripii cu borduri de atac curbe în curent supersonic, stabilindu-se expresia vitezei axiale de perturbaţie într-un punct oarecare al aripii, din care rezultă şi presiunea în acelaşi punct.

Într-o lucrare anterioară am stabilit expresia *potenţialului cvasiconic* referitor la mişcarea în jurul aripii delta cu linia bordurilor de atac curbă, puţin diferită de o linie dreaptă medie [1].

Acest potenţial cvasiconic provine din potenţialul conic corespunzător aripii cu bordurile de atac drepte, a cărei expresie generală poate fi pusă sub forma următoare în funcţie de coordonatele x_1, x_2 (fig. 1):

$$\Phi_n = - x_2^n \int \frac{u_{n-1}\, dy}{y^{n+1}}, \tag{1}$$

unde am notat

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \quad u_{n-1} = \frac{U_{n-1}}{x_1^{n-1}}, \tag{2}$$

U_{n-1} fiind viteza axială de perturbaţie în mişcarea conică de ordinul n.

[1)] Publicată şi în „Rev. roum. sci. tech.-Mécanique Appliquée", **11**, *4* (1966) (în limba engleză).

Un studiu cu subiect similar a fost publicat în „Aerotehnica", *2* (1966), sub titlul *Sur la théorie des ailes aux bords d'attaque courbes en-courant supersonique.*

APLICAȚIE LA ARIPA PLANĂ CU BORDURILE DE ATAC SUBSONICE 2

Pentru mișcarea de ordinul unu în jurul aripii triunghiulare nesimetrică (fig. 1), viteza axială de perturbație este

$$\frac{u}{\alpha U_\infty} = \frac{2l_1 l_2 + (l_1 - l_2)\, y}{2E\sqrt{(l_1 - y)\,(l_2 + y)}}\,, \tag{3}$$

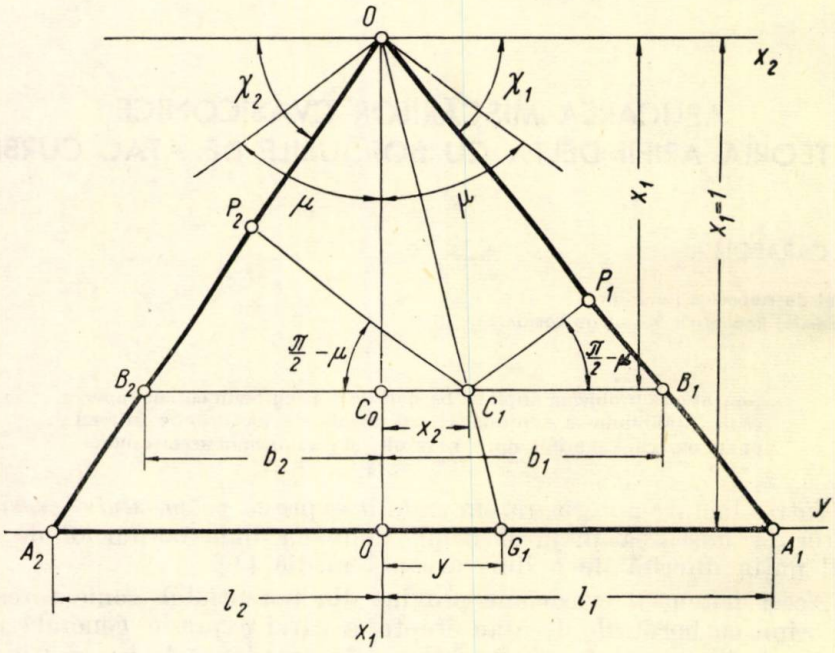


Fig. 1

unde l_1 și l_2 sînt coeficienții unghiulari ai dreptelor care definesc bordurile de atac, dați de relațiile

$$b_1 = x_1 l_1 \quad , \quad b_2 = x_1 l_2, \tag{4}$$

iar E este o constantă perfect determinată în funcție de acești coeficienți și de incidență. Aplicînd mai departe formula de mai sus (1), vom obține potențialul conic

$$\frac{1}{\alpha U_\infty}\,\Phi_1 = \frac{\sqrt{(b_1 - x_2)\,(b_2 + x_2)}}{E}\,. \tag{5}$$

Dacă bordurile de atac sînt curbe (fig. 2), b_1 și b_2 nu mai variază liniar cu x_1 (l_1 și l_2 sînt funcții de x_1), atunci potențialul conic (5) devine un *potențial cvasiconic* și-l vom nota cu Φ_1^*.

Viteza axială cvasiconică u^* rezultă din derivarea acestui potențial

$$\frac{u^*}{\alpha U_\infty} = \frac{1}{\alpha U_\infty}\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_1} = \frac{b_2\dfrac{db_1}{dx_1} + b_1\dfrac{db_2}{dx_1} + x_2\left(\dfrac{db_1}{dx_1} - \dfrac{db_2}{dx_1}\right)}{2E\sqrt{(b_1 - x_2)(b_2 + x_2)}} - \tag{6}$$

$$- \frac{\sqrt{(b_1 - x_2)(b_2 + x_2)}}{E^2}\frac{dE}{dx_1}.$$

Să remarcăm însă că într-un punct C_1, de coordonate x_1, x_2 influența aripii se reduce la porțiunea limitată de liniile Mach C_1P_1 și C_1P_2, iar tangentele la bordurile de atac, așa cum vom arăta mai jos, se referă la punctele P_1 și P_2, de coordonate ξ_1 și ξ_2 date de relațiile

$$\xi_1 + B\beta_1 = \xi_1(1 + Bl_1) = x_1 + Bx_2, \tag{7}$$

$$\xi_2 + B\beta_2 = \xi_2(1 + Bl_2) = x_1 - Bx_2, \tag{7'}$$

$$B = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \operatorname{ctg}\mu, \tag{7''}$$

unde β_1 și β_2 sînt funcții de ξ_1, și ξ_2, după cum b_1 și b_2 sînt funcții de x_1. Din aceste două relații putem scoate deci pe ξ_1 și ξ_2.

Vom vedea într-adevăr că avem (fig. 2)

$$b_1 = \frac{x_1}{\xi_1}\beta_1 = \frac{1 + Bl_1}{1 + By}\beta_1, \tag{8}$$

$$b_2 = \frac{x_1}{\xi_2}\beta_2 = \frac{1 + Bl_2}{1 - By}\beta_2. \tag{8'}$$

Pentru y tinzînd către l_1, vom scrie, cu o foarte bună aproximație,

$$\frac{db_1}{dx_1} \approx \frac{d\beta_1}{dx_1} \approx \frac{d\beta_1}{d\xi_1}, \tag{9}$$

relație perfect exactă pentru $y = l_1$ cînd și $\xi_1 = x_1$. Pe de altă parte, se vede din (6) că, tot pentru $y = l_1$ ($x_2 = b_1$), influența termenului $\dfrac{db_2}{dx_1}$ se anulează, indiferent de valoarea sa. Ne interesează deci cazul cînd y este mic ($By \ll 1$).

Coeficienții lui β_1 și β_2 din (8) variază foarte puțin în funcție de x_1; putem admite deci că aceștia rămîn aproape constanți. În acest caz putem scrie în mod aproximativ, pornind de la relațiile (7),

$$\xi_1 = \frac{x_1(1 + By)}{1 + Bl_1}, \quad \frac{d\xi_1}{dx_1} \approx \frac{1 + By}{1 + Bl_1} \tag{10}$$

și, respectiv,

$$\xi_2 = \frac{x_1(1 + By)}{1 + Bl_2}, \quad \frac{d\xi_2}{dx_1} \approx \frac{1 - By}{1 + Bl_2}. \tag{11}$$

Mai departe vom deduce din (8) cu aceeași aproximație ca mai sus (fig. 2):

$$\frac{db_1}{dx_1} \approx \frac{d\beta_1}{d\xi_1} = \lambda_1 = \operatorname{ctg} \chi_1, \tag{12}$$

$$\frac{db_2}{dx_1} \approx \frac{d\beta_2}{d\xi_2} = \lambda_2 = \operatorname{ctg} \chi_2. \tag{12'}$$

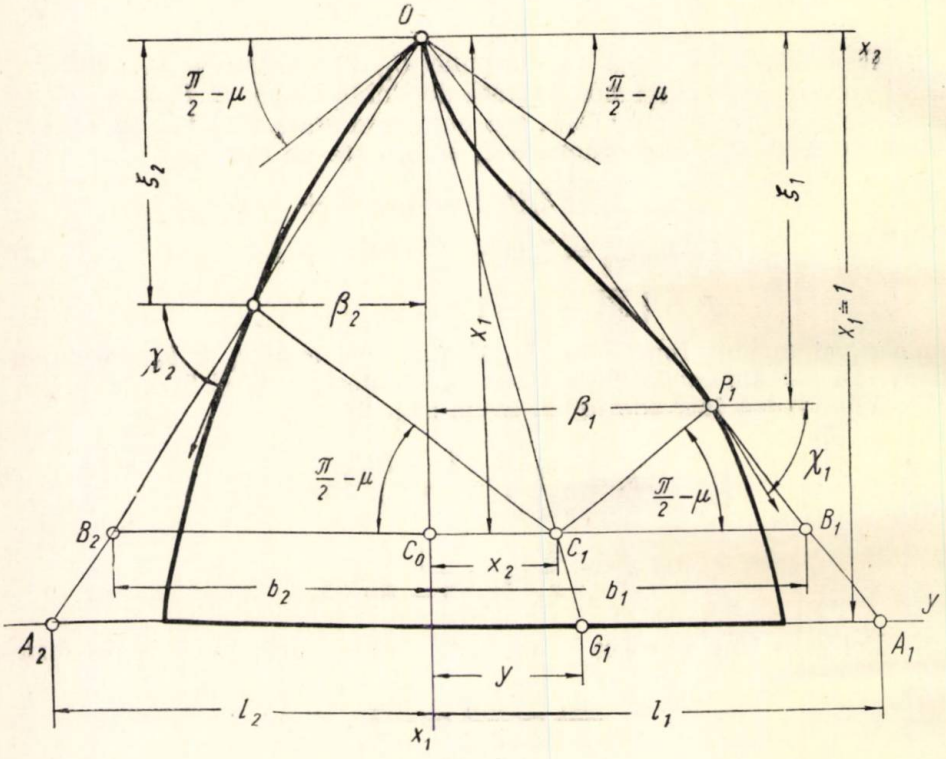


Fig. 2

Cu aceste simplificări și notații, formula (7) va fi pusă în cele din urmă sub forma următoare:

$$\frac{u^*}{\alpha U_\infty} = \frac{l_2\lambda_1 + l_1\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)y}{2E}\sqrt{(l_1 - y)(l_2 + y)} - \frac{x_1\sqrt{(l_1 - y)(l_2 + y)}}{E^2}\frac{dE}{dx_1}. \tag{13}$$

Dacă aripa este simetrică, formulele de mai sus rămîn aceleași și numai punctul de la mijlocul aripii ($y = 0$) beneficiază de proprietatea simetriei, în care caz vom pune

$$l_1 = l_2 = l_0 \quad , \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \tag{14}$$

DETERMINAREA CONSTANTEI E

Pentru aceasta vom remarca că primul termen din membrul al doilea este similar cu cel corespunzător al unei aripi triunghiulare; în acest caz se poate scrie, prin analogie cu rezultatele obținute la acest fel de aripi.

$$E = \frac{(1 + Bl_1)(1 + Bl_2)\,E(k_{12}) - B(l_1 + l_2)\,K(k_{12})}{\sqrt{(1 + Bl_1)(1 + Bl_2)}}, \tag{15}$$

unde $K(k_{12})$ și $E(k_{12})$ sînt integralele eliptice de prima și a doua speță, avînd modulul

$$k_{12} = \sqrt{\frac{(1 - Bl_1)(1 - Bl_2)}{(1 + Bl_1)(1 + Bl_2)}}. \tag{16}$$

Să punem mai departe

$$2l = l_1 + l_2 \tag{17}$$

și să remarcăm că putem scrie în mod aproximativ

$$(1 - Bl_1)(1 - Bl_2) \approx (1 - Bl)^2\,, \quad (1 + Bl_1)(1 + Bl_2) \approx (1 + Bl)^2, \tag{18}$$

de unde rezultă

$$k_{12} \approx \frac{1 - Bl}{1 + Bl}. \tag{19}$$

Indicînd mai departe cu k și respectiv, k',

$$k = \sqrt{1 - B^2l^2}\,, \quad k' = \sqrt{1 - k^2} = Bl \tag{20}$$

și remarcînd că, ținînd seama de acești moduli, relațiile funcționale între integralele eliptice complete ne dau, respectiv,

$$K\left(\frac{1 - Bl}{1 + Bl}\right) = \frac{1 + Bl}{2}\,K(k), \tag{21}$$

$$E\left(\frac{1 - Bl}{1 + Bl}\right) = \frac{1}{1 + Bl}\,(E(k) + Bl\,K(k), \tag{21'}$$

vom putea scrie în cele din urmă

$$E \approx E(k). \tag{22}$$

În ceea ce privește valoarea lui $E(k)$, aceasta poate fi luată din tabelele integralelor eliptice complete. Derivata lui $E(k)$ va fi dată de expresia

$$\frac{dE}{dx_1} = \frac{(B^2K(k) - E(k))\,l}{2(1 - B^2l^2)}\left(\frac{dl_1}{dx_1} + \frac{dl_2}{dx_1}\right), \tag{23}$$

unde și integrala eliptică completă de speța întîia $K(k)$ va fi luată de asemenea din tabele.

Vom găsi mai departe

$$\frac{dl_1}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}\left(\frac{b_1}{x_1}\right) = \frac{\lambda_1 - l_1}{x_1}, \quad \frac{dl_2}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}\left(\frac{b_2}{x_1}\right) = \frac{\lambda_2 - l_2}{x_1}, \tag{24}$$

care vor fi introduse în (23).

Putem însă să calculăm pe $E(k)$ și derivata sa foarte simplu, dîndu-i o dezvoltare convenabilă în funcție de B^2l^2:

$$E(k) = 1 + 0{,}87\ B^2l^2 - 0{,}30\,(B^2l^2)^2, \tag{25}$$

care este foarte apropiată de valoarea exactă. Rezultă astfel

$$\frac{dE}{dx_1} = \frac{2dE}{dl^2}\,l\,\frac{dl}{dx_1} = \frac{2}{x_1}\,B^2l^2\,(0{,}87 - 0{,}60\,B^2l^2)\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l_1 + l_2} - 1\right), \tag{26}$$

care poate înlocui formula (23).

În acest caz, expresia vitezei axiale u^* se va scrie, ținînd seama și de (24),

$$\frac{u^*}{\alpha U_\infty} = \frac{l_2\lambda_1 + l_1\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\,y}{2E(k)\sqrt{(l_1 - y)(l_2 + y)}} - \sqrt{(l_1 - y)(l_2 + y)}\,\frac{2B^2l^2\,(0{,}87 - 0{,}60\,B^2l^2)}{(E(k^2)}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l_1 + l_2} - 1\right), \tag{27}$$

Să remarcăm acum că, în cazul cînd bordurile de atac nu se îndepărtează prea mult de o linie dreaptă medie, se poate scrie

$$l_1 \approx l_2 \approx l \quad , \quad \lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda, \tag{28}$$

în care caz expresia de mai sus a lui u^* se poate pune sub forma simplă următoare:

$$\frac{u^*}{\alpha U_\infty} = \frac{l\lambda}{E(k)\sqrt{l^2 - y^2}} - \sqrt{l^2 - y^2}\,\frac{2B^2l^2\,(0{,}87 - 0{,}60\,B^2l^2)\left(\frac{\lambda}{l} - 1\right)}{(E(k)^2)}, \tag{29}$$

similară cu cea pe care am dat-o, în primă aproximație, în lucrarea noastră anterioară [1].

EXEMPLU ȘI MOD DE APLICAȚIE

Fie o aripă de formă gotică, avînd bordurile de atac de variație parabolică:

$$\beta_1 = l_0\xi_1(1 - \nu\xi_1) \quad , \quad \beta_2 = l_0\,\xi_2(1 - \nu\xi_2), \tag{30}$$

din care deducem respectiv:

$$l_1 = l_0\,(1 - \nu\xi_1) \quad , \quad \lambda_1 = l_0(1 - 2\nu\xi_1), \tag{31}$$

$$l_2 = l_0\,(1 - \nu\xi_2) \quad , \quad \lambda_2 = l_0\,(1 - 2\nu\xi_2), \tag{31'}$$

termeni care intră în expresia vitezei axiale de perturbaţie (27), referitoare la un punct de coordonate x_1, x_2, al căror raport a fost notat cu y (2). Pentru a găsi ξ_1 şi ξ_2 în funcţie de x_1, vom aplica ecuaţiile (8) şi vom găsi aproximativ

$$\xi_1 \approx \frac{x_1 + Bx_2}{1 + Bl_0 - \dfrac{\nu Bl_0 (x_1 + Bx_2)}{1 + Bl_0}}, \tag{32}$$

$$\xi_2 \approx \frac{x_1 - Bx_2}{1 + Bl_0 - \dfrac{\nu Bl_0 (x_1 - Bx_2)}{1 + Bl_0}}, \tag{32'}$$

Prin urmare, într-o secţiune x_1 vom calcula ξ_1 şi ξ_2 în funcţie de x_2, care variază de la $x_2 = 0$ pînă la $x_2 = \beta_1$; pentru acest ultim punct avem în mod exact

$$\xi_1 = x_1. \tag{33}$$

REMARCĂ. Rezultatele obţinute mai sus se referă la teoria clasică a aripii subţiri în curent supersonic în ipoteza perturbaţiilor mici. În acelaşi mod se poate trata aceeaşi problemă, ţinînd seama însă de desprinderea curentului la bordurile de atac subsonice.

Primită la redacţie la 4 aprilie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, *Extension of conical motions to quasi-conical motions*, Rev. roum. sci. techn.-Mecanique Appliquée, **10**, 3 (1965).

AL III-LEA CONGRES INTERNAŢIONAL ASUPRA METODELOR EXPERIMENTALE DE ANALIZĂ A TENSIUNILOR MECANICE

Berlin, 28—31 martie 1966

Între 28 şi 31 martie 1966 a avut loc în Berlinul occidental al III-lea Congres internaţional asupra metodelor experimentale de analiză a tensiunilor mecanice, organizat la Institutul federal pentru încercarea materialelor (Bundesanstalt für Materialprüfung, BAM).

Au participat circa 300 de specialişti din Anglia, Belgia, Bulgaria, Canada, Cehoslovacia, Danemarca, Elveţia, Franţa, Republica Federală Germană, Grecia, Italia, Norvegia, România, Statele Unite ale Americii, Suedia şi Ungaria.

Evident, în număr mare au participat specialişti din R.F. Germană. Din ţara noastră au participat prof. ing. Gh. Buzdugan, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România, conf. ing. O. Rusu de la Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" şi conf. dr. ing. Mircea Arcan de la INCERC.

În cele patru zile ale congresului au fost prezentate 34 de referate, grupate de organizatori pe următoarele teme : fotoelasticitate, măsurarea tensiunilor prin raze Roentgen, metoda *moiré*-urilor, modelare, măsurarea tensiunilor interne, tensometrie electrică rezistivă, metode electrice de măsurare.

Lucrările prezentate în domeniul fotoelasticităţii s-au referit la : un nou procedeu de determinare completă a stării de tensiune într-o secţiune aleasă, folosind interferometrul Saunders-Post (autor V. Szabó, Cehoslovacia) ; folosirea metodei celor mai mici pătrate pentru separarea tensiunilor principale într-un model elastic plan analizat prin procedeul incidenţei oblice ; facilitarea analizei unui număr mare de observaţii prin utilizarea unui disc rotativ şi a unui calculator electronic (I. M. Allison, Anglia) ; dispozitiv înregistrator al birefringenţei cu aplicare la analiza fotoelastică a tensiunilor în plăci de sticlă (C. Guillemet, Franţa) ; modelarea şi cercetarea fotoelastică a zonei de trecere în mediile neomogene (J. Javornický, Praga) ; studiul fotoelastic al rulării cu spin, cu aplicaţie la două sfere care rulează una pe alta rotindu-se în acelaşi timp în jurul unui ax vertical (A.J.C. Lee şi E. Ollerton, Anglia) ; analiza fotoelastică a elementelor alcătuite din semiconductori pentru determinarea deformaţiilor elastice produse de cîmpul de temperatură generat de curentul care traversează semiconductorul (I. Jacob şi K. J. Schmidt—Tiedemann, R.F.G.) ; aplicarea în fotoelasticitate a noilor procedee automate de determinare a axelor şi defazajului într-un mediu birefringent — modelul fotoelastic — , comparînd cu un semnal de referinţă semnalul modulat obţinut prin intermediul unui traductor fotoelectric A. Robert şi J. L. Vernet, Franţa).

ST. CERC. MEC. APL. TOM 23 NR. 6 P. 1491—1494 BUCUREŞTI 1966

În domeniul măsurării tensiunilor cu ajutorul razelor Roentgen, cele două lucrări prezentate au avut ca teme: determinarea tensiunilor remanente făcînd diferența dintre tensiunile datorite solicitării mecanice și cele determinate prin raze X (R. Prümmer și E. Macherauch, R.F. Germană) și prezentarea unui goniometru, fără ax materializat de rotație, destinat determinărilor la piesele de mari dimensiuni (H. Lange, R. F. Germană).

În legătură cu metoda *moiré*-urilor, lucrările prezentate s-au referit la : perfecționarea tehnicii metodei prin realizarea unor rețele rectangulare cu circa 20 de linii pe mm, utilizarea unor rețele diferențiale — rețea de 505 linii pe țol suprapusă peste rețeaua modelului de 500 linii pe țol — pentru sporirea numărului de franjuri (R. Fidler și P. Nurse, Anglia) ; metodă de diferențiere optică pentru interpretarea imaginilor *moiré* la plăci (*moiré de moiré* sau *moiré de ordinul* 2) H. M. de Haas și H. W. Loof, Olanda) ; prelucrarea datelor obținute prin metoda *moiré* folosind filtre optice și numerice pentru eliminarea paraziților din imagine și a unor filtre în cvadratură pentru calculul deplasărilor (C. A. Sciammarella și D. Sturgeon, S.U.A.) ; studiul *moiré*-urilor prin reflexia unei rețele plane pe o suprafață curbă, cu aplicații la încovoierea și vibrația plăcilor J. Ebbeni, Belgia) ; analiza prin metoda *moiré* a suprafețelor cilindrice în care o rețea plană de referință este proiectată oblic pe suprafața unui cilindru lustruit, iar imaginea este suprapusă peste o rețea de referință, obținîndu-se franje de interferență care constituie contururile pantelor parțiale ale suprafeței deformate (P.S. Theocaris, Grecia).

În domeniul modelării, lucrările prezentate s-au referit la : comportarea unor materiale sintetice utiiizate în tehnica modelării (araldit, plexiglas ș.a.) la încărcări și descărcări periodice, scoțînd în evidență influența fluajului (R. K. Müller, R.F. Germană) ; domeniul de comportare liniară a materialelor folosite în fotoelasticitate și ca modele cu referire specială la rășinile poliesterice și epoxidice (J.T. Pindera și E.W. Kiesling, S.U.A.) ; starea de temperatură și tensiunile în barajele de beton prin modelarea cîmpului de temperatură cu un cîmp de forțe masice (P. Todoroff și T. Hristov, Bulgaria) ; stabilirea comportării la fluajul de lungă durată a structurilor folosind modele din materiale plastice (araldit) la scara naturală cu aplicație la elementele folosite drept combustibil nuclear (J. P. Ashford și J. B. Sherwood, Anglia) ; procedee de determinare a tensiunilor în barele de oțel prin măsurarea impedanței, cu aplicație la armătura grinzilor de beton armat (M. Pommeret, Franța) ; încercări asupra unui înveliș suspendat pe cable modelate prin fire de rezistență din aliaj Ni—Cr (V. Askegaard, A. Albers și P. L. Mortensen, Danemarca).

Lucrările în domeniul tensiunilor interne s-au referit la : folosirea mărcilor fotoelastice la măsurarea tensiunilor reziduale pe baza studiului franjurilor în jurul găurilor (H. G. Gibbs, C. J. Hooke și J.J. Stagg, Anglia) ; determinarea tensiunilor locale reziduale prin prelucrarea cu scîntei pentru îndepărtarea stratului superficial al materialului și studierea deformației de încovoiere produse (A. A. Denton și J. T. Hotten, Anglia).

În domeniul tensometriei s-au prezentat lucrări privind : determinarea după trei direcții a tensiunilor interne ale elementelor, folosind captori rezistivi monofilari îngropați în găuri date pe direcțiile studiate (Chr. Rohrbach și N. Czaika, Berlin) ; cercetări teoretice și experimentale privind mărcile tensometrice, în special în ce privește contracția transversală (J. Burbach și P. Vierling, R. F. Germană) ; traductori-folie încorporați în model pentru determinarea tensiunilor (A. Bazergui și M. L. Meyer, Anglia) ; procedee de metalizare a unor materiale ceramice pentru utilizarea traductorilor rezistivi la elemente supuse la temperaturi ridicate W. Aicher și E. Johst, R. F. Germană).

În legătură cu metodele electrice de măsurare a tensiunilor au mai fost prezentate : cercetări privind sensibilitatea traductorilor semiconductori și metodele de ajustare a temperaturii semiconductorilor (A. J. Francken, Olanda) ; diafragmă de presiune piezorezistivă din silicon utilizată în analogia de membrană (W. Thorp și T. Jones, Anglia) ; instalație automată pentru măsurarea la suprafață a unui mare număr de tensiuni (P. E. Klein, R. F. Germană) ; folo-

sirea tensometriei la organe de mașini în mișcare de rotație cu turații ridicate (P. de Waard, Olanda); măsurarea tensiunilor pe pale de elicopter și transmiterea prin radio a rezultatelor (D. Janssen, R. F. Germană); măsurări de tensiuni dinamice printr-o tehnică de corelație specială (R. Wereldsma, Olanda).

Organizarea congresului a fost ireproșabilă; lucrările s-au desfășurat în trei limbi (engleză, franceză și germană), asigurîndu-se traducerea simultană. Prezentarea referatelor a fost urmată de numeroase discuții. Cu prilejul congresului a fost organizată o expoziție de aparatură folosită în studiul experimental al stării de eforturi.

Oliviu Rusu

RECENZII

T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1966, 594 p. şi 151 fig.

Studiul curgerii fluidelor multifazice prin medii poroase a cunoscut în ultimul timp o dezvoltare amplă şi profundă. Lipsa unei monografii care să prezinte cît mai complet şi mai unitar teoria hidrodinamică a curgerii fluidelor multifazice, în lumina rezultatelor obţinute pînă în prezent, era resimţită de un cerc larg de specialişti.

Fiind prima lucrare de acest gen apărută în literatura de specialitate, cartea prof. T. Oroveanu aduce o preţioasă contribuţie la elucidarea cunoaşterii particularităţilor curgerii fluidelor multifazice prin medii poroase, atît prin originalitatea expunerii, cît şi prin prezentarea de soluţii efective ale unor probleme complexe de mare actualitate practică.

Printre cele mai importante aplicaţii ale teoriei curgerii fluidelor multifazice expuse în monografie, se află mai ales cele care se referă la exploatarea raţională a zăcămintelor de hidrocarburi fluide, unde, în condiţii reale, curgerea fluidelor este în general multifazică.

Lucrarea conţine şapte capitole. În capitolele I şi II, autorul, în dorinţa de a face lectura monografiei cît mai independentă, prezintă principalele proprietăţi fizice ale mediilor poroase. Capitolul III este consacrat expunerii bazelor teoretice necesare descrierii matematice a curgerii fluidelor multifazice, care sînt utilizate în capitolele ulterioare. În celelalte patru capitole se face o expunere amplă şi profundă a problemelor fundamentale în curgerea fluidelor multifazice prin medii poroase, care de fapt constituie premisele exploatării ştiinţifice a zăcămintelor de hidrocarburi fluide. Printre acestea menţionăm : deplasarea suprafeţei de contact dintre două fluide într-un mediu poros, scurgerea simultană a fluidelor inmiscibile şi miscibile prin medii poroase, precum şi scurgerea cu schimbare de fază.

Deosebit de meritoriu pentru autor considerăm şi faptul că a reuşit să expună pentru prima oară în mod clar şi precis, la un nivel matematic necesar unei fundamentări riguroase a problemelor studiate, o interpretare fizică a rezultatelor obţinute în bună concordanţă cu observaţiile experimentale, indicîndu-se totodată şi posibilităţile de aplicare ale acestora.

Prin varietatea mare a problemelor studiate, de actualitate teoretică pentru dezvoltarea teoriei hidrodinamice a curgerii fluidelor multifazice prin medii poroase, a căror importanţă practică este astăzi unanim recunoscută, precum şi prin bogăţia de fapte şi de idei noi, monografia prof. T. Oroveanu este valoroasă atît pentru specialişti, cît şi pentru aceia care doresc să ia un prim contact cu acest domeniu nou de cercetare.

H. Pascal

ST. CERC. MEC. APL. TOM 23 NR. 6 P. 1495–1498 BUCUREŞTI 1966

C. F. KOLLBRUNNER, K. BASLER, *Statik der Wölbtorsion und der gemischten Torsion* (Statica torsiunii prin deplanare și a torsiunii mixte), Schweitzer Stahlbau Vereinigung (Camera elveţiană de construcţii metalice), Mitteilungen der Technischen Kommission, (Comunicările Comisiei tehnice), Zürich 31, Verlag Schweitzer Stahlbau-Vereinigung 1965, 84 p.

Această lucrare continuă trei monografii precedente ale aceloraşi autori [1]; primele două monografii se referă la torsiunea barelor drepte după B. de Saint-Venant, iar a treia monografie este dedicată problemelor de rezistenţă a materialelor puse de răsucirea prin deplanare a secţiunii transversale şi apariţia tensiunilor normale pe această secţiune. În cele două părţi ale prezentei lucrări se tratează problemele corespunzătoare de statica construcţiilor.

Prima parte este dedicată staticii răsucirii prin deplanare. După o scurtă introducere privitoare la modul de a pune problema, se trece la un studiu al liniilor de influenţă; menţionăm suprafeţele de influenţă ale tensiunilor normale. O atenţie deosebită este acordată grinzii continue pe mai multe reazeme, stabilindu-se şi utilizîndu-se ecuaţia celor trei bimomente.

Partea a doua a lucrării tratează problema răsucirii mixte (în care partea care provine din torsiunea după Saint-Venant este de acelaşi ordin de mărime cu cea care provine din deplanare). Se stabilesc ecuaţiile fundamentale ale problemei şi se dau unele soluţii, în special pentru bara simplu rezemată. Autorii trec apoi la cazul grinzii continue, stabilind ecuaţia celor trei bimomente corespunzătoare. Se dau şi unele exemple de calcul pentru profile în I. Menţionăm şi unele metode de aproximaţie introduse.

Ca şi monografiile precedente, şi aceasta reprezintă o contribuţie utilă la practica de calcul a construcţiilor metalice; ea este scrisă clar şi concis, putînd fi folosită în proiectare şi, ca material informativ, în cercetarea ştiinţifică.

P. P. Teodorescu

H. E. BARNACLE şi G. E. WALKER, *Mechanics of Machines* (Mecanica maşinilor), vol. 2, Pergamon Press, 1965, VII + 210 p. +128 fig.

Ca şi prima parte, această lucrare are un pronunţat caracter didactic, cuprinzînd partea a II-a a tematicii cerute unui inginer mecanic în Anglia. Materialul prezentat este împărţit în opt capitole, care cuprind elemente de dinamica tehnică, vibraţii şi control automat.

Astfel, capitolul I se ocupă de acceleraţiile din lanţurile cinematice ale mecanismelor, cu aplicaţii la came, mecanisme bielă-manivelă etc., în timp ce capitolul II este consacrat dispozitivelor cu curea şi celor de frînare. Tot în grupa mecanismelor de largă utilizare se găsesc roţile dinţate elicoidale cu problemele lor de forţe de contact şi moment de transmisie (cap. III), ca şi mecanismul bielă-manivelă, căruia îi este consacrat capitolul IV. Pentru a întregi şi noţiunile de dinamică tehnică, în capitolul V este tratată acţiunea giroscopică în elementele de maşini, iar capitolul VII corespunde dinamicii solidului rigid, cu problemele specifice legate de teorema momentului cinetic, de ecuaţiile lui Euler, de efectul giroscopic, cinematica rigidului, de energia cinetică etc.

[1] Recenzate în „St. cerc. mec. apl., **16**, *4*; **17**, *6* (1964).

Capitolul VI, cel mai voluminos (60 p), introduce elemente de vibrații în mașini, și anume vibrații libere, vibrații forțate, de torsiune, reprezentare vectorială, rezonanță, criteriul de stabilitate Routh-Hurwitz etc.

Controlului automat îi este consacrat cel mai interesant capitol. Se descriu diagramele-bloc ale lanțurilor de componente, solicitări impulsive, performanțe, amortizare vîscoasă, funcțiile de transfer, stabilitate după Nyquist, relee etc.

Modul de tratare este deosebit de ingenios : o combinare reușită de metode analitice carteziene, vectoriale și grafice, bazate pe intuiție și observare.

Stilul este foarte concis și lectorul trebuie să parcurgă această carte, utilă tuturor inginerilor mecanici, cu o atenție mereu trează. Numeroasele exemple și aplicații ilustrează cu claritate problemele prezentate, cele mai multe cu directe utilizări tehnice.

Șt. N. Săvulescu

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE MECANICĂ APLICATĂ

1966

INDEX ALFABETIC

STUDII	Tomul	Nr.	Pag.
ANASTASESCU DECEBAL, MUNTEANU I., Consideraţii asupra unor procedee de calcul al cadrelor spaţiale	21	1	255
ANASTASESCU DECEBAL, MUNTEANU I., Grindă dublă în consolă	21	2	339
BĂLAN ŞTEFAN, IFRIM M., PACOSTE C., Criteriul echivalentului dinamic în calculul structurilor antiseismice	23	6	1359
BARBĂLAT I., FILOTTI I., GUNDISCH O., HALANAY A., O problemă de vibraţii neliniare în studiul suspensiei automobilului	22	4	1069
BARBĂLAT I., HALANAY A., O problemă de vibraţii neliniare în studiul suspensiei automobilului	23	6	1417
BELEŞ A. A., SOARE M., Deformaţiile mari ale paraboloidului hiperbolic în şa datorite variaţiilor de temperatură	21	2	297
BIŢĂ OLGA, DINCĂ I., Asupra influenţei viscozităţii în lubrificaţia la sarcini ridicate	21	2	467
BOICU N., Influenţa asimetriei flancului asupra contactului elastic al roţilor dinţate	21	2	417
BUGAJEWSKI E., Asupra trenurilor diferenţiale şi a folosirii lor în legătură cu variatoarele de viteză	21	2	395
CARAFOLI E., Aplicarea mişcărilor cvasiconice la teoria aripii delta cu bordurile de atac curbe	23	6	1483
CARAFOLI E., BERBENTE C., Determinarea presiunilor şi caracteristicilor aerodinamice ale aripilor delta în curent supersonic-hipersonic moderat	22	3	647
CARAFOLI E., MATEESCU DAN, Mişcarea oscilatorie armonică a sistemului aripă-fuzelaj conic în regim supersonic	23	5	1343
CARAFOLI E., NĂSTASE ADRIANA, Forma optimă a aripii cruciforme de grosime simetrică în curent supersonic	23	6	1455
CARAFOLI E., PANTAZOPOL D., Devierea unui curent supersonic plan-paralel cu ajutorul unei pînze de jet subţiri	22	4	945
CARAFOLI E., STAICU ŞT., Asupra teoriei aripii delta subţiri cu separaţia curentului la bordurile de atac	22	4	989
CARAFOLI E., STAICU ŞT., Aripa delta subţire antisimetrică cu separaţia curentului la bordurile de atac	23	6	1441
CĂMĂRĂŞESCU N., Vizualizarea jeturilor fluide laterale	21	2	521
CERNĂTESCU A., UNGUREANU N., Radiere pe piloţi determinarea eforturilor în dală şi piloţi	23	5	1315
CONSTANTINESCU V. N., GĂLEŢUŞE S., Studiul lubrificaţiei turbulente folosind ipoteza lungimii de amestec cu o variaţie parabolică după normală la stratul de lubrifiant	21	2	445
CONSTANTINESCU V. N., Asupra lubrificaţiei magneto-gazodinamice	22	4	1011
CRAIFALEANU T., Vibraţii transversale ale barelor în rotaţie solicitate la efort axial şi la răsucire	21	2	377
DECIU E. D., Unele contribuţii la analogia hidrodinamică a laminării	22	4	931
DUDIŢĂ FL., Transmisii cardanice sincrone	21	1	139
FLORIAN V., Contribuţii privind calculul diafragmelor cu goluri, al diafragmelor cuplate şi al cadrelor-diafragme. II	21	1	169

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 23 NR. 6 P. 1499–1502 BUCUREŞTI 1966

	Tomul	Nr.	Pag.
GHEORGHIU AL., PACOSTE C., Stabilirea directă a ordinii de formare a articulaţiilor plastice la cadre încărcate cu sarcini proporţionale	22	4	1081
GHEORGHIU V., NICOARĂ T., Contribuţii teoretice şi experimentale la dimensionarea hidraulică a golirilor Venturi pentru baraje	21	2	509
HACKER T., Unele probleme neclasice ale stabilităţii zborului	21	2	531
HACKER T., Asupra problemei comenzilor optimale ale avioanelor cu decolare şi aterizare la verticală	22	3	699
HOFFMANN V., DRĂGHICI I., VEŞTEMEANU N., EPUREANU MARIA, Cercetări privind starea termică a amortizoarelor hidraulice telescopice	23	6	1427
IANCU C., Scurgerea unui fluid perfect, cu greutate, dintr-un rezervor cilindric printr-un orificiu de fund	22	4	909
IFRIM M., LARIONESCU S., Aplicarea teoriei grafurilor la calculul pulsaţiei fundamentale de vibraţie a structurilor elastice	22	4	1099
ILIUC I., Aspecte ale frecării în regim-limită studiate pe un cuplu cu trei contacte liniare	22	3	755
LIBRESCU L., Problema termoelastică a învelitorilor şi plăcilor abordată prin eliminarea ipotezei Love-Kirchhoff	21	2	351
MANGERON D., KRIVOŞEIN L. E., Noi metode de calcul numeric al soluţiilor diferitelor sisteme integrodiferenţiale interesînd mecanica aplicată. III. Probleme de contur pentru ecuaţii integrodiferenţiale cu operatori calorici şi cu argument întîrziat	21	1	31
MANEA GH., PASCOVICI M., Particularităţi ale cuzineţilor din poliamide cu privire la efectul tehnologiei de fabricaţie şi la comportarea termică a lor sub aspectul cîmpului de temperatură în film	23	6	1395
MARINESCU AL., Asupra stabilităţii dinamice a rachetelor	21	1	271
MATEESCU DAN, Scurgerea supersonică în jurul aripilor poligonale subţiri şi de grosime simetrică	22	3	675
MATEESCU DAN, Caracteristicile aerodinamice ale aripilor poligonale de grosime simetrică în regim supersonic	22	4	959
MIHĂILESCU M., IACOB CR., COMBIESCU G., ZGURĂ M., Calculul operaţional aplicat la reţele de grinzi	23	5	1223
ORLOVSCHI N., Unele probleme de modelare electrică a sistemelor de bare.	22	4	1111
OROVEANU T., Asupra unei clase de scurgeri prin mediile poroase cu permeabilitate variabilă	22	3	745
PANĂ TOMA, Efectul împiedicării deplanării asupra pulsaţiilor proprii de răsucire la barele cu pereţi subţiri avînd profilul închis	21	2	367
PASCAL H., Curgerea unui fluid bifazic printr-un mediu poros în regim tranzitoriu	21	2	485
PÂRVULESCU NICOLAE S., Buclarea multiplă a garniturii de foraj	21	1	209
PETCU V., Mecanisme de rupere exacte şi aproximative în calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat	22	3	781
PETCU V., Calculul plastic al structurilor de oţel pe baza concepţiei stărilor limită	23	5	1257
PELECUDI CHR., Studiul sistemelor plane de corpuri cu legături prin metoda acceleraţiilor compuse	21	1	103
PELECUDI CHR., SAVA I., Asupra analizei şi sintezei unitare a mecanismelor cu cuple superioare	22	3	831
PELECUDI CHR., SAVA I., Legile generale ale mecanismelor cu came	22	4	1039
POLÁŠEK J., Profil de aripă în scurgere neomogenă	21	2	549
POPESCU I. L., Asupra teoriei hidrodinamice a reţelelor de profile	23	6	1473
SANDI H., Asupra siguranţei structurilor supuse încărcărilor temporare	23	5	1203
SĂVULESCU ST.N., PETRU I., Cercetări teoretice şi experimentale asupra stratului-limită tranziţional pe extradosul unui profil de aripă la numere Reynolds subcritice şi critice	21	1	51

	Tomul	Nr.	Pag.
SĂVULESCU ŞT. N., Consideraţii asupra apariţiei variaţiilor bruşte de viteză în diferite scurgeri tranziţionale	23	5	1325
SILAŞ GH., KLEPP H. J., Metoda aproximativă pentru studiul vibraţiilor neliniare conservative	23	3	767
SOARE M., SIMONICI M., Aplicarea metodelor variaţionale pentru determinarea frecvenţelor vibraţiilor transversale ale grinzilor cu secţiune variabilă	23	5	1243
STĂNCULESCU GEORGETA, IONESCU MARIANA, Studiu statistic al distanţei dintre fisuri şi al deschiderii lor la elemente încovoiate de beton armat	21	1	219
STĂNCULESCU GEORGETA, IONESCU MARIANA, VĂDUVA I, Studiul statistic al deschiderii fisurilor la elemente din beton armat	23	5	1181
STOICESCU AUREL P., În legătură cu influenţa „rezervei de stabilitate statică" asupra stabilităţii automobilului frînat	21	2	597
SZÉKELY I., MUREŞAN T., Regimuri de funcţionare ale mecanismelor cu elemente rigide multipoziţionale	22	3	853
ŞIDLOVSKI V. P., Despre formularea problemelor în teoria scurgerii, în jurul corpurilor încărcate electric, a unui curent de gaz ionizat foarte rarefiat	22	3	693
TEODORESCU P. P., Asupra unei probleme plane clasice a teoriei elasticităţii	21	2	323
TEODORESCU P. P., Asupra calculului sfertului de spaţiu elastic	23	5	1283
TEODOSIU C., Determinarea tensiunilor şi a cuplurilor de tensiuni generate de dislocaţii în medii izotrope	21	1	189
TIPEI N., PASCAL H., Efectele micro- şi macro-geometriei suprafeţelor asupra presiunii în lubrificaţia tridimensională. I. Suprafeţe plane	22	3	721
TIPEI N., NICA AL., Cîmpul de temperaturi în stratul lubrifiant al lagărelor cu alunecare	21	2	427
VASILCA GH., Aspecte experimentale ale unor parametri de lubrificare	21	1	71
VASILCA GH., Unele influenţe ale procesului de alunecare asupra suprafeţelor metalice. I. Suprafeţe stanate	22	3	731
VLAD I., NESTORESCU D. N., Studiul analitic al sistemelor de reglare extremală pentru avansul sapei în cazul forajului cu turbina la adîncimi mari	22	3	805

NOTE

CONSTANTINESCU I. N., DARABONT A. V., Eforturile dinamice în cablurile instalaţiilor de extracţie cu roata motoare în regim tranzitoriu	21	2	615
MARINOV R., Asupra vibraţiilor unui sistem cu masă concentrată, ţinînd cont de excentricitatea mesei faţă de centrul elastic	22	4	1125

REFERATE ŞTIINŢIFICE

NICA AL., Asupra bazelor fizice ale proceselor de frecare şi ungere. I. Frecarea uscată	21	2	619
NICA AL., Asupra bazelor fizice ale proceselor de frecare şi ungere. II. Ungerea cu lubrifianţi solizi	22	4	1163

	Tomul	Nr.	Pag.
PAVELESCU DAN, Metode de calcul la uzură și utilizarea în construcția de mașini	22	3	861
PAVELESCU DAN, Cu privire la aparatura destinată studiilor de frecare și uzură	22	4	1133

DIN ISTORIA ȘTIINȚEI ȘI TEHNICII ROMÂNEȘTI

VÂLCOVICI VICTOR, Spiru Haret-profesor	21	2	631

MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE

RUSU OLIVIU, al III-lea Congres internațional asupra metodelor experimentale de analiză a tensiunilor, Berlin, 28—31 martie 1966	23	6	1491

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.
- Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expune stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române sau străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt:
- Astrodinamica (optimizarea traiectorilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanică generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilite, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul „16 Februarie".